한국증권학회지 제38권 2호 (2009) 137-176

옵션시장에서 GARCH계열 모형들의 성과 비교에 관한 연구*

강 장 구 (KAIST)

류 두 진 (KAIST) **

< 요 약 >

본 논문에서는 ARCH 모형을 포함한 여러 표준 GARCH계열 모형들의 실증성과를 Duan (1995)의 GARCH 옵션가격결정모형의 틀 하에서 옵션에 대한 가격결정성과와 헤지성과의 측면에서 살펴보았다. 논문의 주요 실증분석 결과는 아래와 같다. 첫째, 옵션가격 정보를 이용하여 모형들을 추정하면 기초자산 수익률만을 사용한 경우 보다 가격결정력 및 헤지성과가 대체로 향상된다. 단, 옵션가격 사용시 가격결정력의 경우 향상의 정도가 큰 반면, 헤지성과의 경우 향상의 정도가 상대적으로 작다. 둘째, GARCH계열 모형들은 본 연구에서 벤치마크(benchmark)로 비교한, 기초자산의 등분산성을 가정하는 이산(discrete) 블랙-숄즈(Black-Scholes) 모형보다 가격결정력 및 헤지성과가 우수하다. 셋째, 기초자산 수익률만을 이용하여 추정했을 때, 내가격 및 등가격 옵션에 대해서는 GARCH 모형의 가격결정성과가 가장 우수한 반면, 외가격 옵션에 대해서는 비대칭 변동성반응을 구조화 할 수 있는 모형들의 가격결정성과가 우수하다. 넷째, 옵션가격을 사용하여 추정했을 때, 변동성의 비대칭 반응을 구조화하는 모형들이 상대적으로 실증성과가 우수하다. 또한 모형이 복잡해질수록 대체로 가격결정성과가 좋으나, GARCH-News 모형처럼 아주 복잡한 모형 보다는, 단순하면서도 적절히 유연한 형태로 비대칭 변동성반응을 모형화할 수 있는 NGARCH와 같은 모형의 가격결정성과가 가장 우수하다. 다섯째, 기초자산의 수익률만을 이용하여 추정한 경우는 GARCH 모형이, 옵션가격을 이용하여 추정한 경우는 ARCH 모형의 헤지성과가 대체로 우월하다. 이는 복잡한 모형이 언제나 헤지를 잘 하는 것은 아니며, 기초자산의 경로와 변동성의 상관관계 및 변동성 군집현상을 적절히 파악해 낼 수 있는 단순한 모형들의 헤지성과가 뛰어남을 의미한다.

핵심 단어: GARCH, GARCH 옵션가격결정모형, 가격결정성과, 헤지성과, KOSPI 200 옵션

* 본 논문을 위해 유익한 조언을 해주신 익명의 심사위원님들과 한국외국어대학교의 김솔 교수님, KAIST 경영대학의 박재원 박사님, 한림대학교의 윤선중 교수님께 감사 드립니다.

** 연락담당 저자. 주소: 서울특별시 동대문구 회기로 87 KAIST 경영대학 S391, KAIST 경영대학, 130-722; E-mail: sharpjin@business.kaist.ac.kr; Tel: 02)958-3693; Fax: 02)958-3604.

투고일 2009-02-06; 수정일 2009-05-16; 게재확정일 2009-06-11

1. 서론

파생상품의 가격을 결정하기 위해서는 기초자산의 확률과정을 올바르게 도출해야 하므로 자산의 확률과정을 정확하게 구하려는 시도는 이론 및 실증적으로 중요한 문제이다. 특히 시장에서 관찰되는 자산의 변동성의 특성을 잘 파악해내는 것은 변동성의 예측을 통한 위험관리 및 자산운용의 측면뿐 아니라 기초자산의 변동성에 그 가치가 의존하는 파생상품들의 헤지와 가격결정에 있어서 매우 중요한 문제이다. 일반적으로 블랙-숄즈(Black-Scholes) 옵션가격결정모형을 비롯한 고전적인 옵션가격결정모형에서는 자산의 수익률이 로그-정규분포(log-normal distribution)로 가정되고 변동성은 시간에 대해 변하지 않는 것으로 생각된다. 하지만 실제 시계열 자료를 살펴보면 정규분포 가정과는 달리 수익률 분포가 두터운 꼬리를 갖고, 수익률의 변동성은 지속성을 가짐으로써 변동성 군집현상이 관찰된다. 또한 1980년대 이후에 시장에 불확실성과 위험이 더욱 커지게 되고 80년대 후반의 미국 주식시장붕괴(stock market crash)등의 사건으로 인하여 시간에 대해 변하는, 즉, 시간가변적인(time-varying) 변동성을 더욱 정확히 모형화 할 필요성이 제기 되었다.

재무경제학분야의 많은 연구들이 기초자산의 변동성을 적절히 모형화하고 추정하여 현실에서 관찰되는 수익률분포를 잘 설명하고자 하였다. 이중에서도 Engle(1982)이 제시한 ARCH(Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) 모형과 이를 일반화한 Bollerslev(1986)의 GARCH(Generalized ARCH) 모형은 시장에서 관찰되는 수익률 및 변동성의 특성을 비교적 잘 포착해낸다고 알려져 있다. 이들의 ARCH/GARCH 모형은 수익률의 변동성이 과거의 변동성에 의존하여 결정되도록 함으로써 무조건부 분산이 시간에 대해 불변이라 할지라도 조건부 분산은 과거사건에 의존하여 변하도록 모형화 하였다.

변동성의 추정 및 예측에 획기적이고도 효율적인 ARCH/GARCH 모형이 등장한 이후에 이를 확장한 GARCH계열 모형들에 대한 연구가 매우 활발히 진행되었다. Engle and Bollerslev(1986)와 Higgins and Bera(1992)는 비선형 GARCH 모형을 사용하였고, Geweke(1986)는 Multiplicative GARCH를 제안하였다. Nelson(1991)은 모수들에 대한 제약조건 없이도 조건부 분산이 항상 양의 값을 갖게 되는 지수형(exponential) GARCH (EGARCH)를 사용하여 CRSP 가치가중 시장지수(value-weighted market index)에 대한 위험보상(risk premium) 수준을 추정하였다.

Bollerslev(1986)의 GARCH 및 초기의 확장모형들은 자산수익률의 두터운 분포꼬리와 변동성 군집현상을 성공적으로 모형화 하였으나, 기본적으로 조건부 분산이 과거 오차항들의 크기에만 의존하므로 현실에서 관찰되는 수익률 분포의 왜도(skewness)나 수익률과 변동성의 분산 및 공분산 사이의 음의 상관관계를 잘 포착해 내지는 못하는 단점이 있다. 현실에서 관찰되는 수익률과 변동성간의 음의 상관관계는 비대칭 변동성반응과 관련이 있

고, 이는 레버리지효과 이론(leverage effect theory) 및 변동성 환류효과 이론(volatility feedback theory) 혹은 변동성 보상 이론(volatility premium theory)에 의하여 뒷받침 된다. Black(1976)은 주식수익률의 하락이 부채비율을 상승시켜 위험이 증가하게 되고, 이로 인해 가격의 변동성이 커진다는 레버리지효과 이론을 제시하였고, Pindyck(1984), French, Schwert and Stambaugh(1987)및 Campbell and Hentschel(1992)등은 미래 변동성의 증가가 예측되면 주식수익률이 하락한다는 변동성 환류효과 혹은 변동성보상 이론[1)]을 조사하였다. Glosten, Jagannathan, and Runkle(1993)은 조건부 분산이 과거 오차항의 방향성에 따른 비대칭적 효과도 잘 파악해낼 수 있도록 변동성 방정식을 모형화 함으로써, 비대칭 변동성반응을 포착해낼 수 있는 GJR-GARCH를 제시하였다. 이외에도 Engle and Ng(1993)의 비대칭 NGARCH나, Zakoian(1994)의 Threshold GARCH 등이 레버리지효과를 반영할 수 있도록 모형화 되었다. 시장의 좋은 뉴스와 나쁜 뉴스가 미래 변동성에 다른 예측력을 갖도록 하는 이러한 부류의 비대칭 혹은 레버리지 GARCH 계열 모형은 기초자산 수익률의 음의 왜도를 잘 묘사하고, 이로 인해 대칭분포를 가정하는 블랙-숄즈 모형에서의 기초자산 분포가정에 비해 현실에서 관찰되는 옵션가격을 더 정확하게 설명할 가능성이 있다.

Hentschel(1995)과 Duan(1997)은 확장 GARCH 모형을 제시하였는데 이들의 확장 GARCH 모형들은 모수의 제약에 따라 기존에 존재하는 여러 GARCH계열 모형들을 표현할 수 있는 보다 일반적이고 유연한 형태의 GARCH 모형이다. Hentschel(1995)은 GARCH계열 모형들을 조건부 분산에 대한 방정식을 사용하는 표준(standard) GARCH 계열, 조건부 표준편차에 대한 방정식을 사용하는 절대가치(absolute value) GARCH (AGARCH)계열, 그리고 조건부 분산의 대수 로그에 대한 방정식을 사용하는 지수형 GARCH계열로 분류하였다. Duan(1997)은 확장 GARCH 모형의 모수들이 만족해야 할 비음 조건 및 안정성 조건을 수학적으로 유도함으로써 GARCH계열 모형들의 모수를 정확하게 추정하기 위한 조건을 제시하였다.

GARCH계열 모형에 대한 기존의 실증연구들은 위에서 소개한 다양한 GARCH계열 모형들에 대하여 주로 내표본 적합성이나 주식시장에서 변동성 예측력의 비교를 통해 그 실증성과를 비교하곤 한다. Pagan and Schwert(1990)은 대공황 이전인 1834년부터 1925년까지의 미국 주식시장 자료를 사용하여 ARCH, GARCH, EGARCH의 성과를 비교하고, 비대칭 반응현상을 잡아낼 수 있는 EGARCH 모형이 주식시장에서 성과가 좀더 우수함을 보였다. Franses and Dijk(1996)는 GARCH 모형과 레버리지효과를 잡아낼 수 있는 비대

1) Christie(1982)와 Schwert(1989)등은 비대칭 변동성반응현상이 레버리지효과 이론만으로는 불충분하게 설명된다고 주장하였다. Bekart and Wu(2000), Wu(2001)등의 연구는 변동성 보상 이론이 적용될 때 현실에서 관찰되는 비대칭 변동성반응을 더 잘 설명할 수 있다고 주장하였다.

칭 NGARCH 및 GJR-GARCH 모형의 성과를 주가지수의 변동성 예측력의 측면에서 비교하였다. 이들은 1987년 주식시장붕괴와 같은 사건을 포함하지 않는다면 NGACRH 모형의 성과가 GJR-GARCH 모형이나 GARCH보다 우수하다고 주장하였다. 또한, Maheu and Mccurdy(2004)는 수익률의 조건부 분산이 포아송(Poisson) 분포에 의해 발생되는 도약에 의존하도록 하는 GARCH-Jump 모형을 제시하고 이들의 모형이 기존 모형에 비해 개별주식의 변동성 예측력을 향상시키고, 특히 주식 수익률의 큰 변화 후에 이러한 성과의 향상이 두드러진 다고 주장하였다.

한편, 변동성의 정확한 추정은 변동성 자체의 외표본 예측을 통한 위험관리나 자산운용에도 중요하게 사용되지만, 기초자산 수익률의 변동성에 민감한 파생상품의 가격결정에 있어서도 결정적인 역할을 한다. 만약 GARCH계열 모형을 사용하여 기초자산의 수익률의 변동성을 정확히 모형화할 수 있다면 옵션가격을 보다 더 정확하게 결정할 수 있을 것이다. 실제로 많은 연구들이 기초자산의 확률과정이 GARCH계열 모형을 따를 때 옵션가격이 어떻게 결정되는지를 보이고, 이러한 GARCH 옵션가격결정모형의 실증성과를 분석하였다. Duan(1995)은 기초자산의 확률과정이 GARCH 모형을 따를 때, 몬테-카를로(Monte-Carlo) 시뮬레이션을 사용하여 이론적인 옵션의 가격을 도출하는 방법을 제시하였고, 이를 시작으로 많은 GARCH 옵션가격결정모형들이 기초자산 변동성의 이분산성을 모형화 함으로써 좀더 정확하게 옵션의 가격결정을 하고, 기초자산의 분포를 단순한 등분산 로그-정규분포로 가정하는 블랙-숄즈 모형을 사용했을 때 나타나는 변동성 미소 및 조소현상, 단기 옵션의 저평가, 외가격 옵션의 저평가 등의 여러 이상현상(anomaly)을 설명하고자 하였다. Duan(1995)의 연구를 시작으로 Duan(1996), Hardle and Hafner(2000), Duan and Zhang(2001), Lehar, Scheicher and Schittemkopf(2002), Lehnert(2003), Yung and Zhang(2003), Stentoft(2005), Hsieh and Ritchken(2005)등의 연구들이 GARCH 옵션가격결정모형들의 실증성과를 분석하였다. 특히, Duan, Gauthier, and Simonato(1999)는 GARCH 옵션가격결정모형의 해석적 근사법을 제시하였고, Heston and Nandi(2000)는 GARCH 옵션가격결정모형의 폐쇄해를 제시하면서 S&P 500 주가지수 옵션시장에서 자신들의 모형이 ad-hoc 블랙-숄즈 모형에 비해 외가격 가격결정오차가 현저히 작음을 보였다. 이들은 레버리지효과와 변동성군집을 포함하는 것이 옵션가격결정성과에 큰 기여를 한다고 주장하였다. 또한 Duan, Ritchken, and Sun(2006)은 주식가격과 변동성에 점프가 있을 때의 근사적 GARCH 옵션가격결정모형을 제시하였다. 보다 최근의 연구로는 Duan, Ritchken, and Sun(2007)의 연구로서, 이들은 추계할인율(pricing kernel)에 점프를 도입하고, 자산 수익률과 변동성 사이에 상관관계가 있는 점프를 도입한 GARCH 옵션가격결정모형이 Daun(1995)의 초기모형이나, 보다 진보된 Christoffersen, Heston, and Jacobs(2006)의 IG(Inverse Gaussian)-GARCH 옵션가격결정모형은 물론, 이들 모형이 표현할 수 있는 Merton(1976)의 도약-확장(jump-diffusion) 모

형보다 옵션가격결정성과가 우월함을 보였다.

일반적으로 이와 같은 GARCH계열 옵션가격결정모형들은 변동성과 자산수익률간의 상관관계를 잘 파악해 내므로 외표본 가격결정성과가 좋고, 행사사격이나 만기에 따른 변동성 미소 및 조소 현상을 잘 설명한다고 알려져 있다. 또한, 블랙-숄즈 모형에 비해 외가격 옵션에 대한 가격 편의가 적다고 보고 되고 있다. 그리고 GARCH계열 모형이 왜도를 잘 잡아내도록 확장시키면 현실의 기초자산의 분포를 더 잘 설명할 수 있고, 옵션가격결정력 또한 대체로 향상되는 것으로 알려져 있다.

위에서 소개한대로, GARCH 옵션가격결정모형들에 대해서는 활발한 연구가 진행되었고 옵션가격결정력 측면에서 우수한 성과를 보고하고 있으나, GARCH계열 모형들의 직접적인 실증성과 비교에 대한 연구는 주로 주식시장에서의 내적 적합성과 변동성 예측력 등을 살펴보는데 그치고 있다. GARCH 모형들 자체를 옵션시장에 대한 실증성과와 연관 지어서 비교, 분석하는 연구는 거의 없고, Hentchel(1995)의 확장 GARCH 모형들이 표현할 수 있는 Hentchel-GARCH계열 모형들의 성과를 옵션에 대한 가격결정력과 관련 지어 살펴본 Christoffersen and Jacobs(2004)가 거의 유일한 연구이다. 옵션의 가치는 기초자산시장과 밀접하게 관련을 맺고 있으면서도, 옵션의 가격이 함의하는 기초자산의 변동성은 투자자들의 기대를 반영한다. 따라서 주식시장의 시계열 자료가 과거에 일어난 일에 대한 정보를 담고 있는 반면, 옵션시장은 투자자들의 기대치를 반영한 미래의(forward-looking) 정보를 담고 있다. 이러한 옵션시장의 성격은 GARCH계열 모형들의 실증성과를 서로 비교하는데 유용한 정보를 제공할 수 있다. 본 연구에서는 여러 표준 GARCH계열 모형들을 평가함에 있어서 전세계 파생상품 중 유동성이 가장 풍부한 KOSPI 200 옵션의 가격을 얼마나 잘 설명하는가와 이 옵션에 대한 헤지성과가 얼마나 우수한지를 기준으로 분석해 본다. 이러한 연구는 국내 옵션시장에 대하여 최초로 시도 되는 것이며, GJR-GARCH를 비롯한 비대칭 GARCH계열 모형들과 ARCH 모형 그리고 등분산성을 가정하는 이산(discrete) 블랙-숄즈 모형의 상대적인 실증성과를 옵션에 대한 가격결정성과와 헤지성과의 측면에서 살펴보는 최초의 연구가 될 것이다.[2)]

본 논문에서는 GARCH계열 모형의 평균방정식이 Duan(1995)의 GARCH 옵션가격결정모형에서 제시한 과정을 따른 다고 가정하며 이때의 평균방정식은 GARCH-M(GARCH-in-mean) 모형의 확장형태가 된다. 이 통일된 틀 하에서 분산방정식이 성과를 분석하고자 하는 표준 GARCH계열들을 따르도록 모형화 한다. 본 논문에서 살펴볼 표준 GARCH계열 모형들은 ARCH, GARCH, GJR-GARCH, NGARGH 및 Hentchel(1995)이 제시한 비대칭 뉴스를 반영하고 유연한 형태를 갖는 표준 GARCH(이하 GARCH-News)의 5개

2) S&P 500 콜 옵션시장에 대하여 GARCH계열 모형들의 성과를 비교하는 Christoffesen and Jacobs(2004)에서는 블랙-숄즈 모형, ARCH 및 GJR-GARCH 모형들의 실증성과는 살펴보지 않았고, 모형의 헤지성과 또한 논의되지 않는다.

모형이다. 이들의 상대적인 성과분석을 위해 조건부 분산이 상수 값을 갖는 GARCH(0, 0)을 벤치마크(benchmark)로 삼는다. 평균방정식이 Duan(1995)에서와 같고 분산방정식 GARCH(0, 0) 과정을 따르는 모형은 이산확률과정에서의 블랙-숄즈 확률과정으로 생각할 수 있다. 비대칭 NGARCH 모형은 Hentchel(1995)에서의 레버리지효과를 반영하고, GARCH-News 모형은 논문에서 비교할 다른 GARCH계열 모형들과 마찬가지로 오차항이 자승의 형태를 가지며, 안정성 조건을 분석적으로 풀어낼 수 있는 Hentchel(1995)의 표준 GARCH계열 모형 중 가장 복잡하고 유연한 형태로 시장에 도착하는 뉴스의 충격효과를 비대칭적으로 반영[3)]할 수 있다.

GARCH계열 옵션가격결정모형을 기초자산 수익률만을 이용하여 추정하면, 단순한 GARCH 모형이나, 변동성의 비대칭 반응현상을 반영할 수 있는 GJR-GARCH 모형의 실증성과가 우수했다. 옵션가격을 이용하여 모형을 추정하면 가격결정력 측면에서는 역시 변동성의 비대칭 반응현상을 반영할 수 있는 NGARCH 모형의 성과가 대체로 우수했으나, 헤지성과는 GARCH계열 모형 중 가장 단순한 형태의 모형인 ARCH 모형의 성과가 가장 우수했다. 한편, 가장 복잡한 형태의 GARCH계열 모형인 GARCH-News 모형의 성과는 옵션가격을 사용하여 추정했을 때 심내가격 및 심외가격 옵션에 대한 가격결정성과에서 우수한 결과를 나타냈다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 본 연구에서 사용되는 이론적 모형을 소개하고 모수의 추정 방법을 설명한다. 제 3장에서는 KOSPI 200 옵션시장의 특성 및 연구의 표본자료에 대하여 살펴본다. 제 4장에서는 옵션시장에서 GARCH계열 모형들의 실증성과를 제시한다. 제 5장은 결과에 대해 정리하고 추후 연구의 방향을 제시한다.

2. 이론적 모형 및 모수의 추정 방법

2.1 Duan(1995)의 GARCH 옵션가격결정모형

본 논문에서는 GARCH계열 모형들의 옵션시장에서의 실증성과를 통일된 틀 하에서 공정하게 조사하기 위하여 Duan(1995)의 GARCH 옵션가격결정모형을 기본적인 분석의 도구로 채택한다. 특히, Duan의 모형은 그 단순한 구조로 인하여, 변동성 구조의 역학(dynamics)을 표현하는 방식에 따라 분류된 GARCH계열 모형들의 성과를 분명하게 비교하는데 유리하다. Duan(1995)은 기초자산의 변동성이 GARCH과정을 따를 때 유럽형 옵션

3) GARCH-News 모형은 레버리지 관련 모수(θ)와 뉴스 관련 모수(κ)가 오차항에 대한 혁신함수(innovation function)를 각각 이동 시키고 기울기를 바꿈으로써 뉴스 충격 곡선(news impact curve)의 기울기를 결정하게 되고 이로 인해 보다 일반적이고 유연하게 비대칭 변동성반응 현상을 반영할 수 있다.

의 이론적인 가격을 도출하는 GARCH 옵션가격결정모형을 아래와 같이 제시하였다. 실제 측도(physical measure, P-measure)에서 기초자산의 수익률이 식 (1)과 같은 로그 정규분포를 따르고[4)] 조건부 분산이 식 (2)와 같이 오차항의 차수가 q이고 조건부 분산항의 차수가 p인 표준 *GARCH(p, q)*과정을 따른다고 가정한다.

평균방정식: $\ln\frac{S_t}{S_{t-1}} \equiv R_t = r + \lambda\sqrt{h_t} - \frac{1}{2}h_t + \varepsilon_t$ 단, $\varepsilon_t \mid I_{t-1} \sim N(0,\ h_t)$ (1)

분산방정식: $h_t = w + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p}\beta_i h_{t-i}$ (2)

GARCH 모형이 안정적으로 추정되고 장기변동성이 존재하기 위하여 모수는 아래와 같은 비음 조건(positive condition)과 안정성 조건(stationary condition)을 만족해야 한다.

비음 조건: $p \ge 0,\ \ q \ge 0$; $w > 0,\ \alpha_i \ge 0,\ i = 1, \cdots, q,\ \beta_j \ge 0,\ j = 1, \cdots, p$ (3)

안정성 조건: $\sum_{i=1}^{\max(p,q)} \alpha_i + \beta_i < 1$ (4)

이 모형에서 S_t 는 기초자산의 t시점에서의 가격을 나타내고, r 은 1기간 무위험 수익률[5)]이며, λ 는 단위 위험프리미엄이다. 오차항 ε_t 는 평균이 0이고 조건부 분산이 h_t 인 정규분포를 따른다고 가정하며, I_t 는 t시점까지 축적된 정보의 집합을 의미한다. 평균방정식에서 $\lambda\sqrt{h_t}$ 항은 자산수익률이 이 위험수준에 의존함을 나타낸다.

한편, 옵션가격을 이용하여 모형을 추정하기 위해서는 위험중립측도에서의 기초자산의 확률과정을 정의할 필요가 있다. GARCH는 이산확률과정의 틀에서 정의되었고, 그 복잡

4) Duan(1995)의 GARCH 옵션가격결정모형에서, $-h_t/2$ 항은 기초자산의 수익률이 로그 정규분포를 따른 다는 가정에서 도출되며, $\lambda\sqrt{h_t}$ 항은 위험의 시장가격(market price of risk)에 해당하는 λ를 상수라고 가정한데 기인한다. 연속확률과정(continuous-time stochastic process)에서의 블랙-숄즈의 모형을 생각해보면, 기초자산의 수익률이 로그 정규분포라는 가정과 위험의 시장가격이 상수라는 가정은 실제측도와 위험중립측도에서 각각 아래와 같은 기초자산의 확률과정을 함의한다. z는 브라우니안 모션(Brownian motion)이다.

$d\ln S = (\mu - \sigma^2/2)dt + \sigma dz$ under measure P

$d\ln S = (r - \sigma^2/2)dt + \sigma dz$ under measure Q

이때 두 측도는 Girsanov의 정리에 의해 관계 지어지며, 위험의 시장가격은 $\lambda \equiv (\mu - r)/\sigma$ 이다. 실제측도 하에서의 기초자산의 분포를 다시 쓰면, $d\ln S = (r + \lambda\sigma - \sigma^2/2)dt + \sigma dz$ 가 된다.

5) GARCH 옵션가격모형을 추정할 때 1기간 무위험 이자율 r 을 모수로 간주하고 직접 추정하는 대신에 t-1시점부터 t시점까지 적용되는 무위험 이자율인 $r_{f,t-1}$의 값을 사용한다. 이 값은 콜금리나 CD91금리 자료를 이용하여 계산할 수 있다.

한 이분산성 특성 때문에, 실제측도와 위험중립측도간의 관계가 연속확률과정에서보다 일반화된 관계인 지역적 위험중립가치평가관계(locally risk-neutral valuation relationship, LRNVR)로 정의되어야 한다. Duan(1995)은 지역적 위험중립측도(locally risk-neutral measure, 이하 위험중립측도 혹은 확률측도 Q(Q-measure))를 다음과 같이 제시하였다. 즉, $S_t / S_{t-1} | I_{t-1}$ 가 확률측도 Q에서 로그 정규분포를 따르고, 그 확률측도 Q가 실제측도 P와 식 (5), 식 (6), 식 (7)과 같은 관계를 만족하면 측도 P와 Q 사이에는 LRNVR이 성립한다고 할 수 있다.

$$E^{P}[S_t / S_{t-1} | I_{t-1}] = \exp(r + \lambda\sqrt{h_t}) \tag{5}$$

$$E^{Q}[S_t / S_{t-1} | I_{t-1}] = \exp(r) \tag{6}$$

$$\mathrm{var}^{P}[\ln(S_t / S_{t-1}) | I_{t-1}] = \mathrm{var}^{Q}[\ln(S_t / S_{t-1}) | I_{t-1}] = h_t \tag{7}$$

식 (5)와 식 (6)은 각각 실제측도와 위험중립측도에서 기초자산의 총수익률의 조건부 평균을 나타내고, 식 (7)은 로그수익률의 조건부 분산이 두 확률측도에서 동일함을 의미한다. 일반적으로 연속확률과정에서는 실제측도를 위험중립측도로 측도변경을 할 때 변동성은 두 측도에서 동일하다. 반면, 이산확률과정에서 모형화된 GARCH 옵션가격결정모형에서는 LRNVR을 이용하여 측도변경을 하면 1기간 미래 변동성(one-period ahead volatility)은 두 측도에서 동일하나 2기간 이상의 미래 변동성에 대해서는 그렇지 않다.

위험중립측도에서 기초자산의 로그수익률은 아래와 같은 확률과정을 따른다.

평균방정식: $\ln\dfrac{S_t}{S_{t-1}} \equiv R_t = r - \dfrac{1}{2}h_t + \xi_t$ 단, $\xi_t | I_{t-1} \sim N(0, h_t)$ (8)

분산방정식: $h_t = w + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i(\xi_{t-i} - \lambda\sqrt{h_{t-i}})^2 + \sum_{i=1}^{p}\beta_i h_{t-i}$ (9)

비음 및 안정성 조건: $p \ge 0,\quad q \ge 0\,;\, w > 0,\ \alpha_i \ge 0,\quad i = 1, \cdots, q,\quad \beta_i \ge 0,\quad i = 1, \cdots, p,$

$$\sum_{i=1}^{\max(p,q)} \alpha_i(1+\lambda^2) + \beta_i < 1 \tag{10}$$

지역적 위험중립가치평가관계(LRNVR)를 사용하여 측도변경을 하였으므로, 연속확률과정의 경우와는 달리, 위험중립측도에서도 여전히 위험보상 모수 λ가 제거되지 않는다. 한편, 실제측도와 위험중립측도에서 오차항들의 형태를 살펴보면, 두 측도의 오차항들은 식 (11)과 같은 관계를 가짐을 알 수 있다. 실제측도와 위험중립측도에서의 기초자산의 확률과정들을 잘 살펴보면 식 (11)에 의한 산술적 관계의 변형에 지나지 않으나, 이때 위험중립측도하의 오차항 ξ_t 가 정규분포라는 보장은 없다. 이 오차항이 위험중립측도에서도 정규분포가 되도록 하는 것이 바로 LRNVR이다.

$$\varepsilon_t = \xi_t - \lambda\sqrt{h_t} \tag{11}$$

GARCH 모형의 차수인 p와 q를 1로 두고 기초자산의 조건부 분산과 로그-가격간의 조건부 공분산을 구하면 식 (12) 및 식 (13)에서 볼 수 있듯이, 실제측도에서는 언제나 양의 값을 가지고 위험중립측도에서는 단위 위험프리미엄이 양의 값을 가지기만 하면 음수가 된다. 즉, Duan(1995)의 GARCH 옵션가격결정모형은 오직 위험중립측도에서만 주식가격과 변동성 간의 음의 상관관계를 나타낼 수 있고 레버리지효과를 반영할 수 있다.

$$Cov^P[h_{t+1}, \log(S_t) \mid I_{t-1}] = \alpha h_t \tag{12}$$

$$Cov^Q[h_{t+1}, \log(S_t) \mid I_{t-1}] = -2\alpha\lambda h_t\sqrt{h_t} \tag{13}$$

위와 같이 위험중립측도에서 기초자산의 확률모형이 주어지면 유럽형 콜(풋) 옵션의 이론 가격은 식 (14), 식 (15)와 같이 구할 수 있다.

$$C(h_t) = e^{-(T-t)r} E^Q[\max(S_T - K, 0) \mid I_t] \tag{14}$$

$$P(h_t) = e^{-(T-t)r} E^Q[\max(K - S_T, 0) \mid I_t] \tag{15}$$

T 는 만기 시점을 나타내며 S_T 는 만기 시점의 기초자산 가격을 나타내는 확률변수이다. Duan(1995)의 GARCH 옵션가격결정모형에 대한 폐쇄해는 존재하지 않으나, 몬테-카를로 시뮬레이션을 이용하여 모수를 추정하고 이론적인 옵션의 가격을 계산 할 수 있다. 블랙-숄즈를 비롯한 대부분의 무차익거래접근 방법의 옵션가격결정 모형이 투자자의 위험선호도를 가정하지 않는 반면(preference-free), GARCH 옵션가격결정 모형에서는 실제측도에서의 평균방정식(식 (1))과 위험중립측도에서의 분산방정식(식 (9))가 암시하듯이, 기초자산 수익률의 확률과정에 존재하는 위험보상 모수가 옵션의 가격에도 영향을 미치게 된다. 단, 이 모형에서 투자자들의 위험선호에 대한 정보는 모두 하나의 모수인 λ로 요약된다. 또한, 이산확률과정에서의 블랙-숄즈 모형은 이 GARCH 옵션가격결정모형의 특수한 경우(p = 0, q = 0)가 된다는 특성을 갖는다.

2.2 표준 GARCH계열 모형 및 모수의 추정 방법

본 논문에서는 Duan(1995)의 GARCH 옵션가격결정 모형의 틀 하에서, 기초자산의 확률과정이 각각 블랙-숄즈가 가정한 등분산 모형(GARCH(0,0)), ARCH 모형, GARCH 모형과 비대칭 변동성반응을 나타낼 수 있는 GJR-GARCH 모형, 비대칭 NGARCH 모형, 그리고 Hentschel의 GARCH-News 모형을 따른다고 가정하고, 각 모형의 실증성과를 옵션에 대한 가격결정력 및 헤지성과를 통하여 살펴본다. 본 논문에서 살펴볼 GARCH

계열 모형의 실제측도와 위험중립측도에서의 분산방정식과 비음 및 안정성 조건[6)]은 아래와 같다. 각 모형의 평균방정식은 Duan(1995)의 모형으로 동일하다.

1. ARCH(p)

(1) P-measure

분산방정식: $h_t = w + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2$ (16)

비음 및 안정성 조건: $w > 0, \alpha_i \ge 0,$ and $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i < 1$ (17)

(2) Q-measure

분산방정식: $h_t = w + \alpha_1 (\xi_{t-1} - \lambda \sqrt{h_{t-1}})^2 + \alpha_2 (\xi_{t-2} - \lambda \sqrt{h_{t-2}})^2 + \cdots + \alpha_p (\xi_{t-p} - \lambda \sqrt{h_{t-p}})^2$ (18)

비음 및 안정성 조건: $w > 0, \alpha_i \ge 0,$ and $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i (1 + \lambda^2) < 1$ (19)

2. GARCH(1, 1)

(1) P-measure

분산방정식: $h_t = w + \alpha h_{t-1} + \beta \varepsilon_{t-1}^2$ (20)

비음 및 안정성 조건: $w > 0, \alpha \ge 0, \beta \ge 0,$ and $\alpha + \beta < 1$ (21)

(2) Q-measure

분산방정식: $h_t = w + \alpha (\xi_{t-1} - \lambda \sqrt{h_{t-1}})^2 + \beta h_{t-1}$ (22)

비음 및 안정성 조건: $w > 0, \alpha \ge 0, \beta \ge 0,$ and $\alpha (1 + \lambda^2) + \beta < 1$ (23)

3. GJR-GARCH(1, 1)

(1) P-measure

분산방정식: $h_t = w + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} + \delta \max(0, -\varepsilon_{t-1})^2$ (24)

비음 및 안정성 조건: $w > 0, \alpha \ge 0, \beta \ge 0, \alpha + \delta \ge 0$, and $\alpha + \beta + \frac{1}{2} \delta < 1$ (25)

(2) Q-measure

분산방정식: $h_t = w + \alpha (\xi_{t-1} - \lambda \sqrt{h_{t-1}})^2 + \beta h_{t-1} + \delta \max(0, -(\xi_{t-1} - \lambda \sqrt{h_{t-1}}))^2$ (26)

비음 및 안정성 조건:

$$w > 0, \alpha \ge 0, \beta \ge 0, \alpha + \delta \ge 0, \text{ and } \alpha (1 + \lambda^2) + \beta + \delta \left[\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} + (1 + \lambda^2) \Phi(\lambda) \right] < 1 \quad (27)$$

4. 비대칭 NGARCH(1, 1)

(1) P-measure

6) GARCH계열 모형들의 분산방정식, 비음 및 안정성 조건들은 Appendix에 유도되어있다.

분산방정식: $h_t = w + \alpha(\varepsilon_{t-1} - \theta)^2 + \beta h_{t-1}$ (28)

비음 및 안정성 조건: $w > 0, \alpha \ge 0, \beta \ge 0,$ and $\alpha(1+\theta^2) + \beta < 1$ (29)

(2) Q-measure

분산방정식: $h_t = w + \alpha(\xi_{t-1} - \lambda\sqrt{h_{t-1}} - \theta)^2 + \beta h_{t-1}$ (30)

비음 및 안정성 조건: $w > 0, \alpha \ge 0, \beta \ge 0,$ and $\alpha(1+(\lambda+\theta)^2) + \beta < 1$ (31)

5. GARCH-News(1, 1)

(1) P-measure

분산방정식: $h_t = w + \alpha\left\{|\varepsilon_{t-1} - \theta| - \kappa(\varepsilon_{t-1} - \theta)\right\}^2 + \beta h_{t-1}$ (32)

비음 및 안정성 조건: $w > 0, \alpha \ge 0, \beta \ge 0,$ and

$$\beta + \alpha\left[(1+\theta^2)(1+\kappa^2) + 2\kappa\left\{2\phi(\theta) + (1+\theta^2)(2\Phi(\theta) - 1)\right\}\right] < 1 \quad (33)$$

(2) Q-measure

분산방정식: $h_t = w + \alpha\left\{\left|\varepsilon_{t-1} - \lambda\sqrt{h_{t-1}} - \theta\right| - \kappa(\varepsilon_{t-1} - \lambda\sqrt{h_{t-1}} - \theta)\right\}^2 + \beta h_{t-1}$ (34)

비음 및 안정성 조건: $w > 0, \alpha \ge 0,\ \beta \ge 0$, and

$$\beta + \alpha\left[(1+(\theta+\lambda)^2)(1+\kappa^2) + 2\kappa\left\{2\phi(\theta+\lambda) + (1+(\theta+\lambda)^2)(2\Phi(\theta+\lambda) - 1)\right\}\right] < 1 \quad (35)$$

한편, Duan(1995)의 GARCH 옵션가격결정모형의 틀 하에서 블랙-숄즈 옵션가격결정모형이 의미하는 기초자산의 확률과정을 아래와 같이 나타낼 수 있다. 이는 GARCH(0, 0)에 해당된다.

(1) P-measure

$$\ln\frac{S_t}{S_{t-1}} - r_{f,t-1} = \lambda\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2 + \varepsilon_t \quad \text{단,} \quad \varepsilon_t \mid I_{t-1} \sim N(0, \sigma^2) \quad (36)$$

(2) Q-measure

$$\ln\frac{S_t}{S_{t-1}} - r_{f,t-1} = -\frac{1}{2}\sigma^2 + \xi_t \quad \text{단,} \quad \xi_t \mid I_{t-1} \sim N(0, \sigma^2) \quad (37)$$

위에서 소개한 6가지 모형 중 GARCH-News가 모수의 수가 제일 많아 가장 복잡한 모형이며, 이산 블랙-숄즈 모형은 등분산성을 가정하는 가장 단순한 모형이다. GARCH계열 모형 중 유일한 마코비안 계열인 ARCH 모형은 이산 블랙-숄즈 모형을 제외하고는 가장 단순한 형태의 모형이다. GARCH 모형은 ARCH 모형에서 자기회귀항이 무한히 많은 경우에 해당한다. GJR-GARCH와 비대칭 NGARCH 모두 실제측도에서 비대칭 변동성 반응현상을 나타낼 수 있으나 그 표현방법이 조금 다르다. GARCH-News 모형은 이 두 모형보다 좀 더 유연한 형태로 비대칭 변동성 반응현상을 구조화한다. 본 논문에서는 이

GARCH계열 모형들의 모수들을 다음의 두가지 방법론을 이용하여 각각 추정하고, 각 방법론 하에서 모형이 제시하는 이론적인 옵션가격을 구하여 실증성과를 측정한다.

첫 번째 방법론은 실제측도에서 기초자산의 수익률 자료만을 이용하여 GARCH계열 모형의 모수를 추정한 뒤, 이 값을 이용하여 위험중립측도에서 이론적인 옵션의 가격을 구하여[7] 이 값과 옵션의 시장가격과 비교하여 실증성과를 측정 하는 것이다. 옵션의 가격결정을 할 때, 현재 시점부터 옵션만기까지의 조건부 분산의 시계열 자료가 사용된다. 이때, 이산 확률모형에서 위험중립측도변경을 하면 1기간을 초과하는 미래 조건부 분산에 대해서는 그 값이 실제측도에서의 값과 동일하지 않으므로 현재 시점부터 옵션의 만기까지의 조건부 분산의 시계열 자료는 실제측도에서 추정된 모수를 이용하여 위험중립측도에서 이를 다시 구해 주어야 한다.

첫 번째 방법론의 구체적인 구현 절차는 아래와 같다. 우선 실제측도에서 전체 자료구간 동안의 기초자산 수익률 자료를 이용하여 각 GARCH계열 모형의 모수를 아래의 로그 우도함수(log-likelihood function)를 극대화하도록 최우추정법(MLE)을 사용하여 추정한다.

$$\ln L = -(T-1)\ln(2\pi)/2 - \sum_{t=2}^{T}\ln(h_t)/2 - \sum_{t=2}^{T}\ln(R_t - r - \lambda\sqrt{h_t} + h_t/2)^2/(2h_t) \tag{38}$$

다음으로 전체 자료구간 동안 시간불변(time-invariant)하도록 추정된 모수를 이용하여 위험중립측도에서의 기초자산 수익률의 확률과정에 대한 방정식들을 이용하여, J번의 몬테-카를로 시뮬레이션[8]을 통하여 조건부 분산(h_t)을 각 시뮬레이션 단계마다 현재 시점부터 옵션의 만기 시점까지 구한다. 마지막으로, 추정된 GARCH계열 모형과 발생된 조건부 분산의 옵션의 만기 시점까지의 J개의 경로를 이용하여 위험중립측도에서 옵션의 만기시점(T) 에서의 기초자산의 분포를 구한다. 이제 제 2.1절의 식 (14)와 식 (15)처럼 옵션의 가격을 구할 수 있다. 콜옵션이나 풋옵션이나 옵션의 보수를 제외하고는 기본적으로 모든 추정 절차가 유사하므로 본 논문에서는 콜옵션의 경우만을 설명하기로 한다.

$$C_{t,T}^{Model}(\hat{\Theta}, \{h_k\}_{k=t+1,\dots,T}) = \exp(-\sum_{k=t+1}^{T} r_{f,k-1})E_t^Q[payoff] \simeq \exp(-\sum_{k=t+1}^{T} r_{f,k-1})\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\left[\max(S_{T,j}-K,\ 0)\right]$$

단, $S_{T,j} = S_t R_{t,T,j}$ 이고, $R_{t,T,j} = \exp(\sum_{k=t+1}^{T}\left[r_{f,k-1} - \frac{1}{2}h_k + \xi_k\right])\Big|_j$ (39)

7) 이러한 방법론은 기초자산의 역사적 자료를 이용하여 변동성을 추정한 뒤, 블랙-숄즈 옵션가격결정모형의 공식을 이용하여 이론적인 옵션을 구하는 구현법과 관련 지어 생각할 수 있다.

8) 본 논문에서는 200,000번의 시뮬레이션을 시행하였다.

식 (39)에서 $\hat{\Theta}$ 는 실제측도에서 추정된 모수이고 $\{h_k\}_{k=t+1,\ldots,T}$ 는 추정된 $\hat{\Theta}$ 를 이용하여 위험중립측도에서 GARCH계열 모형의 분산방정식을 통해 구한 t+1시점부터 옵션의 만기 시점인 T시점까지의 조건부 분산의 시계열 자료이다. 위 식은 GARCH계열 옵션가격결정 모형의 이론적인 옵션가격이 이 값들에 의존함을 나타낸다. K는 옵션의 행사가격을 나타내며, J는 시뮬레이션 횟수이다. $R_{t,T,j}$ 는 j번째 시뮬레이션 경로에서 계산된 기초자산의 총 수익률을 나타낸다. 1기간 이후의 이론적인 옵션가격 역시 추정된 모수와 조건부 분산의 시계열 자료를 이용하여 아래와 같이 구할 수 있다. 이 값은 옵션의 외표본 예측력 성과를 살펴보는데 사용된다.

$$C_{t+1,T}^{Model}(\hat{\Theta},\{h_k\}_{k=t+2,\ldots,T}) = \exp(-\sum_{k=t+2}^{T} r_{f,k-1}) E_{t+1}^{Q}[payoff] \simeq \exp(-\sum_{k=t+2}^{T} r_{f,k-1}) \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\left[\max(S_{T,j}-K,\ 0)\right]$$

$$\text{단, } S_{T,j} = S_{t+1}R_{t+1,T,j} \text{ 이고, } R_{t+1,T,j} = \exp(\sum_{k=t+2}^{T}\left[r_{f,k-1} - \frac{1}{2}h_k + \xi_k\right])\Big|_j \tag{40}$$

두 번째 방법론은 위험중립측도에서 옵션가격을 이용하여 GARCH계열 옵션가격모형의 모수를 추정하고, 조건부 분산의 시계열 자료를 구하여 이론적인 옵션가격을 도출[9]하는 것이다. 특정시점에서 관찰되는 옵션가격을 이용하여 이 시장가격과 모형이 제시하는 이론적인 옵션가격의 차이가 최소가 되도록 모수를 추정하고 그 시점부터 만기까지의 조건부 분산의 시계열 자료를 구한다. 이와 같이 옵션가격을 이용하여 추정하면 시간이 변함에 따라 추정을 새로 해주어야 하므로 계산부담이 상당하고, 모수가 시간에 대해 변하지 않는다고 가정하는 첫 번째 방법과 비교하여 장기적인 추세를 반영하여 모수를 안정적으로 추정하는 데는 불리하나, 투자자들의 기대가 반영된 미래 정보를 반영할 수 있으며, 시간에 따른 시장정서(market sentiment)의 변화를 잘 반영할 수 있는 장점이 있다.

구체적인 추정 절차는 역시 콜옵션의 경우만을 설명하기로 한다. 우선, 위험중립측도에서 현재시점의 모수값과 옵션의 만기까지의 조건부 분산의 시계열 자료가 주어졌을 때, GARCH 옵션가격결정모형이 함의하는 이론적인 옵션의 가격은 식 (41)과 같이 된다.

$$C_{t,T}^{Model}(\hat{\Theta}_t,\{h_k\}_{k=t+1,\ldots,T}) = \exp(-\sum_{k=t+1}^{T} r_{f,k-1}) E_{t}^{Q}[payoff] \simeq \exp(-\sum_{k=t+1}^{T} r_{f,k-1}) \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\left[\max(S_{T,j}-K, 0)\right]$$

$$\text{단, } S_{T,j} = S_t R_{t,T,j} \text{ 이고, } R_{t,T,j} = \exp(\sum_{k=t+1}^{T}\left[r_{f,k-1} - \frac{1}{2}h_k + \xi_k\right])\Big|_j \tag{41}$$

9) 이 방법론은 여러 옵션의 가격 정보를 사용하여 블랙-숄즈 모형이 함의하는 하나의 기초자산 변동성을 구하는 구현법과 관련하여 생각해 볼 수 있다.

위의 식에서는 모수 $\hat{\Theta}_t$ 가 기초자산 수익률을 이용해 추정하는 경우와는 달리 시간에 대해 변함에 유의한다. 이 이론적인 옵션가격과 시장에서 관찰되는 옵션가격과의 차이를 최소화하도록 아래의 식 (42) 혹은 식 (43)을 이용하여 t시점의 모수 Θ_t 와 옵션 만기까지의 조건부 분산의 시계열 $\{h_k\}$, $k = t+1, 2, \cdots, T$ 값을 구한다.

$$\min_{\Theta_t} \sum_{i=1}^{L} \left(C_{i,t}^{Observed} - C_{i,t}^{Model}(\Theta_t) \right)^2 \tag{42}$$

$$\min_{\Theta_t} \sum_{i=1}^{L} \left((C_{i,t}^{Observed} - C_{i,t}^{Model}(\Theta_t)) / C_{i,t}^{Observed} \right)^2 \tag{43}$$

식 (42)는 추정과정에서의 손실함수를 절대가격오차(dollar pricing error)로 정의한 것이다. 이 경우 모수 추정과정에서 가격이 비싼 옵션(내가격 옵션)에 대해 더 큰 가중치를 주게 된다. 한편 손실함수를 식 (43)과 같이 상대가격오차로 정의하게 되면 상대적으로 저렴한 가격의 옵션(외가격 옵션)에 대해 더 큰 가중치를 두는 셈이다. 본 논문에서는 추정시 외가격 콜옵션과 외가격 풋옵션 자료만을 이용하여 추정하므로 이러한 문제점이 상당부분 완화된다. 한편, Christoffersen and Jacobs(2004, 2004b)는 어떠한 손실함수를 사용할 것인가 보다 추정단계의 손실함수와 평가단계에서 사용되는 목적함수 사이의 함수형태의 일관성이 더욱 중요한 문제라고 지적하였다. 본 논문에서는 절대가격오차를 이용하여 추정한 결과를 제시하며 상대가격오차를 이용하여 추정한 결과도 본 논문의 결과와 크게 다르지 않다.

3. 연구의 자료

본 연구에서는 1997년 7월 처음 거래가 시작된 이후에 짧은 역사에도 불구하고 급속한 성장을 하여, 거래량을 기준으로 단일종목 중 세계에서 가장 유동성이 풍부한 파생상품 시장인 KOSPI 200 주가지수 옵션시장을 대상으로 한다. 표본기간은 2001년 1월부터 2006년 7월까지로, 5년 7개월 간의 옵션자료를 사용한다. 해당기간 동안 KOSPI 200 옵션은 거래량을 기준으로 부동의 1위의 위치를 고수하고 있다.

KOSPI 200 옵션의 한 계약 단위는 10만 원이며, 조기행사가 불가능한 유럽형 옵션만으로 구성된다. 만기에 따른 4종류의 옵션 유형이 거래되며, 결제월에 따라 최근월물을 포함한 연속 3개월물 3개와 원월물 1개로 구분된다. KOSPI 200 옵션시장은 매 거래일마다 오전 9시에 시작하여 오후 3시 15분에 종료된다. 단, 연중 거래의 시작 날과 대학수학능력시험 날은 1시간 늦은 오전 10시에 거래가 시작되며, 최근월물 결제일의 경우 오후 2시 50분에 거래가 마감된다. 그리고 각 날의 거래 체결시작 전 1시간 동안의 pre-opening 시장을 가지며, 이때와 거래 종료 10분전 기간에는 단일가 매매가 시행된다. 장

중 거래시간 동안에는 기본적으로 접속매매로 거래가 체결[10]된다.

본 연구에서 옵션자료 선택 및 표본 자료 구축은 Rosenberg and Engle(2002)과 강장구 외(2008)의 방법을 따른다. 지수옵션과 지수옵션의 기초자산에 해당하는 KOSPI 200 지수가격을 동기화(synchronize) 시키기 위하여 일별로 동일한 시간대에 옵션과 지수 값을 동시에 추출한다. 즉, 비동시적 거래문제(non-synchronizing problem)를 피하기 위하여 증권거래소(KRX)에서 제공하는 KOSPI 200 옵션의 1분 단위 접속매매 체결 자료 중에서 오후 2시 50분 이전에 체결된 특정 만기와 행사 가격을 지닌 옵션가격을 추출[11]한다. 이와 같이 만들어진 KOSPI 200 지수의 일별자료를 이용하여 각 GARCH계열 모형이 가정하는 기초자산 수익률에 대한 확률 모형을 추정한다.

본 연구에 사용되는 자료 선택기준(screening criteria)은 다음과 같다. 첫 번째로, KOSPI 200 옵션시장은 다른 선진국의 옵션시장과는 달리 최근월물에 거래가 집중되는 점을 고려하여, 타월물에 비하여 거래량이 월등히 많은 최근월물 자료만을 추출하여 사용[12]한다. 두 번째로, 가격의 이산성에 대한 효과와 빈번하지 않은 거래(infrequent trading) 효과를 통제하기 위하여 옵션가격은 0.03P와 15P 사이에 있어야 하고, 무차익 거래조건(no-arbitrage condition)을 만족하여야 한다. 비록 가격이 최소 호가단위(tick-size) 0.01P나 0.02P인 심외가격 옵션도, 다른 선진 옵션시장과는 달리 KOSPI 200 옵션시장에서는 거래가 활발한 편이나, 이와 같은 옵션을 사용하여 모형을 추정하면 호가 단위의 제약 때문에 올바로 모수가 추정되지 않을 가능성이 크다. 또한 극한 심외가격 옵션상품의 거래에서는 개인 투자자들의 투기적 성향이 매우 심하므로, 이들의 거래가격은 옵션의 적정가치를 반영하지 않을 수도 있다. 가격이 15P 이상인 심내가격 옵션은 거래가 잘 되지 않아, 역시 적정가치를 반영하지 않을 수 있으므로 추정자료에서 제외한다. 한편, 상대적으로 유동성이 떨어지는 (심)내가격 옵션들의 시장가격이 간혹 무차익 하한거래경계를 위배하게 되는데 이러한 옵션들 또한 추정자료에서 제외한다.

---

10) 단, 장중 거래시간 중에도 써킷-브레이커(Circuit breakers) 발동으로 인해 거래가 중단된 경우, 거래를 재개할 때 10분 동안 단일호가를 접수하여 단일가 매매를 시행한다. 장중 거래시간 동안 거래시스템에 장애가 발생하여 10분 이상 매매거래를 할 수 없거나 주식시장의 전산시스템에 장애가 발생하여 10분 이상 KOSPI200 구성종목의 50% 이상을 매매거래 할 수 없는 경우는 거래를 강제로 중단 할 수 있다. 또한 주식시장이 전일 대비 10% 이상 하락하여 1분 간 지속되는 경우에 20분 간, 그리고 선물가격이 과도하게 현물가격을 선행할 경우에는 5분 간 매매거래를 중단할 수 있다.

11) 모형의 추정에 이용되는 외가격 옵션들은 거래량이 매우 활발하므로 대부분의 거래일에서 14시 50분 혹은 이에 가까운 시점에서 자료가 추출된다.

12) 실제로, 2002년도의 특정시점의 거래량을 비교해 보면, 최근월물의 만기시점에서 조차 거래량이 차근월물의 거래량 보다 4배 정도 많다. 만기일의 바로 다음 날에는 100배 이상, 보통의 거래일의 경우도 70~80배 정도 거래량이 많다. 이에 대한 자료는 교신저자에게 요청하면 제공받을 수 있다.

콜옵션과 풋옵션의 무차익 하한거래경계는 각각 식 (44)과 식 (45)처럼 된다.

$$Max(S_t - D_{t,T} - Ke^{-r_f(T-t)}, 0) \tag{44}$$

$$Max(Ke^{-r_f(T-t)} - (S_t - D_{t,T}), 0) \tag{45}$$

이때, S_t는 현재 시점의 KOSPI 200 지수 가격이고, O_t는 시장에서 관찰되는 KOSPI 200 옵션의 가격이다. K는 옵션의 행사가격이고 T는 옵션의 만기시점을 나타내며, $D_{t,T}$는 KOSPI 200 종목에 대한 배당액의 현가를 나타낸다. 본 연구에서는 배당수익률로서 지수값을 조정하는 대신 정혜욱, 안병국(2002)과 강장구 외(2008)처럼 배당이 지급이 옵션의 만기일 이전에 있는 경우 실제 배당액의 현가를 이용하여 배당액을 조정한다. r_f는 무위험 이자율을 의미하며 이 값은 일별 콜금리 자료를 사용하여 계산[13)]된다. 세 번째로 블랙-숄즈 모형이 함의하는 내재변동성이 0.05보다 크고 0.95보다 작아야 한다.

$$\text{블랙-숄즈 내재변동성} = \sigma(O_t;\, S_t - D_{t,T}, r_f, \tau) \tag{46}$$

τ는 옵션의 잔존 만기를 나타내며 실제 날짜(calendar days)가 아니라 거래일(trading days)을 기준으로 계산된다. 네 번째로, (K/S_t-1)로 정의된 옵션의 가격도(moneyness)의 절대값이 0.1보다 작은 옵션만 표본에 포함한다. 다섯 번째로, 모수가 여러 개인 모형들을 성공적으로 추정하기 위하여 위의 자료 선택기준을 만족시키는 옵션종목의 수가 8개 이상인 경우에만 그 날을 표본에 포함시킨다. 마지막으로, Rosenberg and Engel(2002)등에서처럼 표본에 포함된 날 중 거래일을 기준으로 만기가 20일에 가장 가까운 것들을 추출하여 월별 옵션자료를 만든다.[14)]

<표 1>은 논문의 표본기간 동안 자료 선택기준을 만족시키는 옵션자료에 대한 요약 정보

---

13) 무위험 이자율의 proxy로 단기 금리 지표로 흔히 사용되고 유동성이 풍부한 3개월 CD91 금리를 사용하여도 논문의 실증결과에는 변함이 없다.

14) KOSPI 200 옵션의 최근월물은 잔존 만기에 관계없이 언제나 유동성이 풍부하다. 옵션만기 부근에서 개인투자자의 활발한 참여 등으로 인하여 최근월물 옵션의 거래량이 증가하지만, 반드시 만기 부근에서의 최근월물 옵션의 가격이 다른 시점에서보다 옵션의 실제가치를 잘 반영한다고 말하기는 어렵다. 예를 들어, 최근월물과 차근월물 옵션의 가격을 각각 이용하여 Demeterfi, Derman, Kamal, and Zou(1999)의 공정분산논거(fair variance argument)에 의거하여 변동성 지수(volatility index, VIX)를 구해보면 최근월물의 잔존만기가 5일 이내인 경우에는 최근월물과 차근월물 각각의 함의하는 변동성 지수의 값이 크게 차이가 나는데 반해, 최근월물의 잔존만기가 그 이상인 기간에서는 각 옵션들이 함의하는 변동성 지수의 시계열이 안정적으로 추정된다. 또한, 본 논문에서는 동일한 조건과 동일한 틀 하에서 GARCH 모형들의 성과를 비교하는 것이 목적이므로, 기존연구들의 관행에 따라 가격 편의(bias)와 이상현상으로부터 상대적으로 자유로운 만기가 20일 남은 옵션들을 추출하여 모형의 추정과 성과평가에 이용하였다. 이와 관련하여 유익한 조언을 해주신 익명의 심사위원께 감사 드린다.

를 나타낸다. 콜옵션 및 풋옵션에 대해 가격도 별로 옵션 관측치의 개수, 평균 가격, 블랙-숄즈 내재변동성 값을 보여준다. KOSPI 200 옵션시장에서는 등가격 옵션의 내재변동성보다 내가격 옵션과 외가격 옵션의 내재변동성이 큰 변동성 미소현상을 발견 할 수 있다.

<표 1>에서 보고한 모든 가격도의 콜옵션과 풋옵션에 대한 자료를 동시에 사용하여 GARCH계열 모형이 의미하는 옵션가격결정모형의 모수를 추정하면 풋-콜 패리티(put-call parity)현상 때문에 정보가 중복되어 사용되는 문제가 발생한다. 풋-콜 패리티 관계에 의하면 외가격(내가격) 콜옵션과 내가격(외가격) 풋옵션은 동일한 정보를 제공한다. 따라서, 모수를 추정할 때는 Rosenberg and Engle(2002) 및 강장구 외(2008)에서처럼 옵션의 가격도가 양의 값을 갖는 외가격 콜옵션과 음의 값을 갖는 외가격 풋옵션 자료만을 추출하여 사용한다.

4. 실증 결과

4.1 모수의 추정

제 2.2절에서 제시된 GARCH계열 모형들을 Duan(1995)의 실제측도에서 기초자산의 수익률 만을 이용하여 추정한 결과는 <표 2>와 같다. 이때 모수는 시간에 대해 불변임을 가정하므로 상수로 추정되고, 계수 값과 함께 T-통계량 값이 보고된다. 모형에 따라 단위위험프리미엄이 유의하지 않게 추정된 경우가 많은데, 이 결과는 기초자산 수익률만을 이용하여 모형을 추정할 경우 위험프리미엄을 적절히 추정할 수 없음을 암시한다. 이는 주식시장에서 주가변동성이 위험요인으로서 적절히 평가되지 않을 수 있기 때문일 수 있다. GARCH계열 모형에서, 지속성(persistence)을 나타내는 $\alpha+\beta$ 값은 모두 1에 가깝게 추정된다. 비대칭 변동성반응을 잡아낼 수 있는 GJR-GARCH 모형, 비대칭 NGARCH 모형, GARCH-News 모형에서 비대칭 변동성반응과 관련된 모수인 δ와 θ및 κ는 모두 유의하게 추정되고 이는 이 모형들이 KOSPI 200 주식시장에서 레버리지효과를 잘 모형화하고 있음을 의미한다.

<표 3>은 GARCH계열 모형별로 Duan(1995)의 위험중립측도에서 옵션가격을 이용하여 추정한 모수에 대한 기술통계량을 나타낸다. 옵션자료를 가지고 추정할 때는 월별로 새로 모수를 추정하므로 본 논문의 표본기간 동안 모형별로 67개의 추정을 실시한다. <표 3>에서는 추정된 모수들의 시계열 평균값과 표준편차 및 최대값, 최소값, 그리고 중앙값을 보고한다. 0보다 유의하게 큰 표준편차 값은 모수의 추정치가 시간이 지남에 따라 시장정서를 반영하여 변하는 것을 암시한다.

〈표 1〉 옵션자료

본 표는 논문의 표본기간인 2001년 1월부터 2006년 7월까지 논문의 옵션자료 선택기준에 의해 추출된 월별 옵션자료의 요약 정보를 나타낸다. 콜옵션 및 풋옵션별로 K/S-1로 정의된 옵션의 가격도마다 관측치의 개수, 체결가격의 평균값, 블랙-숄즈 모형의 함의하는 내재변동성을 보고한다. K는 행사가격을, S는 기초자산의 가격을 의미한다.

콜옵션				풋옵션			
가격도	개수	옵션 가격	내재 변동성	가격도	개수	옵션 가격	내재 변동성
-0.1 < K/S-1 < -0.06	78	9.001	26.21	0.06 < K/S-1 < 0.1	94	9.202	29.96
-0.06 < K/S-1 < -0.03	85	6.567	24.65	0.03 < K/S-1 < 0.06	86	6.655	29.02
-0.03 < K/S-1 < 0	81	4.217	24.62	0 < K/S-1 < 0.03	86	4.338	28.44
0 < K/S-1 < 0.03	87	2.546	25.16	-0.03 < K/S-1 < 0	82	2.620	28.10
0.03 < K/S-1 < 0.06	88	1.397	25.08	-0.06 < K/S-1 < -0.03	89	1.512	28.72
0.06 < K/S-1 < 0.1	99	0.686	25.56	-0.1 < K/S-1 < -0.06	110	0.784	30.08

〈표 2〉 실제측도에서 기초자산의 수익률을 이용하여 추정한 모수의 추정치에 대한 기술통계량

본 표는 6가지 GARCH계열이 의미하는 옵션가격결정모형의 모수를 실제측도에서 기초자산의 수익률을 이용하여 추정한 결과값이다. 아래의 6가지 GARCH계열 옵션가격결정 모형들은 실제측도에서 기초자산에 대한 확률모형의 평균방정식이 Duan(1995)의 형태를 따르고, 분산방정식이 각각 GARCH(0, 0), ARCH(1), GARCH(1, 1), GJR-GARCH(1, 1), NGARCH(1, 1), GARCH-News(1, 1)을 따른다고 가정한다. 모수를 추정할 때는 비음 조건과 안정성 조건을 고려하여 최우추정법(MLE)을 이용하여 추정한다.

	Black-Scholes		ARCH		GARCH		GJR-GARCH		QGARCH		GARCH-News	
	추정치	T-통계량	추정치	T-통계량	추정치	T-통계량	추정치	T-통계량	추정치	T-통계량	추정치	T-통계량
λ	0.040	1.51	0.045	1.68	0.075	2.91	0.033	1.26	0.050	1.88	0.043	1.64
σ^2	2.88E-04	26.36										
ω			2.69E-04	21.44	1.96E-06	2.30	2.56E-06	2.54	1.97E-06	1.29	2.47E-06	1.47
α			0.065	2.01	0.080	5.29	0.038	2.45	0.089	6.17	0.070	4.16
β					0.919	60.87	0.914	52.94	0.893	56.30	0.906	50.80
δ							0.093	3.58				
Θ									0.007	5.01	0.004	3.28
κ											0.191	2.40

〈표 3〉 위험중립측도에서 옵션가격을 이용하여 추정한 모수의 추정치에 대한 기술통계량

본 표는 6가지 GARCH계열이 의미하는 옵션가격결정 모형의 모수를 위험중립측도에서 옵션가격을 이용하여 추정한 결과값이다. 아래의 6가지 GARCH계열 옵션가격결정모형들은 위험중립측도에서 기초자산에 대한 확률모형의 평균방정식이 Duan(1995)의 형태를 따르고, 분산방정식이 각각 GARCH(0, 0), ARCH(1), GARCH(1, 1), GJR-GARCH(1, 1), QGARCH(1, 1), GARCH-News(1, 1)을 따른다고 가정한다. 모수는 비음 조건과 안정성 조건을 고려하여 옵션의 이론가격과 시장가격의 차이의 절대값으로 정의된 절대손실함수를 최소화하도록 월별로 추정되었다.

		λ	σ^2	ω	α	β	δ	Θ	κ
Black-Scholes	평 균	5.295	3.50E-04						
	중앙값	4.712	2.76E-04						
	표준편차	1.739	2.04E-04						
	최소값	2.768	8.88E-05						
	최대값	9.180	1.03E-03						
ARCH	평 균	0.100		1.43E-04	0.398				
	중앙값	0.074		9.39E-05	0.415				
	표준편차	0.081		1.28E-04	0.168				
	최소값	0.000		2.63E-05	0.018				
	최대값	0.402		6.35E-04	0.863				
GARCH	평 균	0.249		2.32E-05	0.104	0.812			
	중앙값	0.205		1.27E-06	0.071	0.926			
	표준편차	0.179		5.16E-05	0.093	0.255			
	최소값	0.000		7.42E-08	0.002	0.112			
	최대값	0.829		2.23E-04	0.390	0.997			
GJR-GARCH	평 균	0.045		1.37E-05	0.049	0.897	0.039		
	중앙값	0.033		4.04E-07	0.037	0.935	0.032		
	표준편차	0.114		4.35E-05	0.053	0.138	0.071		
	최소값	0.000		2.52E-09	0.000	0.296	-0.324		
	최대값	0.967		2.67E-04	0.363	0.999	0.335		
QGARCH	평 균	0.050		1.20E-04	0.075	0.467		0.018	
	중앙값	0.051		1.12E-04	0.074	0.444		0.003	
	표준편차	0.004		4.92E-05	0.039	0.138		0.111	
	최소값	0.039		1.24E-14	0.000	0.000		0.000	
	최대값	0.060		2.50E-04	0.183	0.749		0.909	
GARCH-News	평 균	0.042		3.81E-05	0.045	0.819		0.003	0.127
	중앙값	0.042		3.17E-05	0.037	0.808		0.002	0.106
	표준편차	0.006		2.50E-05	0.038	0.089		0.002	0.104
	최소값	0.022		2.28E-07	0.000	0.556		0.000	0.033
	최대값	0.061		9.21E-05	0.233	0.987		0.013	0.644

4.2 가격결정성과

본 절에서는 기초자산의 수익률 혹은 옵션가격을 이용하여 추정된 GARCH계열 모형들이 옵션의 시장가격을 얼마나 잘 설명하는지를 살펴본다. 즉, 시장가격에 대한 적합도를 기준으로 각 모형의 성과를 비교한다. 구체적으로, 각 GARCH계열 모형이 함의하는 이론적 옵션가격과 시장가격과의 차이를 이용해 식 (47)과 같이 정의된 평균절대가격오차(mean absolute error, MAE)와 식 (48)과 같이 정의된 평균상대가격오차(mean absolute percentage error, MAPE)를 측정하여 내표본 가격결정과 외표본 가격결정을 평균적으로 얼마나 잘하는지를 판단한다.

$$\text{MAE} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|(C_{i,t+k}(\hat{\theta}_t) - C_{i,t+k}^{Market})\right| \tag{47}$$

$$\text{MAPE} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}100\times\left|(C_{i,t+k}(\hat{\theta}_t) - C_{i,t+k}^{Market}) / C_{i,t+k}^{Market}\right| \tag{48}$$

위의 측도에서, k = 0인 경우는 내표본 오차를 나타내고, k = 1인 경우는 외표본 오차를 나타낸다. KOSPI 200 옵션시장에서 여러 옵션가격결정모형들의 실증성과를 비교하는 가장 대표적인 논문인 Kim and Kim(2004, 2005)에서는 위와 같은 평균적인 개념의 가격결정오차 측도들만을 보고한 반면, 본 논문에서는 각 모형이 얼마나 가격결정을 안정적으로 하는지를 살펴보기 위해 절대(상대)가치오차의 표준편차 값을 가격결정력의 보조적인 지표로써 추가적으로 보고한다. 일반적으로 모수의 개수가 증가함에 따라 내표본 가격결정오차는 줄어드는 경향이 있으므로, 상대적으로 복잡한 모형의 내표본 성과가 좋을 수 있으나, 모수의 개수가 많은 모형은 외표본 적합도를 고려할 때 과적합(over-fitting)의 문제가 야기될 수 있다. 따라서 본 절에서는 내표본 및 외표본 적합도를 모두 구하여 내표본 결과가 단순한 모수의 증가 때문에 나타난 결과인지를 알아보고 모수의 시간에 따른 안정성을 판단해 본다. 외표본 예측력을 측정할 때 강장구 외(2008)에서는 거래일 기준으로 5일 후의 기간까지 살펴보았으나, 이 경우 현재 시점부터 5일 후까지 제 3장에서 제시한 옵션자료 선택기준을 만족하는 옵션의 수는 크게 줄어 든다.[15] 따라서 본 연구에서는 현재시점과 다음 거래일까지 옵션자료 선택기준을 만족하는 옵션들에 대해서 가격결정성과를 비교하기로 한다. 구체적으로, 실제측도에서는 자료 전체 구간에 대하여 시간불변인 상수로 추정된 모수를 사용하여 매달 특정 시점(t)의 기초자산 가격에 대한 이론적인 옵션가격을 구한다. 이 이론적 가격과 해당 시점(t)에서 관찰되는 옵션가격과의 차이를 이용하여 내표본 가격오차를 매월 계산한다. 실제측도에서의 외표본 가격오차는 상수로 추정

15) 강장구 외(2008)에서는 현재 t시점에서만 옵션자료 선택 기준을 만족하도록 자료를 추출하였다.

된 모수와 다음 거래일(t+1)의 기초자산 가격에 대한 이론적인 옵션가격과 다음 거래일에서 관찰되는 옵션가격의 차이를 이용하여 계산된다. 위험중립측도에서는 매달 특정시점마다 모수가 새로 추정된다는 것을 제외하고는 내표본과 외표본 가격오차를 계산하는 방법이 실제측도에서와 유사하다. 한편, KOSPI 200 옵션시장에서는 풋-콜 페리티가 비교적 잘 성립한다고 알려져 있으므로 옵션자료 선택기준을 만족하는 콜옵션의 모든 가격도에 대하여 결과값을 보고[16)]한다.

<표 4>(<표 5>)는 기초자산 수익률 자료(옵션자료)를 이용하여 실제측도(위험중립측도)에서 모수를 추정하고 모형별로 내표본 및 외표본 가격결정력을 비교한 것이다. 이 표는 내표본 및 외표본 가격결정에 대한 절대 및 상대오차를 제시하는데, 이 값들이 작을수록 모형의 가격결정성과가 우수한 것이다. 각 페널별로 첫 번째 열은 옵션의 가격도이고, 두 번째 열은 관측치의 수 이다. <표 4>(<표 5>)의 관측치 수는 <표 1>에서 제시한 선택된 표본에 관한 가격도별 관측치 수 보다 조금 줄었는데, 이는 현재시점(t)과 다음시점(t+1)에 모두 제 3장에서 제시한 옵션자료 선택기준을 만족하는 옵션들만 추출하였기 때문이다. 모든 모형에서 상대가격오차가 내가격 옵션에서 외가격 옵션으로 갈수록 증가하는데, 이는 내가격 옵션이 외가격 옵션에 비하여 상대적으로 가격이 비싸기 때문이며, 이러한 결과는 Kim and Kim(2004)과도 일치한다.

실제측도에서 추정한 GARCH계열 모형의 옵션가격결정성과 비교 결과는 아래와 같다. <표 4>에서 각 모형마다 외표본 가격결정오차가 내표본 가격결정오차보다 더 작은 경우가 발견되는데, 이는 기초자산 수익률 만을 이용하여 표본기간 동안 시간에 따라 변하지 않는 모수를 추정하였으므로, 현재 시점의 가격적합도가 반드시 다음 시점의 가격적합도보다 좋을 이유가 없기 때문이다. 등분산을 가정하는 이산 블랙-숄즈 모형보다, 변동성과 기초자산수익률의 상관관계를 잘 잡아내도록 모형화된 GARCH계열 모형들의 성과가 대체로 우수함을 알 수 있다. <표 4>는 분산방정식이 GARCH 모형을 따를 때 내가격 및 등가격 옵션에서 가격결정성과가 가장 우수함을 보여준다. 또한 ARCH 모형은 심내가격 옵션을 제외한 모든 옵션에 대하여 성과가 가장 열등했고, 특히 등분산을 가정하는 이산 블랙-숄즈 모형보다도 성과가 안 좋다. 비대칭 변동성반응을 잡아내는 모형들 중에서는 GJR-GARCH 모형이 심외가격 옵션을 제외하고는 성과가 가장 우수하다. 외가격 옵션들의 경우, 대체로 분산의 비대칭 반응을 잡아내는 복잡한 모형들의 성과가 우수하고, 심외가격 옵션의 경우 가장 복잡한 모형인 GARCH-News 모형의 성과가 가장 우수하다. 이는 개인투자자들이 활발하게 참여하는 외가격 및 심외가격 옵션시장에는 시장의 이상과열 현상 및 정서가 매우 빠르게 반영되고, 이것은 복잡한 형태의 GARCH계열 모

16) 풋-콜 페리티에 의하여 외가격 콜옵션은 내가격 풋옵션과, 내가격 콜옵션은 외가격 풋옵션과 유사한 성격을 갖는다. 한편 강장구 외(2008)처럼 외표본 기간을 늘리거나 풋옵션 자료를 사용하여도 논문의 본질적인 결과는 큰 차이가 없다.

<표 4>실제측도에서의 추정치를 이용한 콜옵션에 대한 가격결정성과의 비교

본 표는 6가지 GARCH계열 옵션가격결정 모형들의 모수들을 실제측도에서 기초자산의 수익률을 이용하여 추정한 뒤, 내표본 및 외표본 가격결정성과를 비교한 것이다. 아래의 6가지 GARCH계열 옵션가격결정 모형들은 실제측도에서 기초자산에 대한 확률 모형의 평균방정식이 Duan(1995)의 형태를 따르고, 분산방정식이 각각 GARCH(0, 0), ARCH(1), GARCH(1, 1), GJR-GARCH(1, 1), QGARCH(1, 1), GARCH-News(1, 1)을 따른다고 가정한다. 각 모형마다 가격도에 따른 평균절대가격오차(MAE)와 평균상대가격오차(MAPE) 그리고 절대 및 상대가격오차의 표준편차(STD)를 보고한다. 가격도는 K/S-1로 정의하였고, K는 옵션의 행사가격, S는 KOSPI 200 주가지수를 의미한다. Panel A는 내표본 절대가격오차, Panel B는 외표본 절대가격오차, Panel C는 내표본 상대가격오차, Panel D는 외표본 상대가격오차이다. 상대가격오차는 백분율로 표시한다.

Panel A: 내표본 절대가격오차

		Black-Scholes		ARCH		GARCH		GJR-GARCH		NGARCH		GARCH-News	
가격도	자료수	MAE	STD	MAE	STD	MAE	STD	MAE	STD	MAE	STD	MAE	STD
-0.1 < K/S-1 < -0.06	54	0.422	0.269	0.437	0.282	0.294	0.273	0.601	0.317	0.814	0.380	0.855	0.368
-0.06 < K/S-1 < -0.03	83	0.729	0.471	0.795	0.511	0.419	0.413	0.570	0.435	0.725	0.480	0.759	0.495
-0.03 < K/S-1 < 0	80	0.877	0.635	0.976	0.701	0.437	0.391	0.500	0.358	0.571	0.395	0.618	0.410
0 < K/S-1 < 0.03	86	0.954	0.576	1.048	0.652	0.420	0.352	0.421	0.329	0.484	0.334	0.523	0.355
0.03 < K/S-1 < 0.06	86	0.850	0.471	0.940	0.536	0.388	0.298	0.348	0.333	0.380	0.344	0.404	0.366
0.06 < K/S-1 < 0.1	87	0.573	0.344	0.638	0.386	0.271	0.244	0.261	0.258	0.286	0.262	0.303	0.284

Panel B: 외표본 절대가격오차

		Black-Scholes		ARCH		GARCH		GJR-GARCH		NGARCH		GARCH-News	
가격도	자료수	MAE	STD	MAE	STD	MAE	STD	MAE	STD	MAE	STD	MAE	STD
-0.1 < K/S-1 < -0.06	54	0.447	0.355	0.461	0.359	0.325	0.327	0.612	0.349	0.816	0.423	0.852	0.407
-0.06 < K/S-1 < -0.03	83	0.700	0.531	0.772	0.568	0.422	0.434	0.549	0.412	0.712	0.442	0.747	0.445
-0.03 < K/S-1 < 0	80	0.870	0.645	0.967	0.713	0.418	0.409	0.494	0.344	0.572	0.378	0.620	0.398
0 < K/S-1 < 0.03	86	0.967	0.590	1.060	0.683	0.445	0.375	0.417	0.315	0.463	0.318	0.497	0.348
0.03 < K/S-1 < 0.06	86	0.878	0.493	0.967	0.584	0.435	0.368	0.360	0.348	0.366	0.327	0.394	0.361
0.06 < K/S-1 < 0.1	87	0.629	0.385	0.695	0.445	0.350	0.334	0.292	0.335	0.301	0.309	0.320	0.325

Panel C: 내표본 상대가격오차(백분율)

		Black-Scholes		ARCH		GARCH		GJR-GARCH		NGARCH		GARCH-News	
가격도	자료수	MAPE	STD	MAPE	STD	MAPE	STD	MAPE	STD	MAPE	STD	MAPE	STD
-0.1 < K/S-1 < -0.06	54	5.1	3.5	5.2	3.6	3.8	3.8	7.0	3.5	9.3	3.9	9.9	3.9
-0.06 < K/S-1 < -0.03	83	11.6	9.0	12.6	9.5	7.0	8.3	8.9	6.9	11.1	6.9	11.6	7.1
-0.03 < K/S-1 < 0	80	21.4	17.9	23.8	19.7	11.1	12.1	12.3	9.5	13.9	9.5	15.0	9.4
0 < K/S-1 < 0.03	86	44.6	42.0	49.8	47.6	20.0	24.4	18.4	18.2	20.2	16.4	21.7	15.4
0.03 < K/S-1 < 0.06	86	89.9	97.6	103.0	113.3	38.1	42.7	27.4	28.1	28.2	24.8	29.2	22.3
0.06 < K/S-1 < 0.1	87	163.4	224.9	194.9	269.6	75.9	109.6	51.4	69.0	52.0	62.7	49.6	50.8

Panel D: 외표본 상대가격오차(백분율)

		Black-Scholes		ARCH		GARCH		GJR-GARCH		NGARCH		GARCH-News	
가격도	자료수	MAPE	STD	MAPE	STD	MAPE	STD	MAPE	STD	MAPE	STD	MAPE	STD
-0.1 < K/S-1 < -0.06	54	5.8	4.8	5.9	4.6	4.5	5.2	7.3	3.6	9.6	4.3	10.2	4.2
-0.06 < K/S-1 < -0.03	83	11.2	10.0	12.1	10.4	7.1	8.9	8.6	6.8	10.7	6.4	11.2	6.5
-0.03 < K/S-1 < 0	80	21.1	17.7	23.3	19.5	10.8	12.8	12.0	9.3	13.7	9.1	14.8	9.2
0 < K/S-1 < 0.03	86	45.8	43.1	51.0	49.1	21.0	25.2	17.9	18.3	19.2	16.8	20.4	16.1
0.03 < K/S-1 < 0.06	86	90.4	100.0	103.1	116.4	40.4	45.0	27.1	28.7	26.9	25.5	27.7	23.0
0.06 < K/S-1 < 0.1	87	165.3	225.7	196.3	269.2	80.2	113.2	50.8	74.5	50.1	68.5	48.7	56.2

<표 5>위험중립측도에서의 추정치를 이용한 콜옵션에 대한 가격결정성과의 비교

본 표는 6가지 GARCH계열 옵션가격결정 모형들의 모수들을 위험중립측도에서 옵션가격을 이용하여 추정한 뒤, 내표본 및 외표본 가격결정성과를 비교한 것이다. 아래의 6가지 GARCH계열 옵션가격결정 모형들은 위험중립측도에서 기초자산에 대한 확률 모형의 평균방정식이 Duan(1995)의 형태를 따르고, 분산방정식이 각각 GARCH(0, 0), ARCH(1), GARCH(1, 1), GJR-GARCH(1, 1), QGARCH(1, 1), GARCH-News(1, 1)을 따른다고 가정한다. 각 모형마다 가격도에 따른 평균절대가격오차(MAE)와 평균상대가격오차(MAPE) 그리고 절대 및 상대가격오차의 표준편차(STD)를 보고한다. 가격도는 K/S-1로 정의하였고, K는 옵션의 행사가격, S는 KOSPI 200 주가지수를 의미한다. Panel A는 내표본 절대가격오차, Panel B는 외표본 절대가격오차, Panel C는 내표본 상대가격오차, Panel D는 외표본 상대가격오차이다. 상대가격오차는 백분율로 표시한다.

Panel A: 내표본 절대가격오차

		Black-Scholes		ARCH		GARCH		GJR-GARCH		NGARCH		GARCH-News	
가격도	자료수	MAE	STD	MAE	STD	MAE	STD	MAE	STD	MAE	STD	MAE	STD
-0.1 < K/S-1 < -0.06	54	0.225	0.265	0.190	0.182	0.198	0.176	0.200	0.192	0.181	0.214	0.184	0.217
-0.06 < K/S-1 < -0.03	83	0.316	0.356	0.261	0.291	0.275	0.298	0.274	0.294	0.230	0.298	0.239	0.300
-0.03 < K/S-1 < 0	80	0.272	0.343	0.184	0.175	0.228	0.220	0.222	0.243	0.134	0.208	0.187	0.258
0 < K/S-1 < 0.03	86	0.244	0.265	0.129	0.149	0.187	0.157	0.184	0.162	0.085	0.116	0.128	0.185
0.03 < K/S-1 < 0.06	86	0.222	0.172	0.103	0.133	0.149	0.118	0.137	0.109	0.081	0.064	0.101	0.128
0.06 < K/S-1 < 0.1	87	0.157	0.119	0.093	0.102	0.114	0.115	0.105	0.096	0.077	0.057	0.081	0.085

Panel B: 외표본 절대가격오차

		Black-Scholes		ARCH		GARCH		GJR-GARCH		NGARCH		GARCH-News	
가격도	자료수	MAE	STD	MAE	STD	MAE	STD	MAE	STD	MAE	STD	MAE	STD
-0.1 < K/S-1 < -0.06	54	0.280	0.283	0.254	0.240	0.263	0.243	0.262	0.256	0.258	0.243	0.253	0.248
-0.06 < K/S-1 < -0.03	83	0.336	0.385	0.312	0.328	0.331	0.319	0.336	0.330	0.289	0.337	0.285	0.349
-0.03 < K/S-1 < 0	80	0.297	0.328	0.268	0.212	0.310	0.238	0.292	0.259	0.238	0.230	0.266	0.271
0 < K/S-1 < 0.03	86	0.270	0.269	0.214	0.168	0.249	0.176	0.241	0.183	0.179	0.152	0.222	0.196
0.03 < K/S-1 < 0.06	86	0.264	0.255	0.189	0.217	0.223	0.224	0.193	0.178	0.170	0.202	0.188	0.215
0.06 < K/S-1 < 0.1	87	0.217	0.214	0.156	0.201	0.183	0.205	0.158	0.158	0.148	0.186	0.149	0.194

Panel C: 내표본 상대가격오차(백분율)

		Black-Scholes		ARCH		GARCH		GJR-GARCH		NGARCH		GARCH-News	
가격도	자료수	MAPE	STD	MAPE	STD	MAPE	STD	MAPE	STD	MAPE	STD	MAPE	STD
-0.1 < K/S-1 < -0.06	54	2.9	3.8	2.4	2.5	2.5	2.4	2.5	2.7	2.3	3.0	2.4	3.1
-0.06 < K/S-1 < -0.03	83	5.5	7.6	4.2	5.3	4.5	5.3	4.6	5.7	4.0	6.0	4.1	6.2
-0.03 < K/S-1 < 0	80	7.4	11.0	4.6	4.9	5.8	6.0	5.7	7.1	3.7	6.7	5.1	8.1
0 < K/S-1 < 0.03	86	12.4	19.9	5.5	6.5	8.1	7.1	8.5	9.4	4.6	8.9	6.7	13.0
0.03 < K/S-1< 0.06	86	23.3	30.7	8.2	10.5	13.2	10.7	12.4	12.5	8.6	10.8	11.2	19.6
0.06 < K/S-1 < 0.1	87	42.4	58.5	17.8	21.4	21.4	17.3	20.4	19.3	17.1	17.4	18.8	26.0

Panel D: 외표본 상대가격오차(백분율)

		Black-Scholes		ARCH		GARCH		GJR-GARCH		NGARCH		GARCH-News	
가격도	자료수	MAPE	STD	MAPE	STD	MAPE	STD	MAPE	STD	MAPE	STD	MAPE	STD
-0.1 < K/S-1 < -0.06	54	3.7	3.9	3.2	3.1	3.3	3.1	3.3	3.3	3.3	3.1	3.2	3.2
-0.06 < K/S-1 < -0.03	83	5.5	7.2	4.9	5.7	5.3	5.7	5.4	6.1	4.6	6.1	4.6	6.3
-0.03 < K/S-1 < 0	80	7.4	9.8	6.6	5.7	7.6	6.4	7.4	7.3	5.8	6.6	6.6	7.9
0 < K/S-1 < 0.03	86	12.5	18.6	9.0	7.8	10.5	7.6	11.2	10.4	7.8	9.0	10.2	12.9
0.03 < K/S-1 < 0.06	86	22.3	29.9	13.2	11.4	16.5	11.4	15.8	13.2	12.3	10.9	15.0	19.2
0.06 < K/S-1 < 0.1	87	43.6	59.2	22.2	23.4	26.5	16.9	25.2	20.2	21.6	20.0	23.1	27.5

형이 이를 잘 잡아낼 수 있기 때문으로 생각할 수 있다. 정리하면, 기초자산 수익률을 이용하여 GARCH계열 모형을 추정하면 비교적 단순한 형태로 수익률 경로와 변동성의 상관관계를 잡아내거나 비대칭 반응을 잡아낼 수 있는 GARCH와 GJR-GARCH 모형이 상대적으로 복잡한 형태인 GARCH-News등에 비교해 대체로 옵션가격결정성과가 좋은 반면, 작은 차수의 자기회귀항을 가진 ARCH 모형으로서는 이러한 관계를 잡아내기 힘들다고 생각할 수 있다.

위험중립측도에서 추정한 GARCH계열 모형의 옵션가격결정성과에 대한 결과는 아래와 같다. 옵션자료를 이용(<표 5>)하면 기초자산의 수익률을 이용한 경우(<표 4>)에 비하여 전체적으로 가격결정성과가 우수하고 GARCH계열 모형들간의 옵션가격결정성과의 차이가 상대적으로 적다. 이러한 결과는 다음과 같은 요인에 기인한다. 첫째, 위험중립측도에서 매 월마다 옵션의 시장가격 정보를 이용하여 모수를 새로 추정하였으므로, 이 시간가변적인 모수의 추정치가 실제측도 하에서 가정된 시간불변적인 모수의 추정치보다 이론적인 옵션의 가격을 결정하는데 우월할 수 있다.[17] 둘째, 위험중립측도에서의 추정과 평가는 각 단계에서 사용되는 목적함수의 형태가 대단히 유사한 반면, 실제측도에서의 MLE방법을 이용하여 추정할 때 사용하는 목적함수는 옵션가격결정력의 평가단계에서 이용되는 목적함수의 형태와 그 함수형태가 매우 다르다. Christoffersen and Jacobs(2004 b)는 추정단계의 손실함수와 평가단계의 목적함수의 일관성이 지켜지지 않으면 최적의 추정치를 얻지 못할 수도 있다고 주장하였다. 셋째, 옵션가격을 사용하면 옵션가격이 함의하고 있는 투자자들의 기대에 대한 정보나 사려도(prudence), 그리고 미래정보에 대한 반영치를 유용하게 사용할 수 있다. 이는(블랙-숄즈 등의) 옵션가격결정모형이 함의하는 기초자산의 내재변동성이 기초자산 수익률의 역사적 자료만을 이용하여 추정한 역사적 변동성보다 좀 더 정확하고 미래상태와 투자자들의 기대를 잘 반영하는 변동성 추정치로 간주되는 것과 관련 지어 생각할 수 있다.

옵션가격을 이용해 추정된 모수를 보고한 <표 3>에서 살펴 본대로 옵션자료를 이용하여 월별로 모수를 추정하면 추정치가 시간이 지남에 따라 상당히 변함에도 불구하고, 가격결정성과가 상당히 우수한데 이는 Kim and Kim(2004)의 지적대로 모수의 안정성보다 모수의 상호관계(interdependency)의 안정성이 더 중요하기 때문일 수 있다. 또한 GARCH계열 모형들간의 옵션가격결정성과의 차이가 기초자산의 수익률을 이용하여 추정한 경우에

17) 공정한 비교를 위하여 실제측도에서 기초자산 수익률을 이용하여 GARCH계열 모형들의 모수를 매달 새로 추정하거나, 위험중립측도에서 전체 5년 7개월 동안의 모든 옵션자료를 이용하여 시간불변적인 모수를 추정하는 방법이 있을 수 있다. 그러나 전자는 주식 수익률을 가지고 GARCH계열 모형들을 올바로 추정하려면 비교적 긴 기간의 자료가 필요하다는 문제가 있고, 후자는 추정에 사용되는 자료가 너무 방대해 추정과정에서 올바로 최종해로 잘 수렴하지 않는 다는 문제가 있다. 이점과 관련하여 유용한 조언을 해주신 익명의 심사위원께 감사 드린다.

비하여 훨씬 적다.

옵션가격을 이용하여 위험중립측도에서 모형을 추정하면 각 시점에서 현재의 옵션가격을 가장 잘 설명하도록 모수가 추정되었으므로 모든 GARCH계열 모형에서 내표본 가격결정오차가 외표본 가격결정오차보다 작다. 한편 표본기간 전체 동안 등분산을 가정하는 이산 블랙-숄즈의 경우 일부 외가격 옵션에서는 이러한 관계가 반드시 성립하지는 않는다. <표 5>의 결과는 ARCH 모형을 포함한 모든 GARCH계열 모형들이 등분산을 가정하는 이산 블랙-숄즈 모형보다 가격결정력이 훨씬 우수함을 보여준다. 특히 ARCH 모형의 경우 기초자산 수익률만을 이용한 경우와는 달리, 상당히 좋은 가격결정성과를 나타낸다. 이는 추정시점마다 옵션가격에 함의된 새로운 정보를 이용하게 되면, 작은 차수의 변동성 자기회귀 항으로도 기초자산의 수익률 경로와 변동성관의 관계를 잘 잡아낼 수 있음을 암시한다. 또한 비대칭 NGARCH의 가격결정성과는 비대칭 변동성반응 현상을 구조화하는 모형들뿐 아니라 모든 모형들과 비교해도 우월하다. Franses Dijk(1996)는 주식 시장에서 NGARCH의 실증성과가 GJR-GARCH보다 우수하다고 주장하였는데 이러한 결과를 옵션가격을 이용하여 모수를 추정한 모형의 옵션가격결정측면에서도 살펴볼 수 있는 것이다.

<표 5>에서, 등분산 모형(이산 블랙-숄즈)보다는 ARCH 모형이, ARCH보다는 GARCH가, GARCH 모형보다는 NGARCH가 옵션가격결정성과가 대체로 좋은데, 이는 모형이 복잡해짐에 따라 옵션가격결정성과가 우수함을 의미한다. 단 NGARCH 이상으로 GARCH-News처럼 모형이 아주 복잡해질 필요는 없다. 즉, 비교한 GARCH계열 모형은 다르지만, Christoffersen and Jacobs(2004)의 결과처럼 너무 복잡하지 않게 비대칭 변동성반응을 구조화하는 비대칭 GARCH계열 모형이 옵션시장에서 가격결정성과가 가장 좋다고 결론 내릴 수 있다. 또한 옵션가격을 사용하여 추정을 하면 기초자산 분포의 왜도를 잘 묘사할 수 있는 비대칭 변동성반응을 구조화하는 모형들(GJR-GARCH, NGARCH, GARCH-News)의 성과가 대체로 기초자산의 두터운 꼬리분포만을 모형화 할 수 있는 GARCH 모형의 옵션가격결정 성과보다 좋다. 이러한 결과는 옵션가격결정에 있어서 기초자산 분포의 왜도가 상대적으로 중요하다는 김솔(2006, 2008)의 주장을 뒷받침 한다. 또한, 옵션가격에 기초자산수익률의 왜도의 정보가 잘 함의되어 있음을 암시한다.

4.3 헤지성과

옵션가격결정모형의 헤지성과는 모형의 실증성과를 분석할 때 가격결정성과와 다른 측면에서 중요하게 논의된다. 가격결정성과가 모형의 정적(static)성과를 반영한다면, 헤지성과는 모형이 옵션과 기초자산과의 동적(dynamic)관계를 얼마나 잘 잡아내느냐와 관련이 있다. 따라서 헤지성과에 대한 결과는 가격결정성과와 조금 다른 측면에서 살펴볼 필요가 있다. 특히, 헤지성과는 기초자산 변동성에 대한 예측력과 관련하여 생각할 수 있고, 헤지오차는 모형이 기초자산의 변동성을 얼마나 잘 추정해 내는지에 민감하게 반응한다. 또한,

헤지성과는 모형이 제시하는 그릭(Greek)값에 민감하며, 헤지 방법에 따라 결과가 달라질 수 있다. 무엇보다 대체로 복잡한 모형이 대체로 옵션의 가격결정을 잘한다고 알려진 반면, 헤지의 경우는 반드시 그렇지 않을 수도 있다. 예를 들어, 단순한 모형인 블랙-숄즈 모형의 경우 가격결정성과는 상대적으로 떨어지지만 평균적인 변동성을 잘 예측한다는 관점에서 헤지성과는 비교적 안정적인 것으로 보고되고 있다. 대표적으로, Bagchi, Cao, and Chen(1997)의 연구는 블랙-숄즈 모형을 이용하여 델타 헤지를 하였을 때 헤지성과가 비교적 우수하다고 주장한다.

본 절에서는 논문에서 소개된 표준 GARCH계열 모형들이 의미하는 옵션가격결정모형에 대하여 헤지성과를 각 모형이 함의하는 옵션 델타와 옵션 감마를 도출한 뒤, Rosenberg and Engle(2002) 및 강장구 외(2008)에서처럼 헤지 도구에 따라 구분된 세 가지 헤지 방법을 가지고 비교해 본다. 델타와 감마 값은 Engle and Rosenberg(1995)와 유사한 방법으로 유한차분법(FDM, Finite Difference Method)을 이용하여 도출한다. 1일 후의 기초자산의 가격 S_{t+1}이 식 (49)에서처럼 현재 기초자산가격 S_t보다 상승, 하락, 동일한 3개의 값을 가질 때, 델타와 감마 값은 식 (50)과 식 (51)을 이용하여 각각 구할 수 있다.

$$S_{t+1} = \begin{cases} S_t + \varepsilon \\ S_t \\ S_t - \varepsilon \end{cases} \tag{49}$$

$$\text{델타: } \frac{\partial C_{t+1}}{\partial S_{t+1}} \cong \frac{C_{t+1|S_t+\varepsilon} - C_{t+1|S_t-\varepsilon}}{2\varepsilon} \tag{50}$$

$$\text{감마: } \frac{\partial^2 C_{t+1}}{\partial S_{t+1}^2} \cong \frac{C_{t+1|S_t+\varepsilon} - 2C_{t+1|S_t} + C_{t+1|S_t-\varepsilon}}{\varepsilon^2} \tag{51}$$

ε의 크기는 위험중립측도에서의 오차항 ε_{t+1}가 이 오차항을 발생시키는 정규분포의 표준편차인 $\sqrt{h_{t+1}}$ 만큼 변했을 때 1일 동안의 기초자산 가격 변화로써 결정된다. 식 (52)는 이 경우 1일 후의 기초자산 가격을 나타내고, 식 (53)은 이에 따라 결정된 ε의 크기를 나타낸다.

$$S_{t+1} = S_t \exp\left(r - \frac{1}{2}h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}}\right) \tag{52}$$

$$\varepsilon = S_{t+1} - S_t = S_t\left[\exp\left(r - \frac{1}{2}h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}}\right) - 1\right] \tag{53}$$

델타와 감마 값을 구할 때 사용되는 t+1시점의 이론적인 옵션가격인 $C_{t+1|S_{t+1}}$은 제 2.2 절에서 설명한대로 기초자산 수익률을 이용하여 시간불변인 모수를 추정하거나, 옵션자료를 이용하여 시간가변인 모수를 t시점에서 추정한 뒤, 각 추정방법에서 t+1시점의 이론적

인 옵션가격을 나타내는 식에다가 식 (49)에서 가정된 기초자산 가격인 S_{t+1} 을 대입하여 구한다.

본 논문에서는 전체 자료기간 동안에 대해 공정하게 헤지오차를 계산하기 위하여, 매월 1개의 옵션 매도포지션에 대하여 헤지를 하는 대신에, 월별로 100P금액에 해당하는 외가격 콜옵션의 매도 포지션에 대하여 헤지를 한다. 즉, 1월에 헤지를 하고자 하는 외가격 콜옵션의 가격이 2.5P라면 40개의 매도 포지션에 대하여 헤지 포트폴리오를 구성하여 헤지를 하고, 2월에 외가격 콜옵션의 가격이 2P로 하락했다면 50개의 외가격 콜옵션 매도 포지션에 대하여 헤지를 한다. 외가격 콜옵션은 논문에서 정의된 가격도 값이 0.05에 가장 가까운 행사가격을 갖는 옵션으로 정의된다. 헤지 포트폴리오는 아래의 세가지 헤지 방법을 통하여 구축된다. 논의를 단순하게 하기 위하여, 거래비용은 없고 기초자산의 포트폴리오를 정확하게 구성할 수 있다고 가정하자. 첫 번째 헤지 방법은 기초자산의 포트폴리오를 이용하여 델타 헤지하는 방법으로써, 가장 단순하고 손쉬운 헤지 방법이기 때문에 널리 이용되는 방법이다. 그러나 기초자산이 KOSPI 200 지수이므로 현실적으로 기초자산의 포트폴리오를 정확히 구축하는데 비용이 많이 들고, 비동시적 거래의 문제도 발생할 수 있다. 두 번째 헤지 방법은 등가격 콜옵션을 이용하여 델타 헤지하는 경우이다. 이 헤지 방법은 헤지 대상과 유사한 성격을 갖는 헤지 도구를 사용하여 복잡하지 않은 델타 헤지를 하는 장점이 있다. 세 번째 헤지 방법은 기초자산과 등가격 콜옵션을 모두 이용하여 델타 및 감마 헤지를 하는 경우로 델타 위험과 감마 위험을 모두 중립화 할 수 있으나, 두 개의 헤지 도구가 필요한 가장 복잡한 헤지 방법이다.

(헤지 방법 1) 기초자산을 이용하여 델타 헤지
(헤지 방법 2) 등가격 옵션을 이용하여 델타 헤지
(헤지 방법 3) 기초자산과 등가격 옵션을 이용하여 델타 및 감마 헤지

이 세가지 헤지 방법을 이용하여 강장구 외(2008)에서의 헤지 절차에 따라 헤지 포트폴리오를 구성하여 1일 헤지를 한다. 헤지오차는 헤지 포트폴리오의 가치와 시장에서 관찰된 옵션가격과의 차이로 결정된다. 이 헤지오차가 작을수록 해당 모형이 헤지를 잘 한다고 생각할 수 있다.

<표 6>(<표 7>)은 기초자산 수익률 자료(옵션자료)를 이용하여 실제측도(위험중립측도)에서 모수를 추정하고 모형 별로 헤지오차의 절대값의 평균과 표준편차를 통해 헤지성과를 비교한 것이다. 각 모형 별로 세가지 헤지 방법에 대한 결과를 제시한다. 가격 결정 성과가 모형간에 큰 차이를 보였던 반면, 헤지성과는 모형간에 차이는 있으나 가격결정성과에 비해 모형간의 차이가 적다. 이는 이산 블랙-숄즈 모형을 비롯한 GARCH계열 모형들이 의미하는 옵션가격결정 모형이 기초자산과 옵션간의 동적 관계를 비슷한 정도로 잘 잡아내기 때문이다. 헤지 방법에 따른 결과는 등가격 옵션을 이용한 델타 헤지 결과가 모든

〈표 6〉 실제측도에서의 추정치를 이용한 외가격 콜옵션에 대한 헤지성과의 비교

본 표는 6가지 GARCH계열 옵션가격결정모형들의 모수들을 실제측도에서 기초자산의 수익률을 이용하여 추정한 뒤, 100P의 외가격 콜옵션의 매도 포지션에 대한 헤지성과를 비교한 것이다. 아래의 6가지 GARCH계열 옵션가격결정모형들은 실제측도에서 기초자산에 대한 확률모형의 평균방정식이 Duan(1995)의 형태를 따르고, 분산방정식이 각각 GARCH(0, 0), ARCH(1), GARCH(1, 1), GJR-GARCH(1, 1), QGARCH(1, 1), GARCH-News(1, 1)을 따른다고 가정한다. 각 모형마다 기초자산만을 이용하여 델타 헤지, 등가격 콜옵션을 이용하여 델타 헤지, 기초자산과 등가격 콜옵션을 모두 이용하여 델타 및 감마 헤지하는 세가지 헤지 방법을 이용하여 결과를 비교한다. 각 헤지 방법마다 외가격 콜옵션과 헤지 포트폴리오의 차이의 절대값으로 계산되는 헤지오차에 대한 평균절대오차(MAE)와 표준편차(STD)값을 보고한다.

	Black-Scholes		ARCH		GARCH		GJR-GARCH		NGARCH		GARCH-News	
헤지도구	MAE	STD	MAE	STD	MAE	STD	MAE	STD	MAE	STD	MAE	STD
기초자산	17.55	18.12	18.19	19.07	14.18	13.09	14.27	12.57	14.20	12.68	14.36	12.66
ATM 옵션	13.64	14.66	14.15	16.20	8.37	8.29	8.23	8.91	7.94	8.86	8.32	8.59
기초자산 및 ATM 옵션	14.83	16.24	15.71	17.74	9.03	8.61	9.30	9.09	9.62	8.91	9.22	8.49

〈표 7〉 위험중립측도에서의 추정치를 이용한 외가격 콜옵션에 대한 헤지성과의 비교

본 표는 6가지 GARCH계열 옵션가격결정모형들의 모수들을 실제측도에서 기초자산의 수익률을 이용하여 추정한 뒤, 100P의 외가격 콜옵션의 매도 포지션에 대한 헤지성과를 비교한 것이다. 아래의 6가지 GARCH계열 옵션가격결정모형들은 위험중립측도에서 기초자산에 대한 확률모형의 평균방정식이 Duan(1995)의 형태를 따르고, 분산방정식이 각각 GARCH(0, 0), ARCH(1), GARCH(1, 1), GJR-GARCH(1, 1), QGARCH(1, 1), GARCH-News(1, 1)을 따른다고 가정한다. 각 모형마다 기초자산만을 이용하여 델타 헤지, 등가격 콜옵션을 이용하여 델타 헤지, 기초자산과 등가격 콜옵션을 모두 이용하여 델타 및 감마 헤지하는 세가지 헤지 방법을 이용하여 결과를 비교한다. 각 헤지 방법마다 외가격 콜옵션과 헤지 포트폴리오의 차이의 절대값으로 계산되는 헤지오차에 대한 평균절대오차(MAE)와 표준편차(STD)값을 보고한다.

	Black-Scholes		ARCH		GARCH		GJR-GARCH		NGARCH		GARCH-News	
헤지도구	MAE	STD	MAE	STD	MAE	STD	MAE	STD	MAE	STD	MAE	STD
기초자산	13.58	11.23	9.71	9.80	10.26	10.37	11.02	10.60	10.64	9.65	11.33	10.70
ATM 옵션	6.75	6.23	4.04	4.96	4.97	6.18	5.20	5.98	4.74	4.97	5.12	5.68
기초자산 및 ATM 옵션	7.85	7.17	4.94	4.69	5.31	4.96	5.13	4.98	5.80	5.87	6.05	6.01

모형에서 가장 성과가 우수한데, 이는 외가격 옵션과 등가격 옵션의 관련성이 크고, 시장에 반영된 정보에 대한 가격 움직임이 유사하기 때문이다. 그리고 두개의 헤지 도구를 사용한 델타 및 감마 헤지 방법이 기초자산만을 사용하는 델타 헤지 방법보다 헤지성과가 좋다. 즉 복잡한 헤지 방법으로 구성된 헤지 포트폴리오가 헤지 대상인 외가격 콜옵션의 가격 움직임을 더 잘 추적한다는 의미이다.

실제측도에서 추정한 GARCH계열 모형의 헤지성과 비교결과는 <표 6>과 같다. <표 6>에서 기초자산만을 이용한 델타 헤지의 경우 GARCH 모형의 헤지오차가 평균적으로 가장 작고 NGARCH와 GJR-GARCH가 그 뒤를 따른다. 등가격 옵션을 이용한 델타 헤지의 경우 NGARCH가 가장 작은 평균 헤지오차를 갖는고, 델타 및 감마 헤지의 경우 GARCH 모형이 가장 우월한 헤지성과를 보인다. 실제측도에서 기초자산 수익률 만을 이용하여 추정한 경우, GARCH 모형의 가격결정성과가 좋았는데 역시 헤지성과 또한 우월했다. 또한 외가격 옵션에서 가격결정성과가 좋았던 GJR-GARCH와 NGARCH의 헤지성과 또한 우수한 편이다. 반면 가격결정성과가 가장 나쁜 ARCH 모형의 경우 헤지성과 또한 가장 열등했다. 정리하면, 실제측도에서 추정된 GARCH계열 모형들의 경우 비록 헤지오차가 모형들간에 크지는 않았으나 가격결정성과와 헤지성과는 상당히 유사한 관계를 나타내었다. 이러한 결과는 변동성의 추정이 헤지 결과에 매우 큰 영향을 미치는데, GARCH계열 모형은 특히 변동성의 확률 과정을 모형화하는데 초점이 맞추어져 있으므로, 변동성의 확률 모형을 정확히 추정하는 모형이 헤지 뿐 아니라 가격결정도 잘하게 되기 때문으로 생각할 수 있다.

위험중립측도에서 추정한 GARCH계열 모형의 헤지성과 비교 결과는 <표 7>과 같다. 가격결정성과와 마찬가지로 헤지성과 또한 옵션자료를 이용(<표 7>)하면 기초자산의 수익률을 이용한 경우(<표 6>)에 비하여 전체적으로 성과가 향상되었으나 가격결정성과의 경우처럼 향상의 정도가 크지는 않다. 이러한 결과는 헤지의 경우 기초자산가격만을 이용하여 평균적인 변동성을 잘 예측하기만 한다면 상당한 헤지성과를 거둘 수 있음을 암시한다. 위험중립측도에서 옵션가격을 이용하여 추정하여 상당한 가격결정력 향상을 보인 ARCH 모형이 모든 헤지 방법에서 가장 우월한 헤지성과를 보였다. GARCH계열 모형중 가장 단순한 형태인 ARCH 모형의 헤지성과가 가장 좋은 것은 복잡한 모형이 언제나 헤지성과가 좋은 것은 아니라는 Bagchi, Cao, Chen(1997)등의 결과와도 일치한다. 한편, 가장 우수한 가격결정성과를 보였던 NGARCH는 ARCH와 GARCH에 버금가는 헤지성과를 보인다. 역시 위험중립측도에서 추정한 결과도 가격결정성과와 헤지성과 사이의 관련성을 나타낸다고 볼 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 ARCH 모형을 포함한 표준 GARCH계열 모형들의 실증성과를 KOSPI 200 옵션시장을 대상으로 Duan(1995)의 GARCH 옵션가격결정 모형의 틀 하에서 가격결

정력과 헤지성과의 측면에서 살펴보았다. 각 GARCH계열 모형은 기초자산 수익률 혹은 옵션가격을 이용하여 추정하였다.

논문의 주요 실증분석 결과는 아래와 같이 정리될 수 있다.

첫째, 옵션가격을 이용하여 모형들을 추정하였을 때 기초자산 수익률만을 사용한 경우보다 가격결정력 및 헤지성과가 대체로 향상되었다. 이는 옵션가격을 사용하게 되면 시간가변적인 모수를 추정하게 됨에 따라, 시장정서와 투자자들의 기대와 사려도에 대한 변화를 잘 반영할 수 있기 때문이다. 또한 옵션가격이 가지고 있는 미래에 대한 정보가 모형의 추정에 유용하게 사용되고 있음을 암시한다. 단, 옵션가격 사용시 가격결정력의 경우 향상의 정도가 큰 반면, 헤지성과의 경우 향상의 정도가 상대적으로 작았다.

둘째, GARCH계열 모형들이 벤치마크인 이산 블랙-숄즈 모형보다 가격결정력 및 헤지성과가 우수했다. 이는 GARCH계열 모형들은 기초자산의 경로와 변동성간의 상관관계를 잘 묘사할 수 있고, 기초자산 분포의 두터운 꼬리 분포 및 (비대칭 변동성반응을 구조화하도록 고안된 경우) 왜도를 잘 모형화 할 수 있기 때문이다.

셋째, 기초자산 수익률만을 이용하여 추정했을 때, 내가격 및 등가격 옵션에서는 GARCH 모형의 가격결정성과가 가장 우수하고, 개인투자자들이 활발하게 참여하여 시장의 이상과열 현상 및 정서가 상대적으로 빠르게 반영되는 외가격 옵션에서는 비대칭 변동성반응을 묘사할 수 있는 모형들의 가격결정성과가 우수하다.

넷째, 옵션가격을 사용하여 추정했을 때, 변동성의 비대칭 반응을 잡아내는 모형들이 상대적으로 실증성과가 우수했다. 또한 모형이 복잡해질수록 대체로 가격결정성과가 좋으나, GARCH-News 처럼 아주 복잡한 모형보다는, 적절한 형태로 비대칭 변동성반응을 구조화하는 NGARCH같은 모형의 가격결정성과가 가장 우수했다. 이는 모형이 복잡해짐에 따라 기초자산 분포의 두터운 꼬리 분포(첨도)뿐 아니라 비대칭 정도(왜도) 또한 잘 묘사할 수 있기 때문이다.

다섯째, 기초자산의 수익률만을 이용하여 추정한 경우는 GARCH 모형이, 옵션가격을 이용하여 추정한 경우는 ARCH 모형의 헤지성과가 대체로 우월했다. 이는 복잡한 모형이 언제나 헤지를 잘 하는 것은 아니며, 기초자산의 경로와 변동성의 상관관계 및 변동성 군집현상을 적절히 파악해 낼 수 있는 단순한 모형들의 헤지성과가 뛰어남을 의미한다.

본 연구는, 표준 GARCH계열들의 실증성과를 옵션의 가격결정력과 헤지성과 측면에서 국내 옵션시장에 대해서 살펴본 최초의 연구라는 의의를 갖는다. 따라서 GARCH계열 모형들을 주식 시장에서의 변동성 예측의 측면이 아니라, 각 GARCH 모형이 함의하는 옵션가격결정모형을 통해 옵션시장에서 성과를 비교해 보고자 하는 연구들의 초석이 될 수 있을 것으로 기대한다. 이와 관련해 추후 연구의 방향은 아래와 같은 측면에서 생각해 볼 수 있을 것이다. 첫째로 본 논문에서 사용한 GARCH계열 모형은 기본적으로 이산 확률과정에서의 모형이다. 그러나 Kallsen and Taqqu(1998)은 연속 모형에서 정의된 ARCH 유

형의 모형들에 대해 시장의 완전성이 성립함을 수학적으로 입증하였다. 추후에는 이산 확률과정에서 정의된 GARCH계열 모형들을 연속 확률과정에서의 모형으로 확장시켜 연속 확률과정 GARCH계열 모형과 역시 연속확률과정에서 정의된 기존의 추계적 변동성(stochastic volatility)모형들과의 옵션가격결정성과 및 헤지성과를 비교해 볼 수 있을 것이다. 두 번째로, 본 논문에서의 GARCH계열 가격결정옵션 모형들은 실무적으로 구축비용이 많이 들어갈 수도 있다. 본 논문의 목적이 동일한 틀 하에서 공정한 기준으로 여러 GARCH 모형들의 실증성과를 옵션시장에 대하여 살펴보는 것이므로, GARCH계열 모형들 만의 옵션에 대한 가격결정과 헤지를 살펴보는 것으로 실증 분석을 한정하였고, GARCH 옵션가격결정 모형의 틀 하에서 표현될 수 있는 이산 블랙-숄즈 모형만을 분석하였으나, 그 단순한 형태로 인해 실무적으로 널리 사용되는 ad hoc 블랙-숄즈 모형이나, 구현하기가 매우 복잡하지만 상당히 우수한 옵션가격결정력 때문에 종종 사용되는 Heston(1993)의 추계적 변동성 모형과 비교하는 것은 새로운 논문 주제로써 의미를 가질 것이다. 마지막으로, 모형을 추정할 때 EMM(efficient method of moment)방법 등의 진보된 추정방법을 통해, 기초자산 수익률과 옵션가격 정보를 동시에 사용하여 모형을 추정하고, 그때의 실증성과를 조사해 보는 방법 또한 시도해 볼 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

강장구, 김병천, 류두진, 윤재선, "실증적 추계할인율에 대한 연구: KOSPI 200 옵션시장을 중심으로", 재무연구, 제21권 제3호(2008), pp. 91-137.

김솔, "위험중립분포 왜도, 첨도의 옵션가격결정에 대한 영향력", 선물연구, 제14권, 제2호(2006), pp. 31-56.

김솔, "위험중립분포 왜도, 첨도의 상대적 중요성: Corrado and Su(1996) 모형을 이용한 옵션 가격 예측", 선물연구, 제16권 제1호(2008), pp. 1-20.

정혜욱, 안병국, "우리나라 시장에서의 옵션 가격결정 모형의 성과 비교: KOSPI 200 지수콜 옵션을 중심으로", POSRI 경영연구, 제2권 제2호(2002), pp. 225-254.

Bakshi, C., C. Cao, and Z. Chen, 1997, Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models, *Journal of Finance* 52, pp. 2003-2049.

Bekaert G. and G. Wu, 2000, Asymmetric Volatility and Risk in Equity Markets, *The Review of Financial Studies* 13, pp. 1-42.

Black, F., 1976, Studies of Stock Price Volatility Changes, *Proceedings of the 1976 Meetings of the American Statistical Association, Business and Economical Statistics Section* pp. 177-181.

Bollerslev, T., 1986, Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* 31, pp. 307-327.

Campbell, J. and L. Hentschel, 1992, No News is Good News: An Asymmetric Model of Changing Volatility in Stock Returns, *Journal of Financial Economics* 31, pp. 281-318.

Christie, A., 1982, The Stochastic Behavior of Common Stock Variances-Value, Leverage and Interest Rate Effects, *Journal of Financial Economics* 10, pp. 407-432.

Christoffersen, P. and K. Jacobs, 2004, Which GARCH Model for Option Valuation? *Management Science* 50, pp. 1204-1221.

Christoffersen, P. and Jacobs, K., 2004b, The Importance of the Loss Function in Option Valuation, *Journal of Financial Economics* 72, pp. 291–318.

Christoffersen, P., S. Heston, and K. Jacobs, 2006, Option Valuation with Conditional Skewness, *Journal of Econometrics* 131, pp. 253–284.

Demeterfi, K., E. Derman, M. Kamal, and J. Zou, 1999, More than You Ever Wanted to Know about Volatility Swaps, *Goldman Sachs*.

Duan, J., 1995, The GARCH Option Pricing Model, *Mathematical Finance* 5, pp. 13–32.

Duan, J., 1996, Cracking the Smile, *Risk* 9, pp. 55-59.

Duan, J., 1997, Augmented GARCH(p, q) Process and Its Diffusion Limit, *Journal of Econometrics* 79, pp. 97-127.

Duan, J., G. Gauthier, and J. Simonato, 1999, An Analytical Approximation for the GARCH Option Pricing Model, *Journal of Computational Finance* pp. 75-116.

Duan, J., P. Ritchken, and Z. Sun, 2006, Approximation GARCH-Jump Models, Jump-Diffusion Process, and Option Pricing, *Mathematical Finance* 16, pp. 21–52.

Duan, J., P. Ritchken, and Z. Sun, 2007, Jump Starting GARCH: Pricing Options with Jumps in Returns and Volatilities, *Working Paper*.

Duan, J., and H. Zhang, 2001, Pricing Hang Seng Index Options: A GARCH Approach, *Journal of Banking and Finance* 25, pp. 1989-2014.

Engle, R., 1982. Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation, *Econometrica* 50, pp. 987-1008.

Engle, R., and T. Bollerslev, 1986, The Persistence of Conditional Variances, *Econometric Reviews* 5, pp. 1-50.

Engle, R. and V. Ng, 1993, Measuring and Testing the Impact of News on Volatility, *Journal of Finance* 48, pp. 1749-1778.

Engle, R. and J. Rosenberg, 1995 GARCH Gamma, *Journal of Derivatives* 2, pp. 47–59.

Franses, P. H. and D. Dijk, 1996, Forecasting Stock Market Volatility Using (Non-Linear) GARCH Models, *Journal of Forecasting* 15. pp. 229-235.

French, K., G. Schwert, and R. Stambaugh, 1987, Expected Stock Returns and Volatility, *Journal of Financial Economics* 19, pp. 3-29.

Geweke, J., 1986, Comment, *Econometric Reviews* 5, pp. 57-61.

Glosten, L., R. Jagannathan, and D. Runkle, 1993, On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks, *Journal of Finance* 48, pp. 1779-1801.

HÄardle W. and C. Hafner, 2000, Discrete Time Option Pricing with Flexible Volatility Estimation, *Finance and Stochastics* 4, pp. 189-207.

Hentschel, L., 1995, All in the Family: Nesting Symmetric and Asymmetric GARCH Models, *Journal of Financial Economics* 39, pp. 71-104.

Heston, S. and S. Nandi, 2000, A Closed Form GARCH Option Pricing Model, *Review of Financial Studies* 13, pp. 585-625.

Higgins, M. and A. Bera, 1992, A Class of Nonlinear ARCH Models, *International Economic Review* 33, pp. 137-158.

Hsieh, K. and P. Ritchken, 2005, An Empirical Comparison of GARCH Models, *Review of Derivatives Research* 8, pp. 129-150.

Kallsen, J. and M. Taqqu, 1998, Option Pricing in ARCH-type Models, *Mathematical Finance* 8, pp. 13–26.

Kim, I., and S. Kim, 2004, Empirical Comparison of Alternative Stochastic Volatility Option Pricing Models: Evidence from Korean KOSPI 200 Index Options Market, *Pacific-Basin Finance Journal* 12, pp. 117-142.

Kim, I. and S. Kim, 2005, Is It Important to Consider the Jump Component for Pricing and Hedging Short-Term Options?, *The Journal of Futures Markets* 25, pp. 989–1009.

Lehar, A., M. Scheicher, and C. Schittenkopf, 2002, GARCH vs. Stochastic Volatility Option Pricing and Risk Management, *Journal of Banking and Finance* 26, pp. 323-345.

Lehnert, T., 2003, Explaining Smiles: GARCH Option Pricing with Conditional Leptokurtosis and Skewness, *Journal of Derivatives* pp. 27-39.

Maheu, J. and T. Mccurdy, 2004, News Arrival, Jump Dynamics, and Volatility Components for Individual Stock Returns, *Journal of Finance* 59, pp. 755-793.

Merton, R., 1976, Option Pricing when the Underlying Stock Returns are Discontinuous, *Journal of Financial Economics* 3, pp. 125-144.

Nelson, D., 1991, Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach, *Econometrica* 59, pp. 347-370.

Pagan, A., and W. Schwert, 1990, Alternative Models for Conditional Stock Volatility, *Journal of Econometrics* 45, pp. 267-290.

Pindyck, R., 1984, Risk, Inflation, and the Stock Market, *American Economic Review* 74, pp. 334-351.

Rosenberg, J. and R. Engle, 2002, Empirical Pricing Kernels, *Journal of Financial Economics* 64, pp. 341–372.

Schwert, G., 1989, Why Does Stock Market Volatility Change Over Time?, *Journal of Finance* 44, pp. 1115-1153.

Stentoft, L., 2005, Pricing American Options when the Underlying Asset Follows GARCH. Processes, *Journal of Empirical Finance* 12, pp. 576-611.

Wu, G., 2001, The Determinants of Asymmetric Volatility, *The Review of Financial Studies* 14, pp. 837-859.

Zakoian, J., 1994, Threshold Heteroskedastic Models, *Journal of Economic Dynamics and Control* 18, pp. 931-955.

<Appendix>

Duan(1997)은 여러 GARCH계열 모형들을 포함하는 확장(augmented) GARCH 모형을 제시하였다. 이 확장 GARRCH 모형을 이용하여 본 논문에서 소개된 GARCH계열 모형들의 안정성 조건을 유도할 수 있다.

Augmented GARCH(1, 1) 모형

평균방정식: $X_t = \mu_t + \sqrt{h_t}\varepsilon_t$ 단, $\varepsilon_t \mid I_{t-1} \sim N(0,1)$ (A1)

분산방정식: $\phi_t = \alpha_0 + \phi_{t-1}\xi_{1,t-1} + \xi_{2,t-1}$ (A2)

$$h_t = \begin{cases} \left|\lambda\phi_t - \lambda + 1\right|^{1/\lambda}, & if\ \lambda \neq 0 \\ \exp(\phi_t - 1), & if\ \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\xi_{1,t} = \alpha_1 + \alpha_2\left|\varepsilon_t - c\right|^{\delta} + \alpha_3 \max(0, -(\varepsilon_t - c)^{\delta})$$

$$\xi_{2,t} = \alpha_4 f(\left|\varepsilon_t - c\right|; \delta) + \alpha_5 f(\max(0, -(\varepsilon_t - c)); \delta)$$

이때 $\alpha_1 \geq 0,\ \alpha_2 \geq 0,\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 0$ 이라면, 장기 변동성이 존재하기 위한 안정성 조건은 아래의 식 (A3)와 식 (A4)와 같다.

안정성 조건:

$\alpha_1 + \alpha_2 E\left[\left|\varepsilon_t - c\right|^{\delta}\right] + \alpha_3 E\left[\max(0, -(\varepsilon_t - c))^{\delta}\right] < 1$ if $\alpha_2 > 0$ or $\alpha_3 \neq 0$ (A3)

$\alpha_2 < 1$ if $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ (A4)

이제 본 논문에서 소개된 GARCH계열 모형들의 분산방정식과 안정성 조건이 어떻게 유도되는지 살펴보자. 우선, 실제측도에서의 GARCH(1, 1)은 Duan(1997)의 확장 GARCH 모형에서 모수의 제약이 $\lambda = 1, c = 0, \delta = 2, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = 0, \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$ 인 경우에 해당하므로 식 (A2)를 이용하여 분산방정식을 유도할 수 있다. 본문에서와는 달리 오차항 ε_t 가 표준정규분포를 따르도록 평균방정식과 분산방정식이 표시되었음에 유의하자.

P-measure에서 GARCH(1, 1)의 분산방정식: $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2 h_{t-1}\varepsilon_{t-1}^2$ (A5)

식 (A3)에서 $E[\varepsilon_t^2] = 1$ 임을 이용하면, 안정성 조건은 아래와 같이 유도된다.

P-measure에서 GARCH(1, 1)의 안정성 조건: $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$ (A6)

위험중립측도에서의 GARCH(1, 1)은 확장 GARCH 모형에서 모수의 제약이 $\lambda = 1, \delta =$

$=2, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = 0, \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$ 인 경우이므로 위와 유사한 방법으로 식 (A2)와 식 (A3)을 이용하여 분산방정식과 안정성 조건을 유도할 수 있다.

Q-measure에서 GARCH(1, 1)의 분산방정식: $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2 h_{t-1}(\varepsilon_{t-1} - c)^2$ (A7)

Q-measure에서 GARCH(1, 1)의 안정성 조건: $\alpha_1 + \alpha_2(1 + c^2) < 1$ (A8)

실제측도와 위험중립측도에서의 GJR-GARCH(1, 1)모형은 확장 GARCH 모형에서 모수의 제약이 각각 $\lambda = 1, c = 0, \delta = 2, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = 0, \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_2 + \alpha_3 \geq 0$ 와 $\lambda = 1, \delta = 2, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = 0, \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_2 + \alpha_3 \geq 0$ 인 경우에 해당하므로 분산방정식과 안정성 조건은 아래와 같다.

P-measure에서 GJR-GARCH(1, 1)의 분산방정식:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2 h_{t-1}\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_3 h_{t-1}\max(0, -\varepsilon_{t-1})^2 \quad \text{(A9)}$$

P-measure에서 GJR-GARCH(1, 1)의 안정정 조건: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 / 2 < 1$ (A10)

Q-measure에서 GJR-GARCH(1, 1)의 분산방정식:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2 h_{t-1}(\varepsilon_{t-1} - c)^2 + \alpha_3 h_{t-1}\max(0, -(\varepsilon_{t-1} - c))^2 \quad \text{(A11)}$$

Q-measure에서 GJR-GARCH(1, 1)의 안정성 조건:

$$\alpha_1 + \alpha_2 E[|\varepsilon_t - c|^2] + \alpha_3 E[\max(0, -(\varepsilon_t - c))^2] < 1$$

$$\to \alpha_1 + \alpha_2(1 + c^2) + \alpha_3\left[\frac{c}{\sqrt{2\pi}}\exp(-c^2/2) + (1 + c^2)\Phi(c)\right] < 1$$

단, $\Phi(x)$ 는 누적표준정규분포 (A12)

식 (A12)는 다음과 같이 증명할 수 있다. 식 (A12)의 ε_t 는 표준정규분포를 따르고, $X = \varepsilon_t$ 라 놓으면, 식 (A13)의 관계가 성립한다.

$$E[X] = 0\,,\quad E[X^2] = 1\,,\ \text{그리고}\ \ \Phi(c) = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{(A13)}$$

식 (A13)의 관계와 식 (A14)와 같은 부분적분관계를 이용하면, 식 (A12)의 안정성 조건은 식 (A15)에서 처럼 유도될 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{c} x^2 f(x)dx = \left[x\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\right]_{-\infty}^{c} + \int_{-\infty}^{c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{(A14)}$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 + \alpha_2 E[(X-c)^2] + \alpha_3 E[\max(0,\, c-X)^2] \\
&= \alpha_1 + \alpha_2(1+c^2) + \alpha_3\left\{c^2\int_{-\infty}^{c} f(x)dx - 2c\int_{-\infty}^{c} xf(x)dx + \int_{-\infty}^{c} x^2 f(x)dx\right\} \\
&= \alpha_1 + \alpha_2(1+c^2) + \alpha_3\left[\frac{c}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{c^2}{2}} + (1+c^2)\Phi(c)\right] \qquad \text{(A15)}
\end{aligned}
$$

A Study on the Empirical Performance of GARCH-type Models in the KOSPI 200 Options Market*

Jangkoo Kang
KAIST

Doojin Ryu**
KAIST

Abstract

This study examines the empirical performance of the standard GARCH-type models in view of the pricing and hedging options under Duan (1995)'s GARCH option pricing framework. The empirical findings documented in this study are as follows: First, the pricing and hedging performance of the GARCH-type models is generally enhanced when we estimate the models using option price data compared to using only underlying return data. The degree of improvement is more prominent in case of the option pricing result. Second, the empirical performance of the GARCH-type models is superior to the discrete-time Black-Scholes model that assumes a constant volatility process for its underlying process. Third, when we estimate the models using underlying return data, while the pricing performance of the GARCH (1, 1) model is quite good with respect to ITM and ATM options, other asymmetric GARCH-type models designed to reflect the asymmetric volatility response phenomenon show better pricing performance. Fourth, when we estimate the models using option price data, the asymmetric GARCH-type models relatively perform prominently. The more elaborate are models, the better models tend to price observed options. However, the moderately complicated model such as the NGARCH model prices options more accurately than the GARCH-News model, which is most complicated model in this study. Fifth, the empirical performance of the GARCH (1, 1) model is good if we estimate the model using only underlying return data. The ARCH (1) model shows generally good hedging performance if we estimate the model using option price data. This result implies that the elaborate model does not always hedge better relatively to the simple models that are enough to capture the correlation structure between the path of underlying and volatility and describe the volatility clustering in the KOSPI 200 options market.

Keywords: GARCH; GARCH Option Pricing Model; Pricing Performance; Hedging Performance; KOSPI 200 Options

---

* We acknowledge the helpful comments of Professor Sol Kim, Jaewon Park, Sun-Joong Yoon, and two anonymous referees.

** Corresponding Author. Address: KAIST Business School, 87 Hoegiro, Dongdaemun-Gu, Seoul, Korea, 130-722; E-mail: sharpjin@business.kaist.ac.kr; Tel: +82-2-958-3693; Fax: +82-2-958-3604.