고정점 반복법(Fixed Point Iteration)은 비선형 방정식 $f(x) = 0$의 근을 찾기 위한 수치 해석 방법 중 하나입니다. 이 방법은 방정식을 고정점 방정식 $x = g(x)$로 변환하고, 반복 과정을 통해 근에 수렴하는 점을 찾는 방법입니다.

고정점 반복법의 기본 아이디어

1. **방정식 변환:**

- 주어진 방정식 $f(x) = 0$을 고정점 방정식 $x = g(x)$ 형태로 변환합니다. 여기서 $g(x)$는 연속 함수이며, 우리가 찾고자 하는 근은 $x = g(x)$를 만족하는 값입니다.

1. **반복 과정:**

- 임의의 초기 추정치 x_0를 선택하고, 반복적으로 다음과 같은 식을 사용하여 새로운 추정치 x_{n+1}를 계산합니다.

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

- 이 과정을 반복하여 x_n이 $x = g(x)$에 수렴하도록 합니다.

수렴 조건

고정점 반복법이 수렴하기 위해서는 $g(x)$ 함수가 특정 구간 내에서 다음과 같은 조건을 만족해야 합니다:

1. **함수의 연속성:**

- $g(x)$는 연속 함수여야 합니다.

1. **함수의 기울기 조건:**

- 구간 $[a, b]$에서 $g'(x)| < 1$을 만족해야 합니다. 즉, $g(x)$의 기울기가 1보다 작아야 합니다.
- 이 조건을 만족하면, $g(x)$는 수렴하는 반복 과정을 가질 수 있습니다.

고정점 반복법의 장점과 단점

- **장점:**
- 구현이 간단하고 계산이 비교적 빠릅니다.
- 초기 추정치에 따라 수렴 속도가 빠를 수 있습니다.
- **단점:**
- 모든 함수가 고정점 반복법을 통해 수렴하는 것은 아닙니다.
- 적절한 $g(x)$를 선택하는 것이 어렵고, $|g'(x)| < 1$ 조건을 항상 만족시키는$g(x)$를 찾기 어려울 수 있습니다.
- 수렴 속도가 느릴 수 있으며, 발산할 수도 있습니다.

예제 설명주어진 예제

- 방정식 $f(x) = e^{-x} - x$의 근을 찾는 문제입니다.

- 이 방정식을 고정점 방정식으로 변환하면: $x = g(x) = e^{-x}$
- 이때, 함수 $g(x) = e^{-x}$를 사용하여 반복적으로 근을 추정합니다.

알고리즘

1. 초기화:

- 초기 추정치 x_0를 선택합니다.
- 이 예제에서는 $x_0 = 1$을 사용합니다.

1. 반복:

- 새로운 추정치x_{n+1}을 다음과 같이 계산합니다:

$$x_{n+1} = e^{-x_n}$$

- 이 과정을 반복하여 근에 수렴합니다.

1. 오차 계산:

- 각 반복 단계에서 상대 오차 ϵ_a와 참 상대 오차 ϵ_t를 계산하여 수렴 여부를 확인합니다.
- 상대 오차는 $\epsilon_a = \left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}}\right| \times 100\%$로 계산됩니다.

1. 수렴 조건:

- 상대 오차가 허용 오차(예제에서는 0.5%)보다 작아지거나, 최대 반복 횟수에 도달하면 반복을 종료합니다.

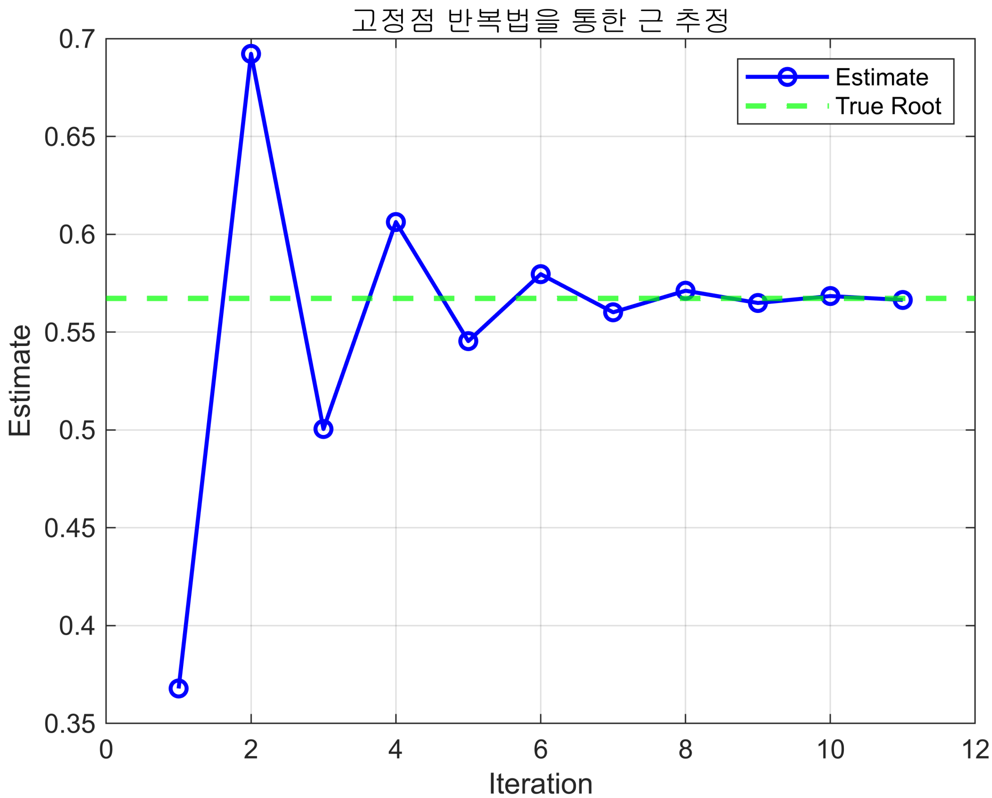
```
function NA6_1_FixedPoint(x)
    % 함수 정의 및 초기 설정
    func = @(x) exp(-x);
    err_s = 0.5e-2;
    x_true = 0.56714329; % 실제 근 (참값)
    x_new = x;
    iter = 0;

    % 추정치와 오차를 저장할 배열
    xr_values = [];
    error_a_values = [];
    error_t_values = [];

    % 고정점 반복법 수행
    while true
        iter = iter + 1;
        x_old = x_new;
```

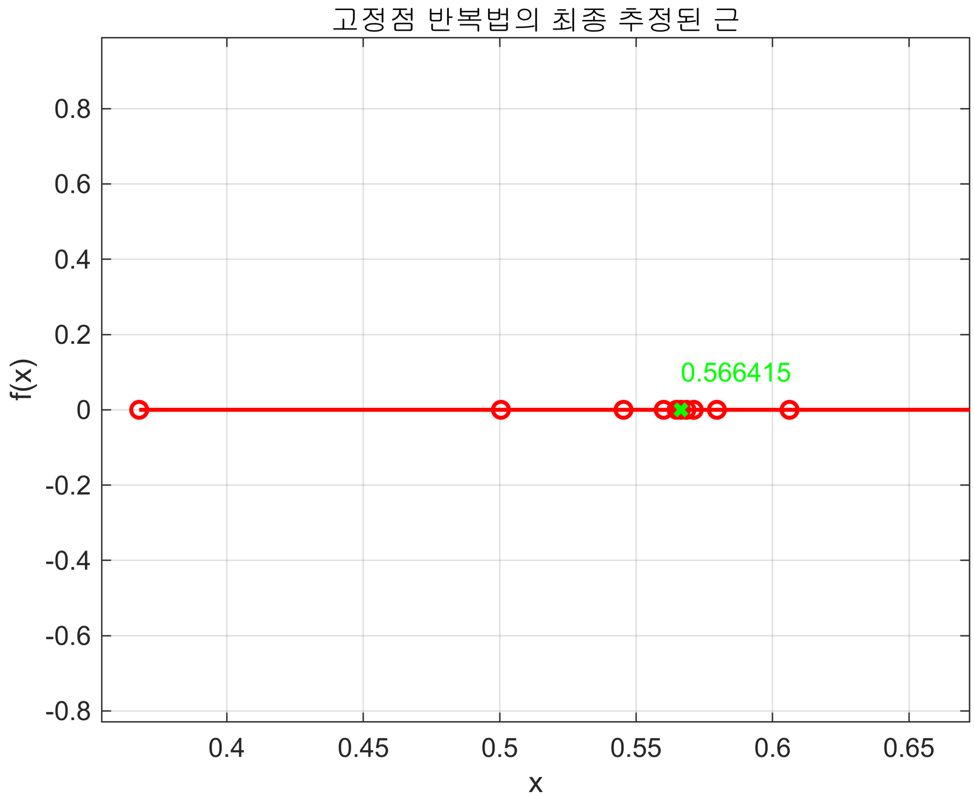
```
        x_new = func(x_new);

        % 추정치 저장
        xr_values = [xr_values, x_new];

        % 상대 오차 계산
        err_a = abs((x_new - x_old) / (x_new));
        err_t = abs((x_new - x_true) / (x_true)); % 참 상대 오차
        error_a_values = [error_a_values, err_a * 100]; % 상대 오차 저장
        error_t_values = [error_t_values, err_t * 100]; % 참 상대 오차 저장

        % 출력
        fprintf('Iter: %d, root: %.6f, ε_a: %.4f %%, ε_t: %.4f %%\n', iter, x_new,
err_a*100, err_t*100);

        % 허용 오차 확인
        if (err_a <= err_s), break; end
        if iter >= 20, break; end
    end

    % 결과 표 출력
    T = table((1:iter)', xr_values', error_a_values', error_t_values',
'VariableNames', {'Iteration', 'Estimate', 'RelativeError', 'TrueRelativeError'});
    disp(T);

    % 시각화
    figure;
    plot(1:iter, xr_values, 'b-o', 'LineWidth', 1.5); % 추정된 근의 변화
    hold on;
    yline(x_true, 'g--', 'LineWidth', 2); % 실제 근 표시
    xlabel('Iteration');
    ylabel('Estimate');
    title('고정점 반복법을 통한 근 추정');
    legend('Estimate', 'True Root');
    grid on;

    % 근 값을 표시
    figure;
    plot(xr_values, zeros(size(xr_values)), 'ro-', 'LineWidth', 1.5);
    hold on;
    scatter(xr_values(end), 0, 'gx', 'LineWidth', 2); % 최종 추정된 근 표시
    text(xr_values(end), 0.1, sprintf('%.6f', xr_values(end)), 'Color', 'green',
'FontSize', 10); % 근 값 표시
    xlabel('x');
    ylabel('f(x)');
    title('고정점 반복법의 최종 추정된 근');
    grid on;
end
```

```
% 초기 값 설정 및 고정점 반복법 실행
NA6_1_FixedPoint(1);
```

```
Iter: 1, root: 0.367879, ε_a: 171.8282 %, ε_t: 35.1347 %
Iter: 2, root: 0.692201, ε_a: 46.8536 %, ε_t: 22.0504 %
Iter: 3, root: 0.500474, ε_a: 38.3091 %, ε_t: 11.7554 %
Iter: 4, root: 0.606244, ε_a: 17.4468 %, ε_t: 6.8942 %
Iter: 5, root: 0.545396, ε_a: 11.1566 %, ε_t: 3.8346 %
Iter: 6, root: 0.579612, ε_a: 5.9034 %, ε_t: 2.1986 %
Iter: 7, root: 0.560115, ε_a: 3.4809 %, ε_t: 1.2392 %
Iter: 8, root: 0.571143, ε_a: 1.9308 %, ε_t: 0.7053 %
Iter: 9, root: 0.564879, ε_a: 1.1089 %, ε_t: 0.3992 %
Iter: 10, root: 0.568429, ε_a: 0.6244 %, ε_t: 0.2267 %
Iter: 11, root: 0.566415, ε_a: 0.3556 %, ε_t: 0.1285 %
```

Iteration	Estimate	RelativeError	TrueRelativeError
1	0.36788	171.83	35.135
2	0.6922	46.854	22.05
3	0.50047	38.309	11.755
4	0.60624	17.447	6.8942
5	0.5454	11.157	3.8346
6	0.57961	5.9034	2.1986
7	0.56012	3.4809	1.2392
8	0.57114	1.9308	0.70526
9	0.56488	1.1089	0.39918
10	0.56843	0.62442	0.22665
11	0.56641	0.35557	0.12846





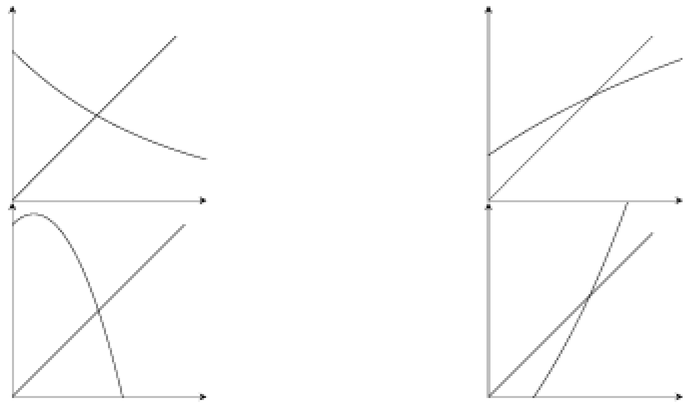
MATLAB 코드 요약

- 함수 `NA6_1_FixedPoint`는 위 알고리즘을 MATLAB으로 구현한 것입니다.
- 주어진 $g(x) = e^{-x}$에 대해 반복적으로 추정치를 계산하고, 각 반복에서 추정된 근과 상대 오차를 출력합니다.
- 결과를 표로 나타내고, 최종 추정된 근을 그래프로 시각화합니다.

수렴의 시각화

- 그래프에서 $x = g(x)$의 교차점을 찾아가는 과정을 시각화할 수 있습니다.
- 반복 과정에서 x_n이 $x = g(x)$에 점점 가까워지는 과정을 보여줍니다.

6.2 고정점 반복법의 수렴



고정점 반복법의 수렴에 대한 수식

1. **고정점 반복식과 오차 정의:**

- 고정점 반복법은 다음과 같이 정의됩니다:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

- x_{n+1}와 x_n 사이의 오차는 다음과 같습니다:

$$x_{n+1} - x_r = g(x_n) - g(x_r)$$

여기서 xrx_rxr은 실제 고정점(근)입니다.

1. **평균값 정리의 적용:**

- $g(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이라면 평균값 정리에 의해 다음과 같은 관계를 만족하는 ξ가 존재합니다:

$$g'(\xi) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

- 이를 이용하여 오차 식을 전개하면:

$$x_{n+1} - x_r = g'(\xi)(x_n - x_r)$$

- 즉, 반복 과정에서 오차 E_{n+1}와 이전 오차 E_n 사이의 관계는 다음과 같이 표현할 수 있습니다:

$$E_{n+1} = g'(\xi)E_n$$

수렴 조건

- 고정점 반복법이 수렴하기 위해서는 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족해야 합니다:
- **감소일 때:** $|g'(x)| < 1$

- **증가일 때:** $|g'(x)| > 1$
- **조건 의미:**
- $|g'(x)| < 1$: $g(x)$의 기울기가 1보다 작아야 합니다. 이 경우, 반복 과정을 통해 x_n이 점차 고정점 x_r에 가까워지게 됩니다. 이로 인해 수렴이 발생합니다.
- $g'(x)| > 1$: 이 경우 수렴하지 않고 발산하게 됩니다. 이때 고정점 반복법은 해당 방정식의 근을 찾기에 적합하지 않습니다.

수렴의 선형성

- 고정점 반복법은 수렴할 때 이전 단계의 오차에 비례하여 작아지는 선형 수렴을 나타냅니다.
- 즉, 수렴 과정에서 오차가 선형적으로 감소합니다.
- 수렴 속도는 $|g'(x)|$의 크기에 따라 결정되며, $|g'(x)|$가 작을수록 빠르게 수렴합니다.

1. 왼쪽 상단 그래프

- **설명:**
- 이 그래프는 $g(x)$ 함수가 x 축과 만나면서 점점 수렴하는 경우를 보여줍니다.
- $g(x)$의 기울기 $|g'(x)|$가 1보다 작을 때 수렴합니다.
- 이때, 함수 $g(x)$와 $y = x$가 만나는 교점이 고정점입니다.
- 초기 추정치에서 시작하여 $x_{n+1} = g(x_n)$을 반복하면 점점 고정점에 가까워집니다.
- **수렴 조건:**
- 이 경우는 $|g'(x)| < 1$인 경우에 해당하며, 반복적으로 고정점으로 수렴합니다.

2. 오른쪽 상단 그래프

- **설명:**
- 이 그래프는 $g(x)$의 기울기가 양수이지만, 1보다 작은 경우를 보여줍니다.
- $g(x)$는 증가 함수이고, $g(x)$와 $y = x$가 교차하는 지점이 고정점입니다.
- 이 경우에도 수렴하며, 반복적으로 근에 가까워집니다.
- **수렴 조건:**
- $0 < g'(x) < 1$인 경우로, 이때 역시 수렴합니다.
- 반복 과정을 통해 고정점에 점점 가까워집니다.

3. 왼쪽 하단 그래프

- **설명:**
- 이 그래프는$g(x)$의 기울기가 음수이며, 1보다 작은 경우를 보여줍니다.
- $g(x)$와 $y = x$의 교점이 고정점이지만, 이 경우는 발산하지 않고 수렴합니다.
- 이 경우, 반복적으로 근에 가까워지는 모습을 보여줍니다.
- **수렴 조건:**
- $-1 < g'(x) < 0$인 경우로, 이때 역시 수렴하며, 고정점에 가까워집니다.

4. 오른쪽 하단 그래프

- **설명:**
- 이 그래프는 $g(x)$의 기울기가 1보다 큰 경우를 보여줍니다.
- g(x)g(x)g(x)와 $y = x$가 교차하는 지점이 고정점이지만, 기울기가 1보다 크기 때문에 발산합니다.
- 반복 과정에서 x_n이 고정점에서 멀어지는 발산이 발생합니다.
- **수렴 조건 위반:**
- 이 경우는 $|g'(x)| > 1$인 경우에 해당하며, 발산합니다.
- 따라서 이 경우에는 고정점 반복법을 사용하여 근을 찾을 수 없습니다.