LU 분해법(LU Decomposition)

생성자	재 재환 김
태그	엔지니어링

1. LU 분해법의 이론

LU 분해법은 A라는 행렬을 두 개의 삼각 행렬 L과 U로 분해하는 방법입니다. LU 분해는 다음과 같이 정의됩니다:

$$A = LU$$

- A: 주어진 $n \times n$행렬.
- L: 하삼각 행렬 (lower triangular matrix), 주 대각선 위의 모든 성분이 1이며 나머지는 모두 0입니다.
- U: 상삼각 행렬 (upper triangular matrix), 주 대각선 아래의 성분이 모두 0입니다.

LU 분해법은 선형 시스템 $A \cdot x = b$를 해결할 때 매우 유용합니다. LU 분해를 사용하면 두 단계로 문제를 나눌 수 있습니다:

1. **전진 대입(Forward Substitution)**: $L \cdot y = b$를 풀어 중간 값 y를 구합니다.
2. **후진 대입(Backward Substitution)**: $U \cdot x = y$를 풀어 최종 해 x를 구합니다.

---

2. LU 분해법의 수식

2.1 LU 분해 과정

주어진 행렬 A를 하삼각 행렬 L과 상삼각 행렬 U로 분해하는 과정은 Gauss 소거법을 기반으로 합니다. 행렬 A에 대해 다음과 같은 행렬 분해를 수행합니다:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = L \cdot U$$

여기서 L과 U는 각각 다음과 같은 형태를 가집니다:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

LU 분해 과정은 다음 수식에 따라 이루어집니다:

- **상삼각 행렬 U의 계산**:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad (i \leq j)$$

- **하삼각 행렬 L의 계산**:

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}}{u_{ii}} \quad (i > j)$$

2.2 LU 분해를 통한 해법

LU 분해법을 사용하여 선형 방정식 $A \cdot x = b$를 푸는 과정은 두 단계로 나뉩니다.

1. **전진 대입 (Forward Substitution)**:

$$L \cdot y = b$$

   하삼각 행렬 L에 대해 전진 대입을 수행하여 중간 값 y를 구합니다.

   각 y는 다음과 같이 계산됩니다:

$$y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k$$

2. **후진 대입 (Backward Substitution)**:

$$U \cdot x = y$$

   상삼각 행렬 U에 대해 후진 대입을 수행하여 최종 해 x를 구합니다.

   각 x는 다음과 같이 계산됩니다:

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k}{u_{ii}}$$

---

3. 구체적인 사례: LU 분해를 이용한 선형 방정식 풀이

문제 설정

다음의 3x3 행렬 A와 우변 벡터 b가 주어졌다고 합시다.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 6 & 18 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

이 문제를 LU 분해법으로 풀어 해 x를 구해봅시다.

3.1 LU 분해 과정

1. **상삼각 행렬 U와 하삼각 행렬 L 계산**:

   첫 번째 행은 그대로 U에 들어갑니다:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

   이제 L을 계산합니다. 첫 번째 열을 사용하여 l_{21}과 l_{31}를 계산합니다:

$$l_{21} = \frac{4}{2} = 2, \quad l_{31} = \frac{6}{2} = 3$$

   두 번째 행에서 u_{22}, u_{23}를 계산합니다:

$$u_{22} = 7 - 2 \times 3 = 1, \quad u_{23} = 1 - 2 \times 1 = -1$$

   마지막으로 l_{32}와 u_{33}를 계산합니다:

$$l_{32} = \frac{18 - 3 \times 3}{1} = 9, \quad u_{33} = 5 - 3 \times 1 - 9 \times (-1) = 11$$

   결과적으로 L과 U는 다음과 같이 분해됩니다:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

3.2 전진 대입 (Forward Substitution)

첫 번째로 $L \cdot y = b$를 풀어 중간 값 y를 구합니다.

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 3 - 2 \times 1 = 1, \quad y_3 = 5 - 3 \times 1 - 9 \times 1 = -7$$

따라서, y는 다음과 같습니다:

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

3.3 후진 대입 (Backward Substitution)

다음으로 $U \cdot x = y$를 풀어 최종 해 x를 구합니다.

$$x_3 = \frac{-7}{11} = -\frac{7}{11}$$

$$x_2 = \frac{1 - (-1) \times \left(-\frac{7}{11}\right)}{1} = \frac{4}{11}$$

$$x_1 = \frac{1 - 3 \times \frac{4}{11} - 1 \times \left(-\frac{7}{11}\right)}{2} = \frac{9}{11}$$

따라서 최종 해 x는 다음과 같습니다:

$$x = \begin{bmatrix} \frac{9}{11} \\ \frac{4}{11} \\ -\frac{7}{11} \end{bmatrix}$$

---

4. LU 분해법의 실제 적용 사례

4.1 구조 해석

- 유한 요소법(Finite Element Method, FEM)에서 LU 분해는 구조물 해석에 널리 사용됩니다. 대규모 선형 방정식 시스템을 효율적으로 해결하여 시간과 계산 비용을 절감합니다.
- **예시**: 고층 건물의 지지 구조 해석 시 하중 분포와 변형 계산 과정에서 발생하는 대규모 선형 시스템을 LU 분해법으로 해결합니다.

4.2 전기회로 해석

- 전기회로 해석에서 LU 분해법은 회로망 방정식을 푸는 데 사용됩니다. 특히 대규모 회로망 분석 시 발생하는 선형 시스템을 효율적으로 해결합니다.
- **예시**: 복잡한 전기회로에서 각 노드의 전압을 구하기 위한 회로 방정식 해결에 LU 분해법을 활용합니다.

4.3 열전도 문제

- 2차원 열전도 방정식을 유한 차분법으로 풀 때 LU 분해법이 유용합니다. 대규모 열 전달 문제를 수치적으로 해결할 때, 행렬 시스템을 효율적으로 분해하여 빠른 계산이 가능합니다.
- **예시**: 열이 분포된 금속판의 각 지점 온도 계산 시 LU 분해법을 통해 계산 시간을 단축할 수 있습니다.

결론

LU 분해법은 선형 방정식 시스템을 효율적으로 해결하는 강력한 도구입니다. 행렬 분해를 통해 계산을 단순화하고, 반복 계산에서 중복을 피해 계산 비용을 절감합니다. 구조 해석, 회로 해석, 열전도 문제 등 다양한 분야에서 실질적으로 응용되고 있습니다.