12장 Gauss 소거법의 문제점

12.1 연립방정식 해 풀기

$$2x_2 + 3x_3 = 8$$

$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 = -3$$

$$2x_1 + x_2 + 6x_3 = 5$$

행렬로 표현:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
% 문제 1: 연립방정식
A = [0 2 3; 4 6 7; 2 1 6]; % 계수 행렬
b = [8; -3; 5]; % 상수 벡터

% Gauss 소거법 적용
n = length(b);
for i = 1:n-1
    for j = i+1:n
        factor = A(j,i) / A(i,i);
        A(j,i:n) = A(j,i:n) - factor * A(i,i:n);
        b(j) = b(j) - factor * b(i);
    end
end

% 후진 대입법 적용
x = zeros(n,1);
x(n) = b(n) / A(n,n);
for i = n-1:-1:1
    x(i) = (b(i) - A(i,i+1:n)*x(i+1:n)) / A(i,i);
end

% 결과 출력
disp('문제 1의 해 (x_1, x_2, x_3):');
```

```
문제 1의 해 (x_1, x_2, x_3):
```

```
disp(x);
```

```
   NaN
   NaN
   NaN
```

문제 1의 해에서 NaN이 나오는 이유는 첫 번째 행렬의 첫 번째 원소가 0이기 때문입니다. Gauss 소거법에서 첫 번째 피벗 값이 0일 경우 소거 작업이 제대로 수행되지 않아 문제가 발생합니다.

(예를 들어 소거법에서는 모든 아래의 행들은 전체 행렬의 첫번째 원소로 그 해당행의 첫번째원소를 나눈값을 곱해서 빼주는 것이기 때문에 분모에 **0**이 들어가면 에러가 납니다.)

이를 해결하기 위해 행을 교환하여 첫 번째 원소가 0이 아닌 행을 맨 위로 올려야 합니다.

(피벗방정식(첫번째 방정식)에 포함된 피벗 요소(첫번째 요소)를 피벗화(교환)한다.)

```
% 문제 1: 연립방정식
A = [0 2 3; 4 6 7; 2 1 6]; % 계수 행렬
b = [8; -3; 5]; % 상수 벡터

% 행 교환 (첫 번째 열의 첫 번째 원소가 0이므로)
if A(1,1) == 0
    A([1 2], :) = A([2 1], :); % 1행과 2행 교환
    b([1 2]) = b([2 1]);       % 상수 벡터에서도 동일하게 교환
end

% Gauss 소거법 적용
n = length(b);
for i = 1:n-1
    for j = i+1:n
        factor = A(j,i) / A(i,i);
        A(j,i:n) = A(j,i:n) - factor * A(i,i:n);
        b(j) = b(j) - factor * b(i);
    end
end

% 후진 대입법 적용
x = zeros(n,1);
x(n) = b(n) / A(n,n);
for i = n-1:-1:1
    x(i) = (b(i) - A(i,i+1:n)*x(i+1:n)) / A(i,i);
end

% 결과 출력
disp('문제 1의 해 (x_1, x_2, x_3):');
```

```
문제 1의 해 (x_1, x_2, x_3):
```

```
disp(x);
```

```
   -5.4318
    0.0455
    2.6364
```

12.2 연립방정식 예제

다음의 연립방정식을 풀어보시오:

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$

$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$

$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$$

행렬 풀이 후 해:

$$(x_1, x_2, x_3) = (3.0000, -2.5000, 7.0000)$$

```
% 문제 2: 연립방정식
A = [3 -0.1 -0.2; 0.1 7 -0.3; 0.3 -0.2 10]; % 계수 행렬
b = [7.85; -19.3; 71.4]; % 상수 벡터

% Gauss 소거법 적용
n = length(b);
for i = 1:n-1
    for j = i+1:n
        factor = A(j,i) / A(i,i);
        A(j,i:n) = A(j,i:n) - factor * A(i,i:n);
        b(j) = b(j) - factor * b(i);
    end
end

% 후진 대입법 적용
x = zeros(n,1);
x(n) = b(n) / A(n,n);
for i = n-1:-1:1
    x(i) = (b(i) - A(i,i+1:n)*x(i+1:n)) / A(i,i);
end

% 결과 출력

disp('문제 2의 해 (x_1, x_2, x_3):');
```

```
문제 2의 해 (x_1, x_2, x_3):
```

```
disp(x);
```

```
   3.000000000000000
  -2.500000000000000
   7.000000000000002
```

format long(소수 15자리 적용)

```
% 문제 2: 연립방정식 풀이 (format long 적용 및 상대 오차 계산)

% 소수점 15자리까지 결과를 표시하도록 설정
```

```
format long

% 계수 행렬과 상수 벡터 정의
A = [3 -0.1 -0.2; 0.1 7 -0.3; 0.3 -0.2 10]; % 계수 행렬
b = [7.85; -19.3; 71.4]; % 상수 벡터

% 실제 해 (true solution) (이미지에 주어진 값)
true_x = [3.0000; -2.5000; 7.0000]; % 이미지에서 주어진 실제 값

n = length(b); % 행렬의 크기

% Gauss 소거법: 부분 피벗화 적용
for i = 1:n-1
    % 부분 피벗화: 현재 열에서 가장 큰 값을 찾고 행을 교환
    [~, maxRow] = max(abs(A(i:n,i))); % 절대값이 가장 큰 행을 찾음
    maxRow = maxRow + i - 1; % 실제 행 위치로 조정
    if maxRow ~= i
        A([i maxRow], :) = A([maxRow i], :); % 행 교환
        b([i maxRow]) = b([maxRow i]);       % 상수 벡터도 교환
    end

    % Gauss 소거법 진행: 상삼각 행렬로 변환
    for j = i+1:n
        factor = A(j,i) / A(i,i);
        A(j,i:n) = A(j,i:n) - factor * A(i,i:n);
        b(j) = b(j) - factor * b(i);
    end
end

% 후진 대입법으로 해 구하기
x = zeros(n,1);
x(n) = b(n) / A(n,n); % 마지막 변수를 구함
for i = n-1:-1:1
    x(i) = (b(i) - A(i,i+1:n)*x(i+1:n)) / A(i,i); % 나머지 변수 계산
end

% 결과 출력
disp('format long을 사용한 문제 2의 해 (x_1, x_2, x_3):');
```

```
format long을 사용한 문제 2의 해 (x_1, x_2, x_3):
```

```
disp(x);
```

```
   3.000000000000000
  -2.500000000000000
   7.000000000000002
```

```

% 상대 오차 계산 (Absolute Relative Error)
relative_error = abs((true_x - x) ./ true_x);

% 상대 오차 출력
```

```
disp('각 변수에 대한 상대 오차:');
```

```
각 변수에 대한 상대 오차:
```

```
disp(relative_error);
```

```
1.0e-15 *

                0
                0
0.253765262771464
```

- **수치 기법에서는 오차가 없으나** 컴퓨터의 반올림 오차로 인해 발생.
- **Gauss 소거법은 이전 결과에 의존하여** 각 단계의 결과값을 계산함.
- 초기 단계에 발생한 오차가 계속해서 전달됨.
- 방정식의 수가 많은 시스템에서는 반올림 오차가 매우 중요함.
- **100**개 **이상의 방정식을 다루는 경우 반올림 오차가 매우 중요해진다고** 알려져 있음.
- **불량 조건 시스템 문제**와도 연결됨.**(민감도와 연결되어 있으며, 민감도가 높으면 안좋은 시스템이다 -> 개떡같이 말해도 찰떡같이 알아들어야 좋은 시스템!)**

12.3 불량 조건 시스템

- **우량 조건 시스템**: 계수의 변화가 작으면 해도 약간의 변화만 발생
- **불량 조건 시스템**: 계수의 작은 변화가 해에 커다란 변화를 유발

예제:

다음 연립방정식의 두 가지 사례를 비교:

$$x_1 + 2x_2 = 10$$
$$1.1x_1 + 2x_2 = 10.4$$

1. 첫 번째 시스템의 해:

$$x_1 = \frac{2(10) - 2(10.4)}{1(2) - 2(1.1)} = 4$$
$$x_2 = \frac{1(10.4) - 1.1(10)}{1(2) - 2(1.1)} = 3$$

1. 두 번째 시스템의 해 (계수가 약간 변경됨):

$$x_1 + 2x_2 = 10$$
$$1.05x_1 + 2x_2 = 10.4$$

$$x_1 = \frac{2(10) - 2(10.4)}{1(2) - 2(1.05)} = 8$$

$$x_2 = \frac{1(10.4) - 1.1(10)}{1(2) - 2(1.05)} = 1$$

결과:

1. $8 + 2(1) = 10$
2. $1.1(8) + 2(1) = 10.8 \approx 10.4$

계수는 5% 변했지만 독립변수 x_1, x_2는 2배(200%~300%) 이상 변했다

하지만 결과는 0.4% 변했기 때문에 객관적으로 괜찮은 시스템으로 볼수 있다.

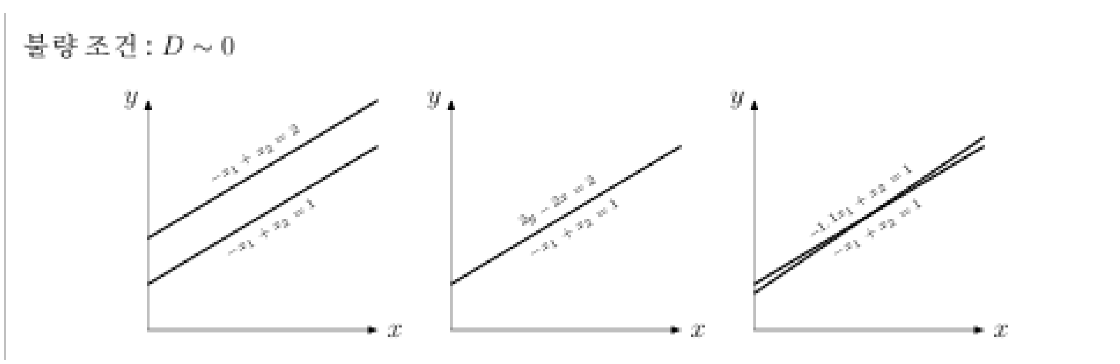
계수가 5% 변했지만 결과는 4% 변했기 때문에 계수의 변화량 보다 결과의 변화량이 적다고 판단되어 x_1, x_2 가 참값에 있다고 오해하게 된다.

하지만 이러한 식으로 구한 계수로 인한 참값이 실제 값과 다르기 때문에 내재적인 불안정성이 존재한다.

따라서 **불량 조건 시스템**이란 **엉뚱한 값을 집어 넣게 되어 참 값이 아닌 불량값을 해로 도출한 것을 의미한다.**

원래의 학습데이터에서 계수값을 산출하여 엉뚱한 값을 해로 믿게되어 **기존의 방정식에서만 참값과 유사한 결과값을 도출하는 것을 의미한다.**

계산오차의 경우 민감성이 높은 시스템은 계산오차가 더 커지기 때문에 시스템 불안정성이 더 올라간다. 이러한 시스템도 불량조건 시스템에 해당한다.



불량 조건 시스템에서의 기울기와 행렬식:

주어진 연립방정식:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + \frac{b_1}{a_{12}}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + \frac{b_2}{a_{22}}$$

기울기가 거의 같다면:

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} \approx \frac{a_{21}}{a_{22}}$$

이 경우:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \approx 0$$

따라서 행렬식 D는 다음과 같이 거의 0이 됩니다:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \approx 0$$

불량 조건:

$$D \sim 0$$

따라서 행렬계산(연립방정식) 에서의 불량조건은 두 식의 기울기가 같거나 혹은 너무 유사하면 불량이 발생할 조건이 된다.

따라서 D(판별식)이 0에 가까울 수록 불량 시스템이라고 판정할 수 있다.

하지만 판별식도 문제가 있다.

다음을 보자

예제: 다음과 같은 시스템의 행렬식을 계산하시오.

(a)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 18 \\ -x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 10 \\ 1.1x_1 + 2x_2 &= 10.4 \end{aligned}$$

(b) 연립방정식에 **10**을 곱한 후 행렬식을 구하시오**.**

(a)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 6 + 2 = 8$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.1 & 2 \end{bmatrix} = 2 - 2.2 = -0.2$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 11 & 20 \end{bmatrix} = 200 - 220 = -20$$

행렬식 축척화 (scaling)

행렬을 축척하여 단순화한 결과:

행렬의 스케일링은 각 행기준으로 가장 큰수로 나눠준다.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0.667 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} = 1.333$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.55 & 1 \end{bmatrix} = -0.05$$

특이 **(singular)** 시스템

- **특이 시스템**: 연립방정식 내에 동일한 방정식이 존재하거나 방정식보다 미지수의 개수가 더 많은 시스템.
- 두 방정식이 완전히 동일하면 자유도(degree of freedom)가 1개 줄어듦.(방정식이 하나 줄어들면 자유도가 하나 줄어든다)

- **특이 시스템의 행렬식**은 0이며, 대규모 시스템에서 행렬식 계산이 어려움.

특이 시스템의 예**:**

- Gauss 소거법에서 전진 소거 단계를 마친 후 삼각 행렬에서 대각선 요소에 0이 있으면 **특이 시스템**.
- 프로그램에서 계산을 종료하고 사용자에게 특이 시스템임을 알리는 루틴이 추가되어야 함.

딥러닝에서는 미지수의 숫자보다 방정식의 숫자가 더 많아서 문제가 주로 발생한다**.(**과적합이라고 부른다**.** 이에 대한 해결책으로 일부러 연결의 일부분을 삭제**(Dropout**기법**)**하기도 한다**.)**

방정식의 갯수가 미지수보다 현저히 많다던지**,** 미지수의 갯수가 방정식의 갯수보다 현저히 많다던지 하는 문제는 둘다 문제가 될 수 있다**.**

자세히

1. 특이 **(singular)** 시스템

- **특이 시스템**이란 연립방정식 내에서 **동일한 방정식**이 존재하거나, **방정식의 수**보다 **미지수의 수**가 많은 시스템을 말합니다.
- 즉, 방정식의 정보가 부족하거나 중복된 정보로 인해 **해를 유일하게 결정하지 못하는 시스템**을 의미합니다.
- 이러한 경우에는 하나의 해를 구할 수 없고, 무한대의 해가 존재하거나, 아예 해가 없을 수도 있습니다.
- 예를 들어, 만약 두 개의 방정식이 완전히 동일한 형태라면, 이 시스템은 자유도(degree of freedom)를 1개 잃게 됩니다. 즉, n개의 미지수가 있는 연립방정식에서 **$(n-1)$**개의 방정식만으로 해를 구하게 됩니다.

이는 미지수에 대한 제약 조건이 부족해지므로 해가 결정되지 않거나, 추가적인 자유 변수가 생기게 됩니다.

- **특이 시스템의 행렬식은 항상 0**이 됩니다.
- **행렬식(determinant)**은 연립방정식에서 해가 유일한지 여부를 확인할 수 있는 중요한 도구입니다.
- 행렬식이 0이면, 이는 선형 종속 관계가 존재하여 방정식의 해가 유일하지 않다는 것을 의미합니다.
- 따라서 대규모 시스템에서 특이 시스템이 발생하면, **행렬식 계산 자체가 어려워지고** 수치적인 문제를 일으킬 수 있습니다.

2. Gauss 소거법에서의 특이 시스템 처리

- **Gauss 소거법**은 연립방정식을 해결하는 가장 기본적인 방법 중 하나로, 주어진 연립방정식을 단계적으로 소거하여 **상삼각 행렬** 형태로 만들고, 후진 대입법을 사용해 해를 구하는 방법입니다.
- 하지만 **특이 시스템**에서 Gauss 소거법을 적용할 경우, 전진 소거 단계를 마친 후 **대각선 요소에 0**이 나타날 수 있습니다. 이는 방정식이 선형 종속 상태임을 의미합니다.
- 이 경우 Gauss 소거법으로는 더 이상 진행할 수 없으며, 수치적 불안정성으로 인해 해를 정확히 구할 수 없게 됩니다.
- 따라서 **프로그램이 특이 시스템을 탐지하면** 계산을 종료하고 사용자에게 **특이 시스템임을 알리는 루틴**을 추가하는 것이 중요합니다.

3. 불량 조건 시스템 문제에 대한 해결책

불량 조건 시스템에서 발생하는 수치적 문제를 해결하는 방법에는 다음과 같은 세 가지 주요 방법이 있습니다:

1. 유효 숫자 증가

- **유효 숫자**란 수치 계산에서 정확하게 나타낼 수 있는 숫자의 자릿수를 의미합니다.
- 불량 조건 시스템에서는 계산 과정에서 발생하는 **반올림 오차**가 결과에 큰 영향을 미치게 됩니다.
- 따라서 **계산 정확도를 높이기 위해 유효 숫자를 증가시키는 것**이 불량 조건 시스템에 대한 가장 근본적인 해결책입니다.
- 예를 들어, 소수점 자릿수를 많이 사용하는 고정소수점이나 부동소수점 방식을 개선하거나, 고정밀도의 연산 방식을 채택하는 것이 가능합니다.

1. 피벗화

- **피벗화**는 연립방정식을 풀 때, 계산 과정에서 **가장 큰 값**을 피벗으로 선택해 수치적인 불안정을 줄이는 방법입니다.
- 특히 Gauss 소거법에서 피벗 요소를 선택할 때 **가장 큰 절대값을 가진 요소를 선택**해 계산하는 것이 좋습니다.
- 이는 **부분 피벗화(Partial Pivoting)** 또는 **완전 피벗화(Complete Pivoting)**으로 구분되며, 수치적인 안정성을 높이는 방법입니다.

1. 축척화 **(Scaling)**

- **축척화**는 방정식이나 행렬을 크기 면에서 균형을 맞추어 계산의 안정성을 높이는 방법입니다.

- 연립방정식에서 어떤 항은 매우 크고, 다른 항은 매우 작은 경우 수치적으로 불안정해질 수 있습니다. 이를 방지하기 위해 **각 방정식 또는 각 행의 요소를 동일한 비율로 나누거나 곱해주는 방식**으로 수치적 문제를 해결할 수 있습니다.
- 축척화는 행렬의 요소들을 **비교적 균일한 크기**로 만들기 때문에, 계산 과정에서 발생할 수 있는 큰 오차를 방지하는 데 도움이 됩니다.

간단한 연습:

$$x_1 + 2x_2 = 10$$

$$1.1x_1 + 2x_2 = 10.4$$

```
% 문제 3: 불량 조건 시스템
A = [1 2; 1.1 2]; % 계수 행렬
b = [10; 10.4]; % 상수 벡터

% Gauss 소거법 적용
n = length(b);
for i = 1:n-1
    for j = i+1:n
        factor = A(j,i) / A(i,i);
        A(j,i:n) = A(j,i:n) - factor * A(i,i:n);
        b(j) = b(j) - factor * b(i);
    end
end

% 후진 대입법 적용
x = zeros(n,1);
x(n) = b(n) / A(n,n);
for i = n-1:-1:1
    x(i) = (b(i) - A(i,i+1:n)*x(i+1:n)) / A(i,i);
end

% 결과 출력
disp('문제 3의 해 (x_1, x_2):');
```

```
문제 3의 해 (x_1, x_2):
```

```
disp(x);
```

```
   4.000000000000009
   2.999999999999996
```

추가학습

1. 부분 피벗화 **(Partial Pivoting)**정의**:**

부분 피벗화는 현재 소거를 진행하는 단계에서 **열** 방향으로 가장 큰 절대값을 가진 원소를 선택하고, 그 행을 현재 행과 교환하는 방법입니다. 즉, 현재 계산하려는 열에서 가장 큰 절대값의 피벗을 선택하여 계산의 안정성을 높이는 방식입니다.

절차**:**

1. 현재 소거 단계에서 피벗이 될 행렬의 대각선 원소를 선택하려고 할 때, 그 열에서 가장 큰 절대값을 찾습니다.
2. 그 원소가 있는 행을 현재 피벗 행과 교환합니다.
3. Gauss 소거법을 계속 진행합니다.

예시**:**

행렬 A가 다음과 같을 때,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

첫 번째 열에서 0이 피벗으로 선택되면 수치적 불안정성이 발생할 수 있습니다. 이때 부분 피벗화를 사용하여 첫 번째 열에서 절대값이 가장 큰 4가 있는 두 번째 행을 첫 번째 행과 교환합니다. 그러면 새로운 행렬은 다음과 같이 됩니다:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

이제 이 행렬을 기준으로 소거를 진행할 수 있습니다.

장점**:**

- 행 교환만으로 해결되므로 계산이 간단하다.
- 대부분의 수치적 불안정성을 해결할 수 있다.

단점**:**

- 열에서만 피벗을 고려하므로 모든 경우에서 완벽한 안정성을 보장하지 못할 수 있다.

```
% 부분 피벗화를 사용한 Gauss 소거법 예시

% 계수 행렬과 상수 벡터 정의
A = [0 2 3; 4 6 7; 2 1 6]; % 계수 행렬
b = [8; -3; 5]; % 상수 벡터

n = length(b); % 행렬의 크기

% Gauss 소거법: 부분 피벗화 적용
for i = 1:n-1
```

```
    % 부분 피벗화: 현재 열에서 가장 큰 값을 찾고 행을 교환
    [~, maxRow] = max(abs(A(i:n,i))); % 절대값이 가장 큰 행을 찾음
    maxRow = maxRow + i - 1; % 실제 행 위치로 조정
    if maxRow ~= i
        A([i maxRow], :) = A([maxRow i], :); % 행 교환
        b([i maxRow]) = b([maxRow i]);       % 상수 벡터도 교환
    end

    % Gauss 소거법 진행: 상삼각 행렬로 변환
    for j = i+1:n
        factor = A(j,i) / A(i,i);
        A(j,i:n) = A(j,i:n) - factor * A(i,i:n);
        b(j) = b(j) - factor * b(i);
    end
end

% 후진 대입법으로 해 구하기
x = zeros(n,1);
x(n) = b(n) / A(n,n); % 마지막 변수를 구함
for i = n-1:-1:1
    x(i) = (b(i) - A(i,i+1:n)*x(i+1:n)) / A(i,i); % 나머지 변수 계산
end

% 결과 출력
disp('부분 피벗화를 사용한 해 (x_1, x_2, x_3):');
```

```
부분 피벗화를 사용한 해 (x_1, x_2, x_3):
```

```
disp(x);
```

```
  -5.431818181818182
   0.045454545454546
   2.636363636363636
```

```

```

2. 완전 피벗화 **(Complete Pivoting)**정의:

완전 피벗화는 행렬에서 현재 소거 단계에서 **행과 열**을 모두 고려하여, 전체 행렬에서 가장 큰 절대값을 가진 원소를 피벗으로 선택하고, 그 원소가 있는 행과 열을 현재의 행과 열과 교환하는 방법입니다. 즉, 전체 행렬에서 가장 큰 원소를 선택하여 계산의 안정성을 극대화하는 방식입니다.

절차:

1. 현재 소거할 단계에서 행과 열을 모두 살펴보고, 행렬 내에서 가장 큰 절대값을 찾습니다.
2. 그 원소가 위치한 행과 열을 각각 현재의 피벗 행과 피벗 열과 교환합니다.
3. Gauss 소거법을 계속 진행합니다.

예시:

같은 행렬 A에서 완전 피벗화를 적용하면, 첫 번째 열과 행만을 고려하는 것이 아니라 전체 행렬을 확인합니다. 여기서 가장 큰 절대값은 7이므로, 이 원소가 있는 피벗요소열을 순차적으로 교환하고, 해당 행도 교환하여 새로운 행렬을 만듭니다:

원래행렬 A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

열교환(피벗요소열 교환)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 7 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

행교환

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

이제 이 행렬을 기준으로 소거를 진행합니다.

장점:

- 수치적으로 매우 안정적이며, 모든 경우에서 안정성을 높여줍니다.
- 행과 열을 모두 고려하므로, 부분 피벗화보다 더 안전한 방식입니다.

단점:

- 계산이 복잡해지고, 매 소거 단계마다 행과 열을 교환해야 하므로 연산량이 많아집니다.
- 코드 구현 및 계산 속도가 부분 피벗화에 비해 상대적으로 느려질 수 있습니다.

```
% Gauss 소거법: 완전 피벗화 적용
A = [0 2 3; 4 6 7; 2 1 6]; % 계수 행렬
b = [8; -3; 5]; % 상수 벡터
n = length(b); % 변수의 개수

% 행과 열의 순서를 기록하는 벡터
col_order = 1:n;

% 완전 피벗화 및 Gauss 소거법
for i = 1:n-1
    % 남은 부분 행렬에서 가장 큰 절대값을 가진 원소 찾기
    [~, max_idx] = max(abs(A(i:n, i:n)), [], 'all', 'linear');
    [maxRow, maxCol] = ind2sub([n-i+1, n-i+1], max_idx);
    maxRow = maxRow + i - 1; % 전체 행렬에서의 행 위치
    maxCol = maxCol + i - 1; % 전체 행렬에서의 열 위치
```

```
    % 행 교환
    if maxRow ~= i
        A([i maxRow], :) = A([maxRow i], :);
        b([i maxRow]) = b([maxRow i]);
    end

    % 열 교환 (열 순서 기록을 위해 열 순서 벡터도 교환)
    if maxCol ~= i
        A(:, [i maxCol]) = A(:, [maxCol i]);
        col_order([i maxCol]) = col_order([maxCol i]);
    end

    % Gauss 소거법 진행
    for j = i+1:n
        factor = A(j,i) / A(i,i);
        A(j,i:n) = A(j,i:n) - factor * A(i,i:n);
        b(j) = b(j) - factor * b(i);
    end
end

% 후진 대입법 적용
x = zeros(n,1);
x(n) = b(n) / A(n,n);
for i = n-1:-1:1
    x(i) = (b(i) - A(i,i+1:n)*x(i+1:n)) / A(i,i);
end

% 해를 원래 순서로 복원 (열 순서에 맞춰 재정렬)
x_final = zeros(n,1);
x_final(col_order) = x;

% 결과 출력
disp('해 (x_1, x_2, x_3):');
```

```
해 (x_1, x_2, x_3):
```

```
disp(x_final);
```

```
  -5.431818181818182
   0.045454545454545
   2.636363636363637
```