벡터의 외적

생성자	재 재환 김
태그	엔지니어링

1. 벡터 외적의 정의

두 벡터 $\vec{A}$와 $\vec{B}$의 외적은 다음과 같이 정의됩니다.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \mid \vec{A} \mid\mid \vec{B} \mid sin\theta\hat{n}$$

여기서:

- $\mid A \mid$와 $\mid B \mid$는 각각 벡터 A와 B의 크기 (노름)
- θ는 두 벡터 사이의 각도
- $\hat{n}$은 두 벡터에 모두 수직인 단위 벡터로, 오른손 법칙에 따라 방향이 결정됩니다.

이 정의에 따르면, 외적의 결과는 스칼라가 아니라 새로운 벡터입니다. 이 벡터는 두 입력 벡터가 이루는 평면에 수직하며, 벡터의 크기는 $\mid \vec{A} \mid\mid \vec{B} \mid sin\theta$입니다.

2. 외적의 기하학적 의미

외적의 기하학적 의미는 두 벡터가 이루는 평면의 방향성과 크기를 나타냅니다. 구체적으로:

- **벡터의 크기**: 외적의 크기 $\mid \vec{A} \times \vec{B} \mid$는 두 벡터로 이루는 평행사변형의 면적과 같습니다. 두 벡터가 이루는 각도 θ가 $0°$나 $180°$에 가까울수록 외적의 값은 작아지며, $\theta = 90°$일 때 외적의 크기는 최대입니다.
- **벡터의 방향**: 외적의 결과 벡터는 두 벡터가 이루는 평면에 수직이며, 오른손 법칙에 따라 방향이 결정됩니다. 오른손 법칙이란, 오른손의 엄지손가락을 두 벡터의 외적이 계산되는 방향으로 향하게 하였을 때, 나머지 네 손가락이 $\vec{A}$에서 $\vec{B}$로 감싸는 방향을 가리키는 규칙입니다.

3. 외적의 성질

벡터 외적은 여러 중요한 성질을 가지고 있습니다:

1. **교환법칙이 성립하지 않음**:

   $$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$$

대신:

$\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$

즉, 외적의 순서를 바꾸면 결과 벡터의 방향이 반대가 됩니다.

2. **분배법칙**:

   $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

   외적도 덧셈 연산에 대해 분배될 수 있습니다.

3. **자기 외적**:

   $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$

   벡터 자신과의 외적은 항상 0 벡터입니다. 이는 벡터가 자기 자신과 평행하기 때문에 평행사변형의 면적이 0이 됨을 의미합니다.

4. **수직 벡터**:

5. 벡터가 수직일 경우 $\theta = 90^\circ$, 따라서 $\sin 90^\circ = 1$이므로 외적의 크기는 $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|$입니다. 이때 외적의 크기는 최대가 됩니다.

4. 벡터 외적의 계산 (좌표를 사용한 방식)

벡터 $\vec{A} = (Ax, Ay, Az)$와 $\vec{B} = (Bx, By, Bz)$가 주어졌을 때, 외적은 다음과 같이 계산할 수 있습니다.

$\vec{A} \times \vec{B} = (AyBz - AzBy)\hat{i} + (AzBx - AxBz)\hat{j} + (AxBy - AyBx)\hat{k}$

이 계산 과정은 3차원 벡터의 외적을 구할 때 매우 유용하며, 이를 통해 세 축에 대한 성분을 구할 수 있습니다.

예시:

벡터 $\vec{A} = (1, 2, 3)$과 $\vec{B} = (4, 5, 6)$의 외적을 구하면:

$\vec{A} \times \vec{B} = ((2 \times 6 - 3 \times 5)\hat{i} + (3 \times 4 - 1 \times 6)\hat{j} + (1 \times 5 - 2 \times 4)\hat{k})$

5. 외적의 응용

1) 토크 (Torque) 계산

외적의 대표적인 응용은 물리학에서 토크(모멘트)를 계산하는 데 사용됩니다. 토크는 힘과 힘이 작용하는 지점의 위치 벡터 간의 외적입니다.

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

여기서 $\vec{r}$은 기준점으로부터 힘이 작용하는 지점까지의 위치 벡터이고, $\vec{F}$는 힘 벡터입니다. 토크 벡터는 이 두 벡터가 이루는 평면에 수직으로 작용합니다.

2) 면적 계산

두 벡터의 외적은 두 벡터가 이루는 평행사변형의 면적을 계산하는 데 사용됩니다. 외적의 크기가 곧 그 면적이 됩니다.

$\text{면적} = |\vec{A} \times \vec{B}|$

3) 컴퓨터 그래픽스

외적은 3D 컴퓨터 그래픽스에서 표면의 법선(normal) 벡터를 계산하는 데 사용됩니다. 법선 벡터는 두 벡터의 외적을 통해 계산되며, 이는 표면에 수직한 방향을 나타냅니다.

4) 평면의 방향 결정

외적은 두 벡터가 이루는 평면의 방향을 결정하는 데 사용됩니다. 예를 들어, 물체가 회전하는 방향을 정의할 때, 외적을 통해 회전 방향(시계방향 또는 반시계방향)을 결정할 수 있습니다.

6. 벡터 외적과 내적의 차이

- **내적**은 두 벡터의 크기와 두 벡터가 이루는 각도의 코사인을 곱하여 스칼라 값을 얻습니다. 이는 두 벡터의 평행성이나, 한 벡터가 다른 벡터에 미치는 "정렬된" 영향을 나타냅니다.
- **외적**은 두 벡터의 크기와 각도의 사인을 곱한 후 새로운 벡터를 생성합니다. 이 벡터는 두 벡터가 이루는 평면에 수직이며, 두 벡터가 어떻게 회전하거나 기울어지는지를 나타냅니다