# 최적화 공학문제

| | |
|---|---|
| 생성자 | 재 재환 김 |
| 태그 | 엔지니어링 |

## 1. 목적 함수와 제약 조건 분석

### 목적 함수 (Cost Function)

낙하산의 비용을 최소화하기 위한 목적 함수는 다음과 같습니다:

$$Cost = n(c_0 + c_1\ell + c_2A^2)$$

여기서:

- $n$: 낙하산의 개수
- $c_0$: 고정 비용 (낙하산 자체의 기본 비용)
- $c_1$: 줄의 길이에 따른 비용
- $c_2$: 낙하산의 표면적에 따른 비용
- $\ell$: 줄의 길이 ($\ell = \sqrt{2}r$, 낙하산의 반경 r에 따라 결정됨)
- $A$: 낙하산의 표면적 ($A = 2\pi r^2$)

  $A = 2\pi r^2$

**목적 함수의 해석**:

- 낙하산의 개수 n이 많을수록 비용이 증가하며, 낙하산의 크기 A가 커질수록 비용이 제곱으로 증가합니다.

  nn

  AA

- 줄의 길이 ℓ 역시 낙하산의 반경 r에 의해 영향을 받습니다. 따라서 r이 증가하면 낙하산 표면적과 줄 길이도 커지며, 이로 인해 비용이 증가합니다.

  ℓ\ell

  rr

  rr

### 제약 조건

제약 조건은 물자가 안전하게 떨어지도록 하는 물리적 한계를 설정합니다:

- **속도 제약**:

  $v(t) \leq v_c$

  여기서 $v_c = 20\, m/s$는 충격 속도의 상한값입니다. 이는 낙하산이 물자를 안전하게 지면에 착륙시킬 수 있도록 보장하는 중요한 조건입니다.

- **개수 제약**:n≥1

  n≥1n \geq 1

  낙하산의 개수는 최소 1개 이상이어야 하며, 낙하산이 없거나 음수인 경우는 물리적으로 말이 되지 않기 때문에 이러한 제약이 추가됩니다.

## 2. 속도와 위치에 대한 수식적 모델링

### 속도 함수 $v(t)$

낙하산을 통해 떨어지는 물체의 속도는 시간에 따라 변화합니다. 공기의 저항(항력)에 의해 속도가 변하는 모델은 다음과 같습니다:

$$v(t) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right)$$

여기서:

- ggg: 중력 가속도
- mmm: 낙하산에 매달린 물체의 질량
- ccc: 항력 계수 (낙하산의 표면적에 의존함)

이 식은 **속도가 처음에는 빠르게 증가**하지만, 공기 저항에 의해 시간이 지남에 따라 **점점 느려지는 양상**을 나타냅니다.

### 위치 함수 $z(t)$

물체가 시간 $t$에 따른 위치 변화는 속도 함수의 적분으로 얻을 수 있습니다:

$$z(t) = z_0 + \frac{gm}{c}t + \frac{gm^2}{c^2}\left(e^{-\frac{ct}{m}} - 1\right)$$

여기서:

- $z_0$: 초기 높이
- $z(t)$: 시간 t에 따른 물체의 위치

이 함수는 물체가 낙하하는 동안의 높이 변화를 나타냅니다. 이를 통해 물체가 지면에 도달하는 데 걸리는 시간을 계산할 수 있습니다.

## 3. 낙하산 설계 변수의 정의 및 관계식

### 낙하산의 표면적 $A$

낙하산의 표면적은 낙하산의 반경 rrr에 의해 결정됩니다. 이때 낙하산의 표면적은 다음과 같이 정의됩니다:

$$A = 2\pi r^2$$

즉, 반경 $r$이 커질수록 낙하산의 표면적이 기하급수적으로 증가하며, 이는 항력 계수 $c$와 낙하 속도에 직접적인 영향을 미칩니다.

### 줄의 길이 ℓ\ellℓ

낙하산에 연결된 줄의 길이는 낙하산의 반경에 따라 달라지며, 다음과 같은 관계를 가집니다:

$$\ell = \sqrt{2}r$$

즉, 반경 $r$이 커질수록 줄의 길이도 증가합니다.

### 항력 계수 ccc

항력 계수는 낙하산의 표면적에 따라 달라집니다:

$$c = k_c A$$

즉, 낙하산의 표면적이 커지면 항력도 커지며, 이는 속도를 줄이는 데 기여합니다. 그러나 항력이 너무 커지면 비용이 급격히 증가할 수 있습니다.

## 4. 낙하산 개수 $n$와 물체의 질량 $m$

낙하산의 개수 $n$은 물체의 총 질량을 낙하산의 개수로 나눈 값에 의해 각 낙하산이 감당해야 할 질량을 결정합니다:

$$m = \frac{M_t}{n}$$

여기서 $M_t$는 물체의 총 질량입니다. 낙하산의 개수가 많아지면 각 낙하산이 감당해야 할 질량은 줄어들지만, 낙하산의 개수가 많아질수록 비용은 증가합니다. 이 둘 간의 균형을 맞추는 것이 최적화 문제의 핵심입니다.

## 5. 최적화 문제의 형태와 해결 과정

최적화 문제는 다음과 같은 형태로 정의됩니다:

## 최적화 문제의 형식화

1. **목적 함수**:
2. $\text{Cost} = n(c_0 + c_1\ell + c_2A^2)$

   비용을 최소화하는 것이 최적화 문제의 목적입니다.

3. **제약 조건**:
   - 속도 제약:

     $v(t) \le v_c$
   - 개수 제약:

     $n \ge 1$

이 문제를 해결하려면 목적 함수를 최소화하면서 제약 조건을 만족시키는 낙하산의 크기 $r$와 개수 $n$를 찾아야 합니다. 이를 해결하기 위해 **라그랑주 승수법**, **수치적 최적화 기법** 등을 사용할 수 있습니다.

## 6. 함수 계산량 최소화

이 문제에서 낙하산의 크기 $r$, 개수 $n$, 줄의 길이 $\ell$, 표면적 $A$, 항력 계수 $c$ 등의 변수들이 상호 종속적이므로, 이를 수학적으로 단순화하는 것이 필요합니다. 함수 계산 수를 줄이기 위해 **수치적 근사 방법**을 적용하거나, **비선형 최적화 알고리즘**을 활용할 수 있습니다.