# 유한차분법 (FDM)과 유한요소법 (FEM)

## 1. 유한차분법 (Finite Difference Method, FDM)

### 이론

정의: 유한차분법은 미분 방정식의 연속적인 미분을 차분으로 근사하여 푸는 방법입니다.  
원리: 도함수를 유한한 차분으로 근사하는 원리에 기반을 두고 있습니다.  
예를 들어, 함수 u(x)의 일차 도함수는 다음과 같이 근사할 수 있습니다:  
du/dx ≈ (u(x + Δx) - u(x)) / Δx  
장점: 구현이 비교적 간단하고, 균등한 격자(grid) 구조에 적합합니다.  
단점: 복잡한 지형이나 경계 조건을 처리하기 어려우며, 정밀도를 높이기 위해 많은 계산이 필요합니다.

### 수식

편미분 방정식의 경우, u\_t = u\_xx와 같은 1차 미분 방정식을 고려해보면:  
du/dt ≈ (u(t + Δt, x) - u(t, x)) / Δt  
d²u/dx² ≈ (u(t, x + Δx) - 2u(t, x) + u(t, x - Δx)) / (Δx)²  
이러한 근사를 사용하여 미분 방정식을 대수 방정식으로 변환하고, 이산적인 시간과 공간에서 해를 구합니다.

### 구체적인 사례: 1D 열전도 방정식

1차원 열전도 방정식은 다음과 같습니다:  
du/dt = α \* d²u/dx²  
FDM을 사용하여 이를 풀면 다음과 같이 근사할 수 있습니다:  
u\_i^{n+1} = u\_i^n + (α \* Δt / (Δx)²) \* (u\_{i+1}^n - 2u\_i^n + u\_{i-1}^n)

### MATLAB에서 FDM 사용 예제

MATLAB 코드:  
  
% 파라미터 설정  
L = 1; % 막대 길이  
T = 0.1; % 총 시간  
nx = 50; % 공간 격자 수  
nt = 500; % 시간 스텝 수  
alpha = 0.01; % 열 확산 계수  
dx = L / (nx - 1); % 공간 스텝 크기  
dt = T / (nt - 1); % 시간 스텝 크기  
  
% 초기 및 경계 조건  
u = zeros(nx, nt);  
x = linspace(0, L, nx);  
u(:, 1) = sin(pi \* x); % 초기 조건  
  
% FDM을 이용한 계산  
for n = 1:nt-1  
 for i = 2:nx-1  
 u(i, n+1) = u(i, n) + alpha \* dt / dx^2 \* (u(i+1, n) - 2 \* u(i, n) + u(i-1, n));  
 end  
end  
  
% 결과 시각화  
surf(linspace(0, T, nt), x, u);  
xlabel(시간);  
ylabel(위치);  
zlabel(온도);  
title(1D 열전도 방정식의 FDM 해);

## 2. 유한요소법 (Finite Element Method, FEM)

### 이론

정의: 유한요소법은 연속적인 미분 방정식을 분할하여 요소(Element)로 나누고, 각 요소에서 근사해를 구하는 방법입니다.  
원리: 문제 영역을 요소로 분할하고, 각 요소에서 약한 형태(Weak Formulation)를 통해 미분 방정식을 풀어 전체 영역의 근사해를 구합니다.  
장점: 복잡한 지형, 경계 조건, 비균등 격자 등에 대한 처리에 유리합니다.  
단점: 수식의 유도가 복잡하고, 구현이 어려울 수 있습니다.

### 수식

일반적인 2차 경계값 문제:  
-d/dx(k \* du/dx) = f on [a, b]  
  
FEM은 이를 요소별로 분할하고 약한 형태로 변환하여 근사해를 구합니다.  
∫\_a^b (k \* du/dx) \* (dv/dx) dx = ∫\_a^b f \* v dx  
여기서 v는 시험 함수(Test Function)입니다.  
요소의 크기, 수와 형상을 자유롭게 선택할 수 있어 복잡한 경계 조건과 구조에 대한 해석이 가능합니다.

### 구체적인 사례: 1D 푸아송 방정식

푸아송 방정식은 다음과 같습니다:  
-d²u/dx² = f  
  
FEM을 사용하여 이를 풀면 각 요소에서 선형 조합을 사용하여 해를 근사합니다.

### MATLAB에서 FEM 사용 예제 (PDE Toolbox 사용)

MATLAB에서 유한요소법을 직접 구현하기보다는 PDE Toolbox를 사용하는 것이 일반적입니다.  
다음은 PDE Toolbox를 이용하여 2D 푸아송 방정식을 푸는 예시입니다:  
  
% PDE 모델 생성  
model = createpde();  
  
% 영역 생성 및 지오메트리 추가  
R1 = [3,4,0,1,1,0,0,0,1,1];  
gd = [R1];  
sf = R1;  
ns = char(R1);  
g = decsg(gd,sf,ns);  
geometryFromEdges(model,g);  
  
% 경계 조건 설정  
applyBoundaryCondition(model,dirichlet,Edge,1:model.Geometry.NumEdges,u,0);  
  
% PDE 계수 설정  
specifyCoefficients(model,m,0,d,0,c,1,a,0,f,1);  
  
% 메시 생성  
generateMesh(model,Hmax,0.1);  
  
% PDE 풀기  
results = solvepde(model);  
  
% 결과 시각화  
pdeplot(model,XYData,results.NodalSolution,ZData,results.NodalSolution);  
xlabel(X);  
ylabel(Y);  
title(2D 푸아송 방정식의 FEM 해);