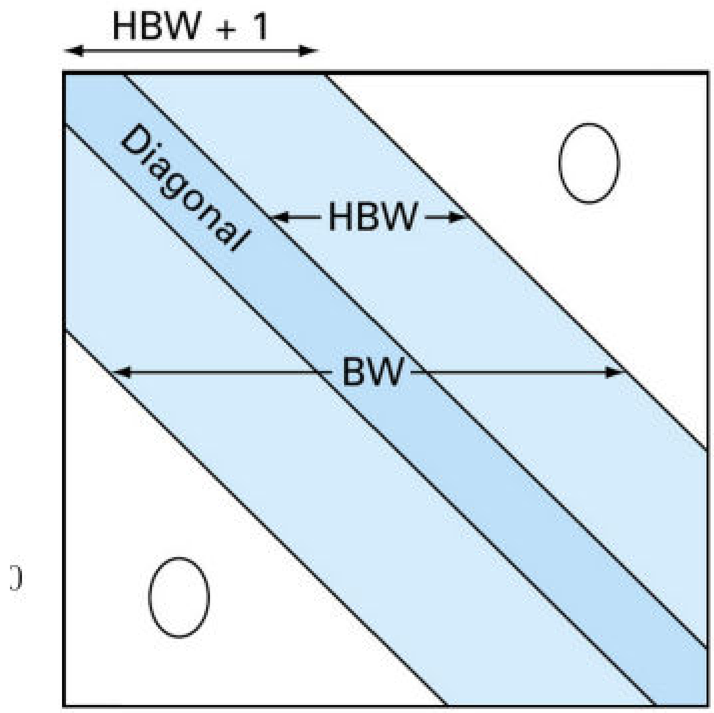
16.1 특수 행렬



- **띠행렬 (banded matrix)**:띠행렬은 대각선을 중심으로 특정 범위 이내의 원소들만 값을 가지며, 그 외의 요소는 모두 0인 행렬입니다. 예시로 주어진 행렬은 다음과 같습니다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

- **대역폭 (BW, Band Width)**:대각선을 기준으로 원소들이 값을 가지는 범위를 대역폭이라고 하며, 이는 $BW = 2 * HBW + 1$로 계산됩니다. HBW는 반대역폭(Half-BW)으로, 대각선으로부터 떨어진 행렬 요소의 최대 거리를 의미합니다.
- **대각행렬**:대각선을 제외한 나머지 원소가 모두 0인 행렬입니다.
- **효율적인 분해 방법**:띠행렬과 같은 특수 행렬의 경우, 일반적인 행렬 분해보다 Gauss 소거법이나 LU 분해를 사용하는 것이 더 효율적입니다. 이는 띠행렬에서 많은 원소들이 0이기 때문에 계산량이 줄어들기 때문입니다.

16.2 Thomas 알고리즘

Thomas 알고리즘은 **삼중 대각 시스템**에 대해 특화된 알고리즘입니다. 이는 대각선과 그 인접한 두 개의 대각선에만 값이 있는 삼중 대각 시스템을 해결하는데 사용됩니다.

알고리즘 절차**:**

1. 분해 단계:

$$e_k = e_k / f_{k-1}, \quad f_k = f_k - e_k * g_{k-1}$$

- 여기서, e_k, f_k, g_k는 시스템에서 사용되는 행렬 요소들입니다.

1. 전진 대입 **(Forward Substitution)**:

$$r_k = r_k - e_k * r_{k-1}$$

- 전진 대입 단계에서는 이전 단계의 값을 참조하여 행렬을 해결합니다.

1. 후진 대입 **(Backward Substitution)**:

$$x_k = \frac{r_k}{f_k}, \quad x_k = (r_k - g_k * x_{k+1}) / f_k$$

- 후진 대입 단계에서 최종적으로 변수들을 계산하여 결과를 도출합니다.

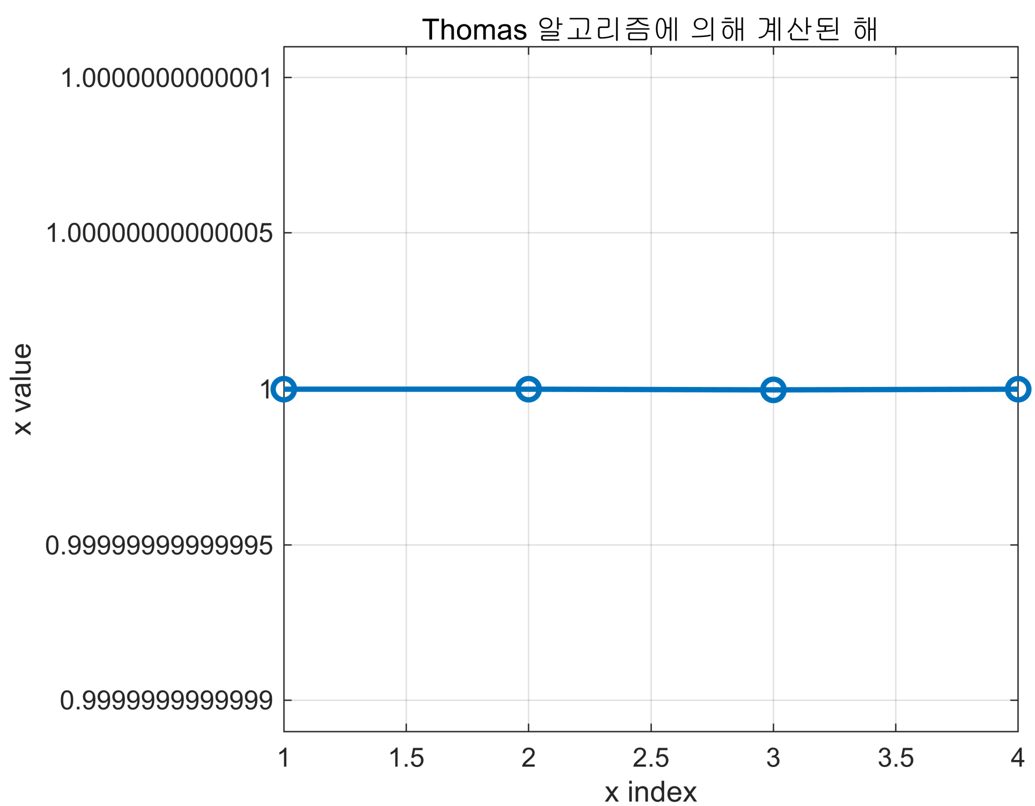
이 알고리즘은 계산 비용이 삼중 대각 행렬의 구조를 고려해 효율적으로 이루어지며, 대규모 시스템에서도 유용하게 사용할 수 있습니다.

```
function x = thomas_algorithm(a, b, c, d)
    % a: 아래 대각선의 원소들 (n-1개의 원소)
    % b: 대각선 원소들 (n개의 원소)
    % c: 위 대각선의 원소들 (n-1개의 원소)
    % d: 우변 벡터 (n개의 원소)

    n = length(b);  % 행렬의 크기

    % 전진 대입 (Forward Elimination)
    for i = 2:n
        w = a(i-1) / b(i-1);
        b(i) = b(i) - w * c(i-1);
        d(i) = d(i) - w * d(i-1);
    end

    % 후진 대입 (Backward Substitution)
    x = zeros(n, 1);  % 결과 벡터 초기화
    x(n) = d(n) / b(n);  % 마지막 값 계산

    for i = n-1:-1:1
        x(i) = (d(i) - c(i) * x(i+1)) / b(i);
    end

    % 결과 출력
    disp('해결된 x 값:');
    disp(x);

    % 결과 시각화
```

```
    figure;
    plot(1:n, x, '-o', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 8);
    title('Thomas 알고리즘에 의해 계산된 해');
    xlabel('x index');
    ylabel('x value');
    grid on;
end
```

```
a = [-1, -1, -1];  % 아래 대각선
b = [2, 2, 2, 2];  % 주 대각선
c = [-1, -1, -1];  % 위 대각선
d = [1; 0; 0; 1];  % 우변 벡터

x = thomas_algorithm(a, b, c, d);
```

```
해결된 x 값:
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
```




```
disp(x);
```

```
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
```

문제

주어진 삼중대각 행렬은 다음과 같습니다:

$$\begin{bmatrix} 2.04 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2.04 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2.04 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2.04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40.8 \\ 0.8 \\ 0.8 \\ 200.8 \end{bmatrix}$$

이는 삼중대각 행렬 시스템을 나타냅니다. 여기서 Thomas 알고리즘이나 LU 분해를 사용하여 해를 구할 수 있습니다.

LU 분해 과정 설명

1. **LU 분해 정의**: 주어진 삼중대각 행렬을 두 개의 행렬 L (하삼각행렬)과 U (상삼각행렬)로 분해하는 과정입니다.

$$A = LU$$

1. **행렬 요소 분해**: 각 단계에서 L과 U 행렬의 요소를 차례로 계산해 나갑니다.

계산 과정:

- **1단계**:e_2는 두 번째 행의 첫 번째 요소를 나누어 계산됩니다.

$$e_2 = \frac{-1}{2.04} = -0.49$$

- f_2는 두 번째 행의 대각선 요소에서 앞서 계산한 e_2와 이전 행을 고려하여 계산됩니다.

$$f_2 = 2.04 - (-0.49)(-1) = 1.550$$

- **2단계**:마찬가지로 e_3와 f_3를 계산합니다.

$$e_3 = \frac{-1}{1.550} = -0.645$$

$$f_3 = 2.04 - (-0.645)(-1) = 1.395$$

- **3단계**:마지막으로 e_4와 f_4를 계산합니다.

$$e_4 = \frac{-1}{1.395} = -0.717$$

$$f_4 = 2.04 - (-0.717)(-1) = 1.323$$

이 계산을 통해 A 행렬을 L과 U로 분해할 수 있습니다. 분해된 행렬은 아래와 같습니다:

- **L 행렬** (하삼각행렬):

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.49 & 1 & 0 & 0 \\ -0.645 & 0 & 1 & 0 \\ -0.717 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **U 행렬** (상삼각행렬):

$$U = \begin{bmatrix} 2.04 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.550 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.395 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1.323 \end{bmatrix}$$

Thomas 알고리즘 적용

1. 전진 대입 **(Forward Substitution)**:먼저 L 행렬을 사용하여 중간 값을 계산합니다.

$$r_2 = 0.8 - (-0.49)(40.8) = 20.792$$

$$r_3 = 0.8 - (-0.645)(20.792) = 14.208$$

$$r_4 = 200.8 - (-0.717)(14.208) = 210.984$$

1. 후진 대입 **(Backward Substitution)**:이제 U 행렬을 사용하여 최종 해를 구합니다.

$$x_4 = \frac{210.984}{1.323} = 159.44$$

$$x_3 = \frac{14.208 - (-1)(159.44)}{1.395} = 124.24$$

$$x_2 = \frac{20.792 - (-1)(124.24)}{1.550} = 93.58$$

$$x_1 = \frac{40.8 - (-1)(93.58)}{2.04} = 65.95$$

최종 해:

$$x_1 = 65.95, \quad x_2 = 93.58, \quad x_3 = 124.24, \quad x_4 = 159.44$$

```
% 주어진 삼중대각 행렬
n = 4;  % 행렬 크기
a = [-1, -1, -1];  % 아래 대각선
b = [2.04, 2.04, 2.04, 2.04];  % 주 대각선
c = [-1, -1, -1];  % 위 대각선
d = [40.8; 0.8; 0.8; 200.8];  % 우변 벡터
```

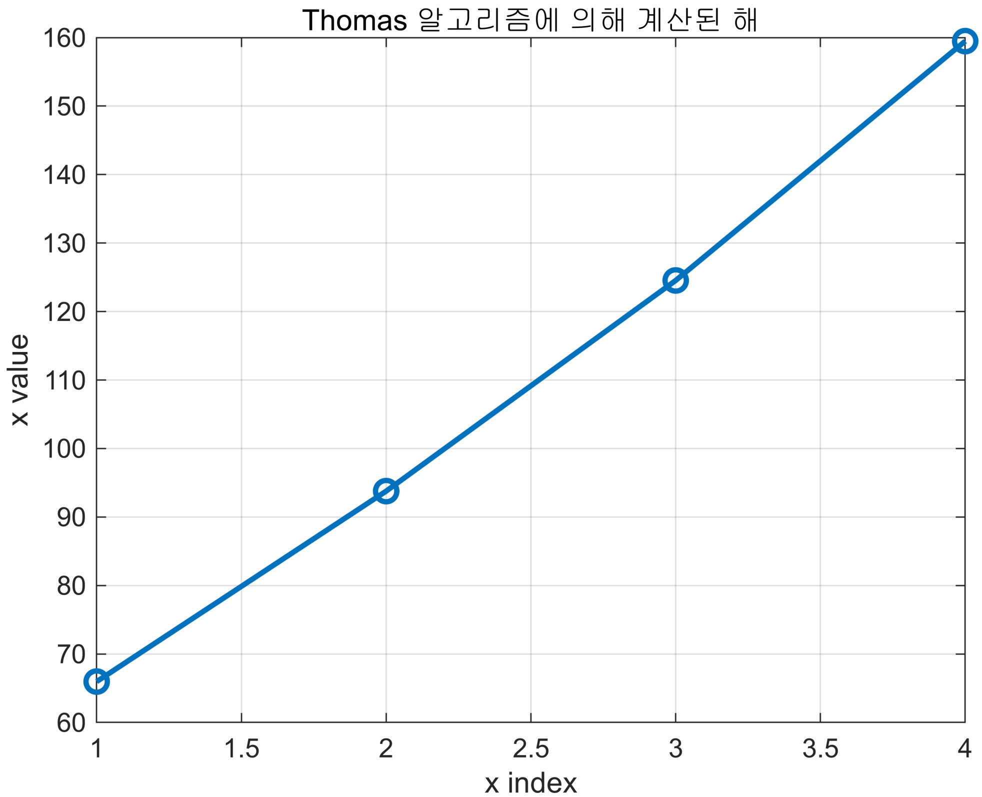
```
% 전진 대입 (Forward Elimination)
for i = 2:n
    m = a(i-1) / b(i-1);
    b(i) = b(i) - m * c(i-1);
    d(i) = d(i) - m * d(i-1);
end

% 후진 대입 (Backward Substitution)
x = zeros(n, 1);
x(n) = d(n) / b(n);

for i = n-1:-1:1
    x(i) = (d(i) - c(i) * x(i+1)) / b(i);
end

% 결과 출력
disp('해결된 x 값:')
```

```
해결된 x 값:
```

```
disp(x)
```

```
   65.9698
   93.7785
  124.5382
  159.4795
```

```
% 시각화
figure;
plot(1:n, x, '-o', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 8);
title('Thomas 알고리즘에 의해 계산된 해');
xlabel('x index');
ylabel('x value');
grid on;
```



전진 대입 (Forward Substitution)

LU 분해를 통해 얻은 하삼각 행렬 L과 우변 벡터 B가 주어졌습니다. 이를 이용해 다음과 같은 관계식이 성립합니다:

$$LU \cdot X = B \implies L \cdot D = B$$

여기서 L은 하삼각 행렬이고, D는 중간 단계의 값을 포함한 벡터입니다. L을 사용하여 먼저 D 값을 계산합니다.

주어진 하삼각 행렬 L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.49 & 1 & 0 & 0 \\ -0.645 & 0 & 1 & 0 \\ -0.717 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이를 전진 대입 공식에 따라 차례대로 해결합니다.

계산 과정:

$$r_2 = 0.8 - (-0.49) \cdot 40.8 = 20.8$$

$$r_3 = 0.8 - (-0.645) \cdot 20.8 = 14.221$$

$$r_4 = 200.8 - (-0.717) \cdot 14.221 = 210.996$$

이 과정을 통해 r_2, r_3, r_4 를 계산하였습니다. 이 값들은 후진 대입에서 사용할 중간 값입니다.

후진 대입 (Backward Substitution)

이제 상삼각 행렬 U와 중간 벡터 r를 사용하여 최종 해 X를 구하는 후진 대입을 수행합니다.

주어진 상삼각 행렬 U:

$$U = \begin{bmatrix} 2.04 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.550 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.395 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1.323 \end{bmatrix}$$

후진 대입 공식:

$$x_k = \frac{r_k - g_k \cdot x_{k+1}}{f_k}$$

이 공식을 이용해 차례로 x_4부터 x_1까지 계산합니다.

계산 과정:

$$x_4 = \frac{210.996}{1.323} = 159.480$$

$$x_3 = \frac{14.221 - (-1) \cdot 159.480}{1.395} = 124.538$$

$$x_2 = \frac{20.800 - (-1) \cdot 124.538}{1.550} = 93.778$$

$$x_1 = \frac{40.800 - (-1) \cdot 93.778}{2.040} = 65.970$$

최종 해:

계산 결과 최종 해는 다음과 같습니다:

$$x_1 = 65.970, \quad x_2 = 93.778, \quad x_3 = 124.538, \quad x_4 = 159.480$$

16.3 Cholesky 분해법

- **대칭행렬**
- 주어진 행렬 A가 대칭행렬인 경우, 즉 $a_{ij} = a_{ji}$인 경우 Cholesky 분해법을 사용할 수 있습니다.대칭행렬은 수학 및 공학 문제에서 자주 발생하며, Cholesky 분해법은 특히 저장 장소가 적고 계산량이 적어 시간 절감의 이점이 큽니다.

- **Cholesky 분해**
- Cholesky 분해는 행렬 A를 다음과 같이 두 개의 행렬 L과 L^T의 곱으로 분해합니다:

$$A = LL^T$$

- 여기서 L은 하삼각행렬이고, L^T는 그 전치행렬입니다.각 요소는 다음과 같이 계산됩니다:
- l_{ki}는 A의 해당 요소에서 L 행렬의 이미 계산된 값을 사용하여 구합니다.

$$l_{ki} = \frac{a_{ki} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj}}{l_{ii}}$$

- 대각선 성분은 다음과 같이 계산됩니다.

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

Cholesky 분해 예시

주어진 대칭행렬 A는 다음과 같습니다:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix}$$

Cholesky 분해를 수행하여 하삼각행렬 L을 구하는 과정입니다. L을 구하는 과정은 다음과 같습니다.

단계별 계산 과정

1. 첫 번째 대각 성분 계산:

$$l_{11} = \sqrt{6} \approx 2.4495$$

1. 첫 번째 열의 나머지 값 계산:

$$l_{21} = \frac{15}{2.4495} \approx 6.1237$$

$$l_{31} = \frac{55}{2.4495} \approx 22.454$$

1. 두 번째 대각 성분 계산:

$$l_{22} = \sqrt{55 - (6.1237)^2} \approx 4.1833$$

1. 두 번째 열의 나머지 값 계산:

$$l_{32} = \frac{225 - 6.1237 \times 22.454}{4.1833} \approx 20.917$$

1. 세 번째 대각 성분 계산:

$$l_{33} = \sqrt{979 - (22.454)^2 - (20.917)^2} \approx 6.1101$$

최종 하삼각행렬 L

따라서, 최종적으로 구한 하삼각 행렬 L은 다음과 같습니다:

$$L = \begin{bmatrix} 2.4495 & 0 & 0 \\ 6.1237 & 4.1833 & 0 \\ 22.454 & 20.917 & 6.1101 \end{bmatrix}$$

이 하삼각 행렬을 사용하여 A를 L과 L^T의 곱으로 분해한 결과는 다음과 같습니다:

$$A = LL^T$$

이로써 Cholesky 분해법을 사용하여 주어진 대칭행렬의 분해를 완료하였습니다.

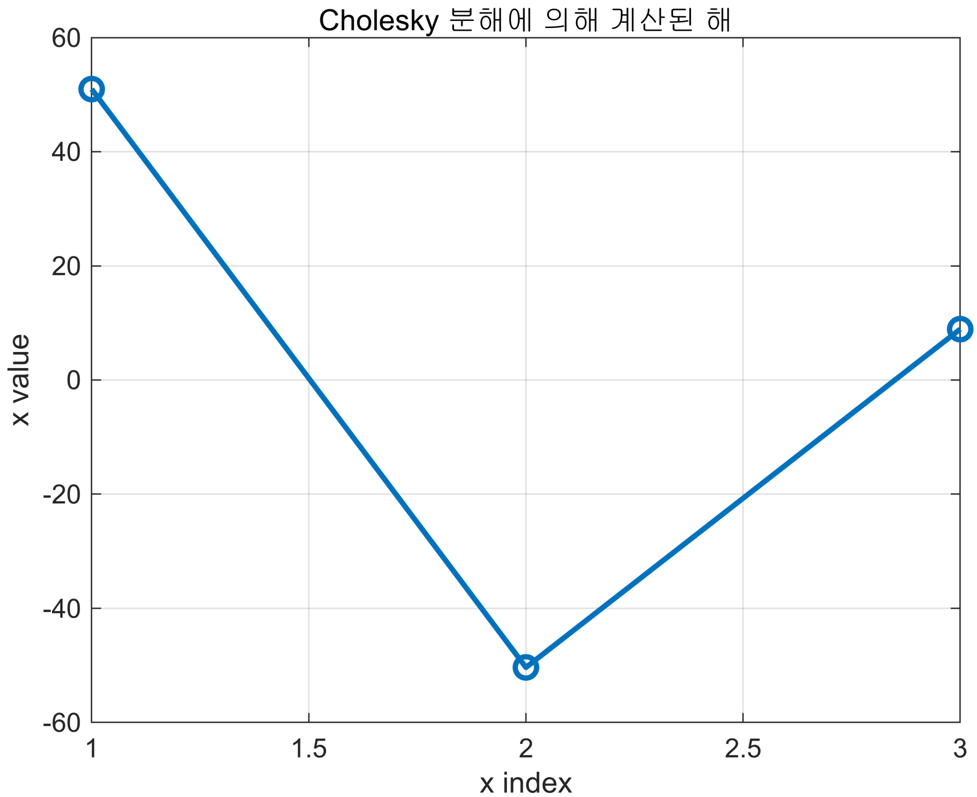
Cholesky 분해의 장점

- 대칭행렬에서만 사용 가능하지만, 대칭 행렬의 성질을 이용해 계산 효율성이 높습니다.
- 특히 저장공간이 적게 들고 계산 과정에서 시간 절약이 가능합니다.

```
function x = cholesky_decomposition_example()
    % 주어진 대칭 행렬 A
    A = [6, 15, 55;
         15, 55, 225;
         55, 225, 979];

    % 우변 벡터 (임의 설정)
    b = [40.8; 0.8; 200.8];

    % 행렬 크기
    n = size(A, 1);

    % 하삼각 행렬 L 계산
    L = zeros(n, n); % L 행렬 초기화

    for i = 1:n
        % 대각 성분 계산
        L(i, i) = sqrt(A(i, i) - sum(L(i, 1:i-1).^2));

        % 비대각 성분 계산
        for j = i+1:n
            L(j, i) = (A(j, i) - sum(L(j, 1:i-1) .* L(i, 1:i-1))) / L(i, i);
        end
    end

    % 전진 대입 (Forward Substitution): L * y = b
    y = zeros(n, 1); % y 초기화
    for i = 1:n
        y(i) = (b(i) - L(i, 1:i-1) * y(1:i-1)) / L(i, i);
    end
```

```
    % 후진 대입 (Backward Substitution): L^T * x = y
    x = zeros(n, 1); % x 초기화
    for i = n:-1:1
        x(i) = (y(i) - L(i+1:n, i)' * x(i+1:n)) / L(i, i);
    end

    % 결과 출력
    disp('Cholesky 분해 후 L 행렬:');
    disp(L);

    disp('해결된 x 값:');
    disp(x);

    % 시각화
    figure;
    plot(1:n, x, '-o', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 8);
    title('Cholesky 분해에 의해 계산된 해');
    xlabel('x index');
    ylabel('x value');
    grid on;
end

% Cholesky 분해 예시 실행
x = cholesky_decomposition_example();
```

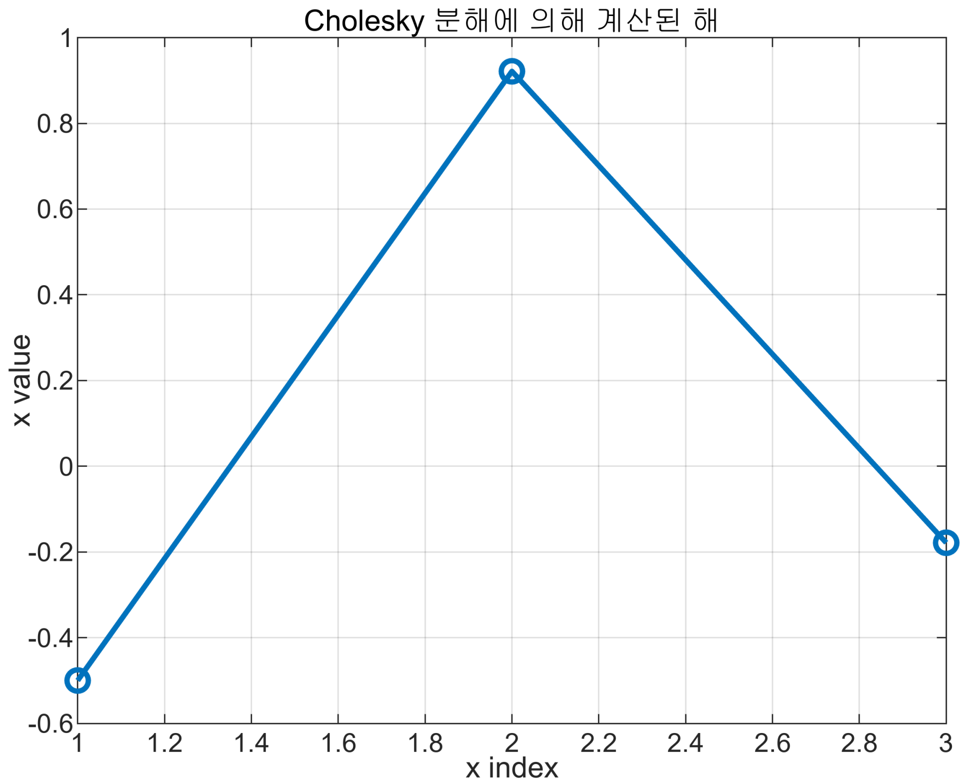
```
Cholesky 분해 후 L 행렬:
    2.4495         0         0
    6.1237    4.1833         0
   22.4537   20.9165    6.1101

해결된 x 값:
   50.9714
  -50.3543
    8.9143
```




```
function x = cholesky_decomposition(A, b)
    % A: 대칭 행렬 (양의 정부호)
    % b: 선형 시스템의 우변 벡터

    % 행렬의 크기
    n = size(A, 1);

    % 하삼각 행렬 L 계산
    L = zeros(n, n); % L 행렬 초기화

    for i = 1:n
        % 대각 성분 계산
        L(i, i) = sqrt(A(i, i) - sum(L(i, 1:i-1).^2));

        % 비대각 성분 계산
        for j = i+1:n
            L(j, i) = (A(j, i) - sum(L(j, 1:i-1) .* L(i, 1:i-1))) / L(i, i);
        end
    end

    % 전진 대입 (Forward Substitution): L * y = b
    y = zeros(n, 1); % y 초기화
    for i = 1:n
```

```
        y(i) = (b(i) - L(i, 1:i-1) * y(1:i-1)) / L(i, i);
    end

    % 후진 대입 (Backward Substitution): L^T * x = y
    x = zeros(n, 1); % x 초기화
    for i = n:-1:1
        x(i) = (y(i) - L(i+1:n, i)' * x(i+1:n)) / L(i, i);
    end

    % 결과 출력
    disp('Cholesky 분해 후 L 행렬:');
    disp(L);

    disp('해결된 x 값:');
    disp(x);

    % 시각화
    figure;
    plot(1:n, x, '-o', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 8);
    title('Cholesky 분해에 의해 계산된 해');
    xlabel('x index');
    ylabel('x value');
    grid on;
end

% 사용 예시
A = [6, 15, 55;
     15, 55, 225;
     55, 225, 979];  % 대칭 행렬 (양의 정부호)
b = [1; 3; 5];  % 우변 벡터

% Cholesky 분해 함수 호출
x = cholesky_decomposition(A, b);
```

```
Cholesky 분해 후 L 행렬:
    2.4495         0         0
    6.1237    4.1833         0
   22.4537   20.9165    6.1101

해결된 x 값:
   -0.5000
    0.9214
   -0.1786
```


Cholesky 분해에 의해 계산된 해
x value
x index
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
2.2
2.4
2.6
2.8
3