행렬 및 연립방정식

생성자	재 재환 김
태그	

- **연립방정식 풀이**:
  여러 개의 방정식을 동시에 만족하는 변수들을 구하는 문제입니다.
- **선형 연립방정식**:
  미지수와 상수들의 선형 결합으로 이루어진 방정식의 연립으로, 일반적인 형태는 다음과 같습니다:$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2\vdots a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$
- **행렬표기법**:
  $n \times m$ 행렬로 연립 방정식을 나타낼 수 있으며, 이는 행(row)과 열(column)로 구성됩니다. 예를 들어, a_{ij}는 행렬의 i번째 행과 j번째 열에 위치한 요소입니다.
- **행벡터와 열벡터**:
  - 행벡터: $1 \times n$ 행렬
  - 열벡터: $n \times 1$ 행렬

1. 행렬의 종류:

- **정사각행렬 (Square matrix)**: $n \times n$ 크기의 행렬
- **대각행렬 (Diagonal matrix)**: 대각선을 제외한 모든 요소가 0인 행렬
- **단위행렬 (Identity matrix)**: 대각선의 모든 요소가 1인 대각행렬
- **대칭행렬 (Symmetric matrix)**: 대각선을 기준으로 대칭인 행렬 (a_ij = a_ji)
- **상부삼각행렬 (Upper triangular matrix)**: 대각선 상부의 모든 요소가 0인 행렬
- **하부삼각행렬 (Lower triangular matrix)**: 대각선 하부의 모든 요소가 0인 행렬
- **띠행렬 (Banded matrix)**: 주 대각선을 중심으로 띠를 제외한 모든 요소가 0인 행렬

각 행렬의 예시가 숫자로 이루어진 행렬 형태로 나와 있으며, 대각행렬, 단위행렬, 대칭행렬 등의 실제 예시가 포함되어 있습니다.

22. 행렬의 덧셈:

행렬의 덧셈은 두 행렬의 같은 위치에 있는 요소끼리 더하는 방식입니다.

예를 들어, 다음 두 행렬을 더한 결과:

[3 2] + [11 14] = [14 16]
[1 4]   [12 13]   [13 17]

1. 행렬의 곱셈:

두 행렬을 곱하는 과정이 설명되어 있습니다.
예시는 다음과 같습니다:

[3 1]   [5 9 1]   [22 29   6]
[8 6] x [7 2 3] = [82 84 26]
[0 4]   [28   8 12]

이는 n × m 행렬과 m × l 행렬을 곱하면 n × l 크기의 행렬이 된다는 것을 나타냅니다.

2. 행렬을 이용한 선형 연립방정식의 표현:

연립방정식을 행렬 형태로 나타내는 방법이 설명되어 있습니다.
연립방정식의 일반적인 형태는:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$
$\vdots$
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$

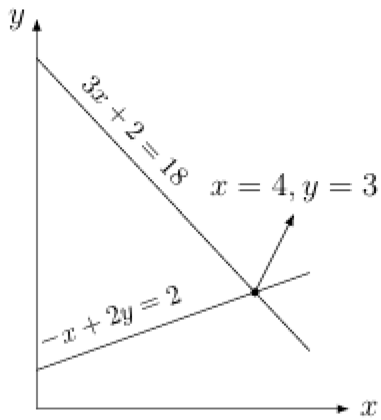
이를 행렬로 표현하면:

$[a_{11}\ \ a_{12}\ \ \cdots\ \ a_{1n}]\ \ [x_1]\ \ [b_1]$
$[a_{21}\ \ a_{22}\ \ \cdots\ \ a_{2n}]\ \ [x_2]\ \ [b_2]$
$[\ \vdots\ \ \ \vdots\ \ \ \ddots\ \ \vdots\ ] \times [\ \vdots\ ] = [\ \vdots\ ]$
$[a_{m1}\ \ a_{m2}\ \ \cdots\ \ a_{mn}]\ \ [x_n]\ \ [b_m]$

1. 선형 연립방정식과 그래프:

- 두 변수 x, y를 축으로 하여 그래프를 그리면, 두 직선이 만나는 점의 좌표값이 해가 됩니다.

$$
\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 18 \\ -x + 2y &= 2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} y = 9 - \dfrac{3}{2}x \\ y = 1 + \dfrac{1}{2}x \end{cases}
$$



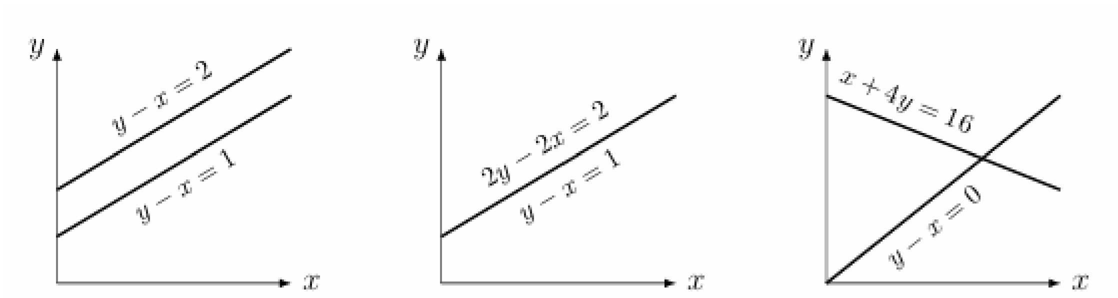
- 예를 들어 다음과 같은 연립방정식이 주어졌을 때:

  $$3x + 2y = 18$$

  $$-x + 2y = 2$$

  이를 해석하여 두 직선의 교점을 찾을 수 있습니다.
  첫 번째 방정식은 y = 9/2 - 3/2x이고, 두 번째 방정식은 y = 1 + 1/2x로 나타낼 수 있습니다.
  이 두 직선을 그래프 상에 그리면, 교차점이 해가 됩니다.

그래프와 연립방정식의 해:



- **해가 존재하지 않을 경우 (불능)**:
  두 직선이 평행하여 교차하지 않으면 해가 존재하지 않음을 의미합니다.
- **해가 무수히 많은 경우 (부정)**:
  두 직선이 일치하는 경우, 즉 같은 직선일 때 해가 무수히 많습니다.
- **유일한 해**:
  두 직선이 한 점에서 교차할 때 유일한 해가 존재합니다.

행렬식:

행렬식(Determinant)은 주어진 정사각행렬에 대해 하나의 수치값을 계산하는 방법으로, 주어진 예시에서는 3 × 3 행렬의 행렬식을 계산하는 과정이 설명되어 있습니다.
예를 들어, 주어진 행렬에 대해:

|1 1 0|
|-1 2 -3|
|2 -3 3|

행렬식을 계산하는 과정은 다음과 같습니다:

$$1 \times (6-3) + 1 \times (3-0) + 0 \times (1-0) = 4$$

이 과정을 통해 행렬식의 값을 4로 계산할 수 있습니다.

Cramer 정리:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \text{-1} & 2 & \text{-1} \\ 2 & \text{-3} & 3 \end{vmatrix} &= +(1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + (2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1\cdot(6-3) + 1\cdot(3-0) + 2\cdot(-1-0) = 4 \\ &= +(1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} - (1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1\cdot(6-3) - 1\cdot(-3+2) = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow AX = B$$

$$D = \det A$$

$$M_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$x_k = \frac{M_k}{D}$$

Cramer 정리는 선형 연립방정식의 해를 행렬식을 이용해 구하는 방법입니다. 주어진 연립방정식 AX = B에서 각 미지수는 두 개의 행렬식의 비율로 표현됩니다.
일반적인 n × n 행렬에서 연립방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있습니다:

$$A \times X = B$$

여기서 A는 계수행렬, X는 미지수 벡터, B는 상수 벡터입니다.

Cramer 정리에 따르면 각 x_k는 다음과 같이 구할 수 있습니다:

$$x_k = M_k/D$$

여기서 D는 행렬 A의 행렬식, M_k는 행렬 A의 k번째 열을 B로 대체한 행렬의 행렬식입니다.

이를 통해, Cramer 정리를 사용하여 선형 연립방정식의 해를 구하는 방법을 알 수 있으며, 특히 행렬식이 0이 아닌 경우에만 이 정리가 적용된다는 것을 유의해야 합니다.

예제 문제:

다음의 선형 연립방정식을 Cramer 정리를 사용하여 풉니다.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$$

$$2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1$$

1. 행렬식 D 계산:

계수 행렬 A의 행렬식을 구합니다.

D = | 1 1 1 |
| 1 2 -1 |
| 2 -3 3 |
= -9

2. 행렬 M_1, M_2, M_3 계산:

- M_1: 첫 번째 열을 상수 벡터로 대체한 행렬의 행렬식

M_1 = | 2 1 1 |
| 3 2 -1 |
| 1 -3 3 |
= -15

- M_2: 두 번째 열을 상수 벡터로 대체한 행렬의 행렬식

M_2 = | 1 2 1 |
| 1 3 -1 |
| 2 1 3 |
= -5

- M_3: 세 번째 열을 상수 벡터로 대체한 행렬의 행렬식

M_3 = | 1 1 2 |
| 1 2 3 |
| 2 -3 1 |
= 2

3. 미지수 x_1, x_2, x_3 계산:

Cramer 정리에 따라 각 미지수는 다음과 같이 계산됩니다.

$$x_1 = M_1/D = (-15)/(-9) = 5/3$$

$$x_2 = M_2/D = (-5)/(-9) = 5/9$$

$$x_3 = M_3/D = 2/(-9) = -2/9$$

결론:

해는 $x_1 = 5/3, x_2 = 5/9, x_3 = -2/9$로 구할 수 있습니다.

예제 문제:

다음의 선형 연립방정식을 미지수 소거법으로 풉니다.

$$3x_1 + 2x_2 = 18$$

$$-x_1 + 2x_2 = 2$$

일반적인 미지수 소거법의 행렬식 표현:

미지수 소거법은 계수 행렬을 이용하여 두 미지수 x_1과 x_2를 다음과 같은 방식으로 구하는 방법입니다:

$$x_1 = (a_{22}b_1 - a_{12}b_2)/(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

$$x_2 = (a_{11}b_2 - a_{21}b_1)/(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

이 방법을 사용하면 방정식의 해를 행렬식으로 표현하여 쉽게 구할 수 있습니다.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{21}b_1 - a_{11}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{array}\right.$$