- **낙하산 병 예제**를 통해 Taylor 급수의 나머지 항을 계산에 적용하는 방법을 보여줍니다.
- Taylor 급수 전개:

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + v'(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

- 이 식을 통해 도함수 $v'(t_i)$를 근사화할 수 있습니다.
- 근사식:

$$v'(t_i) = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

- 나머지 항을 고려한 근사:

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + v'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + R_1$$

- R_1은 오차를 나타내며, $R_1 = \frac{v''(\xi)}{2!}(t_{i+1} - t_i)^2$로 표현됩니다.
- 이 오차는 $O(\Delta t)$로 표현될 수 있습니다.
- **절단 오차**:
- 도함수 근사값의 오차는 변수 간격의 크기에 비례함을 보여줍니다.
- 즉, 간격 Δt가 작아질수록 오차가 줄어듭니다.

```
% 초기 설정
t_i = 0; % 초기 시간
dt = 0.1; % 시간 간격
t_i1 = t_i + dt; % 다음 시간

% 예제 속도 함수 및 도함수
v = @(t) 5*t.^2 + 3*t + 2; % 예제 속도 함수
v_prime = @(t) 10*t + 3; % 실제 도함수
v_double_prime = @(t) 10; % 실제 이차 도함수

% t_i와 t_i+1에서의 속도 계산
v_ti = v(t_i);
v_ti1 = v(t_i1);

% 도함수 근사화
v_prime_approx = (v_ti1 - v_ti) / (t_i1 - t_i);

% 실제 도함수 값
v_prime_actual = v_prime(t_i);

% 오차 계산
error = v_prime_actual - v_prime_approx;

% 나머지 항을 통한 오차 추정
R1 = (v_double_prime(t_i) / 2) * (t_i1 - t_i);
```

```
% 결과 출력
fprintf('근사화된 도함수 값: %f\n', v_prime_approx);
```

```
근사화된 도함수 값: 3.500000
```

```
fprintf('실제 도함수 값: %f\n', v_prime_actual);
```

```
실제 도함수 값: 3.000000
```

```
fprintf('오차: %f\n', error);
```

```
오차: -0.500000
```

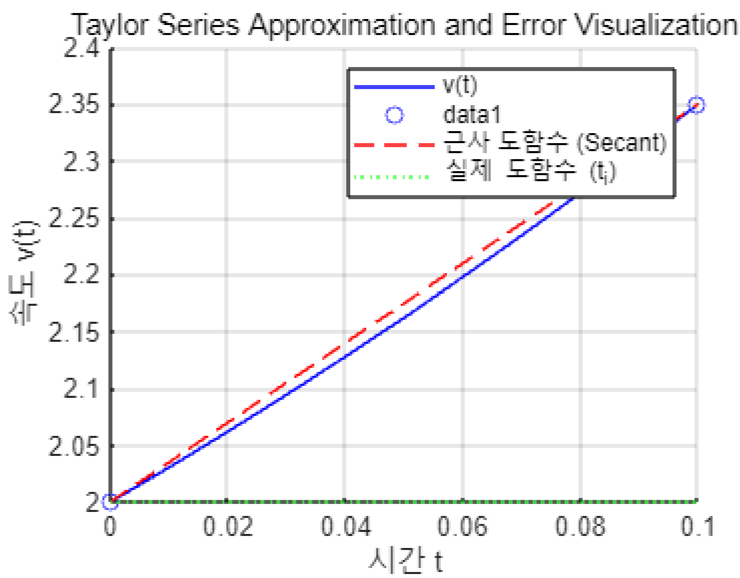
```
fprintf('나머지 항을 통한 오차 추정: %f\n', R1);
```

```
나머지 항을 통한 오차 추정: 0.500000
```

- 속도 함수 v(t)와 그 도함수 v'(t), 그리고 이차 도함수 v''(t)를 정의했습니다.
- t_i와 t_{i+1}에서의 속도 값을 계산했습니다.
- 도함수의 근사값을 구하고, 실제 도함수 값과 비교하여 오차를 계산했습니다.
- Taylor 급수의 나머지 항을 이용하여 오차를 추정했습니다.

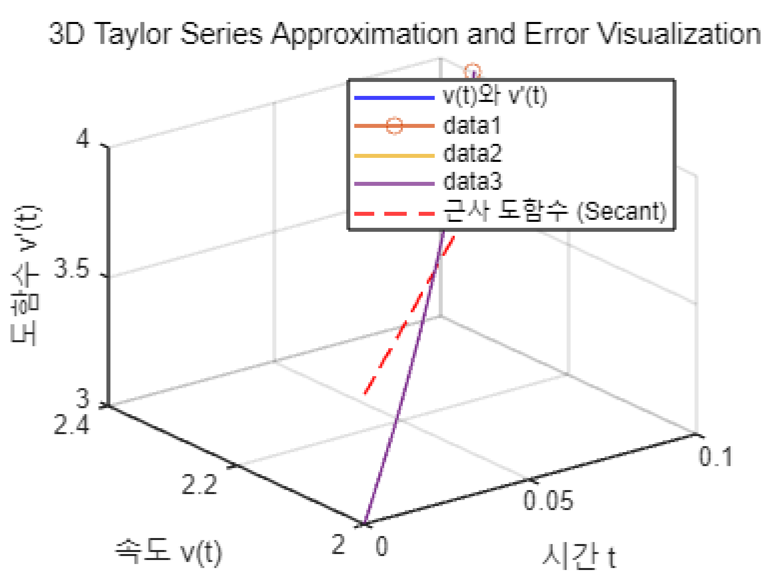
```
% 초기 설정
t_i = 0; % 초기 시간
dt = 0.1; % 시간 간격
t_i1 = t_i + dt; % 다음 시간

% 예제 속도 함수 및 도함수
v = @(t) 5*t.^2 + 3*t + 2; % 예제 속도 함수
v_prime = @(t) 10*t + 3; % 실제 도함수

% 시간 범위 설정
t_values = linspace(t_i, t_i1, 100);

% 속도 함수 및 실제 도함수 값 계산
v_values = v(t_values);
v_prime_actual = v_prime(t_i);

% 근사 도함수 값 계산
v_ti = v(t_i);
v_ti1 = v(t_i1);
v_prime_approx = (v_ti1 - v_ti) / (t_i1 - t_i);

% 시각화
figure;
hold on;

% 속도 함수 그래프
plot(t_values, v_values, 'b', 'DisplayName', 'v(t)');
```

```
scatter([t_i, t_i1], [v_ti, v_ti1], 'b');
plot([t_i, t_i1], [v_ti, v_ti1], 'r--', 'DisplayName', '근사 도함수 (Secant)');

% 실제 도함수 값 표시
yline(v_prime_actual * t_i + v_ti, 'g:', 'DisplayName', '실제 도함수 (t_i)');

% 레이블 및 제목
title('Taylor Series Approximation and Error Visualization');
xlabel('시간 t');
ylabel('속도 v(t)');
legend;
grid on;
hold off;
```




```
% 초기 설정
t_i = 0; % 초기 시간
dt = 0.1; % 시간 간격
t_i1 = t_i + dt; % 다음 시간

% 예제 속도 함수 및 도함수
v = @(t) 5*t.^2 + 3*t + 2; % 예제 속도 함수
v_prime = @(t) 10*t + 3; % 실제 도함수

% 시간 범위 설정
t_values = linspace(t_i, t_i1, 100);

% 속도 함수 및 실제 도함수 값 계산
v_values = v(t_values);
v_prime_values = v_prime(t_values);

% 근사 도함수 값 계산
v_ti = v(t_i);
v_ti1 = v(t_i1);
```

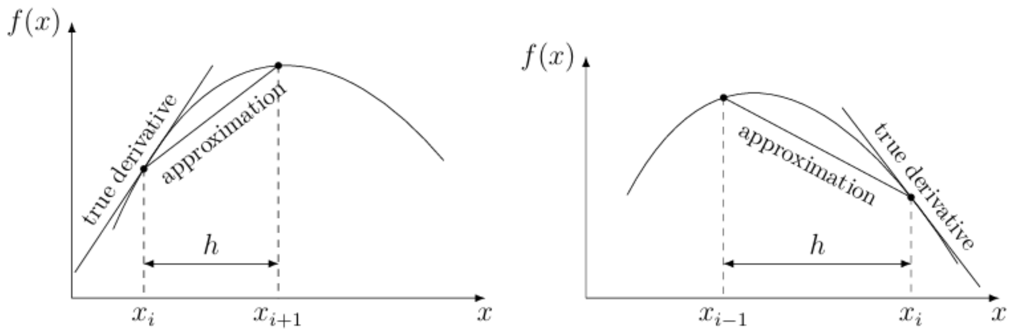
```
v_prime_approx = (v_ti1 - v_ti) / (t_i1 - t_i);

% 3D 시각화
figure;
hold on;

% 3D 속도 함수 그래프
plot3(t_values, v_values, v_prime_values, 'b', 'DisplayName', 'v(t)와 v''(t)');
comet3(t_values, v_values, v_prime_values); % 동적 표현

% 근사 도함수 그래프
plot3([t_i, t_i1], [v_ti, v_ti1], [v_prime_approx, v_prime_approx], 'r--',
'DisplayName', '근사 도함수 (Secant)');

% 레이블 및 제목
title('3D Taylor Series Approximation and Error Visualization');
xlabel('시간 t');
ylabel('속도 v(t)');
zlabel('도함수 v''(t)');
legend;
grid on;
view(3); % 3D 뷰 설정
hold off;
```



1. 1차 도함수의 전진 차분 (First Forward Difference)

- 식: $f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$
- 설명:
- $h = x_{i+1} - x_i$
- 작은 간격 h을 사용하여 현재 지점 x_i에서 다음 지점 x_{i+1}의 함수값 차이로 도함수를 근사화합니다.

- 전진 차분은 오차 $O(h)$를 가집니다.



2. 1차 도함수의 후진 차분 (First Backward Difference)

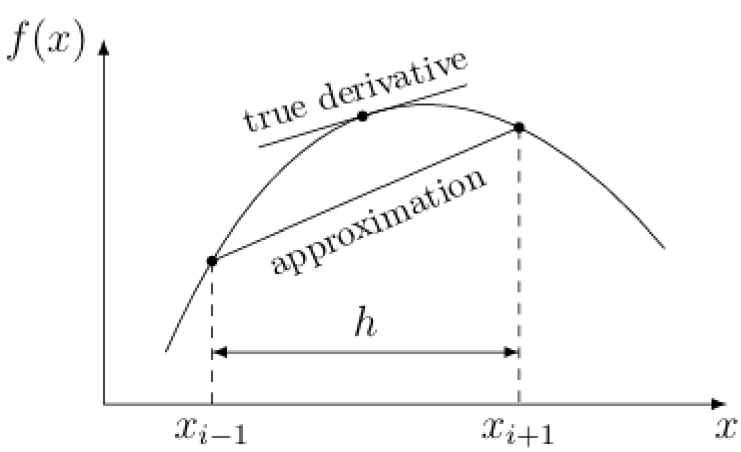
- 식: $f'(x_i) = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h)$
- 설명:
- $h = x_i - x_{i-1}$
- 현재 지점 x_i에서 이전 지점 x_{i-1}의 함수값 차이로 도함수를 근사화합니다.
- 후진 차분 또한 오차 O(h)를 가집니다.

3. 1차 도함수의 중심 차분 (First Centered Difference)

- 식: $f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O(h^2)$
- 설명:

$$h = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}$$

- 이전 지점과 다음 지점의 함수값 차이의 평균으로 도함수를 근사화합니다.
- 중심 차분은 오차가 $O(h^2)$로, 전진 및 후진 차분보다 더 정확한 근사값을 제공합니다.



```
% 함수 및 구간 설정
f = @(x) -0.1*x.^4 - 0.15*x.^3 - 0.5*x.^2 - 0.25*x + 1.25; % 예제 함수
f_prime = @(x) -0.4*x.^3 - 0.45*x.^2 - 1.0*x - 0.25;  % 실제 도함수

x_i = 1; % 도함수를 계산할 지점
h = 0.1; % 간격

% 전진 차분
f_forward = (f(x_i + h) - f(x_i)) / h;

% 후진 차분
f_backward = (f(x_i) - f(x_i - h)) / h;

% 중심 차분
f_centered = (f(x_i + h) - f(x_i - h)) / (2*h);

% 실제 도함수 값
f_prime_actual = f_prime(x_i);

% 결과 출력
fprintf('전진 차분 근사값: %f\n', f_forward);
```

```
전진 차분 근사값: -2.260600
```

```
fprintf('후진 차분 근사값: %f\n', f_backward);
```

```
후진 차분 근사값: -1.950400
```

```
fprintf('중심 차분 근사값: %f\n', f_centered);
```

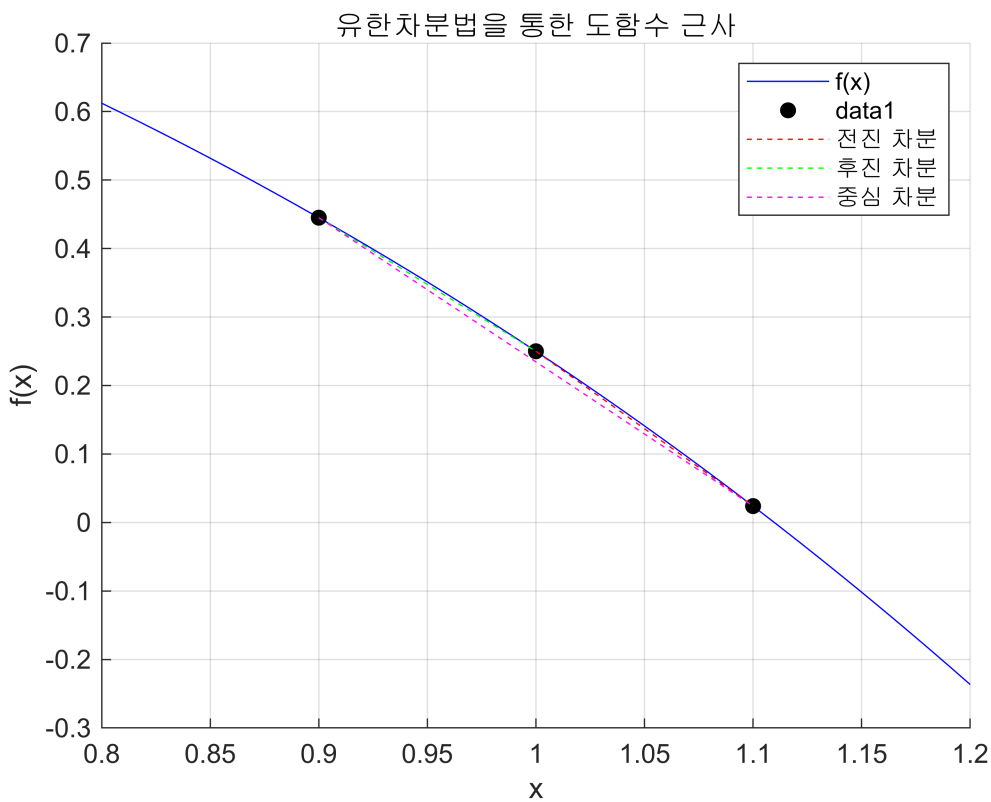
```
중심 차분 근사값: -2.105500
```

```
fprintf('실제 도함수 값: %f\n', f_prime_actual);
```

```
실제 도함수 값: -2.100000
```

```

% 시각화
x_values = x_i-2*h:0.01:x_i+2*h;
f_values = f(x_values);

figure;
hold on;

% 함수 그래프
plot(x_values, f_values, 'b', 'DisplayName', 'f(x)');
scatter([x_i, x_i+h, x_i-h], [f(x_i), f(x_i+h), f(x_i-h)], 'k', 'filled');

% 전진 차분 선
plot([x_i, x_i+h], [f(x_i), f(x_i+h)], 'r--', 'DisplayName', '전진 차분');
```

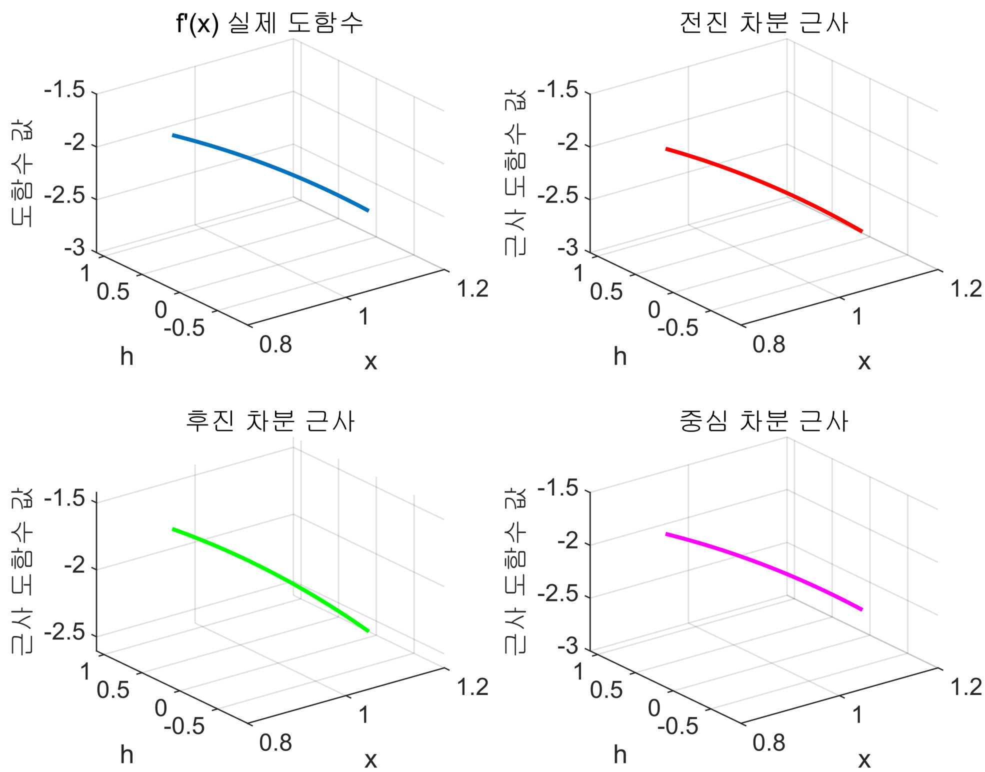
```
% 후진 차분 선
plot([x_i-h, x_i], [f(x_i-h), f(x_i)], 'g--', 'DisplayName', '후진 차분');

% 중심 차분 선
plot([x_i-h, x_i+h], [f(x_i-h), f(x_i+h)], 'm--', 'DisplayName', '중심 차분');

% 레이블 및 제목
title('유한차분법을 통한 도함수 근사');
xlabel('x');
ylabel('f(x)');
legend;
grid on;
hold off;
```




```
% 함수 및 구간 설정
f = @(x) -0.1*x.^4 - 0.15*x.^3 - 0.5*x.^2 - 0.25*x + 1.25; % 예제 함수
f_prime = @(x) -0.4*x.^3 - 0.45*x.^2 - 1.0*x - 0.25;  % 실제 도함수

x_i = 1; % 도함수를 계산할 지점
h = 0.1; % 간격

% x 범위 설정
x_values = x_i-2*h:0.01:x_i+2*h;

% 각 x_i에 대한 전진, 후진, 중심 차분 계산
```

```
F_forward = zeros(size(x_values));
F_backward = zeros(size(x_values));
F_centered = zeros(size(x_values));
F_actual = zeros(size(x_values));

for i = 1:length(x_values)
    xi = x_values(i);

    % 전진 차분
    F_forward(i) = (f(xi + h) - f(xi)) / h;

    % 후진 차분
    F_backward(i) = (f(xi) - f(xi - h)) / h;

    % 중심 차분
    F_centered(i) = (f(xi + h) - f(xi - h)) / (2 * h);

    % 실제 도함수 값
    F_actual(i) = f_prime(xi);
end

% 3D 시각화
figure;

% 실제 함수
subplot(2, 2, 1);
plot3(x_values, h * ones(size(x_values)), F_actual, 'LineWidth', 1.5);
title('f''(x) 실제 도함수');
xlabel('x');
ylabel('h');
zlabel('도함수 값');
grid on;

% 전진 차분
subplot(2, 2, 2);
plot3(x_values, h * ones(size(x_values)), F_forward, 'r', 'LineWidth', 1.5);
title('전진 차분 근사');
xlabel('x');
ylabel('h');
zlabel('근사 도함수 값');
grid on;

% 후진 차분
subplot(2, 2, 3);
plot3(x_values, h * ones(size(x_values)), F_backward, 'g', 'LineWidth', 1.5);
title('후진 차분 근사');
xlabel('x');
ylabel('h');
zlabel('근사 도함수 값');
grid on;
```

```
% 중심 차분
subplot(2, 2, 4);
plot3(x_values, h * ones(size(x_values)), F_centered, 'm', 'LineWidth', 1.5);
title('중심 차분 근사');
xlabel('x');
ylabel('h');
zlabel('근사 도함수 값');
grid on;
```



- **함수:**
- $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.25$
- 실제 도함수 값 $f'(0.5) \approx -0.9125$
- **계산 조건:**
- $h = 0.5$와 $h = 0.25$일 때, 전진, 후진, 중심 차분을 사용하여 $x = 0.5$에서 도함수 근사를 계산합니다.
- **전진 차분 근사:**
- 식: $f'(x_i) \approx \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$
- $h = 0.5$: 근사값 -1.45, 오차 58.9
- $h = 0.25$: 근사값 -1.1548, 오차 26.5
- **후진 차분 근사:**

- 식: $f'(x_i) \approx \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$
- $h = 0.5$: 근사값 -0.55, 오차 39.7
- $h = 0.25$: 근사값 -0.714, 오차 21.7
- **중심 차분 근사**:
- 식: $f'(x_i) \approx \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$
- $h = 0.5$: 근사값 -1.0, 오차 9.6
- $h = 0.25$: 근사값 -0.9344, 오차 2.4
- **결론**:
- 오차가 h의 크기에 따라 감소함을 보여줍니다.
- 중심 차분이 전진 및 후진 차분보다 더 작은 오차를 가짐을 확인할 수 있습니다.

```
% 함수 및 도함수 정의
f = @(x) -0.1*x.^4 - 0.15*x.^3 - 0.5*x.^2 - 0.25*x + 1.25;
f_prime_actual = -0.9125; % 실제 도함수 값

x_i = 0.5; % 도함수를 계산할 지점
h_values = [0.5, 0.25]; % 간격

% 결과 저장을 위한 배열
errors_forward = zeros(size(h_values));
errors_backward = zeros(size(h_values));
errors_centered = zeros(size(h_values));

% 계산 및 시각화
figure;
hold on;

for j = 1:length(h_values)
    h = h_values(j);

    % 전진 차분
    f_forward = (f(x_i + h) - f(x_i)) / h;
    errors_forward(j) = abs(f_prime_actual - f_forward) / abs(f_prime_actual) * 100;

    % 후진 차분
    f_backward = (f(x_i) - f(x_i - h)) / h;
    errors_backward(j) = abs(f_prime_actual - f_backward) / abs(f_prime_actual) *
100;

    % 중심 차분
    f_centered = (f(x_i + h) - f(x_i - h)) / (2 * h);
    errors_centered(j) = abs(f_prime_actual - f_centered) / abs(f_prime_actual) *
100;
end
```

```
fprintf('전진 차분 오차: %f\n', errors_forward);
```

```
전진 차분 오차: 58.904110
전진 차분 오차: 26.541096
```

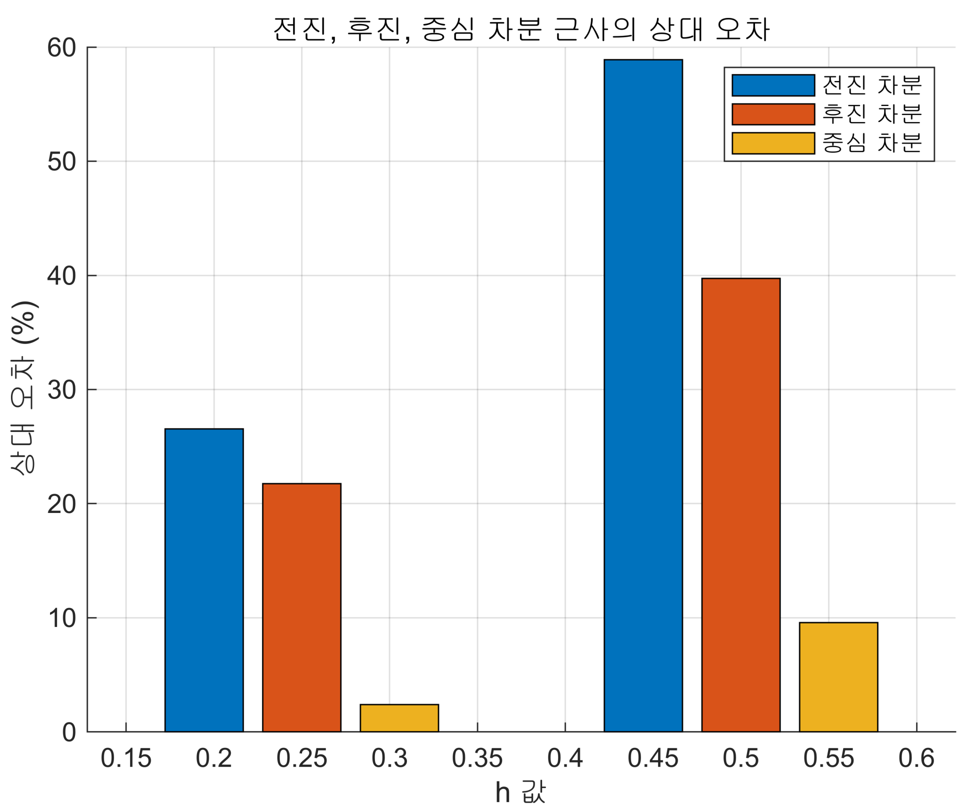
```
fprintf('후진 차분 오차: %f\n', errors_backward);
```

```
후진 차분 오차: 39.726027
후진 차분 오차: 21.746575
```

```
fprintf('중심 차분 오차: %f\n', errors_centered);
```

```
중심 차분 오차: 9.589041
중심 차분 오차: 2.397260
```

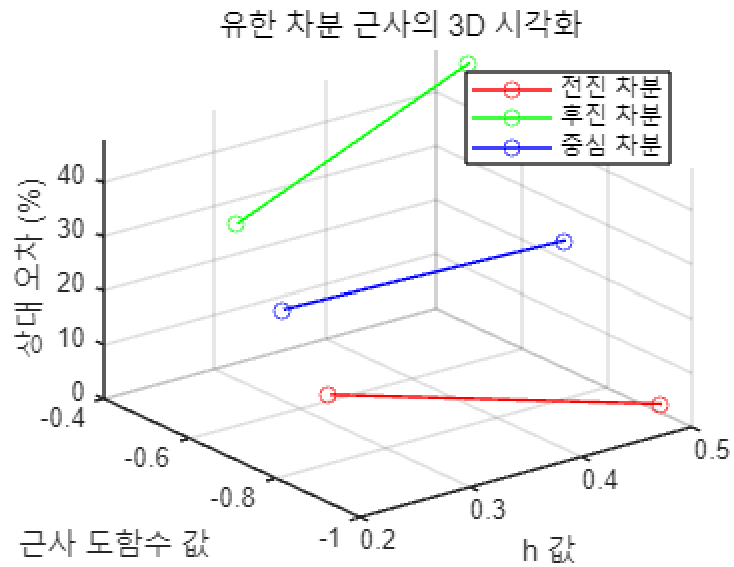
```


% 오차 결과 표시
bar(h_values, [errors_forward; errors_backward; errors_centered]', 'grouped');
title('전진, 후진, 중심 차분 근사의 상대 오차');
xlabel('h 값');
ylabel('상대 오차 (%)');
legend({'전진 차분', '후진 차분', '중심 차분'});
grid on;
hold off;
```




```
% 함수 및 도함수 정의
f = @(x) -0.1*x.^4 + 0.15*x.^3 - 0.5*x.^2 - 0.25*x + 1.25;
```

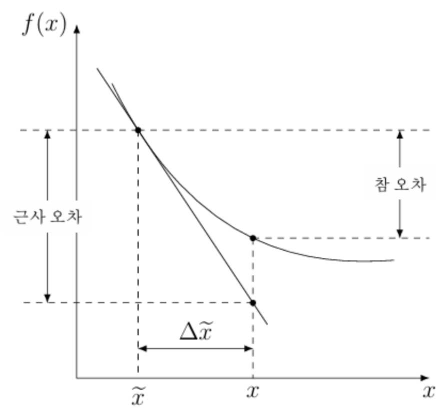
```
f_prime_actual = -0.9125; % 실제 도함수 값

x_i = 0.5; % 도함수를 계산할 지점
h_values = [0.5, 0.25]; % 간격

% 결과 저장을 위한 배열
f_forward_values = zeros(size(h_values));
f_backward_values = zeros(size(h_values));
f_centered_values = zeros(size(h_values));

% 계산
for j = 1:length(h_values)
    h = h_values(j);

    % 전진 차분
    f_forward = (f(x_i + h) - f(x_i)) / h;
    f_forward_values(j) = f_forward;

    % 후진 차분
    f_backward = (f(x_i) - f(x_i - h)) / h;
    f_backward_values(j) = f_backward;

    % 중심 차분
    f_centered = (f(x_i + h) - f(x_i - h)) / (2 * h);
    f_centered_values(j) = f_centered;
end

% 3D 시각화
figure;
hold on;

% 전진 차분 3D 그래프
plot3(h_values, f_forward_values, abs(f_prime_actual - f_forward_values) /
abs(f_prime_actual) * 100, 'ro-', 'DisplayName', '전진 차분');

% 후진 차분 3D 그래프
plot3(h_values, f_backward_values, abs(f_prime_actual - f_backward_values) /
abs(f_prime_actual) * 100, 'go-', 'DisplayName', '후진 차분');

% 중심 차분 3D 그래프
plot3(h_values, f_centered_values, abs(f_prime_actual - f_centered_values) /
abs(f_prime_actual) * 100, 'bo-', 'DisplayName', '중심 차분');

% 레이블 및 제목
title('유한 차분 근사의 3D 시각화');
xlabel('h 값');
ylabel('근사 도함수 값');
zlabel('상대 오차 (%)');
legend;
grid on;
```

```
view(3);
hold off;
```



3.3 오차의 전파

$$\Delta f(\tilde{x}) = |f(x) - f(\tilde{x})|$$
$$f(x) \approx f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x - \tilde{x})$$
$$\Delta f(\tilde{x}) = |f'(\tilde{x})|\Delta\tilde{x}$$



1. 오차의 전파:

- 함수 f(x)에서의 오차를 설명하고 있습니다.
- **오차의 전파:**

$$\Delta f(\bar{x}) = f'(\bar{x})\Delta x$$

- 이 식은 f(x)의 변화가 x의 변화에 비례하여 선형적으로 변함을 나타냅니다.
- 예제:

$$\bar{x} = 2.5, \Delta x = 0.01 \text{일 때},$$

- $f'(x) = 3x^2$로 가정하고 계산:

$$\Delta f(\bar{x}) = 3(2.5^2) \times 0.01 = 0.1875$$

$$f(2.5) = 15.625$$

- 결과 범위: $15.4375 \le f(x) \le 15.8125$

2. 함수의 상대오차:

- 함수 f(x)의 상대오차를 정의합니다.
- 식: $f(x^{-})\dfrac{f(x) - f(\bar{x})}{f(\bar{x})} \approx \dfrac{f'(\bar{x})\Delta x}{f(\bar{x})} f(x^{-})$

3. 조건수 **(Condition Number):**

- 조건수는 오차가 함수에 의해 증폭되는 정도를 나타냅니다.
- 식: $\dfrac{\bar{x}}{f(\bar{x})} f'(\bar{x})$
- 조건수가 클수록 함수의 안정성이 낮음을 의미합니다.

```
% 함수 및 도함수 정의
f = @(x) 3*x.^2; % 예제 함수
f_prime = @(x) 6*x; % 도함수

x_bar = 2.5; % 기준점
delta_x = 0.01; % 변화량

% 오차의 전파 계산
delta_f = f_prime(x_bar) * delta_x;

% 함수 값 계산
f_value = f(x_bar);
f_value_lower = f_value - delta_f;
f_value_upper = f_value + delta_f;

% 상대 오차 계산
relative_error = abs(delta_f / f_value);

% 조건수 계산
condition_number = (x_bar / f_value) * f_prime(x_bar);

% 결과 출력
fprintf('f(%.2f) = %.4f\n', x_bar, f_value);
```

```
f(2.50) = 18.7500
```

```
fprintf('오차의 전파 범위: [%.4f, %.4f]\n', f_value_lower, f_value_upper);
```

```
오차의 전파 범위: [18.6000, 18.9000]
```

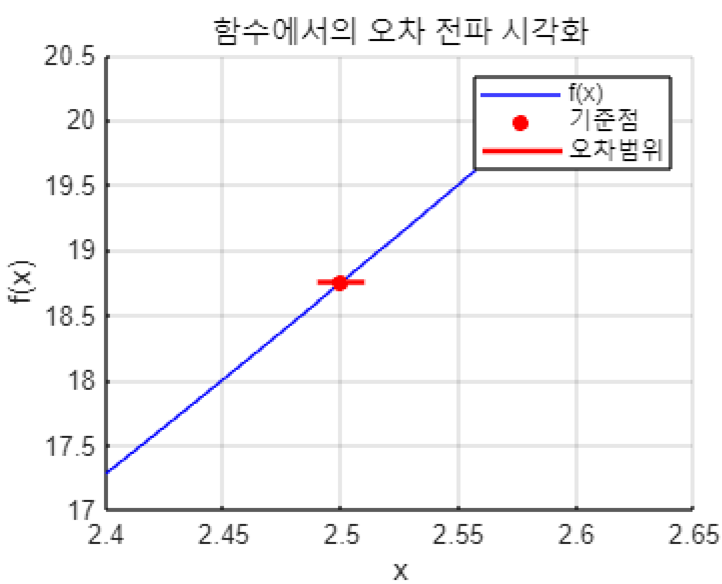
```
fprintf('상대 오차: %.4f\n', relative_error);
```

상대 오차: 0.0080

```
fprintf('조건수: %.4f\n', condition_number);
```

조건수: 2.0000

```

% 시각화
x_values = x_bar - 0.1:0.01:x_bar + 0.1;
f_values = f(x_values);

figure;
hold on;

% 함수 그래프
plot(x_values, f_values, 'b', 'DisplayName', 'f(x)');
scatter([x_bar], [f_value], 'r', 'filled');

% 가로 오차 막대 직접 그리기
line([x_bar - delta_x, x_bar + delta_x], [f_value, f_value], 'Color', 'r',
'LineWidth', 2);

% 레이블 및 제목
title('함수에서의 오차 전파 시각화');
xlabel('x');
ylabel('f(x)');
legend('f(x)','기준점','오차범위');
grid on;
hold off;
```

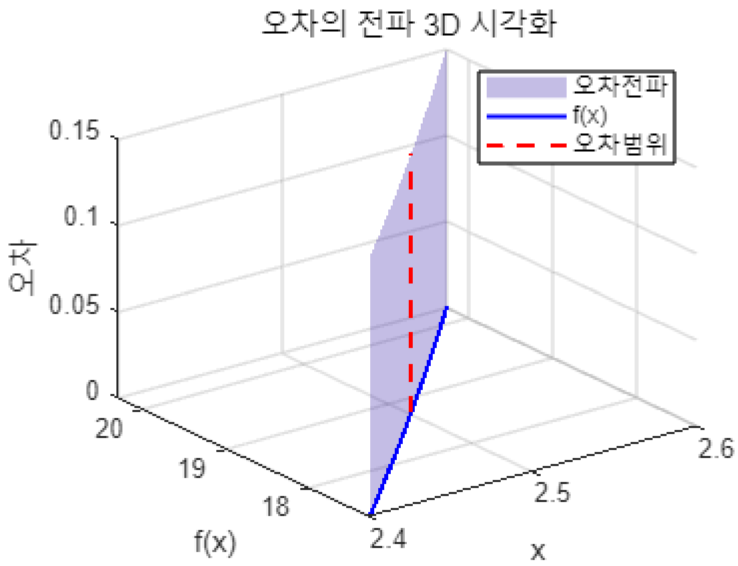


- **파란색 선**: 함수 f(x)의 그래프를 나타냅니다.

- **빨간색 점**: 기준점 x = 2.5에서의 함수 값 f(2.5)를 표시하고 있습니다.
- **빨간색 가로 오차 막대**: 이 막대는 기준점에서의 오차 범위를 보여줍니다. 이 오차는 $\Delta f(\bar{x}) = f'(\bar{x})\Delta x$로 계산된 오차를 나타내며, 이를 통해 함수 값이 입력값의 변화에 따라 어떻게 변하는지 시각적으로 나타냅니다.

```
% 함수 및 도함수 정의
f = @(x) 3*x.^2; % 예제 함수
f_prime = @(x) 6*x; % 도함수

x_bar = 2.5; % 기준점
delta_x = 0.01; % 변화량

% x 범위 설정
x_values = x_bar - 0.1:0.01:x_bar + 0.1;

% 오차의 전파 계산
delta_f = f_prime(x_bar) * delta_x;

% 함수 값 및 오차 범위 계산
f_values = f(x_values);
f_value = f(x_bar);
f_value_lower = f_value - delta_f;
f_value_upper = f_value + delta_f;

% 3D 시각화
figure;
hold on;

% 3D 오차 평면
[X, Z] = meshgrid(x_values, [0, delta_f]);
Y = f(X);
surf(X, Y, Z, 'FaceAlpha', 0.3, 'EdgeColor', 'none');

% 실제 함수 값 선
plot3(x_values, f(x_values), zeros(size(x_values)), 'b', 'LineWidth', 1.5,
'DisplayName', 'f(x)');

% 기준점과 오차
plot3([x_bar, x_bar], [f_value, f_value], [0, delta_f], 'r--', 'LineWidth', 1.5,
'DisplayName', '오차 범위');

% 레이블 및 제목
title('오차의 전파 3D 시각화');
xlabel('x');
ylabel('f(x)');
zlabel('오차');
legend('오차전파','f(x)','오차범위');
```

```
grid on;
view(3);
hold off;
```



- **파란색 선**: f(x)함수의 값을 나타냅니다.
- **붉은색 점선**: 기준점에서의 오차 범위를 표시합니다.
- **반투명한 보라색 면**: 오차 전파를 시각적으로 보여주는 평면입니다.

1. 수치 미분의 오차:

- 중심 차분법을 사용하여 도함수 $f'(x_i)$를 구하는 식:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}h^2$$

- 여기서 오차는 두 가지로 나뉩니다:
- **절단 오차**: 미분을 근사할 때 발생하는 오차, 여기서는 $O(h^2)$에 해당합니다.
- **반올림 오차**: 유한한 자릿수로 인해 발생하는 오차.

2. 오차 해석:

- 유한 차분법에서는 반올림 오차와 절단 오차가 모두 포함됩니다.
- 간격 h가 작아질수록 반올림 오차는 증가하지만 절단 오차는 감소합니다.

3. 예제:

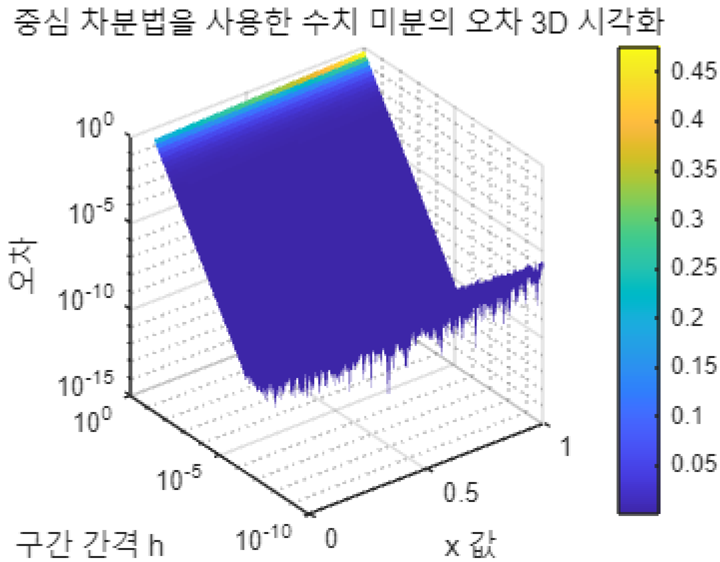
- 구간 간격을 10^0에서 10^{-10}까지 줄여가며 $f'(0.5)$를 구하는 과정이 나와 있습니다.
- 그래프는 구간 간격이 작아질 때 오차가 어떻게 변하는지 보여줍니다.
- x축: 구간 간격 h
- y축: 오차

- 구간 간격이 너무 작아지면 반올림 오차로 인해 오차가 다시 증가하는 현상을 보여줍니다.

```
% 함수 및 도함수 정의
f = @(x) exp(x); % 예제 함수 (지수 함수)
f_prime_actual = @(x) exp(x); % 실제 도함수

x = 0.5; % 미분을 계산할 지점
h_values = logspace(0, -10, 100); % 구간 간격 h를 10^0에서 10^-10까지 로그 스케일로 설정

% 오차 계산
errors = zeros(size(h_values));
for i = 1:length(h_values)
    h = h_values(i);
    f_prime_approx = (f(x + h) - f(x - h)) / (2 * h); % 중심 차분법
    errors(i) = abs(f_prime_approx - f_prime_actual(x)); % 실제 도함수 값과 비교하여 오차 계산
end

% 시각화
figure;
loglog(h_values, errors, 'b-', 'LineWidth', 1.5);
title('중심 차분법을 사용한 수치 미분의 오차');
xlabel('구간 간격 h');
ylabel('오차');
grid on;
```

- 함수 $f(x) = e^x$와 실제 도함수 $xf'(x) = e^x$를 정의했습니다.
- 간격 h를 10^0에서 10^{-10}까지 로그 스케일로 설정했습니다.
- 각 h에 대해 중심 차분법을 사용하여 수치 미분을 계산하고 실제 도함수와의 오차를 구했습니다.
- log 함수를 사용하여 구간 간격과 오차의 관계를 로그-로그 스케일로 시각화했습니다.

```matlab
% 함수 및 도함수 정의
f = @(x) exp(x); % 예제 함수 (지수 함수)
f_prime_actual = @(x) exp(x); % 실제 도함수

x_values = linspace(0.1, 1, 100); % x 값의 범위 설정
h_values = logspace(0, -10, 100); % 구간 간격 h를 10^0에서 10^-10까지 로그 스케일로
설정

% 3D 오차 계산
[X, H] = meshgrid(x_values, h_values); % 그리드 생성
Errors = zeros(size(X));

for i = 1:length(h_values)
    for j = 1:length(x_values)
        h = h_values(i);
        x = x_values(j);
        f_prime_approx = (f(x + h) - f(x - h)) / (2 * h); % 중심 차분법
        Errors(i, j) = abs(f_prime_approx - f_prime_actual(x)); % 실제 도함수 값과
비교하여 오차 계산
    end
end

% 3D 시각화
figure;
surf(X, H, Errors, 'EdgeColor', 'none');
set(gca, 'ZScale', 'log', 'YScale', 'log'); % y축과 z축을 로그 스케일로 설정
title('중심 차분법을 사용한 수치 미분의 오차 3D 시각화');
xlabel('x 값');
ylabel('구간 간격 h');
zlabel('오차');
colorbar;
grid on;
view(3);
```



그래프설명

- **x축**: x 값의 범위 (0.1부터 1까지)
- **y축**: 구간 간격 h (로그 스케일로 표시)
- **z축 (오차)**: 오차의 크기 (로그 스케일로 표시)
- **색상 막대**: 오차의 크기를 색상으로 표현하여 시각적으로 구분합니다.

구간 간격 **h**의 영향:

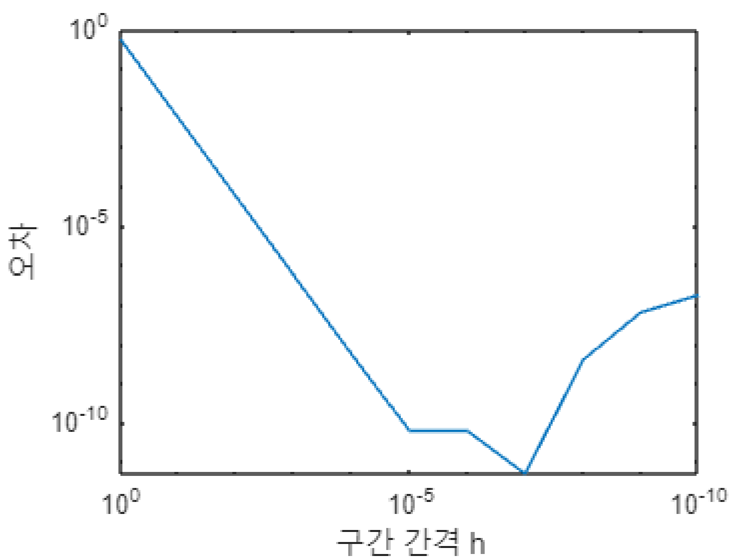
- h가 매우 작을 때 반올림 오차로 인해 오차가 증가하는 현상이 보입니다.
- 중간 영역에서 오차가 최소화되는 구간이 나타나며, 이때가 가장 정확한 수치 미분 결과를 제공합니다.
- h가 커지면 절단 오차가 증가하여 전체 오차가 커집니다.

색상 변화:

- 색상 막대를 통해 오차의 크기를 쉽게 비교할 수 있습니다.
- 오차가 클수록 색상이 밝게 표시되고, 오차가 작을수록 어둡게 표시됩니다.

```
format long
x = 1;
n = 11;

func = @(x) -0.1*x^4 - 0.15*x^3 - 0.5*x^2 - 0.25*x + 1.2;
dfunc = @(x) -0.4*x^3 - 0.45*x^2 - x - 0.25;
dftrue = dfunc(x);

H = 10.^(-0:-1:-(n-1)); % 벡터의 길이가 n이 되도록 수정
D = zeros(1, n);
E = zeros(1, n);

for i = 1:n
```

```
    h = H(i); % 구간 간격
    D(i) = (func(x + h) - func(x - h)) / (2*h); % finite difference
    E(i) = abs(dftrue - D(i)); % 오차
end

%% Figure
figure1 = figure;
axes1 = axes('Parent', figure1);
loglog(H, E);
set(axes1, 'XDir', 'reverse'); % x축 반전
xlabel('구간 간격 h')
ylabel('오차')
```



문제

f(x)=cosx를 $x=\frac{\pi}{4}$에서의 값을 기준으로 $n=0$부터 $n=4$까지 Taylor 급수로 $x=\frac{\pi}{3}$에서 근사

`taylor(f, var, a, 'Order', n)`: 함수 `f`에 대해 변수 `var`의 주변 a에서 n-1차까지의 Taylor 급수를 계산합니다.

```
% Symbolic Math Toolbox를 이용한 Taylor 급수 전개

% 심볼릭 변수 정의
syms x

% 함수 정의
f = cos(x);

% Taylor 급수 전개 (x = pi/4 주변에서 taylor 급수 5개항, 즉 4 차수까지)
taylor_expansion = taylor(f, x, pi/4, 'Order', 5);

% 결과 출력
```

```
disp('Taylor 급수 전개 (x = pi/4에서 n = 4 차수까지):');
```

```
Taylor 급수 전개 (x = pi/4에서 n = 4 차수까지):
```

```
disp(taylor_expansion);
```

$$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{2}-\frac{\sqrt{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{4}+\frac{\sqrt{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{12}+\frac{\sqrt{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4}{48}$$

```

% 근사값 계산 (x = pi/3에서)
approx_value = double(subs(taylor_expansion, x, pi/3));
disp(['x = pi/3에서의 근사값: ', num2str(approx_value)]);
```

```
x = pi/3에서의 근사값: 0.50001
```

```

% 실제 값과 비교
actual_value = cos(pi/3);
disp(['x = pi/3에서의 실제 값: ', num2str(actual_value)]);
```

```
x = pi/3에서의 실제 값: 0.5
```

```
disp(['오차: ', num2str(abs(actual_value - approx_value))]);
```

```
오차: 7.5508e-06
```

Taylor 급수에서 잔여항 R_n을 정확히 측정하기 위해서는 일반적으로 실제 함수의 값이 필요합니다. 그러나 실제 값이 없을 때, 잔여항의 최대 크기를 추정하거나, R_n의 상한을 구하는 방법이 있습니다. 이는 주로 미분의 평균값 정리와 함수의 $(n+1)$차 미분을 이용하여 이론적으로 오차를 추정하는 방식입니다.

1. 잔여항 R_n의 이론적 상한

- Taylor 급수의 잔여항은 다음과 같이 표현될 수 있습니다:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

- 여기서 ξ는 a와 x 사이의 어떤 점이고, $f^{(n+1)}(\xi)$는 함수의 (n+1)차 미분입니다.
- 이 식을 통해 R_n의 최대값을 추정할 수 있습니다. 특히 $f^{(n+1)}(x)$의 최대값을 사용하면, 잔여항의 상한을 구할 수 있습니다.

2. 오차 상한 추정 방법

1. **(n+1)**차 미분의 최대값 찾기:

- 주어진 구간에서 $f^{(n+1)}(x)$의 최대값 M을 찾습니다.

1. 오차 상한 계산:

- 오차의 최대값은 다음과 같이 추정할 수 있습니다:

$$|R_n| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

아래 코드는 $f(x) = \cos x$에 대해 $n = 4$차 Taylor 급수의 잔여항의 상한을 추정하는 방법을 보여줍니다.

```
% 심볼릭 변수 및 함수 정의
syms x
f = cos(x);

% Taylor 급수의 중심점과 근사할 점
a = pi/4;
x_value = pi/3;

% (n+1)차 미분
n = 4;
f_n1 = diff(f, n+1);

% 구간에서의 (n+1)차 미분의 최대값 찾기
% x = a와 x = x_value 사이에서 f_n1의 최대값 추정
max_f_n1 = double(max(abs(subs(f_n1, x, linspace(a, x_value, 1000)))));

% 잔여항의 상한 계산
Rn_bound = (max_f_n1 / factorial(n+1)) * abs(x_value - a)^(n+1);

% 결과 출력
fprintf('잔여항의 상한 (n=4): %.6e\n', Rn_bound);
```

```
잔여항의 상한 (n=4): 8.875494e-06
```