

칼만 필터를 이용한 학습 자본자산 가격결정모형의 검증

류두진, 이창준

To cite this article : 류두진, 이창준 (2009) 칼만 필터를 이용한 학습 자본자산 가격결정모형의 검증, 재무연구, 22:4, 63-92

① earticle에서 제공하는 모든 저작물의 저작권은 원저작자에게 있으며, 학술교육원은 각 저작물의 내용을 보증하거나 책임을 지지 않습니다.

② earticle에서 제공하는 콘텐츠를 무단 복제, 전송, 배포, 기타 저작권법에 위반되는 방법으로 이용할 경우, 관련 법령에 따라 민, 형사상의 책임을 질 수 있습니다.

www.earticle.net

칼만 필터를 이용한 학습 자본자산 가격결정모형의 검증

류두진
이창준*

국민연금연구원 부연구위원
KAIST 경영대학 박사과정

요약

본 논문은 Adrian and Franzoni(2005)가 개발한 학습 자본자산가격결정모형(learning CAPM)을 재고찰한다. Adrian and Franzoni(2005)의 모형은 변수오차(errors-in-variable), 생략변수(omitted-variable) 문제로 인한 모형의 내생성을 무시하였는데, 본 논문에서는 설명변수와 오차항 사이에 상관관계가 존재할 경우에 적용할 수 있는 Kim (2006)의 방법론을 대안으로 제시하여 모형 설명력의 개선 여부를 고찰한다. 본 연구의 실증분석 결과는 아래와 같다. 첫째, Hausman(1978)의 내생성 테스트에서 시장초과수익률과 오차항 사이에 뚜렷한 상관관계가 존재하므로 Kim(2006)의 방법론을 정당화한다. 둘째, 제시된 모형에서 소형-가치주는 1.62, 대형-성장주는 0.94로 시장베타의 평균이 각각 추정되어 소형-가치주에 대해 체감하는 위험이 대형-성장주에 비해 상대적으로 높았으며 이는 소형-가치주의 높은 기대수익률을 정당화한다. 셋째, 제시된 모형의 설명력이 Adrian and Franzoni(2005)의 모형에 비해 전반적으로 개선되었으며, 특히 가중가격오차(CPE)가 약 49% 감소하였다.

주요단어

조건부 자본자산가격결정모형, 회사규모효과, 가치효과, 칼만 필터

투고일
게재확정일
수정일

2009년 04월 24일
2009년 09월 25일
2009년 08월 06일

* 교신저자. 주소 : 130-722, 서울시 동대문구 회기로 87 KAIST; E-mail : ddinggo@business.kaist.ac.kr; 전화 : 02-958-3693.

I. 서론

서로 다른 자산의 수익률 차이를 시장의 어떤 위험요소들(risk factors)로 설명할 수 있는지에 관한 물음은 재무학의 가장 기본적이며 중요한 질문중의 하나이다. Sharpe(1964)와 Lintner(1965)가 자본자산가격결정모형(CAPM)을 제시한 이후 대부분의 학자들은 CAPM이 이 질문에 대한 해답을 제시한다고 생각하였다. 그러나 Jegadeesh(1990), Fama and French(1992, 1993)등의 연구는 자산의 평균수익률은 시장 위험(market risk)뿐만 아니라, 회사규모(market capitalization), 장부 대 시장가치 비율(book-to-market ratio), 과거 수익률(prior return)에 의해 결정됨을 보였다. 그 중에서 Fama and French의 3요소 모형(three-factor model)은 현재 가장 많이 사용되고 있는 자산가격결정모형이다. Fama and French의 모형은 실증분석을 통해 회사규모효과(size effect), 가치효과(value effect)와 같은 이상현상(anomaly)을 잘 설명한다고 알려져 있지만, 경제학적인 이론으로부터 유도된 모형이 아니므로 모형의 정당성에 대한 논란의 여지가 남아 있다(Daniel and Titman(1997)). Fama and French의 모형이 등장한 이후, 이 분야의 연구는 더욱 활발해지는데, 조건부 자본자산가격결정모형(conditional CAPM; CCAPM)을 대표적인 예로 들 수 있다. 무조건부 CAPM(unconditional CAPM ; UCAPM)은 성립하지 않지만, CAPM이 각 기간별로는 성립할 수 있다는 것이 CCAPM의 핵심이다.

본 논문에서는 Adrian and Franzoni(2005)가 개발한 CCAPM의 한 형태인 학습 CAPM(Learning CAPM ; LCAPM)을 재고찰한다. 모형의 내생성을 무시한 Adrian and Franzoni(2005) 모형의 대안으로 Kim(2006)의 방법론을 이용하여 시장베타를 추정하고 이를 바탕으로 LCAPM의 기각여부를 살펴본다. 즉, Fama and French(1993)의 시계열 회귀분석 방법을 통해 각 포트폴리오별로 가격오차의 시계열평균을 구하고 평균제곱오차의 제곱근(root mean squared error ; RMSE)과 Campbell and Vuolteenaho(2004)의 가중가격오차(composite pricing error ; CPE) 통계치를 이용하여 모든 포트폴리오의 가격오차가 0과 통계적으로 유의하게 다른지에 관하여 검증한다.

본 연구의 실증분석 결과는 아래와 같다. 첫째, Hausman(1978)의 내생성 테스트 결과, 시장 초과수익률과 오차항 사이에 뚜렷한 상관관계가 존재하므로 Kim(2006)의 방법으로 시장베타를 추정하는 것이 바람직하다. 둘째, Kim(2006)의 방법으로 추정한 결과, 내생성 문제를 고려하지 않은 Adrian and Franzoni(2005)의 모형보다 CPE 값이 약 49% 감소하였다. 즉, 투자자들의

학습(learning)만을 단순히 모형에 반영하면 큰 개선이 없지만, 모형의 내생성 문제를 학습과 함께 반영할 경우 모형의 큰 개선이 이루어졌다. 셋째, Kim(2006)의 방법을 이용할 경우, 회사규모에 대한 프리미엄(premium)은 상당히 감소하지만, 장부 대 시장가치 비율에 대한 프리미엄은 여전히 존재한다.

CCAPM은 시장베타의 시간에 대한 가변성을 가정한다. Franzoni(2004)는 소형주(small stock), 가치주(value stock)의 경우 시간에 따른 시장베타의 변동성이 크므로 시장베타를 상수로 가정하는 UCAPM은 적절하지 않다고 주장한다. <그림 1>의 Panel 1과 Panel 2는 과거 60개월 수익률 자료를 이용하여 롤링 윈도우(rolling window) 회귀분석을 통해 추정한 가치주와 소형주의 시장베타 시계열을 나타내는데, 20세기 후반의 시장베타가 20세기 중반에 추정한 시장베타에 비해 확연히 감소했음을 보여준다.¹⁾ 시장베타가 시간가변적임을 주장하는 논문에는 Ang and Chen(2007) 등이 있으며, 이제 시장베타가 시간에 따라 변한다는 사실을 부인하는 연구는 드물다.²⁾ 그러나, 시장베타는 관측불가능한(unobservable)한 변수이므로, 자산가격결정모형의 테스트를 위해서는 반드시 시장베타에 대한 가정이 필요하다. Shanken(1990)의 연구 이후로, 많은 논문에서 시장베타를 배당률(dividend yield), 단기이자율(short-term interest rate), 부도 스프레드(default spread), 기간 스프레드(term spread)와 같은 거시경제변수들에 대한 선형함수로 가정하였다. Ghysels(1998)은 시장베타의 확률과정(stochastic process)에 대한 가정이 잘못된 경우, CCAPM의 설명력이 UCAPM보다 더 악화됨을 보이며, 시장베타의 확률과정을 정확히 모형화 하는 것의 중요성을 주장하였다.

시장베타는 실제로 관측가능하지 않으므로 시장베타 확률과정에 관한 완벽한 가정은 있을 수 없다. 이러한 상황에서, 합리적 투자자는 베이즈 규칙(Bayes rule)을 통해 추론된 시장베타를 바탕으로 의사결정을 한다고 생각할 수 있다. 즉, 자산가격결정모형은 사후적으로 성립하는 것이 아니라 투자자가 예측한 시장베타를 바탕으로 사전적으로 성립하게 된다. 유한표본(finite sample)에서 베이지안 학습(Bayesian learning)을 하는 경우 칼만 필터(Kalman filter)를 통해 관측불가능한 변수에 대한 추론이 가능하므로, 이를 바탕으로 CCAPM에 대한 테스트가 가능하다.

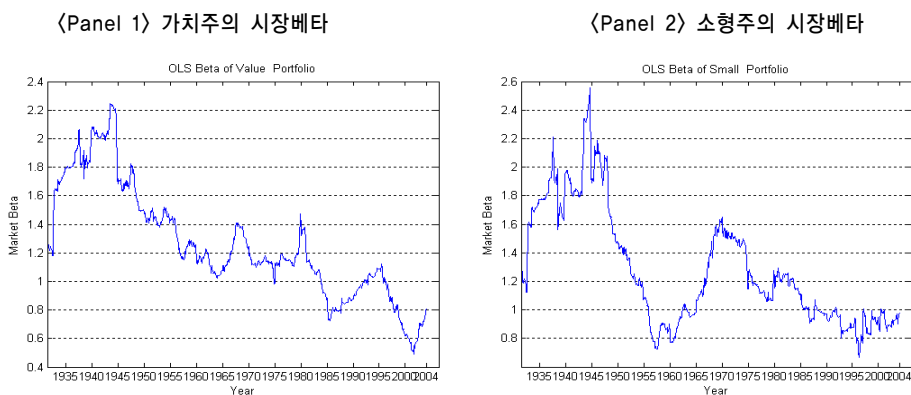
1) 소형주는 Fama and French(1993)의 방식처럼 회사규모를 10단계로 나눈 포트폴리오 중 가장 회사규모가 작은 포트폴리오를 의미하며, 가치주는 장부 대 시장가치를 10단계로 나눈 포트폴리오 중 그 비율이 가장 큰 포트폴리오를 의미한다.

2) CCAPM이 주식시장의 이상현상을 설명하지 못한다고 주장하는 Lewellen and Nagel(2006)의 논문에서도 시장베타의 시간가변성을 기술하였다. 다만 시장베타와 시장 프리미엄의 공분산이 크지 않으므로 CCAPM으로 가치효과와 모멘텀(momentum)효과와 같은 이상현상을 설명할 수는 없다고 주장하였다.

Adrian and Franzoni(2005)는 시장베타가 시간에 따라 변하여 관찰 불가능한 상황에서 베이지안 학습을 고려하지 않고 자산가격결정모형을 테스트할 경우 가격불일치(mispricing)가 일어날 수 있음을 증명하였다. 또, 베이지안 학습을 고려한 모형을 LCAPM으로 정의한 후 모형을 테스트 해 본 결과, 가격오차(pricing error)가 감소함을 보였다.

〈그림 1〉 60개월 동안 롤링 윈도우(rolling window) 회귀분석을 통해 추정된 시장베타

본 그림은 가치주와 소형주에 대하여 과거 60개월의 수익률 자료를 이용하여 롤링 윈도우(rolling window) 회귀분석을 통해 추정된 시장베타의 시계열을 나타낸다. 분석기간은 1926년 7월부터 2003년 12월까지이며 Panel 1은 가치주의 시장베타를, Panel 2는 소형주의 시장베타를 각각 나타낸다. 가치주는 장부 대 시장가치를 10단계로 나눈 포트폴리오 중 그 비율이 가장 큰 포트폴리오를 의미하며, 소형주는 Fama and French의 방식처럼 회사규모를 10단계로 나눈 포트폴리오 중 가장 회사규모가 작은 포트폴리오를 의미한다.



그러나 UCAPM에서는 시장 포트폴리오의 대용치(proxy)로 사용되는 종합주가지수 수익률에 대한 측정오차(errors-in-variable), 다른 위험요소를 빠뜨리는 생략변수(omitted-variable)의 문제 등이 있으므로, 시장수익률과 오차항 사이에 상관관계가 존재할 가능성이 크다. Kim(2006)은 설명변수와 오차항 사이에 상관관계가 존재할 경우, Adrian and Franzoni(2005)가 사용한 것과 같은 전통적인 칼만 필터 방법으로는 모형에 대한 정확한 추정이 불가능함을 보이며, 오차수정항(error corrected term)을 추가한 Heckman(1976)의 2단계 최우추정방법(two-stage maximum likelihood estimation)을 대안으로 제시했다. 실제로 Hausman(1978)의 테스트 결과 시장수익률과 오차항 사이에 뚜렷한 상관관계가 존재하므로 Kim(2006)의 방법으로 시장베타를 추정해야 시장베타에 대한 일치추정량(consistent estimator)을 계산할 수 있다.

본 논문의 구성은 아래와 같다. 제 II장에서는 CCAPM에 관련된 기존 연구의 주요 결과를

기술하고 시사점을 제시한다. 제 III장에서는 Adrian and Franzoni(2005)의 모형과 Kim(2006)의 방법을 통한 모형 추정의 과정을 제시한다. 제 IV장에서는 실증분석에 사용되는 자료에 대하여 설명하며, 제 V장에서는 실증분석 결과를 설명한다. 마지막 제 VI장은 본 연구의 결론과 한계점을 제시한다.

II. 기존 연구결과와 시사점

Fama and French(1992, 1993)의 논문 이래로 자산가격결정모형에 대한 연구는 크게 두 가지로 구분된다. 첫째, Fama and French(1993)가 제시한 추가적인 위험요소인 SMB(small minus big)와 HML(high minus low)에 대한 경제학적인 의미를 규명하는 연구가 이루어졌다. 둘째, CCAPM에 대한 연구가 활발히 전개되었다. 이들은, 시장베타의 시간가변성을 무시한 UCAPM의 대안으로 시장베타 또는 시장 프리미엄(market risk premium)의 시간가변성을 고려한 CCAPM을 제시하였다.

1. SMB, HML의 경제학적 의미에 관한 연구

Liew and Vassalou(2000)은 미국을 포함한 10개국의 자료를 이용하여 SMB, HML 포트폴리오 수익률의 미래 GDP 성장률에 대한 예측력을 실증분석 하였다. GDP 성장률이 높은 경우, 1년 전의 SMB, HML 포트폴리오의 수익률도 높게 나타났는데, 이것은 SMB, HML 포트폴리오의 수익률이 미래 거시경제 성장률과 양의 상관관계를 가진다는 것이다. 따라서 SMB, HML 포트폴리오를 경기변동에 대한 위험(business cycle risk)을 반영하는 대용치로써 해석할 수 있다. Petkova(2006)는 SMB, HML 포트폴리오의 수익률이 거시경제변수의 충격(innovation)과 관련이 있음을 보였다. VAR(vector autoregression)를 통해 추정된 배당률, 단기이자율, 부도 스프레드, 기간 스프레드의 충격을 Fama and French(1993)의 3요소 모형에 추가하여 횡단면 회귀분석을 시행한 결과, SMB 및 HML 요소의 설명력이 사라진다고 보고하였다. 즉, Liew and Vassalou(2000)의 연구와 같이 SMB, HML 포트폴리오가 거시경제에 대한 정보를 보유하고 있음을 간접적으로 증명하였다.

2. CCAPM에 관한 연구

Jagannathan and Wang(1996)은 CCAPM에 적절한 가정을 추가하여 UCAPM을 유도하였다. 이들의 모형에 따르면, 주식의 기대수익률은 예상 시장베타(expected beta)와 베타 프리미엄 민감도(beta-premium sensitivity)의 선형함수로 표현되며, 베타 프리미엄 민감도는 경기에 따른 시장베타의 변동성을 반영한다. 이 모형을 이용하여 100개의 시장규모 및 시장베타로 정렬된 포트폴리오를 테스트한 결과, Fama and French(1993)의 3요소 모형과 비슷한 설명력을 보였다. 또한, 주식시장의 수익률 이외에 노동 소득(labor income)을 시장 포트폴리오로 추가하면 설명력이 더 증가함도 보였다. Lettau and Ludvigson(2001)은 소비(consumption), 노동 소득(labor income), 자산 보유(asset holding)사이의 공적분(cointegration) 관계로부터 유도된 상태변수(conditioning variable) cay 를 이용한 CCAPM을 개발하였다. 시장 초과수익률에 대한 cay 변수의 예측력이 배당률, 단기이자율과 같은 상태변수들보다 더 우월함을 보였으며, 이를 바탕으로 시장베타를 cay 의 선형함수로 나타내었다. 즉, 시장 초과수익률을 잘 예측하는 cay 변수가 변하면 시장베타의 값도 변한다. 이들의 모형에 의하면, 경제 침체기의 경우 소형주와 가치주의 시장베타가 확연히 증가하는데 이를 통해 기업규모효과와 가치효과와 같은 이상현상을 설명하였다. 이외의 상태변수를 이용한 CCAPM으로는 Lustig and Van Nieuwerburgh(2005) 및 Santos and Veronesi(2006)의 모형들이 있다. Lustig and Van Nieuwerburgh(2005)는 주택 부(housing wealth)와 인적 부(human wealth)의 비율을 주택 담보 비율(ratio of housing wealth to human wealth)로 정의하고, 이 상태변수를 이용하여 기업규모효과와 가치효과를 설명하였다. 한편, Santos and Veronesi(2006)는 노동 소득과 소비의 비율을 상태변수로 이용한 CCAPM을 개발하여 Fama and French의 시장규모 및 장부가치 대 시장가치로 정렬된 포트폴리오의 평균 수익률의 차이를 설명하였다. 이러한 선행연구에서 볼 수 있듯이, 대부분의 모형에서 시장베타의 시간가변성을 설명하기 위하여 시장베타를 저자들이 개발한 상태변수 또는 거시경제변수(배당률, 단기이자율, 부도 스프레드, 기간 스프레드)의 선형함수로 가정하였다.

3. 시사점

위의 선행연구들을 통해 CCAPM의 설명력은 어떤 상태변수를 이용하여 시장베타의 확률과정을 가정하느냐와 밀접한 관련이 있음을 알 수 있다. Ghysels(1998)은 시장베타의 확률과정에

대한 가정이 잘못된 경우, CCAPM의 설명력은 UCAPM보다 더 악화된다고 보고하였다. Coch-rane(2001)은 투자자들의 정보집합이 모두 알려진 경우에만 CCAPM은 검증 가능하며, 투자자들의 모든 정보집합을 알지 못하는 상황 하에서 CCAPM은 검증 가능하지 않음을 강조하였다. 한편, Lewellen, Nagel, and Shanken(2009)은 서로 관계가 없어 보이는 상태변수들이 서로 다른 모형에서 모두 가격오차의 감소에 기여함을 의심하며 새로운 방식으로 모형을 검증한 결과 상태변수들을 사용한 대부분의 모형이 기각됨을 보고하였다.³⁾

따라서 본 논문에서는 어떠한 상태변수도 사용하지 않고 시장베타의 평균회귀적인 특성을 반영하여 시장베타를 1차 자기회귀과정(first-order autoregressive process)으로 가정하며, 관측불가능한 시장베타에 대한 투자자들의 학습을 반영하기 위하여 칼만 필터 방법을 통해 시장베타에 대한 투자자들의 믿음(belief)을 갱신한다.⁴⁾ 또한, Lewellen and Nagel(2006)이 지적인 문제를 극복하기 위하여 횡단면 회귀분석을 사용하지 않고 시계열 회귀분석을 통해 모형의 적절성을 검증하고자 한다.⁵⁾

III. Learning CAPM과 추정방법

1. 학습을 반영한 기존 연구

Lewellen and Shanken(2002)은 모수의 불확실성(parameter uncertainty)이 자산가격결

3) Lewellen, Nagel, and Shanken(2009)은 노동소득, GDP 증가율, cay, 유동성 위험 등을 상태변수로 사용하였다.

4) 한편, Adrian and Franzoni(2005)는 시장베타를 "Cay, HML, TERM, MKT"의 4개 상태변수 과거실현치의 일차함수로 가정하여 Fama and French의 시장규모 및 장부 대 시장가치 비율로 정렬된 25개 포트폴리오 수익률의 가격오차에 대한 t-통계량 값이 모두 2보다 작음을 보였다. 그러나 본 논문에서는 시장베타의 확률과정을 가정할 때 시장베타의 과정에 위와 같은 상태변수를 사용하지 않았는데, 그 이유는 최근 발표된 일련의 연구 결과들이 시장베타의 확률과정을 가정할 때 상태변수를 사용하는 것이 바람직하지 않음을 암시하고 있기 때문이다. 첫째, Lettau and Ludvigson(2001)등이 기술하였듯이, 미래 수익률을 잘 예측하는 변수가 상태변수로 사용될 수 있는데 HML과 MKT의 경우에는 실제 시장 수익률을 잘 예측하지 못한다. Liu and Zhang(2008) 및 Chen and Zhao(2009)등의 최근 연구는 Adrian and Franzoni(2005)가 사용한 4개의 변수 가운데 HML의 경우에는 실제 시장 수익률을 잘 예측하지 못하므로 사용하는 것이 바람직하지 않다는 결론을 내리고 있다. 특히, Liu and Zhang(2008)은 가치 스프레드(value spread)인 HML은 시장수익률의 예측력이 거의 없음을 보이고 있다. 또한, 과거 시장수익률인 MKT이 미래 시장수익률을 잘 예측하지 못한다는 증거는 Lettau and Ludvigson(2001)을 비롯한 기존의 여러 논문들에서 제시되고 있다. 둘째, Lewellen and Nagel(2006)과 Lewellen, Nagel and Shanken(2009)등의 최근 연구는 상태변수를 사용한 CCAPM의 모형 자체의 성과에 대해 회의적인 시각을 보내고 있다. 이 점과 관련하여 유익한 조언을 해주신 익명의 심사위원께 감사드린다.

5) Lewellen and Nagel(2006)은 제약이 있는 시장 프리미엄을 아무런 제약이 없는 모수로 추정하는 기존의 Fama and MacBeth(1973)의 횡단면 회귀분석의 문제점을 지적하며, 단기 윈도우 회귀분석(short window regression)을 이용한 새로운 CCAPM의 테스트 방법을 제시하였다.

정모형의 테스트에 미치는 영향을 연구하였다. 투자자들이 미래 현금흐름에 대해 학습을 하는 상황 하에서 실증분석을 하면, 기업규모효과나 가치효과와 같은 이상현상이 존재할 수 있음을 보였다. Lewellen and Shanken(2002)의 논문이 미래 배당의 평균과정(mean process)에 대한 학습을 반영한 반면, Adrian and Franzoni(2005)은 2차 모멘트(second moment), 즉 장기위험에 대한 학습이 주식 수익률에 미치는 영향을 살펴보았다. 한편, Engle, Bollerslev and Wooldridge(1988)는 실제로 관측가능하지 않은 시장베타의 시간가변성을 반영하기 위하여 다변량 GARCH 모형으로 시장베타의 과정을 가정한 후, CCAPM을 테스트하였다. 이 밖에, Pastor(2000)는 베이지안 학습을 하는 투자자들의 포트폴리오 선택문제를 고찰하였다. 즉, 자산가격결정모형에 대한 사전적 믿음(prior belief)이 달라질 때, 투자자들이 선택하는 포트폴리오가 어떻게 달라지는지를 살펴보았는데, 미국 투자자들의 투자 편중(home bias)을 설명하기 위해서는 미국 주식시장에서 CAPM이 잘 성립한다는 사전적 믿음이 있어야 함을 보고하였다.

2. Learning CAPM

제 II장에서 제시한 것처럼 많은 모형들이 시장베타의 시간가변성을 반영하고 있으며, 실증분석의 결과도 이를 뒷받침한다. 시장베타가 시간에 따라 변하는 경우에 이를 추정하기 위해서는 시장베타의 확률과정에 대한 적절한 가정이 필요하다. 실제 관측불가능한 시장베타에 대한 어떠한 가정도 완벽할 수는 없으며 항상 불확실성이 존재하게 된다. 이러한 상황에서 합리적 투자자는 베이즈 규칙을 이용하여 실제 시장베타에 대한 추론을 하고 이를 바탕으로 의사결정을 한다는 것이 투자자들의 ‘학습’을 고려한 자본자산가격결정모형의 기본 가정이다. 즉, 자산가격결정모형은 사후적으로 성립하는 것이 아니라 투자자가 예측한 시장베타를 바탕으로 사전적으로 성립하게 된다는 것이다. Adrian and Franzoni(2005)는 아래의 상태-공간 모형(state-space model)을 가정하였다.

$$R_{t+1}^i = \beta_{t+1|t}^{ic} R_{t+1}^M + \eta_{t+1}^i \quad (1)$$

$$\beta_{t+1}^i = (1 - F^i) B^i + F^i \beta_t^i + u_{t+1}^i \quad (2)$$

R_{t+1}^i , R_{t+1}^M 각각 t 와 $t+1$ 시점사이 i 포트폴리오 및 시장포트폴리오의 초과수익률을 의미한

다. $\beta_{t+1|t}^{ie}$ 는 t 시점에서 예측하는 $t+1$ 시점의 i 포트폴리오의 시장베타, B^i 는 i 포트폴리오의 시장 베타의 장기평균이며 관측가능하지 않다. 식 (1)은 무위험 차익거래가 존재하지 않는다는 가정 (no-arbitrage assumption)하에서 유도되는 일종의 CCAPM이다. 식 (1)은 자산가격결정모형 이 사후적으로 성립하는 것이 아니라 사전적으로 성립함을 의미한다. 즉, $t+1$ 시점의 포트폴리오 의 초과수익률은 t 시점에서 예측한 시장베타와 선형관계를 가지게 되며, 시장베타의 예측치는 칼만 필터를 이용하여 계산할 수 있다. 이에 따라, Adrian and Franzoni(2005)는 식 (1)을 LCAPM으로 정의하였다. 한편, 식 (2)는 시장베타의 확률과정을 모형화한 식이며, 식 (2)에서 시장베타는 세부분으로 구성된다. 첫 번째 부분은 시장베타의 장기평균을 나타내며, Adrian and Franzoni(2005)는 시장베타의 장기평균 역시 관측이 불가능하므로 투자자가 추론해야 할 변수로 가정하였다. 시장베타의 장기평균은 투자자의 느린 학습(slow learning)을 반영하여 기업규모효 과와 가치효과를 설명하기 위해 도입된 변수이다. <그림 1>은 소형주와 가치주의 경우 20세기 후반에 시장베타의 값이 상당히 감소하였음을 보이고 있다. 만약 투자자들이 시장베타에 대한 추론을 할 때 시장베타가 상대적으로 높았던 20세기 중반까지의 자료도 반영하여 믿음을 갱신하 도록 모형화 한다면, 실제 시장베타 값보다 투자자가 생각하는 시장베타 값은 커지게 되고 이것이 주식시장의 이상현상을 설명할 가능성이 있다. Ang and Chen(2007)은 시장베타가 서서히 평균 값으로 회귀함을 실증분석을 통해 보이는데, 식 (2)의 두 번째 부분은 시장베타의 평균회귀(mean reverting) 특성을 반영하기 위함이다. 식 (2)의 세번째 부분은 관측불가능한 시장베타의 불확실 성을 반영한다.

3. 방법론

Adrian and Franzoni(2005)는 시장베타를 추정하기 위해 일반적인 칼만 필터 방법을 이용하 였다. 그러나 UCAPM은 시장 포트폴리오의 대응치를 사용함으로 인한 변수오차(errors-in-variable) 문제, 다른 위험요소를 반영하지 못해 생기는 생략변수(omitted-variable) 문제로 인해 설명변수와 오차항 사이에 상관관계가 존재할 가능성이 크다. Kim(2006)은 설명변수와 오 차항 사이에 상관관계가 존재할 경우, Adrian and Franzoni(2005)등이 구현한 전통적인 칼만 필터 방법으로는 모형에 대한 정확한 추정이 불가능함을 보이며, 오차수정항(error corrected term)을 추가적인 설명변수로 사용하는 Heckman(1976)의 2단계 추정방법을 대안으로 제시하

였다. 따라서, 본 연구에서는 모형의 내생성이 있는 경우 적용할 수 있는 Kim(2006)의 방법론을 이용하여 매 시점, B^i 와 β_{t+1}^i 에 대한 추론을 한다. 식 (1)을 회귀분석식(measurement equation)으로 나타내면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \text{회귀분석식 : } R_t^i &= \begin{bmatrix} 0 & R_t^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^i \\ \beta_t^i \end{bmatrix} + \eta_t^i, \quad \eta_t^i \sim i.i.d. N(0, (\sigma_\eta^i)^2) \\ \text{행렬식 : } y_t^i &= H_t \zeta_t^i + \eta_t^i \end{aligned} \quad (3)$$

식 (3)은 위의 회귀분석식을 행렬의 형태로 나타낸 식이다. y_t^i 는 i 번째 포트폴리오의 초과수익률을, H_t 는 0과 시장 초과수익률을 나타내는 1×2 행렬이다. ζ_t^i 는 시장베타의 장기평균과 t 시점의 시장베타를 나타내는 2×1 행렬이며, η_t^i 는 t 시점에 도착하는 충격(innovation)을 의미한다. 이 충격은 각각 평균이 0이고 표준편차가 σ_η^i 인 서로 독립이며 동일한 분포(independent and identically distributed)를 가진다. 식 (2)를 시장베타에 대한 전이식(transition equation)으로 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \text{전이식 : } \begin{bmatrix} B^i \\ \beta_t^i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - F^i & F^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^i \\ \beta_{t-1}^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_t^i \end{bmatrix}, \quad u_t^i \sim i.i.d. N(0, (\sigma_u^i)^2) \\ \text{행렬식 : } \zeta_t^i &= \widetilde{F}^i \zeta_{t-1}^i + U_t^i \end{aligned} \quad (4)$$

식 (4)는 위의 전이식을 행렬의 형태로 나타낸 식이다. ζ_t^i 는 장기시장베타와 t 시점의 시장베타를 나타내는 2×1 행렬이며, u_t^i 는 t 시점에 시장베타에 오는 충격을 나타내며 각각 평균이 0이고 표준편차가 σ_u^i 인 정규분포를 따른다. \widetilde{F}^i 는 시장베타의 민감도(sensitivity)를 나타내는 2×2 행렬이며, U_t^i 는 t 시점에서 시장베타에 가해지는 충격을 나타내는 2×1 행렬이다. Adrian and Franzoni(2005)는 식 (3)을 회귀분석식, 식 (4)를 전이식으로 하여 일반적인 칼만 필터 방법을 통해 시장베타를 추론하였다. 실제 모수를 추정할 경우에는 식 (3)에 절편 α 를 추가하여 추정한다.

한편, 모형에 내생성이 존재할 경우 Kim(2006)이 제시한 모형에 대한 추정 방법은 다음과 같다. 첫째, 최소자승법(OLS)를 이용하여 식 (5)를 추정하여 표준화된 오차항을 구한다.

$$R_t^M = Z_{t-1}' \delta + v_t, \quad v_t \sim i.i.d. N(0, \sigma_v^2) \quad (5)$$

Z_{t-1} 은 상수항을 포함한 도구변수(instrumental variable)의 $t-1$ 시점에서의 값을 의미하며, v_t 는 회귀분석의 오차항을 나타내며 정규분포를 따른다. 표준화된 오차항을 \hat{v}_t^* 라 하면 아래와 같이 정의된다.

$$\hat{v}_t^* = \frac{\hat{v}_t}{\hat{\sigma}_v}, \quad \hat{\sigma}_v^2 = \frac{1}{T} \sum \hat{v}_t^2 \quad (6)$$

\hat{v}_t 는 식 (5)에서 추정된 오차항이며, $\hat{\sigma}_v^2$ 는 추정된 오차항의 분산이다. 둘째, 식 (3)'과 식 (4)를 일반적인 칼만 필터 방식으로 추정한다.

$$y_t^i = H_t \zeta_t^i + \gamma^i \hat{v}_t^* + w_t^i, \quad w_t^i \sim i.i.d. N(0, (\sigma_w^i)^2) \quad (3)'$$

$$\zeta_t^i = \tilde{F}^i \zeta_{t-1}^i + U_t^i \quad (4)$$

식 (3)'는 결국 식 (3)의 오차항인 η_t^i 를 독립변수인 H_t 와 상관이 있는 \hat{v}_t^* 부분과 상관이 없는 백색잡음인 w_t^i 부분으로 분해한 것이다. 이제 식 (3)'를 회귀분석식, 식 (4)를 전이식으로 고려하여, 최우추정법을 이용하여 모형의 모수(hyper-parameter)를 추정한다. 그리고, 추정된 모수값을 이용하여 매 시점 시장베타에 대한 예측치를 계산한다. 실제 모수를 추정할 경우에는 식 (3)'에 절편 α 를 추가하여 추정한다.

칼만 필터를 적용하기 위해 다음을 정의한다.

$$\zeta_{t|t-1} = E[\zeta_t | \Psi_{t-1}]$$

$$P_{t|t-1} = E[(\zeta_t - \zeta_{t|t-1})(\zeta_t - \zeta_{t|t-1})']$$

$$\zeta_{t|t} = E[\zeta_t | \Psi_t]$$

$$P_{t|t} = E[(\zeta_t - \zeta_{t|t})(\zeta_t - \zeta_{t|t})']$$

$$\eta_{t|t-1} = y_t - y_{t|t-1}$$

$$f_{t|t-1} = E[\eta_{t|t-1}^2]$$

위의 정의에서 $E[\cdot]$ 는 기대값 연산자를 나타내며, Ψ 는 정보집합(information set)을 나타낸다. 칼만 필터는 크게 예측(prediction)과 갱신(update) 부분으로 나누어져 있으며 그 구체적인 절차는 아래와 같다.

예측

$$\zeta_{t|t-1} = \tilde{F}\zeta_{t-1|t-1} \quad (7)$$

$$P_{t|t-1} = \tilde{F}P_{t-1|t-1}\tilde{F}' + Q \quad (8)$$

$$P_{t|t-1}^* = \tilde{F}P_{t-1|t-1}^*\tilde{F}' + Q \quad (8)'$$

$$\eta_{t|t-1} = y_t - H_t\zeta_{t|t-1} - \gamma\hat{v}_t^* \quad (9)$$

$$f_{t|t-1} = H_tP_{t-1|t-1}H_t' + \sigma_w^2 \quad (10)$$

$$f_{t|t-1}^* = H_tP_{t-1|t-1}^*H_t' + \gamma^2 + \sigma_w^2 \quad (10)'$$

갱신

$$\zeta_{t|t} = \zeta_{t|t-1} + K_t\eta_{t|t-1} \quad (11)$$

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - K_tH_t'P_{t|t-1} \quad (12)$$

$$P_{t|t}^* = P_{t|t-1}^* - K_t^*H_t'^*P_{t|t-1}^* \quad (12)'$$

Q 는 U_t^i 의 분산이며, $K_t = P_{t|t-1}H_t'f_{t|t-1}^{-1}$ 을 $K_t^* = P_{t|t-1}^*H_t'^*f_{t|t-1}^{*-1}$ 을 각각 나타내는데, 이것은 칼만 이득(Kalman gain)을 의미한다. 즉, 시장베타의 갱신치는 지난 기의 시장베타부분, 그리고 칼만 이득과 이번 기에 새로 가해지는 충격의 곱한 부분으로 이루어진다. 모수를 추정할 때에는 식 (7), (8), (9), (10), (11), (12)을 이용하고, 추정된 모수를 바탕으로 시장베타에 대한 추론을 할 경우에는 식 (7), 식 (8)', 식 (9), 식 (10)', 식 (11), 식 (12)'를 이용한다.

IV. 연구의 자료

Fama and French의 시장규모 및 장부 대 시장가치 비율로 정렬된 25개의 포트폴리오는 최근

의 자산가격결정모형의 검증에서 가장 많이 사용되는 기초자산이다. 따라서 본 연구에서는 종속 변수로 Fama and French의 25개 포트폴리오의 월별 초과 수익률을 사용한다.⁶⁾ 일반적으로 20세기 중반 이후의 데이터를 사용하면 UCAPM이 기각되는 것이 잘 알려져 있으므로, 많은 자산 가격결정모형의 테스트에서 UCAPM이 기각되는 1963년 7월을 검증기간의 시작시점으로 정의한다. 이를 반영하여, 본 연구에서도 1963년 7월을 시작으로 2003년 12월까지의 월별데이터를 사용한다. 독립변수로는 Ken French 교수의 홈페이지를 통해 획득할 수 있는 CRSP의 가중평균 시장 포트폴리오의 월별 초과 수익률 데이터를 사용한다.

〈표 1〉 Fama and French의 시장규모 및 장부 대 시장가치 비율로 정렬된 25 포트폴리오의 평균수익률(%)

본 표는 1963년 7월부터 2003년 12월까지 Fama and French의 시장규모 및 장부 대 시장가치 비율로 정렬된 25 포트폴리오의 월별 평균수익률(%)을 나타낸다. 괄호안의 값은 평균수익률에 대한 t -통계량을 나타낸다.

	성장	2	3	4	가치
소형	0.74 (1.96)	1.31 (4.08)	1.36 (4.93)	1.58 (6.16)	1.67 (6.18)
2	0.88 (2.57)	1.14 (4.12)	1.39 (5.68)	1.45 (6.20)	1.52 (5.84)
3	0.90 (2.87)	1.21 (4.83)	1.21 (5.39)	1.35 (6.24)	1.52 (6.15)
4	1.01 (3.63)	0.98 (4.17)	1.21 (5.46)	1.34 (6.29)	1.36 (5.58)
5	0.91 (4.14)	0.97 (4.63)	0.97 (4.90)	1.06 (5.45)	1.04 (4.73)

〈표 1〉은 Fama와 French의 시장규모 및 장부 대 시장가치 비율로 정렬된 25개 포트폴리오의 월별 평균수익률을 나타내며 괄호안의 값은 평균수익률에 대한 t -통계량을 나타낸다. 소형주의 수익률이 대형주보다 높은 기업규모효과와 가치주의 수익률이 성장주보다 높은 가치효과가 나타난다. 특히, 소형-가치주는 월별 평균 수익률이 1.67%로서 가장 높게 나타나는데, 이것은 대형-성장주의 월별 평균 수익률인 0.91%와 대조를 이룬다. 포트폴리오 단위로 자산가격결정모형을 테스트하기 위해서는 각 포트폴리오 수익률의 차이가 뚜렷하게 나타내야 하는데, 시장규모 및

6) 포트폴리오 수익률 데이터는 아래의 French 교수의 홈페이지에서 제공받았다. http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html.

장부 대 시장가치 비율로 정렬된 포트폴리오의 경우 이러한 성질을 보이므로 자산가격결정모형을 테스트를 위해 적합하다.

한편, 본 연구에서는 내생성 테스트를 위한 도구변수의 정의가 필요하다. 도구변수는 주어진 설명변수와 상관관계를 가져야 하며, 회귀분석 식의 오차항과는 독립이어야 한다. 단기이자율, 배당률, 부도 스프레드, 기간 스프레드가 시장 초과수익률을 잘 예측한다는 기존 연구결과와 회귀 분석 식의 오차항과 도구변수는 서로 독립이어야 함을 고려하여, 본 연구에서는 이들 변수의 한달 전 값을 도구변수로 사용하였다.⁷⁾⁸⁾

V. 실증분석 결과

1. Hausman의 내생성 테스트

Hausman(1978)은 회귀분석에서 설명변수와 오차항 사이의 상관관계 유무를 검정하는 방법을 제시하였는데, 다음과 같은 방법을 통해 그 검정이 가능하다.

첫째, 아래의 UCAPM의 결과 추정된 시장베타를 $\hat{\beta}_{OLS}$ 로 정의한다.

$$y_t^i = \alpha + \beta_1 R_t^M + \epsilon_t \quad (13)$$

y_t^i 는 i 번째 포트폴리오의 초과수익률을 나타내며, R_t^M 는 시장 초과수익률을 나타낸다. 둘째, 도구변수를 통해 추정된 시장 초과수익률을 설명변수로 사용하는 아래의 회귀분석을 통해 추정된 시장베타를 $\hat{\beta}_{IV}$ 로 정의한다.

$$y_t^i = \alpha + \beta_1 \widehat{R}_t^M + \epsilon_t \quad (14)$$

7) 이 변수들의 시장 초과수익률에 대한 예측력은 Fama and French (1989) 논문 및 Fama and French 논문의 참고문헌에 자세히 기술되어 있다.

8) 최근 12달 동안의 CRSP배당의 합을 현 시점의 지수로 나눈 값을 배당률로 사용하였으며, CRSP에서 제공받았다. 부도 스프레드는 10년 만기 Baa 채권의 수익률과 10년 만기 Aaa 채권의 수익률의 차이로, 기간 스프레드는 10년 만기 국고채의 수익률과 1년 만기 국고채 수익률의 차이로 각각 정의하였다. 부도 스프레드와 기간 스프레드는 아래의 Federal Reserve Bank의 데이터 베이스에서 제공받았다. <http://research.stlouisfed.org/fred2>.

\widehat{R}_t^M 는 아래의 회귀분석 식에서 추정된 시장 초과수익률로 정의된다.

$$R_t^M = \alpha + \beta_1 RF_{t-1} + \beta_2 DIV_{t-1} + \beta_3 TERM_{t-1} + \beta_4 DEF_{t-1} + \epsilon_t \tag{15}$$

RF_{t-1} , DIV_{t-1} , $TERM_{t-1}$, DEF_{t-1} 은 $t-1$ 시점의 단기이자율, 배당률, 기간 스프레드, 부도 스프레드를 각각 나타낸다. 식 (13)과 식 (14)에서 추정된 $\hat{\beta}_{OLS}$ 와 $\hat{\beta}_{IV}$ 를 이용하여, 카이제곱 검정 통계량을 아래와 같이 정의한다.

$$\chi^2 \text{ 통계량} = (\widehat{\beta}_{IV} - \widehat{\beta}_{OLS})' \sum^{-1} (\widehat{\beta}_{IV} - \widehat{\beta}_{OLS}) \tag{16}$$

〈표 2〉 Hausman(1978)의 내생성 테스트 결과

본 표는 1963년 7월부터 2003년 12월까지 Fama and French의 시장규모 및 장부 대 시장가치 비율로 정렬된 25 포트폴리오에 대해서 Hausman(1978)의 내생성 테스트의 결과를 나타낸다. 각 포트폴리오에 대해서 첫 번째 행은 최소자승법을 통해 추정된 시장베타를, 두 번째 행은 도구변수를 통해 추정된 시장베타를, 마지막 행은 카이 제곱 검정통계량을 나타낸다. 단기이자율, 배당률, 부도 스프레드, 기간 스프레드의 한달 전 값이 도구변수로 사용 되었다.

	베타	성장	2	3	4	가치
소형	$\hat{\beta}_{OLS}$	1.46	1.23	1.08	0.99	1.02
	$\hat{\beta}_{IV}$	2.21	1.73	1.61	1.47	1.74
	χ^2	5.46	3.61	5.46	4.98	7.60
2	$\hat{\beta}_{OLS}$	1.44	1.17	1.03	0.97	1.04
	$\hat{\beta}_{IV}$	1.96	1.64	1.42	1.29	1.36
	χ^2	4.98	5.74	5.17	3.94	2.77
3	$\hat{\beta}_{OLS}$	1.37	1.11	0.97	0.91	0.99
	$\hat{\beta}_{IV}$	1.77	1.53	1.24	1.21	1.16
	χ^2	4.43	7.02	3.76	4.25	1.06
4	$\hat{\beta}_{OLS}$	1.26	1.07	0.97	0.91	0.99
	$\hat{\beta}_{IV}$	1.28	1.27	1.12	0.99	1.05
	χ^2	0.03	3.21	1.44	0.49	0.12
대형	$\hat{\beta}_{OLS}$	1.01	0.95	0.85	0.79	0.83
	$\hat{\beta}_{IV}$	0.80	0.88	0.76	0.71	0.69
	χ^2	4.32	0.60	0.72	0.33	0.78

\sum^{-1} 은 $\hat{\beta}_{IV}$ 의 분산과 $\hat{\beta}_{OLS}$ 의 분산의 차이를 나타낸다. <표 2>는 Fama and French의 시장 규모 및 장부 대 시장가치 비율로 정렬된 25개의 포트폴리오에 대해서 Hausman(1978) 테스트 결과를 제시한다. 각 행은 회사규모에 따른 포트폴리오를, 각 열은 장부 대 시장 가치에 따른 포트폴리오를 나타낸다. 예를 들어, 제 1행, 제 5열은 시장규모가 가장 낮고 장부 대 시장가치의 비율이 가장 높은 포트폴리오를 의미한다. Hausman(1978)의 내생성 테스트의 귀무가설은 독립변수와 오차항 사이에 상관관계가 없다는 것이며, 귀무가설 하에서 위 통계치는 도구변수의 수와 같은 자유도를 가지는 카이제곱 분포를 따른다. 즉, 도구변수를 이용하여 추정한 $\hat{\beta}_{IV}$ 의 값과 최소자승법으로 추정한 $\hat{\beta}_{OLS}$ 의 값이 유사하면 모형에 내생성 문제가 없음을 반영한 것이 카이제곱 통계량이다. 5% 유의수준(임계치: 1.145)에서 총 25개의 포트폴리오 가운데 17개의 포트폴리오에 대해서 귀무가설이 기각된다. 즉, UCAPM에서 설명변수와 오차항 사이에 심각한 내생성의 문제가 존재하므로 Kim(2006)의 방법론을 사용해야 시장베타에 대한 일치추정량을 구할 수 있다는 것을 암시한다.

2. 시장베타의 시간가변성

<그림 1>은 1930년에서 2003년까지 특정 포트폴리오의 시장베타 값이 시간에 따라 변한다는 것을 나타내고 있다. 그러나, 만약 도구변수를 이용한 UCAPM의 결과로 추정되는 시장베타가 시간에 따라 변하지 않으면, 칼만 필터 방법을 사용하지 않고 2단계 회귀분석(two-stage least squares)의 방법으로 시장베타를 추정할 수 있다. <그림 2>는 1967년 7월부터 2003년 12월까지 2단계 회귀분석을 통해 추정된 시장베타를 보여준다. <그림 1>과 같이 시장베타의 시간가변성을 확인하기 위해 현재 시점의 시장베타를 추정할 때, 과거 60개월의 포트폴리오 수익률을 사용하였다. 공간을 절약하기 위해 4개의 대표적인 포트폴리오를 제시하며, Panel 1, 2, 3, 4는 각각 소형-성장(small-growth), 소형-가치(small-value), 대형-성장(big-growth), 대형-가치(big-value) 포트폴리오의 시장베타를 나타낸다. <그림 2>는 2단계 회귀분석으로 추정한 시장베타의 값이 시간에 따라 변함을 보여주고 있는데, 본 논문에서는 이 문제를 해결하기 위해 Kim(2006)의 방법론을 사용한다.

3. 칼만 필터로 추정한 시장베타

이 절에서는 Kim(2006)의 방법론을 이용하여 칼만 필터로 시장베타를 추정하고 이것을

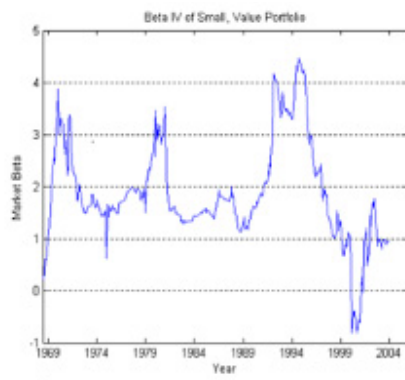
〈그림 2〉 2단계 회귀분석(two-stage least squares)으로 추정된 시장베타

본 그림은 2단계 회귀분석을 통해 추정된 시장베타의 시계열을 나타내며, 과거 60개월의 수익률 자료를 이용하여 롤링 윈도우(rolling window) 회귀분석을 통해 추정된 결과를 나타낸다. 분석기간은 1963년 7월부터 2003년 12월까지이며, Panel 1, 2, 3, 4는 각각 소형-성장, 소형-가치, 대형-성장, 대형-가치 포트폴리오의 시장베타를 나타낸다.

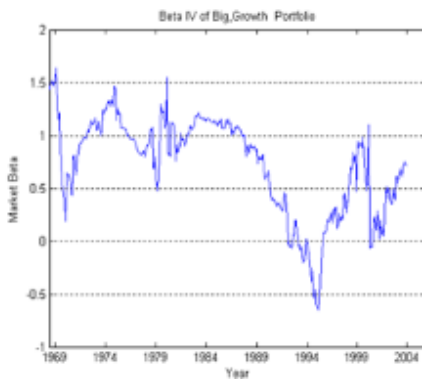
〈Panel 1〉 소형-성장주의 시장베타



〈Panel 2〉 소형-가치주의 시장베타



〈Panel 3〉 대형-성장주의 시장베타



〈Panel 4〉 대형-가치주의 시장베타



Adrian and Franzoni(2005)의 방법론과 비교한다. Fama and French(1992, 1993)의 논문 이후, 자산가격결정모형의 가장 큰 과제 중의 하나는 기업규모효과와 가치효과를 설명하는 것이므로, 본 절에서는 Fama and French의 시장규모 및 장부 대 시장가치 비율로 정렬된 25개의 포트폴리오 가운데, 특히 소형-가치 포트폴리오와 대형-성장 포트폴리오의 시장베타에 대해서 자세히 살펴보고자 한다. 본 연구에서는 투자자들의 학습을 반영하여 기업규모효과와 가치효과를 설명한다. Franzoni(2004)의 주장처럼, 〈그림 1〉은 소형, 가치형 포트폴리오의 시장베타가 20세

기 후반에 상당히 감소함을 보이는데 UCAPM이 소형, 가치 포트폴리오의 수익률을 설명하지 못하는 것은 투자자들의 학습과 관련이 있다는 것이 Adrian and Franzoni(2005)의 논문의 핵심이다. 즉, 20세기 후반으로 갈수록 소형, 가치주의 체계적 위험이 감소하여 시장베타값은 감소하지만, 투자자들의 느린 학습으로 인해 이런 회사들의 위험성이 여전히 과대평가되기 때문에 소형, 가치주에 투자하는 투자자의 기대수익률이 크다. 시장베타의 장기평균을 나타내는 B 변수가 이와 같은 투자자들의 느린 학습을 설명할 수 있다. 결과적으로 소형 및 가치주에 대해 느끼는 투자자들의 위험(시장베타)은 현재의 실제위험보다 더 커지게 되고 이것이 기업규모효과와 가치효과를 설명할 수 있다. 대형, 성장 포트폴리오에 대해서는 정반대의 논리가 적용된다.

한편, 최우추정방법을 이용하여 모수를 추정하기 위해 t 시점의 시장베타와 장기평균의 초기값을 각각 1로 설정했으며, 시장베타에 대한 불확실성을 반영하여 두 시장베타의 분산의 초기값을 모두 100으로 설정하였다. 칼만 필터의 1단계에서 모수를 추정할 때, Adrian and Franzoni(2005)의 모형에서는 $[(\sigma_{\eta}^i)^2, (\sigma_u^i)^2, F^i, \alpha^i]$ 을, Kim(2006)의 방법론을 적용한 모형에서는 $[\gamma^i, (\sigma_w^i)^2, (\sigma_u^i)^2, F^i, \alpha^i]$ 을 각각 추정해야 한다. α 는 식 (3) 및 식 (3)'에 사용되는 절편을 의미한다. $[(\sigma_{\eta}^i)^2 = 10, (\sigma_u^i)^2 = 0.25, F^i = 1, \alpha^i = 0]$ 을 Adrian and Franzoni(2005)의 모형에 대한 초기값으로 사용하였으며, $[\gamma^i = 3, (\sigma_w^i)^2 = 10, (\sigma_u^i)^2 = 0.25, F^i = 0.1, \alpha^i = 0]$ 을 Kim(2006)의 방법론을 적용한 모형의 초기값으로 설정하였다. 정확한 추정을 위해 가장 앞의 100개의 관측치를 제거하고 최우도함수(maximum likelihood function)를 계산하였다. 이와 같은 추정 방법을 사용한 결과, 모수의 최종 추정치가 변수의 초기값에 민감하지 않고 비교적 안정적으로 추정되었다.

〈표 3〉은 소형-성장, 소형-가치, 대형-성장, 대형-가치 포트폴리오의 추정된 모수를 나타내며 괄호안은 t -통계량을 의미한다. Panel 1은 Adrian(2005)의 모형을 이용하여 추정한 결과를 Panel 2는 Kim(2006)의 방법론을 이용하여 추정한 결과를 각각 나타낸다. 동일한 포트폴리오에 대한 두 방법의 추정치에는 큰 차이가 없으며, 절편 α 를 제외한 대부분의 모수들이 유의하게 추정되었다. 개별포트폴리오에 가해지는 비체계적 수익률의 분산은(Adrian and Franzoni(2005)의 경우 $(\sigma_{\eta}^i)^2$, Kim(2006)의 방법론을 적용한 모형의 경우 $(\sigma_w^i)^2$) 소형-성장의 경우가 가장 크고, 대형-성장의 경우 가장 작으며, 소형주가 대형주에 비해 시장베타의 불확실성이 크다. 또, 포트폴리오에 따라서 추정된 F^i 의 값이 상당히 다른 것을 통해 자산별로 시장베타의 지속성(persistence)이 현저하게 다를 수 있다.

〈표 3〉 추정된 모수값

본 표는 소형-성장, 소형-가치, 대형-성장, 대형-가치 포트폴리오에 대하여 칼만 필터를 통해 추정된 모수를 나타내며 괄호안은 t -통계량을 의미한다. Panel 1은 Adrian and Franzoni(2005)의 모형에서 추정된 모수를 나타내며, Panel 2은 Kim(2006)의 방법론을 통해 추정된 모수를 나타낸다. 정확한 추정을 위해 가장 앞의 100개의 관측치를 제거한 후 최우도함수(maximum likelihood function)을 계산하였다.

	소형-성장		소형-가치		대형-성장		대형-가치	
	Panel 1 : Ardian and Franzoni(2005)							
$(\sigma_n^i)^2$	22.88	[10.88]	10.44	[11.97]	2.19	[11.24]	7.70	[14.41]
$(\sigma_u^i)^2$	0.13	[1.27]	0.18	[3.94]	0.03	[2.90]	0.01	[1.93]
F	-0.60	[-3.06]	-0.13	[-0.56]	-0.37	[-2.05]	0.93	[26.80]
α	-0.34	[-1.50]	0.79	[4.98]	-0.08	[-1.12]	0.15	[1.15]
	Panel 2 : Kim (2006)							
γ	-1.28	[-3.97]	-2.08	[-7.95]	0.34	[4.30]	-0.71	[-1.23]
$(\sigma_w^i)^2$	29.71	[14.03]	12.30	[14.25]	1.82	[14.78]	9.45	[17.70]
$(\sigma_u^i)^2$	0.32	[2.68]	0.44	[7.31]	0.02	[3.26]	0.03	[2.29]
F	-0.37	[-1.93]	-0.10	[-0.82]	-0.31	[-1.56]	0.92	[21.36]
α	-0.70	[-3.30]	0.38	[2.57]	-0.03	[-0.53]	-0.05	[-0.38]

〈표 4〉 최소자승법, Adrian and Franzoni(2005), Kim(2006)의 방법을 통해 추정한 시장베타의 평균

본 표는 Fama and French의 시장규모 및 장부 대 시장가치 비율로 정렬된 25개의 포트폴리오에 대하여 최소자승법, Adrian and Franzoni(2005), Kim(2006)의 방법을 통해 추정된 시장베타의 시계열 평균을 나타낸다. 분석기간은 1963년 7월부터 2003년 12월까지이며, Panel 1은 최소자승법을 이용하여 추정된 시장베타의 평균을, Panel 2는 Adrian and Franzoni(2005)의 모형을 이용하여 추정된 시장베타를, Panel 3은 Kim(2006)의 방법론을 이용하여 추정된 결과를 각각 나타낸다.

시장베타의 시계열 평균					
Panel 1 : 최소자승법 (OLS)					
	성장	2	3	4	가치
소형	1.46	1.23	1.08	0.99	1.02
2	1.44	1.17	1.03	0.97	1.05
3	1.36	1.11	0.97	0.90	0.99
4	1.26	1.07	0.97	0.91	0.99
대형	1.01	0.95	0.85	0.79	0.82
Panel 2 : Adrian and Franzoni (2005)					
	성장	2	3	4	가치
소형	1.33	1.19	1.04	1.02	1.05
2	1.29	1.14	1.03	1.01	1.12
3	1.25	1.04	1.01	0.99	1.02
4	1.16	1.05	1.00	0.99	1.06
대형	1.04	0.95	0.86	0.92	0.94
Panel 3 : Kim (2006)					
	성장	2	3	4	가치
소형	1.77	1.52	1.59	1.44	1.62
2	1.25	1.29	1.24	1.34	1.50
3	1.21	1.20	1.20	1.23	1.50
4	1.04	1.08	1.12	1.22	1.51
대형	0.94	0.91	0.95	1.04	1.39

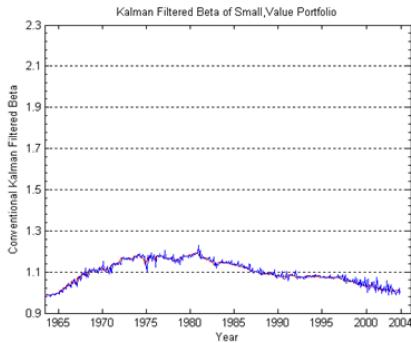
〈표 4〉는 Fama and French의 시장규모 및 장부 대 시장가치 비율로 정렬된 25개의 포트폴리오에 대하여 최소자승법 및 칼만 필터를 통해 추정된 시장베타의 시계열 평균을 나타낸 결과이다. 분석기간은 1963년 7월부터 2003년 12월까지이며, Panel 1은 최소자승법을 이용한 시장베타의 평균을 Panel 2는 Adrian and Franzoni(2005)의 모형을 이용하여 추정한 결과를 Panel 3은 Kim(2006)의 방법론을 이용하여 추정한 결과를 각각 나타낸다. 소형-가치주의 경우, 최소자승법을 통한 시장베타의 평균은 1.02, Adrian and Franzoni(2005) 모형의 경우 1.05, Kim(2006)을 방법론을 이용한 경우 1.62으로 추정되었다. 소형-가치주의 수익률을 Adrian and Franzoni(2005)의 방법으로 설명하기 위해서는 칼만 필터를 통해 추정된 시장베타의 값이 평균적으로 최소자승법을 통해 추정된 값보다 커야 한다. 그렇지만, 모형의 내생성을 고려하지 않고 칼만 필터 방법을 이용할 경우, UCAPM에 비해 큰 개선이 없음을 알 수 있다. 한편, 모형의 내생성을 고려한 Kim(2006)의 방법으로 추정된 결과, 소형주의 시장베타는 최소자승법을 이용한 경우보다 평균적으로 상승하고, 대형주의 시장베타는 평균적으로 감소하였다. 또, 가치주의 시장베타는 최소자승법을 이용한 경우보다 평균적으로 상승하고, 성장주의 시장베타는 소형-성장 포트폴리오를 제외하면 평균적으로 감소하였다. 따라서 Kim(2006)의 방법을 이용할 경우, UCAPM이 설명하지 못하는 기업규모효과나 가치효과를 일정부분 잘 설명할 수 있을 것으로 기대된다.

〈그림 3〉과 〈그림 4〉의 Panel 1은 소형-가치주와 대형-성장주에 대하여 Adrian and Franzoni(2005)의 모형으로 추정된 시장베타를, Panel 2는 Kim(2006)의 방법으로 추정된 시장베타를 각각 나타낸다. 〈그림 3〉의 경우, 〈표 4〉와 같이 Kim(2006)의 방법으로 추정한 시장베타가 Adrian and Franzoni(2005)의 방법으로 추정된 시장베타 보다 평균적으로 높다. 즉, Kim(2006)의 모형은 소형-가치주에 대한 투자자들의 느린 학습을 어느 정도 반영하여 시장베타에 대한 추론이 이루어지므로, Adrian and Franzoni(2005)의 모형에 비해 개선된 결과를 보여준다. 반면, Adrian and Franzoni(2005)의 모형은 시장베타의 값이 최소자승법을 통해 추정된 것과 비슷한 수준을 유지함을 알 수 있다. 대형-성장 포트폴리오를 나타내는 〈그림 4〉의 경우에는 Kim(2006)의 방법으로 추정한 시장베타가 Adrian and Franzoni(2005)의 방법으로 추정된 시장베타보다 평균적으로 낮다. Kim(2006)의 방법론을 이용한 경우, 실제 시장베타 값보다 투자자들은 대형-성장주의 위험을 과소평가하는 성향을 어느 정도 반영함을 보여준다. 한편, 두 모형의 경우에 추정되는 시장베타는 매우 비슷한 흐름을 나타낸다. 이것은 두 모형에 동일한 시장베타의 확률과정을 적용했기 때문으로 해석된다.⁹⁾

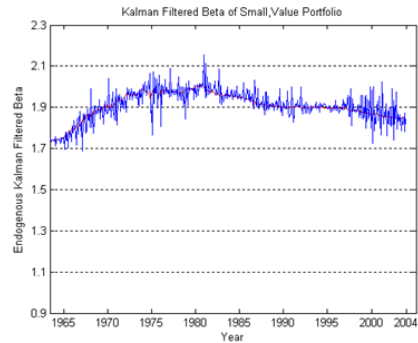
〈그림 3〉 소형-가치주에 대해 Adrian and Franzoni(2005)의 모형으로 추정된 시장베타와 Kim(2006)의 방법으로 추정된 시장베타

본 그림은 Adrian and Franzoni(2005)의 모형과 Kim(2006)의 방법론을 이용하여 제시된 모형에 대하여 칼만 필터로 추정된 소형-가치주에 대한 시장베타의 시계열을 나타낸다. 분석기간은 1963년 7월부터 2003년 12월까지이며, Panel 1, 2는 각각 Adrian and Franzoni(2005)의 모형과 Kim(2006)의 방법론을 이용하여 제시된 모형을 통해 추정된 시장베타를 나타낸다.

〈Panel 1〉 Adrian and Franzoni(2005)



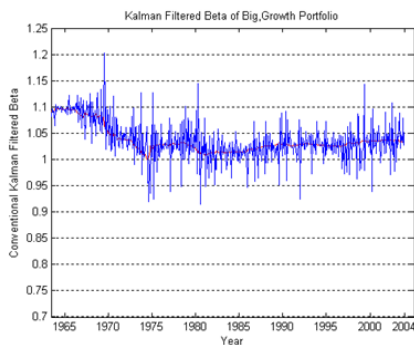
〈Panel 2〉 Kim(2006)



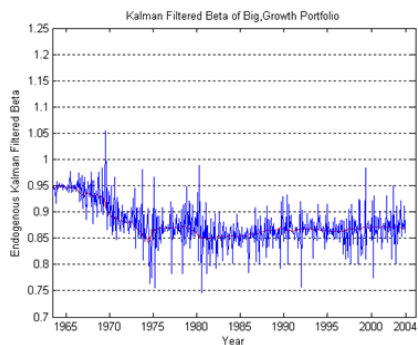
〈그림 4〉 대형-성장주에 대해 Adrian and Franzoni(2005)의 방식으로 추정한 시장베타와 Kim(2006)의 방식으로 추정한 시장베타

본 그림은 Adrian and Franzoni(2005)의 모형과 Kim(2006)의 방법론을 이용하여 제시된 모형에 대하여 칼만 필터로 추정된 대형-성장주에 대한 시장베타의 시계열을 나타낸다. 분석기간은 1963년 7월부터 2003년 12월까지이며, Panel 1, 2는 각각 Adrian and Franzoni(2005)의 모형과 Kim(2006)의 방법론을 이용하여 제시된 모형을 통해 추정된 시장베타를 나타낸다.

〈Panel 1〉 Adrian and Franzoni(2005)



〈Panel 2〉 Kim(2006)



- 9) Shanken(1990) 이후로, 시장베타의 과정을 과거 거시경제변수의 선형함수 가정하는 것은 일반적이다. 하지만, 모든 상태변수를 완벽하게 알 수 없고, 본 연구의 주된 목적중 하나는 투자자들의 학습효과를 제대로 반영하도록 모형화 할 경우, 성과의 개선을 살펴보는 것이므로 시장베타의 확률과정을 상태변수의 함수로 가정하지 않았다. 만약 시장베타의 과정에 상태변수를 추가한다면 추정되는 시장베타의 시계열은 본 논문의 결과와는 다를 것이며, 경우에 따라서는 경기에 따라 움직이는 시장베타의 시간이 변성을 더 잘 반영할 것으로 예상된다.

4. 가격오차

〈표 5〉 최소자승법, Adrian and Franzoni(2005), Kim(2006)의 방법을 적용한 모형의 가격오차(%)

본 표는 Fama and French의 시장규모 및 장부 대 시장가치 비율로 정렬된 25개의 포트폴리오에 대하여 최소자승법, Adrian and Franzoni(2005), Kim(2006)의 방법을 통해 계산된 가격오차를 나타낸다. 분석기간은 1963년 7월부터 2003년 12월까지이며, Panel 1은 최소자승법을 이용한 가격오차(Jensen의 알파)를, Panel 2는 Adrian and Franzoni(2005)의 모형을 이용하여 추정한 가격오차를, Panel 3는 Kim(2006)의 방법론을 이용하여 추정한 가격오차를 각각 나타내며 괄호안의 값은 t -통계치를 나타낸다. 한편, RMSE는 평균제곱오차의 제곱근을 의미하며, CPE는 Campbell and Vuolteenaho(2004)가 개발한 포트폴리오별로 가중치를 부여한 가격오차를 의미한다.

가격 오차 (Pricing Error)					
Panel 1 : 최소자승법 (OLS)					
	성장	2	3	4	가치
소형	-0.39[-1.71]	0.28[1.40]	0.39[2.39]	0.66[4.14]	0.73[4.22]
2	-0.25[-1.46]	0.14[0.98]	0.45[3.56]	0.54[4.26]	0.58[3.81]
3	-0.19[-1.37]	0.24[2.17]	0.30[2.73]	0.47[4.07]	0.60[4.14]
4	-0.03[-0.27]	0.03[0.33]	0.30[2.87]	0.46[4.18]	0.45[3.17]
대형	-0.01[-0.16]	0.07[0.82]	0.11[1.15]	0.24[2.05]	0.20[1.37]
RMSE : 0.382			CPE : 185.76		
Panel 2 : Adrian and Franzoni (2005)					
	성장	2	3	4	가치
소형	-0.38[-1.63]	0.24[1.21]	0.39[2.29]	0.62[3.87]	0.68[3.93]
2	-0.21[-1.20]	0.12[0.86]	0.41[3.22]	0.46[3.64]	0.51[3.37]
3	-0.15[-1.07]	0.22[2.00]	0.24[2.31]	0.37[3.38]	0.53[3.90]
4	0.04[0.33]	0.03[0.31]	0.23[2.44]	0.34[3.34]	0.33[2.54]
대형	-0.05[-0.63]	0.02[0.28]	0.09[0.95]	0.16[1.37]	0.10[0.75]
RMSE : 0.333			CPE : 141.64		
Panel 3 : Kim (2006)					
	성장	2	3	4	가치
소형	-0.48[-2.03]	0.07[0.36]	0.21[1.26]	0.38[2.41]	0.36[2.11]
2	-0.21[-1.20]	0.02[0.13]	0.28[2.19]	0.32[2.53]	0.34[2.26]
3	-0.23[-1.56]	0.08[0.79]	0.15[1.49]	0.25[2.27]	0.41[3.04]
4	0.05[0.47]	-0.01[-0.07]	0.16[1.71]	0.28[2.73]	0.28[2.13]
대형	0.01[0.07]	0.03[0.38]	0.11[1.14]	0.14[1.28]	0.10[0.71]
RMSE : 0.239			CPE : 72.30		

〈표 5〉는 Fama and French의 시장규모 및 장부 대 시장가치 비율로 정렬된 25개의 포트폴리오에 대하여 최소자승법 및 칼만 필터를 통해 계산된 가격오차를 나타난 결과이다. 분석기간은 1963년 7월부터 2003년 12월까지이며, Panel 1은 최소자승법을 이용한 가격오차(Jensen의 알파)를 Panel 2는 Adrian and Franzoni(2005)의 모형을 이용하여 추정한 가격오차를 Panel 3는 Kim(2006)의 방법론을 이용하여 추정한 가격오차를 각각 나타내며 괄호안의 값은 t -통계치

를 나타낸다. 한편, RMSE는 평균제곱오차의 제곱근을 나타내며, CPE는 Campbell and Vuolteenaho(2004)가 개발한 포트폴리오별로 가중치를 부여한 가격오차를 나타내며 각각 아래와 같이 정의된다.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} (\alpha_i - \bar{\alpha})^2} \quad (17)$$

$$CPE = \hat{e}' \hat{\Omega}^{-1} \hat{e} \quad (18)$$

α_i 는 25개 포트폴리오 중 i 번째 포트폴리오의 추정된 가격오차를 나타내며 $\bar{\alpha}$ 는 각 포트폴리오 가격오차의 평균을 의미한다. 한편, \hat{e} 는 25개 포트폴리오에 대하여 추정된 가격오차를 나타내는 벡터이며, $\hat{\Omega}$ 는 25개 포트폴리오 각각의 회귀분석에서 구한 오차의 분산으로 이루어진 25×25 대각선행렬을 나타낸다. 즉, RMSE는 모든 포트폴리오의 가격오차에 동일한 가중치를 부여하며, CPE는 오차의 분산이 작은 포트폴리오에 더 큰 가중치를 부여하는 일종의 가중평균오차이다.

Panel 1은 UCAPM이 기업규모효과와 가치효과를 설명하지 못함을 잘 보여준다. 특히 소형-가치주의 경우 UCAPM모형의 제시하는 수익률보다 한달 기준으로 약 0.73%의 초과수익률(t -통계량: 4.22)이 발생한다. 대부분의 가치형 포트폴리오에 대하여 Fama and MacBeth(1973)의 t -통계량이 5% 유의수준에서 통계적으로 유의하다. 25개 포트폴리오에 대하여 RMSE는 0.382, CPE는 185.76의 값을 갖는다. Panel 2는 Adrian and Franzoni(2005)의 방법으로 추정된 가격오차를 나타내는데, 전체적으로 RMSE는 UCAPM에 비해 약 13%, CPE는 약 24% 감소하였다. 또, UCAPM에 비해 t -통계량이 감소하였지만 여전히 대부분의 가치주에서 t -통계량이 유의한 값을 가진다. 이는 단순히 학습만을 반영하고 모형의 내생성을 무시하면 UCAPM에 비해 큰 향상을 없음을 보여주는 결과이다. Panel 3은 Kim(2006)의 방법론을 반영하여 Adrian and Franzoni(2005)의 모형을 다시 추정한 결과이다. UCAPM에 비해 RMSE는 약 37%, CPE는 약 61% 감소하였다. 또, Adrian and Franzoni(2005)에 비해 RMSE는 약 28%, CPE는 약 49% 감소하였다. 5가지 소형 포트폴리오의 경우, Panel 1의 가격오차는 각각 -0.39, 0.28, 0.39, 0.66, 0.73%이며, Panel 2의 가격오차는 각각 -0.38, 0.24, 0.39, 0.62, 0.68%이다. 즉, Adrian and Franzoni(2005)의 모형은 UCAPM에 비해 소형주의 수익률을 더 잘 설명하지 못한다. 반면, Panel 3의 경우, 5가지 소형 포트폴리오의 가격오차는 각각 -0.48, 0.07, 0.21, 0.38, 0.36%로

로 Panel 1이나 Panel 2에 비해 크게 감소하였음을 알 수 있다. 5가지 가치 포트폴리오의 경우, Panel 1의 가격오차는 각각 0.73, 0.58, 0.60, 0.45, 0.20%이며, Panel 2의 가격오차는 각각 0.68, 0.51, 0.53, 0.33, 0.10%이다. Kim(2006)의 방법론을 이용할 경우 가격오차는 더욱 감소하여 각각 0.36, 0.34, 0.41, 0.28, 0.10%를 나타낸다. 그러나 Kim(2006)의 방법론을 이용하는 경우에도 대부분의 가치형 포트폴리오는 통계적으로 유의한 가격오차를 보인다. 즉, 본 연구에서 제시하는 모형의 경우에도 가치효과를 완전히 설명할 수 없음을 보이는 증거이다. 즉, 느린 학습 효과만을 반영한 CCAPM이 왜 가치주의 수익률이 성장주의 수익률보다 높은 지를 완전히 설명하지는 못한다. 이는, 본 연구의 경우 시장베타의 장기적인 추세와 경기에 따라 움직이는 단기적인 추세를 모두 반영할 수 없다는 것과 관련이 있어 보인다. 즉, 시장베타의 과정을 시장베타의 장기 평균, 지난기의 시장베타, 과거 거시경제 변수로 가정하면 경기에 따라 움직이는 시장베타의 움직임을 더 잘 반영할 것으로 예상되지만 이는 본 연구의 범위를 벗어난다.

VI. 결 론

Fama and French(1992, 1993)의 3요소 모형을 시작으로 UCAPM을 대체할 수 있는 많은 모형이 개발되었다. 이 분야의 연구는 크게 두 부류로 나누어지는데, 하나는 Fama and French(1993)의 추가 위험요소인 SMB와 HML의 경제학적 의미를 찾는 연구이고, 다른 하나는 CCAPM의 등장이다. UCAPM은 일반적으로 성립하지 않더라 하더라도, 어떤 자산의 조건부 수익률이 투자자가 예측하는 시장베타의 선형함수로 표현된다는 것이 CCAPM 내용의 핵심이다.

CCAPM 계열의 모형으로 생각할 수 있는 Adrian and Franzoni(2005)의 연구는 투자자들의 느린 학습을 모형에 반영하여 기업규모효과와 가치효과와 같은 이상현상을 설명하고자 하였다. 즉, 20세기 후반으로 갈수록 소형, 가치주의 체계적 위험이 감소하여 시장베타 값이 감소하지만, 투자자들의 느린 학습으로 인해 이런 회사들의 위험성이 여전히 과대평가되기 때문에 소형, 가치주에 투자할 때 요구하는 기대수익률이 크다는 것이다. 만약, 기업규모효과와 가치효과가 투자자들의 느린 학습과 관련이 있다면, 칼만 필터를 통해 시장베타를 갱신할 때 과거경험을 통해 추론하는 시장베타의 장기평균을 반영하면 이상현상을 설명할 수 있다는 것이 Adrian and Franzoni

(2005)의 모형의 핵심적인 내용이다.

본 연구에서는 Adrian and Franzoni(2005)가 개발한 LCAPM에 대하여 살펴보았다. 이들의 모형은 UCAPM에 존재하는 설명변수와 오차항 사이의 상관관계를 무시하였다. 따라서, 본 연구에서는 설명변수와 오차항 사이에 상관관계가 존재할 경우에 일치추정량을 제시하는 Kim(2006)의 방법을 이용하여 Adrian and Franzoni(2005)의 모형을 다시 고찰하였다. 단순히 학습의 효과만 반영하는 Adrian and Franzoni(2005)의 모형은 가격오차를 아주 크게 감소시키지는 못하는 반면, Kim(2006)의 방법론을 이용하여 추정할 경우, 모형이 전반적으로 개선되었고, CPE의 경우 Adrian and Franzoni(2005)의 모형에 비해 약 49%가 감소하였다. 특히, 소형주에 대한 모형의 설명력은 크게 향상되었다. 그러나 Kim(2006)의 방법을 적용한 본 논문의 모형으로 가치효과를 완전히 설명할 수는 없었다. 우수한 자산가격결정모형이 되기 위해서는 시장베타의 장기적인 추세 뿐 아니라 경기에 따라 움직이는 단기적인 추세도 잘 반영해야 하는데, 시장베타의 단기적인 추세를 잘 반영하지 못하는 것이 본 연구에서 제시한 모형의 한계점이고 이점과 관련하여 추가적인 연구가 요구된다.

참고문헌

- Adrian, T. and F. Franzoni, “Learning about beta : time-varying factor loadings, expected returns, and the conditional CAPM”, *Working Paper*, Federal Reserve Bank of New York, 2005.
- Ang, A. and J. Chen, “CAPM over the Long Run : 1926~2001”, *Journal of Empirical Finance*, Vol. 14(2007), pp. 1-40.
- Campbell, J. Y. and T. Vuolteenaho, “Bad beta, good beta”, *American Economic Review*, Vol. 94(2004), pp. 1249-1275.
- Cochrane, J., “Asset Pricing”, *Princeton University Press*, Princeton NJ(2001).
- Chen, L., and X. Zhao, “Return decomposition”, *Review of Financial Studies*, forthcoming.
- Daniel, K. and S. Titman, “Evidence on the characteristics of cross sectional variation in stock returns”, *Journal of Finance*, Vol. 52(1997), pp. 1-33.
- Engle, R., T. Bollerslev, and J. Wooldridge, “A capital asset pricing model with time varying covariances”, *Journal of Political Economy*, Vol. 96(1988), pp. 116-131.
- Fama, E. F. and K. R. French, “Business conditions and expected returns on stocks and bonds”, *Journal of Financial Economics*, Vol. 25(1989), pp. 23-49.
- Fama, E. F. and K. R. French, “The cross-section of expected stock returns”, *Journal of Finance*, Vol. 47(1992), pp. 427-465.
- Fama, E. F. and K. R. French, “Common risk factors in the returns on stocks and bonds”, *Journal of Financial Economics*, Vol. 33(1993), pp. 3-56.
- Fama, E. F. and J. D. MacBeth, “Risk, return, and equilibrium: empirical tests”, *Journal of Political Economy*, Vol. 71(1973), pp. 607-636.
- Franzoni, F., “Where is beta going? The riskiness of value and small stock”, *Working Paper*, HEC, 2004.
- Ghysels, E., “On stable factor structures in the pricing of risk : Do time-varying betas help or hurt?”, *Journal of Finance*, Vol. 53(1998), pp. 549-573.

- Hausman, J., "Specification tests in econometrics", *Econometrica*, Vol. 46(1978), pp. 1251–1271.
- Heckman, J., "The common structure of statistical models of truncation, sample selection, and limited dependent variables and a simple estimator for such models", *Annals of Economic and Social Measurement*, Vol. 5(1976), pp. 475–492.
- Jegadeesh, L, "Evidence of predictable behavior of security returns", *Journal of Finance*, Vol. 45(1990), pp. 881–898.
- Jagannathan, R. and Z. Wang, "The conditional CAPM and the cross-section of expected returns", *Journal of Finance*, Vol. 10(1996), pp. 3–53.
- Kim, C., "Time-varying parameter models with endogenous Regressors", *Economics Letter*, Vol. 91(2006), pp. 21–26.
- Lettau, M. and S. Ludvigson, "Resurrecting the (C)CAPM : a cross-sectional test when risk premia are time-varying", *Journal of Political Economy*, Vol. 109(2001), pp. 1238–1287.
- Lewellen, J. and S. Nagel, "The conditional CAPM does not explain asset-pricing anomalies", *Journal of Financial Economics*, Vol. 82(2006), pp. 289–314.
- Lewellen, J., S. Nagel, and J. Shanken, "A skeptical appraisal of asset pricing tests", *Journal of Financial Economics*, forthcoming.
- Lewellen, J. and J. Shanken, "Learning, asset-pricing tests, and market efficiency", *Journal of Finance*, Vol. 57(2002), pp. 1113–1145.
- Liew, J. and M. Vassalou, "Can book-to-market, size and momentum be risk factors that predict economic growth?", *Journal of Financial Economics*, Vol. 57(2000), pp. 221–245.
- Lintner, J., "Security Prices, Risk, and Maximal Gains From Diversification", *Journal of Finance*, Vol. 4(1965), pp. 587–615.
- Liu, N. and L. Zhang, "Is the value spread a useful predictor of returns?", *Journal of Financial Market*, Vol. 11(2008), pp. 199–227.
- Lustig, H. and S. Van Nieuwerburgh, "Housing collateral, consumption insurance, and

- risk premia: An empirical perspective”, *Journal of Finance*, Vol. 60(2005), pp. 1167–1219.
- Pastor, L., “Portfolio selection and asset pricing models”, *Journal of Finance*, Vol. 55(2000), pp. 179–223.
- Petkova, R., “Do the Fama–French proxy for innovations in predictive variables?”, *Journal of Finance*, Vol. 61(2006), pp. 581–612.
- Santos, T. and P. Veronesi, “Labor income and predictable stock returns”, *Review of Financial Studies*, Vol. 19(2006), pp. 1–44.
- Shanken, J., “Intertemporal asset pricing : an empirical investigation”, *Journal of Econometrics*, Vol. 45(1990), pp. 99–120.
- Sharpe, W., “Capital asset prices : A theory of market equilibrium under conditions of risk”, *Journal of Finance*, Vol. 19(1964), pp. 425–44.

A Test of Learning CAPM with Kalman Filter

Doojin Ryu

Research Fellow, NPRI, National Pension Service

Changjun Lee*

Ph.D. Candidate, Business School, KAIST

Received

24 Apr. 2009

Accepted

25 Sep. 2009

Revised

06 Aug. 2009

Abstract

This paper re-examines the learning CAPM, a new version of conditional CAPM, developed by Adrian and Franzoni (2005). While acknowledging its firm foundation, we argue that the learning CAPM is likely to be exposed to endogeneity problems. In other words, the regressors are possibly correlated with the disturbance terms due to the omitted risk factors and errors-in-variable problems from the imperfect proxy for the unobservable market portfolio. Kim (2006) shows that the conventional Kalman filter provides an econometrician with invalid inference about the parameters if one ignores the endogeneity problems and provides new approach to circumvent endogeneity problems. In this paper, we test whether the proposed model can account for the Fama and French 25 size and book-to-market sorted portfolios. To test the joint significance of pricing errors, we use the root mean squared error (RMSE) where it gives equal weight to each portfolio as well as the composite pricing error (CPE) of Campbell and Vuolteenaho (2004) in which it gives less weight to the volatile portfolio.

The main findings of this paper are summarized as follows. First, Hausman's (1978) specification test shows that there is a substantial correlation between the market portfolio and disturbance terms, which justifies the application of Kim's (2006) two-step approach. We reject the null hypothesis of no correlation between the regressors and the disturbance terms in seventeen out of twenty-five portfolios. Second, our specification

* Corresponding Author. Address: KAIST, 87 Heogiro, DongdaemunGu, Seoul, Korea, 130-722;
E-mail: ddinggo@business.kaist.ac.kr; Tel: 82-2-958-3693.

partly explains the size and value premium. While the time trends of the estimated market betas of the one from the Kalman filter ignoring endogeneity problems and our specification are very similar, the average market betas are considerably different. For example, the estimated average market beta of small-value portfolio by Kim's (2006) approach is 1.62, whereas it is 1.05 when inferred from the Kalman filter ignoring endogeneity problems. It means that while the market betas of small-value stocks are underestimated if we ignore the endogeneity problems, the introduction of long-run market beta correctly estimates the true riskiness of small-value stocks. In addition, with Kim's (2006) approach, the estimated average market beta of large-growth portfolio is 0.94, while it is 1.62 for small-value portfolio. Therefore, the proposed model explains why investors' expected return from small-value stocks is higher than that from large-growth stocks. Under our framework, small and value stocks earn more than big and growth stocks just because they are riskier than big and growth stocks. Third, the overall performance of our specification is better than that of the one from the Kalman filter ignoring endogeneity problems. The RMSE is reduced by about 28%. More importantly, the CPE drops by about 49%. Thus, the learning CAPM incorporating the endogeneity problems can better account for the size and value premium. However, our specification is not fully able to explain the value premium since the pricing errors of value portfolios are still significantly positive. Therefore, it seems that we are still missing some important determinants that explain the stock return patterns.

Adrian and Franzoni (2005) develop a new type of conditional CAPM by incorporating the long-run changes in factor loadings as well as the contemporaneous changes in market betas. In their model, the long-run market beta plays a crucial role in explaining the size and value premium. Franzoni (2004) documents that the market betas of small and value stocks have decreased substantially in the second half of twentieth century. Based on the reduction in betas of small and value stocks, they argue that the high level of market betas from the past affect today's market betas. The slow-learning of investors caused by the introduction of the long-run mean of market betas makes them larger than the OLS estimates.

However, we argue that the regressors of the learning CAPM are very likely to be correlated with the disturbance terms. It is because : (1) there might be omitted risk factors such as SMB and HML of Fama and French (1993) which can explain most of the CAPM-related anomalies(size and value premium); and (2) there might be the errors-in-variable problems from the imperfect proxy for the unobservable market portfolio. Kim (2006) documents that the correct inference of Kalman filter strongly depends on the assumption that the regressors are uncorrelated with the disturbance terms. His simulation study shows that the conventional Kalman filter provides an econometrician with invalid inference about the parameters if one ignores the endogeneity problems. He derives a Heckman-type (1976) two-step approach to circumvent endogeneity problems and shows that one can obtain the consistent estimates of the hyper-parameters and correct inference of the time-varying factor loadings with the proposed two-step approach. Therefore, we apply Kim's (2006) two-step approach to infer the time-varying market betas under the learning CAPM of Adrian and Franzoni (2005).

Keywords Conditional CAPM, Size Effect, Value Effect, Kalman Filter