Partie théorique :

- Soit $u \in H^2(\Omega)$ on a $\begin{cases} -\Delta u = f \\ u = u_d \text{ sur } \partial\Omega_d \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega_n \end{cases}$

donc pour $w \in H^1(\Omega)$ on obtient :

$$\begin{cases} \int_\Omega -\Delta u \, w \, dx = \int_\Omega f w \, dx \\ u = u_d \text{ sur } \partial\Omega_d \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega_n \end{cases}$$

et par la formule de Green on a :

$$\int_\Omega \Delta u \, w \, dx + \int \nabla u \nabla w \, dx = \int_\Omega \gamma_1(u) \gamma_0(w) dx$$

d'où pour $u \in H^1(\Omega)$ et $w \in H^1(\Omega)$ on a :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w \, dx - \int_\Omega \gamma_1(u) \gamma_0(w) \, dx = \int_\Omega f w \, dx.$$

et pour $w \in H_0^1(\Omega)$ on a $\gamma_0(w) = 0$ sur $\partial\Omega_d$. et aussi $\gamma_1(u) = g$ pour $\partial\Omega_n$

d'où $\int_\Omega \nabla u \nabla w \, dx = \int_\Omega f w \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \gamma_0(w) \, dx$.

et on pose $v = u - u_d \in H_0^1(\Omega)$, la formulation variationnelle s'écrit :

$$\boxed{\int_\Omega \nabla v \nabla w \, dx = \int_\Omega f w \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \gamma_0(w) dx - \int_\Omega \nabla u_d \nabla w \, dx}$$

- la formulation en dessus peut s'écrire sous la forme :

$$a(v,w) = \ell(w) \quad \forall (v,w) \in (H_0^1(\Omega))^2, \; v = u - u_d.$$

avec $\begin{cases} a(v,w) = \int_\Omega \nabla v \nabla w \, dx \\ \ell(w) = \int_\Omega f w \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \gamma_0(w) \, dx - \int_\Omega \nabla u_d \nabla w \, dx \end{cases}$

on a a est bilinéaire car $\int_\Omega$ et ∇ sont linéaires.

et $|a(v,w)| = \langle v,w \rangle_{1,\Omega}$

$\leq \|v\|_{1,\Omega} \|w\|_{1,\Omega}$ par cauchy ~~sch~~ schwartz.

d'où a est 1 lipschitzienne par suite continue.

et on a ℓ est linéaire car $\int_\Omega$ est linéaire, le produit des fonctions et γ_0 et aussi ∇ sont linéaires.

et on a $|\ell(w)| = \left| \int_\Omega f w \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_n} g \gamma_0(w) \, dx - \int_\Omega \nabla u_d \nabla w \, dx \right|$

$\overset{CS \text{ et } IT}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega_n)} |||\gamma_0||| \, \|w\|_{H_0^1(\Omega)}$

$+ \|u_d\|_1 \|w\|_1$

(ceci par inégalité triangulaire et cauchy schwartz).

et puisque $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}$ et $\|u\|_1 \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}$ $\forall u \in H$

alors $|\ell(w)| \leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega_n)} |||\gamma_0||| + \|u_d\|_1 \right) \|w\|_{H^1}$

d'où ℓ est lipschitzienne. A par suite continue.

d'après le théorème de Max Milgram. $\exists! v \in H_0^1(\Omega)$ tq $\forall w \in H_0^1(\Omega)$ $a(v,w) = \ell(w)$.

d'où le problème admet une unique solution car en n'oubliant pas la coercivité de a puisque $a(v,v) = \|v\|_1^2$

et on a $\Omega =]-1,1[\times]-1,1[$ borné donc d'après le lemme de poincaré. $\exists\, C(\Omega) > 0$ tq $\forall u \in H_0^1(\Omega)$. $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) |u|_1$

donc $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ $\quad |v|_1 \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + |v|_1^2}$

$$\leq \sqrt{1 + C^2(\Omega)} \ |v|_1$$

d'où $|\cdot|_1$ et $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ sont équivalentes et $|\cdot|_1$ est norme

d'où $\boxed{a(v,v) \geq \frac{1}{(1+C^2(\Omega))} \|v\|^2_{H^1(\Omega)}}$. c'est la coercivité de a.

- on considère l'élément fini défini par :
  * un simplex (d=2 triangle ou rectangle).
  * l'espace V_h des fonctions linéaires définis sur le simplexe. qui a pour base la famille orthonormé $(\eta_i)_{i\in[[1,n]]}$ où $n = \dim V_h$.

(3) l'ensemble des degré de liberté qui n'est autre que les points de rectangle ou triangles.
ou sommets

donc on cherche v_h tq $v_h = \sum_{i=1}^{n} x_i \eta_i$ en posant $w_h = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \eta_i$

on a alors : $\int_\Omega D\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \eta_i\right) \cdot D\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \eta_j\right) dx = a(v_h, w_h) = l(w_h)$.

on a $a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \eta_i , \sum_{j=1}^{n} \beta_j \eta_j\right) = l\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \eta_i\right)$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_i\, a(\eta_i, \eta_j)\right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, l(\eta_i)$.

et ceci $\forall (\beta_i)_{i\in[[1,n]]}$ d'où $\forall i$ $\sum_{j=1}^{n} x_i\, a(\eta_i, \eta_j) = l(\eta_i)$.

on pose $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tq $A_{ij} = a(\eta_i, \eta_j) = \int_\Omega \nabla\eta_i^T \nabla\eta_j\, dx$

1) et $b \in \mathbb{R}^n$ tq $b_i = l(\eta_i) = \int_\Omega f \eta_i\, dx + \int_{\partial\Omega_N} g \eta_i\, dx$

$- \int \nabla u_d^T \nabla \eta_i\, dx$.

on pose $u_d = \sum_{k=1}^{n} U_k \eta_k$ avec $U_k = \begin{cases} 0 & \text{si } (x_k, y_k) \notin \partial\Omega_D \\ u_d(x_k, y_k) & \text{sinon.} \end{cases}$

on cherche $x = (x_i)_{i=1..n}$ et on obtient un système linéaire d'équations $Ax = b$.

avec $b = \int_\Omega f \eta_i\, dx + \int_{\partial\Omega_N} g \eta_i\, dx - \sum_{k=1}^{n} U_k \int_\Omega \nabla\eta_i^T \nabla\eta_k\, dx$.

La solution existe par la définition de l'élément fini et elle est unique car élément fini est unisolvant puisque on a une bijection entre $(\eta_i)_{i=1..n}$ et les sommets des simplex vue la famille $(\eta_i)_{i=1..n}$ est orthonormale et on associe à chaque sommet i la fonction η_i. $\forall i \in [\![1,..n]\!]$.

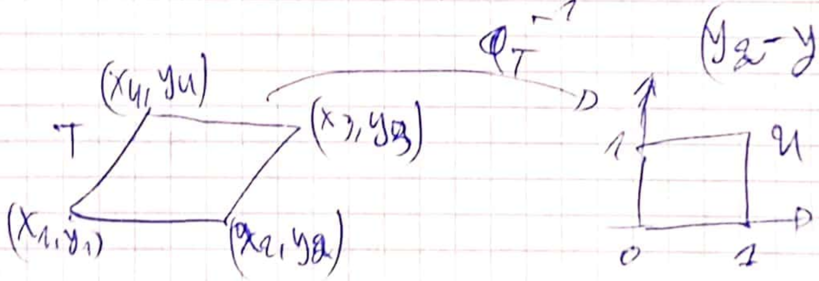
Quadrilatère :

- les formules donnant la matrice de raideur associé à un quadrangle T :

on a $\int_T \nabla\eta_i^T \nabla\eta_j \, dx = \int_{\mathcal{U}} \nabla\varphi_i^T (J^T . J)^{-1} \nabla\varphi_j |J| \, dx$

ou J est le jacobien de la fonction φ_T définie par

$\varphi_T(u,v) = (x,y)$ $\forall (x,y) \in T$ et $\forall (u,v) \in \mathcal{U}$ le carré unitaire. on a $\varphi_T(u,v) = ((x_2-x_1).u + (x_4-x_1)v + x_2 ,$
$(y_2-y_1)u + (y_4-y_2)v + y_1)$



on a $J = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 \end{pmatrix}$ et on posant $(J^T J)^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

et $(\varphi_i)_{i\in[1,4]}$ définies par : $\begin{cases} \varphi_1(u,v) = (1-u)(1-v) \\ \varphi_2(u,v) = u(1-v) \\ \varphi_3(u,v) = uv \\ \varphi_4(u,v) = (1-u)v \end{cases}$

on aura : $M_{11} = \int_0^1\int_0^1 [-(1-v),(1-u)] . \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} [-(1-v),(1-u)]^T . |J| \, du \, dv$

$= \frac{|J|}{6} (2a+3b+2c)$

CamScanner

et $M_{12} = |J| \int_0^1 \int_0^1 \left((1-v), (1-u)\right) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-v \\ -u \end{pmatrix} du\, dv$

$= \frac{|J|}{6} \left(c - 2a \right)$

et $M_{13} = |J| \int_0^1 \int_0^1 \left[(v-1) \quad (u-1)\right] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} du\, dv$

$= -\frac{|J|}{6} \left(a + c + 3b \right)$

et $M_{14} = |J| \int_0^1 \int_0^1 \left[(v-1) \quad (u-1)\right] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -v \\ 1-u \end{bmatrix} du\, dv$

$= \frac{|J|}{6} \left(a - 2c \right)$

et $M_{22} = \int_0^1 \int_0^1 \left[(1-v) \quad -u\right] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -v \\ 1-u \end{bmatrix} |J|\, du\, dv$

$= \frac{|J|}{6} \left(2a - 3b + 2c \right)$

et $M_{23} = \int_0^1 \int_0^1 \left[(1-v) \quad -u\right] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} |J|\, du\, dv$

$= \frac{|J|}{6} \left(a - 2c \right)$

et $M_{24} = \int_0^1 \int_0^1 \left[(1-v) \quad -u\right] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -v \\ 1-u \end{bmatrix} |J|\, du\, dv$

$= \frac{|J|}{6} \left(-a + 3b - c \right)$

et $M_{33} = \int_0^1 \int_0^1 \left[v \quad u\right] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} |J|\, du\, dv$

$= \frac{|J|}{6} \left(2a + 3b + 2c \right)$

et $M_{34} = \int_0^1 \int_0^1 \left[v \quad u\right] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -v \\ 1-u \end{bmatrix} |J|\, du\, dv$

$= \frac{|J|}{6} \left(-2a + c \right)$

CamScanner

Et enfin $M_{uu} = \int_0^1\int_0^1 \begin{bmatrix} -v & (1-u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -v \\ 1-u \end{pmatrix} |J| \, du \, dv$

$$= \frac{|J|}{6} \left(2a - 3b + 2c \right)$$

et puisque M est symétrique alors les autres, se déduisent automatiquement des termes déjà calculés.

1.4.1 : On a $\|u_h^{ex} - u_h\|_{2h} \leq K h^p$

donc $\ln(\|u_h^{ex} - u_h\|_{2h}) \leq \ln K + p \ln h$

d'où en traçant $\ln(\|u_h^{ex} - u_h\|_{2h})$ en fonction de $\ln h$.

et en calculant le coefficient directeur de la droite obtenue on aura un ordre de discrétisation : $p = 2$

1.4.2 : On remarque que le nombre d'éléments non nuls de A croit linéairement en fonction de la taille de la matrice A avec un coefficient directeur = 2