

큐잉 이론과 대기행렬 공식에 대한 자세한 설명

1. 큐잉 이론의 기본 개념

1.1 큐잉 시스템 구성 요소

- 고객(Entities): 서비스를 받기 위해 도착하는 객체(사람, 물건 등).
- 서버(Servers): 고객에게 서비스를 제공하는 주체.
- 큐(Queue): 고객이 서비스를 기다리는 대기열.
- 서비스 규칙: 서비스가 제공되는 규칙(예: FCFS, LCFS, SIRO 등).

1.2 큐잉 시스템의 유형

- $M/M/1$ 시스템: 단일 서버, 도착 및 서비스 시간이 모두 포아송 분포를 따름.
- $M/M/c$ 시스템: c 개의 서버, 도착 및 서비스 시간이 모두 포아송 분포를 따름.
- $M/G/1$ 시스템: 단일 서버, 도착 시간이 포아송 분포, 서비스 시간은 임의의 일반 분포.
- $G/G/1$ 시스템: 도착 및 서비스 시간이 임의의 일반 분포를 따름.

2. 대기행렬 모델의 주요 변수

2.1 람다(λ): 도착률

- 단위 시간당 시스템에 도착하는 평균 고객 수.

2.2 뮤(μ): 서비스율

- 단위 시간당 하나의 서버가 처리할 수 있는 평균 고객 수.

2.3 로(ρ): 시스템 이용률

$$\rho = \frac{\lambda}{c \times \mu}$$

- 서버의 활용도를 나타냅니다. 값이 1에 가까울수록 혼잡한 시스템을 의미합니다.

2.4 L_q : 시스템 내 평균 대기 고객 수

- 대기열에 있는 평균 고객 수.

2.5 L : 시스템 전체의 평균 고객 수

$$- L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

2.6 W_q : 고객의 평균 대기 시간

- 대기열에서 서비스를 기다리는 평균 시간.

2.7 W : 시스템에서의 총 체류 시간

$$- W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

3. $M/M/1$ 대기행렬 모델 공식 (가장 일반적인 모델)

- 평균 시스템 내 고객 수 (L):

$$L = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)}$$

- 평균 대기 고객 수 (L_q):

$$L_q = \frac{\lambda^2}{[\mu(\mu - \lambda)]}$$

- 평균 시스템 내 체류 시간 (W):

$$W = \frac{1}{(\mu - \lambda)}$$

- 평균 대기 시간 (W_q):

$$W_q = \frac{\lambda}{[\mu(\mu - \lambda)]}$$

4. $M/M/c$ 대기행렬 모델 공식

- c : 서버의 수

- 시스템 안정 조건: $\rho < 1$

- P_0 : 시스템이 비어있는 확률

$$P_0 = \left[\sum \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!} \frac{1}{(1-\rho)} \right]^{-1}$$

- 평균 대기 고객 수 (L_q):

$$L_q = \left[\frac{(\lambda/\mu)^c \rho}{c!(1-\rho)^2} \right] P_0$$

- 평균 시스템 내 고객 수 (L):

$$L = L_q + \lambda/\mu$$

- 평균 대기 시간 (W_q):

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

- 평균 체류 시간 (W):

$$W = W_q + 1/\mu$$

5. M/G/1 대기행렬 모델

서비스 시간이 임의의 일반 분포를 따를 때 활용하는 모델입니다.

- L_q : Pollaczek-Khinchine 공식으로 표현됩니다.

$$L_q = \frac{\lambda^2 E[S^2]}{2(1-\rho)}$$

여기서 $E[S^2]$ 는 서비스 시간의 분산입니다.

6. 실제 사례 적용 예시

6.1 은행 창구 시스템 (M/M/3 모델)

- 고객은 평균적으로 5 분마다 도착 ($\lambda = 12/60$).
- 각 창구는 평균적으로 15 분에 한 명을 처리 ($\mu = 4/60$).
- 서버 수 $c = 3$.

적용: $\rho = \lambda / (c \times \mu) = 0.6$, 안정적인 시스템.

L_q, L, W_q, W 를 공식에 따라 계산.

6.2 콜센터 운영 (M/G/1 모델)

- 전화는 평균적으로 1 분마다 걸려옴 ($\lambda = 60/60 = 1$).

- 상담 시간의 평균은 4 분, 분산은 2 분.

적용: Pollaczek-Khinchine 공식 사용하여 L_q 계산.

7. 큐잉 이론의 의의

- **서비스 효율 최적화:** 시스템의 활용도를 높이고, 고객 대기 시간을 줄일 수 있습니다.

- **비용 절감:** 인력 및 자원 배치의 최적화를 통해 운영 비용을 줄입니다.