벡터의 내적

생성자	재 재환 김
태그	엔지니어링

1. 벡터 내적의 정의

두 벡터 A와 B의 내적은 다음과 같이 정의됩니다.

$$A \cdot B = |A||B|cos\theta$$

여기서:

- $|A|$는 벡터 A의 크기 (노름)
- $|B|$는 벡터B의 크기
- θ는 두 벡터 사이의 각도

이 정의에 따르면, 내적은 두 벡터의 크기와 이들이 이루는 각도의 코사인을 곱한 값입니다. 내적의 결과는 스칼라 값(즉, 하나의 수치)입니다.

2. 내적의 기하학적 의미

벡터 내적의 기하학적 의미는 두 벡터 간의 방향과 상호작용을 설명합니다. 내적의 결과가 스칼라 값으로 나오는 이유는 벡터의 크기와 방향이 관련되어 있기 때문입니다. 구체적으로:

- **$cos\theta$의 역할**: 두 벡터가 이루는 각도θ에 대한 코사인 값을 사용함으로써, 두 벡터가 동일한 방향으로 향할 때$cos\theta = 1$이 되어 내적이 최대가 됩니다.
- **수직 벡터**: 두 벡터가 수직일 경우 $\theta = 90^\circ, cos90^\circ = 0$이므로 내적 값은 0입니다. 즉, 수직인 벡터는 서로 상호작용하지 않는다는 의미입니다.
- **반대 방향 벡터**: 두 벡터가 반대 방향일 때 $\theta = 180^\circ, cos180^\circ = -1$이므로 내적은 음수가 됩니다. 이는 두 벡터가 서로 반대 방향으로 작용한다는 의미입니다.

3. 내적의 성질

벡터 내적은 여러 중요한 성질을 가지고 있습니다:

1. **교환법칙**: $A \cdot B = B \cdot A$
   이는 내적의 결과가 두 벡터의 순서에 상관없이 동일함을 나타냅니다.

2. **분배법칙**: $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$
   이는 벡터 내적이 덧셈 연산에 대해 분배될 수 있음을 의미합니다.
3. **스칼라 곱의 결합성**: $c(A\cdot B)=(cA)\cdot B=A\cdot(cB)$
   여기서 c는 스칼라 값이며, 스칼라 곱에 대한 내적의 결합성도 성립합니다.

4. 벡터 내적의 계산 (좌표를 사용한 방식)

두 벡터 $A=(Ax,Ay,Az)$와$B=(Bx,By,Bz)$가 있을 때, 내적은 각 성분의 곱을 더하는 방식으로 계산할 수 있습니다.

$$A\cdot B=AxBx+AyBy+AzBz$$

이 방식은 좌표 공간에서 벡터의 내적을 구하는 데 유용하며, 주로 컴퓨터 그래픽스나 물리학 문제에서 자주 사용됩니다.

5. 내적의 실제 응용

작업량 계산

물리학에서 내적은 주로 힘과 변위 사이의 관계를 계산하는 데 사용됩니다. 예를 들어, 물체에 가해진 힘 F와 물체가 이동한 변위 d가 있을 때, 힘이 변위 방향으로 작용하는 일의 양은 두 벡터의 내적을 통해 구할 수 있습니다.

$$W=F\cdot d$$

정사영(projection)

벡터의 내적은 한 벡터가 다른 벡터 위로 얼마나 '투영'되는지 계산할 때도 사용됩니다. 벡터 A가 벡터 B 위로 투영(projection)될 때, 투영된 벡터의 크기는 다음과 같습니다:

$$proj_BA=(A\cdot B)/|B|$$

각도 계산

두 벡터 사이의 각도 θ는 내적을 이용해 계산할 수 있습니다. 두 벡터가 이루는 각도는 다음 식으로 구할 수 있습니다:

$$cos\theta=(A\cdot B)/(|A||B|)$$

따라서 θ는 다음과 같이 구할 수 있습니다:

$$\theta=cos^(-1)((A\cdot B)/(|A||B|))$$