LU 분해(LU Decomposition)의 증명

생성자	재 재환 김
태그	엔지니어링

$$A = LU$$

여기서:

- L은 하삼각 행렬 (lower triangular matrix)로, 주 대각선 위의 성분은 모두 0이고, 나머지는 적절한 값을 갖습니다.
- U는 상삼각 행렬 (upper triangular matrix)로, 주 대각선 아래의 성분은 모두 0입니다.

1. LU 분해 정의

LU 분해는 주어진 행렬 A를 두 개의 삼각 행렬 L과 U로 나누는 것을 의미합니다:

$$A = L \cdot U$$

행렬 A는 $n \times n$ 크기의 행렬이며, 각 원소는 A_{ij}로 표시됩니다. 목표는 A를 다음과 같은 두 행렬의 곱으로 표현하는 것입니다:

- LLL은 하삼각 행렬로 다음과 같은 구조를 가집니다:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

  여기서, L의 대각선 성분은 모두 1로 놓습니다(단위 하삼각 행렬).

- U는 상삼각 행렬로 다음과 같은 구조를 가집니다:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

---

2. LU 분해 유도 과정

LU 분해는 **Gauss 소거법**을 이용하여 행렬을 하삼각 행렬과 상삼각 행렬로 변환하는 과정에서 유도됩니다. 이를 단계적으로 설명해보겠습니다.

2.1 행렬 분해 가정

행렬 A를 하삼각 행렬 L과 상삼각 행렬 U로 나눌 수 있다고 가정합니다:

$$A = L \cdot U$$

이 때, 각 성분을 전개하여 계산하면:

$$A = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

행렬 곱을 전개하면 다음과 같은 결과가 나옵니다:

$$A = \begin{bmatrix} l_{11}u_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} & \cdots & l_{11}u_{1n} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + l_{22}u_{22} & l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} & \cdots & l_{21}u_{1n} + l_{22}u_{2n} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33}u_{33} & \cdots & l_{31}u_{1n} + l_{32}u_{2n} + l_{33}u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1}u_{11} & l_{n1}u_{12} + l_{n2}u_{22} & l_{n1}u_{13} + l_{n2}u_{23} + l_{n3}u_{33} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} l_{nk}u_{kn} \end{bmatrix}$$

이제 행렬의 각 원소를 비교하여 L과 U의 요소들을 차례로 계산할 수 있습니다.

2.2 하삼각 행렬 L과 상삼각 행렬 U 계산

각 요소를 비교하며 다음과 같은 규칙을 도출할 수 있습니다:

- **첫 번째 열에서 하삼각 행렬 L의 성분 계산:**

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}, \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}, \quad \cdots, \quad l_{n1} = \frac{a_{n1}}{u_{11}}$$

- **상삼각 행렬 U의 첫 번째 행 성분 계산**:

$$u_{11} = a_{11}, \quad u_{12} = a_{12}, \quad u_{13} = a_{13}, \quad \cdots, \quad u_{1n} = a_{1n}$$

- **두 번째 열에서 상삼각 행렬 U와 하삼각 행렬 L 계산**:
  상삼각 행렬의 두 번째 행 성분은 다음과 같습니다:

  $$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12}$$

  그 외에도,

  $$u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13}, \quad u_{24} = a_{24} - l_{21}u_{14}, \quad \cdots$$

이러한 방식으로 상삼각 행렬 U와 하삼각 행렬 L의 각 성분을 차례대로 계산할 수 있습니다.

---

3. LU 분해의 계산적 절차

LU 분해를 통해 L과 U를 계산하는 과정은 **Gauss 소거법**과 비슷합니다. LU 분해는 다음과 같은 절차를 따릅니다:

1. **Gauss 소거법을 사용하여 상삼각 행렬 U 계산**:

- Gauss 소거법을 통해 A를 상삼각 행렬 U로 변환합니다.

2. **하삼각 행렬 L의 계산**:
   - Gauss 소거법 과정에서 사용된 소거 상수들을 모아서 하삼각 행렬 L을 구성합니다. L의 대각선 요소는 1로 설정합니다.

---

4. 예시를 통한 LU 분해

구체적인 3×3 행렬 A에 대해 LU 분해를 수행해보겠습니다.

주어진 행렬 A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 6 & 18 & 5 \end{bmatrix}$$

4.1 **첫 번째 열에서 하삼각 행렬 계산**:

첫 번째 열의 값은 그대로 L의 첫 번째 열 성분이 됩니다:

$$l_{11} = 1, \quad l_{21} = \frac{4}{2} = 2, \quad l_{31} = \frac{6}{2} = 3$$

4.2 상삼각 행렬의 첫 번째 행 계산:

상삼각 행렬의 첫 번째 행 성분은 원래 행렬 A의 첫 번째 행에서 가져옵니다:

$$u_{11} = 2, \quad u_{12} = 3, \quad u_{13} = 1$$

4.3 두 번째 행의 상삼각 및 하삼각 행렬 계산:

- 상삼각 행렬 U의 두 번째 행:

$$u_{22} = 7 - 2 \times 3 = 1, \quad u_{23} = 1 - 2 \times 1 = -1$$

- 하삼각 행렬 L의 두 번째 열:

$$l_{22} = 1, \quad l_{32} = \frac{18 - 3 \times 3}{1} = 9$$

4.4 세 번째 행의 상삼각 행렬 계산:

$$u_{33} = 5 - 3 \times 1 - 9 \times (-1) = 11$$

최종적으로:

- 하삼각 행렬 L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

- 상삼각 행렬 U:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

5. LU 분해의 장점

- **계산 효율성**: LU 분해는 일반적인 선형 시스템을 푸는 데 매우 효율적입니다. 특히 다수의 선형 시스템을 같은 계수 행렬로 반복해서 풀어야 할 경우, LU 분해는 매우 유리합니다.
- **수치적 안정성**: LU 분해는 수치적으로 안정적인 방법으로, 특히 피봇팅(pivoting)을 사용하면 정확도를 더욱 높일 수 있습니다.

결론

LU 분해는 주어진 행렬을 하삼각 행렬과 상삼각 행렬로 분해하여 선형 시스템을 해결하는 데 매우 유용한 방법입니다. Gauss 소거법을 기반으로 한 이 방법은 계산량을 줄이고, 다수의 선형 방정식을 효율적으로 해결할 수 있는 강력한 도구입니다.