2019年度 構造力学II 講義メモ2

1　曲げ問題

1.1　強形式

曲げ問題のたわみに関する支配方程式は

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right)-q=0,\quad (x\in(0,l)) \tag{1}$$

で与えられる．ここで，v はたわみを，E はヤング率を，I は部材の断面2次モーメントを，$q(x)$ は鉛直下向きに作用する分布力を表し，$q(x)$ は単位長さあたりの力の次元を持つ．式(1)は, 曲げモーメント M とせん断力 Q に関する釣り合い条件:

$$\frac{dM}{dx} = Q \tag{2}$$

$$\frac{dQ}{dx} = -q \tag{3}$$

と，フックの法則と平面保持の仮定に由来する次の関係から導かれるものである．

$$M=EI\kappa=-EI\frac{d^2v}{dx^2} \tag{4}$$

ただし κ は曲率を表し，たわみ v と $\kappa\approx -v''$ の関係にある．なお，釣り合い条件式(2)と(3)をまとめると，

$$\frac{d^2M}{dx^2}+q=0 \tag{5}$$

となる．梁が図1のように，片持梁として支持されている場合，$x=0$ と $x=l$ における境界条件(支持条件)は次のようになる．

$$v(0) = 0 \tag{6}$$

$$v'(0) = 0 \tag{7}$$

$$M(l) = -EIv''(l)=\bar{M} \tag{8}$$

$$Q(l) = \left(-EIv''\right)'(l)=\bar{Q} \tag{9}$$

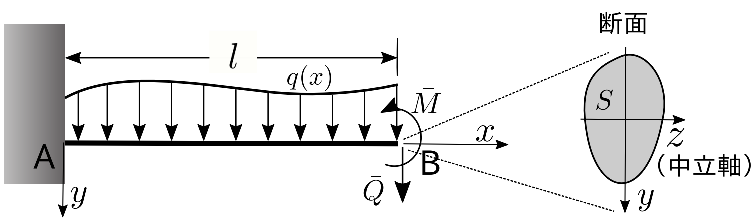

図1: 鉛直下向きの分布荷重 $q(x)$ を受ける片持梁.

1.2　弱形式

$\eta(x)$ を，$0\le x\le l$ 上で定義され，$\eta(0)=0,\ \eta'(0)=0$ を満たす任意の関数とする．$\eta(x)$ を式(5)の両辺に掛け，$x=0$ から $x=l$ の範囲で次のように積分する．

$$\int_0^l\left(M''+q\right)\eta dx=0 \tag{10}$$

この式の左辺第一項を，部分積分を 2 回行って変形すると，

$$\int_0^l M''\eta dx = [M'\eta]_0^l - \int_0^l M'\eta' dx \tag{11}$$

$$= [M'\eta]_0^l - [M\eta']_0^l + \int_0^l M\eta'' dx \tag{12}$$

$$= \bar{Q}\eta(l) - \bar{M}\eta'(l) + \int_0^l M\eta'' dx \tag{13}$$

となる．これを，式 (10) に代入すれば次の関係が得られる．

$$a(v,\eta) = b(\eta) \tag{14}$$

ただし，$a(v,\eta)$ と $b(\eta)$ は以下の通りである．

$$a(v,\eta) = -\int_0^l M\eta'' dx = \int_0^l EIv''\eta'' dx \tag{15}$$

$$b(\eta) = \bar{Q}\eta(l) - \bar{M}\eta'(l) + \int_0^l q\eta dx \tag{16}$$

$a(v,\eta)$ と $b(\eta)$ は，ともに，関数 v や η に対して作用して一つの値を返す関数と見ることができる．このような，関数の関数は汎関数 (functional) と呼ばれ，中でも特に $a(v,\eta)$ は双線形形式 (bilinear form) と，b は線形形式 (linear form) と呼ばれる．任意の $\eta(x)$(ただし $\eta(0)=0$, $\eta'(0)=0$) について，式 (14) を満足する $v(x)$ のうち，$v(0)=0$, $v'(0)=0$ となる $v(x)$(弱解) が強解に一致することは, 軸力問題の場合と同様，数学的に証明することできる．

1.3 仮想仕事式

図 2 に示すような 2 つの系を考える．これらの系は，互いに外力のみが異なり，支持条件と材料定数 E, I は共通である．ここで，系 i, $(i=1,2)$ に加えられた分布力を $q_i(x)$ 部材右端 B に作用する鉛直力と曲げモーメントをそれぞれ $\bar{Q}_i, \bar{M}_i$ とする．また，これら外力によってそれぞれの系に生じるたわみを v_i, たわみ角を θ_i とし，曲げモーメントとせん断力をそれぞれ $M_i(x), Q_i(x)$ と表す．ここで式 (14) において，$v=v_1$, $\eta=v_2$ とす

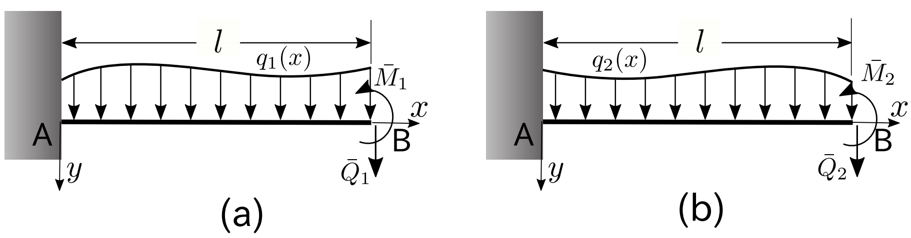

図 2: 荷重条件のみが異なる 2 つの系.(a) 系 1, (b) 系 2.

れば，式 (14) の各辺は,

$$a(v_1,v_2) = -\int_0^l M_1 v_2'' dx = \int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI} dx \tag{17}$$

$$b(v_2) = \bar{Q}_1 v_2(l) - \bar{M}_1 v_2'(l) + \int_0^l q_1 v_2 dx \tag{18}$$

となる．式 (17) と式 (18) は，ともに力 $\times$ 長さ，すなわち仕事の次元を持つ量となっている．前者は内力である M_1 と Q_1, 後者は外力である $\bar{M}_1, \bar{Q}_1$ と $q_1(x)$ に関するものであることから，$a(v_1, v_2)$ を内部仮想仕事，$b(v_2)$ を外部仮想仕事と呼ぶ．系 1 と系 2 の間に成り立つ関係

$$a(v_1, v_2) = b(v_2) \tag{19}$$

を，曲げ問題に対する仮想仕事式と呼ぶ.

1.4 単位荷重法

仮想仕事式 (19) における系 1 として，次の特別な場合を考える．

$$\bar{Q}_1 = 0, \quad \bar{M}_1 = 0 \quad q_1(x) = \delta(x-a), \quad (0 < a < l) \tag{20}$$

すなわち，系 1 として $x = a$ に鉛直方向へ単位集中荷重だけが外力として作用する場合を考える．このとき，デルタ関数の性質を用いれば，式 (18) は次のようになる.

$$b(v_2) = \int_0^l \delta(x-a) v_2(x) dx = v_2(a) \tag{21}$$

とすることができ，これを仮想仕事式 (19) に代入すれば，

$$v_2(a) = \int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI} dx \tag{22}$$

の結果を得る．これは，2 つの系 1 と 2 における曲げモーメント M_1 と M_2 から，$x = a$ における系 2 のたわみ $v_2(a)$ が求められることを示している．ここで, 系 1 を補助系，系 2 を解くべき問題とみるために，系 1 と 2 に関する諸量を, あらためて

$$\begin{aligned} \big(v_1, \theta_1, M_1, Q_1;\ \bar{M}_1, \bar{Q}_1, q_1\big) &= \Big(\tilde{v}, \tilde{\theta}, \tilde{M}, \tilde{Q};\ \bar{\tilde{M}} = 0, \bar{\tilde{Q}} = 0, \tilde{q} = \delta(x-a)\Big) & (23) \\ \big(v_2, \theta_2, M_2, Q_2;\ \bar{M}_2, \bar{Q}_2, q_2\big) &= \big(v, \theta, M, Q;\ \bar{M}, \bar{Q}, q\big) & (24) \end{aligned}$$

と書き直す．このとき式 (22) は,

$$v(a) = \int_0^l \frac{M\tilde{M}}{EI} dx \tag{25}$$

と表される．式 (25) を利用してたわみの計算を行う解法を曲げ問題に対する単位荷重法と呼ぶ.

1.4.1 例題 1

図 3-(a) に示す片持梁 AB の点 B と点 C におけるたわみを，単位荷重法を用いて求めよ．なお，断面剛性 EA は全断面で一定とする.

1.4.2 問題 1

図 4 に示す 4 種類の系について，以下の問に答えよ．なお，曲げ剛性 EI は全ての部材，全ての断面で一定とする.

1. 図 4-(a) に示す単純支持梁の, 点 B におけるたわみを求めよ.
2. 図 4-(b) に示す単純支持梁の, 点 B におけるたわみを求めよ.
3. 図 4-(c) に示す単純支持梁の, 点 B におけるたわみを求めよ.
4. 図 4-(d) に示す片持梁の点 B と点 C におけるたわみを求めよ.

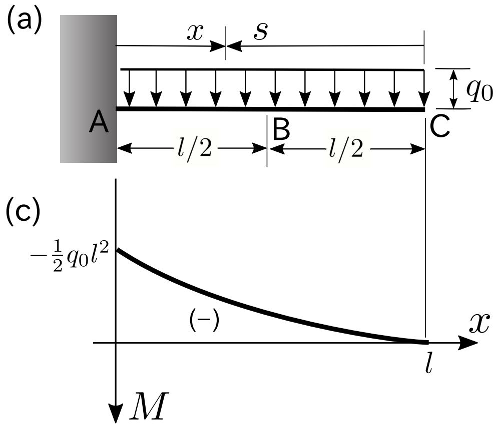

図 3: (a) 等分布荷重を受ける片持梁 (問題). (b) 単位荷重法の適用において用いる補助系.

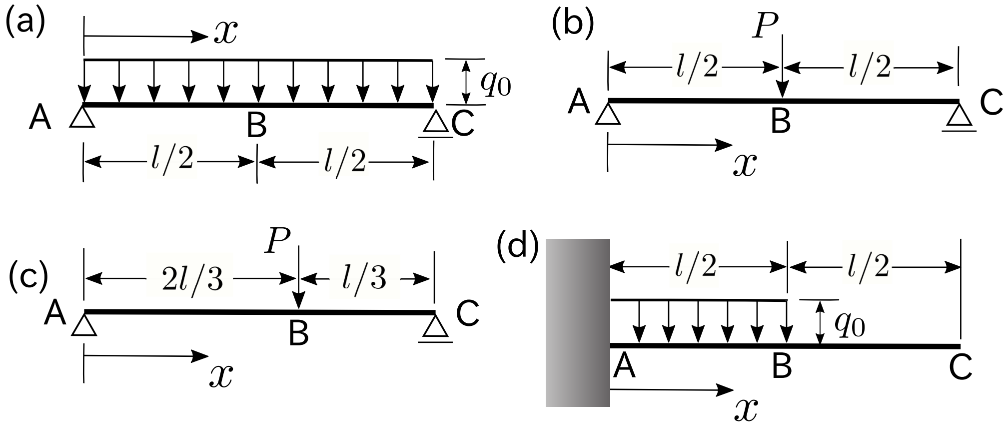

図 4: 支持条件，荷重条件の異なる 4 種類の単径間梁.

1.4.3　例題 2

図 5-(a) に示す張出し梁の，点 C におけるたわみを単位荷重法を用いて求めよ．なお，断面剛性 EA は全断面で一定とする.

1.4.4　問題 2

1. 図 6-(a) に示す張出し梁の, 点 C におけるたわみを求めよ.
2. 図 6-(b) に示す張出し梁の, 点 D におけるたわみを求めよ.
3. 図 6-(c) に示す張出し梁の, 点 C におけるたわみを求めよ.
4. 図 6-(d) に示す張出し梁の，点 C におけるたわみを求めよ.

1.4.5　例題 3

図 7-(a) に示す 2 径間連続梁の支点反力 R_A, R_B および R_C を求め，曲げモーメント図を描け．なお，断面剛性 EA は全断面で一定とする.

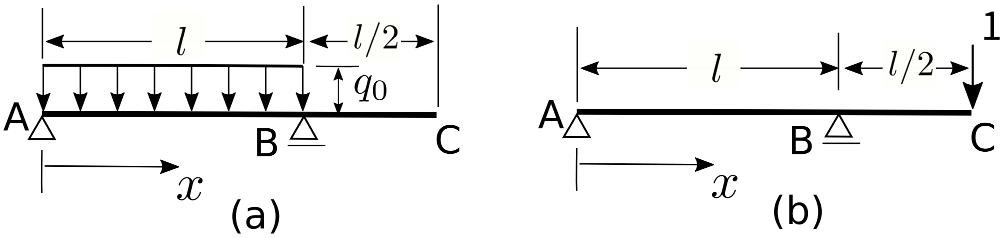

図 5: (a) 支間 AB に等分布荷重を受ける張出し梁 (問題). (b) 単位荷重法の適用において用いる補助系.

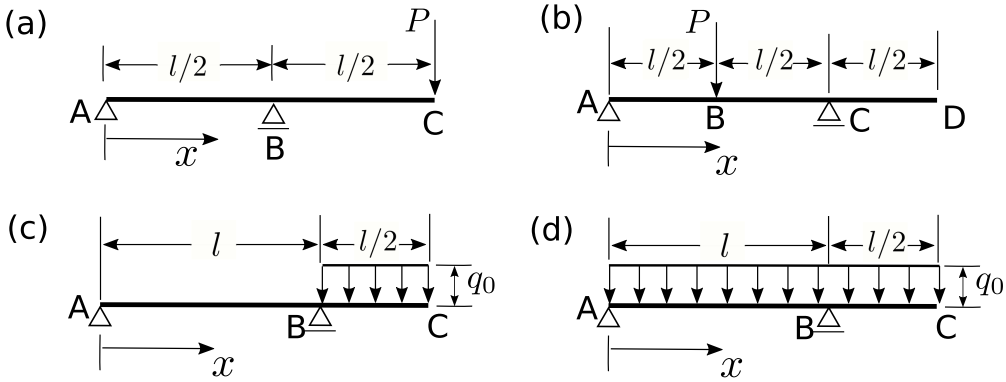

図 6: 荷重条件の異なる 4 種類の張出し梁.

1.4.6 問題 3

図 8 に示す梁 (a) から (d) について，梁に作用する支点反力を求め，曲げモーメント図を描け．なお，梁の曲げ剛性 EI は全ての梁，全ての断面で一定とする．

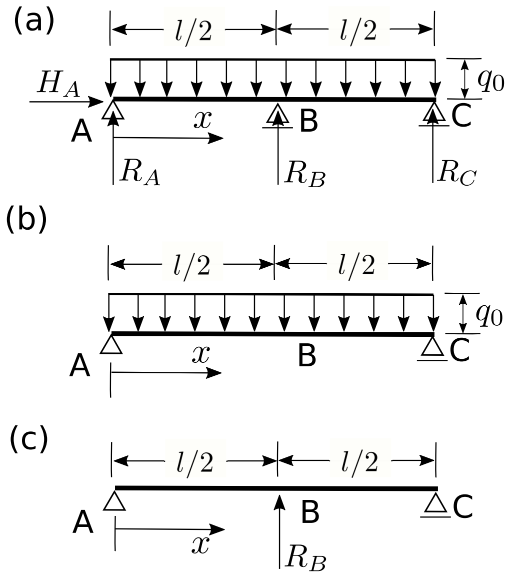

図 7: (a)2 径間連続梁と梁に作用する支点反力.(b),(c)2 径間連続梁の支点反力計算に用いる 2 つの静定系.

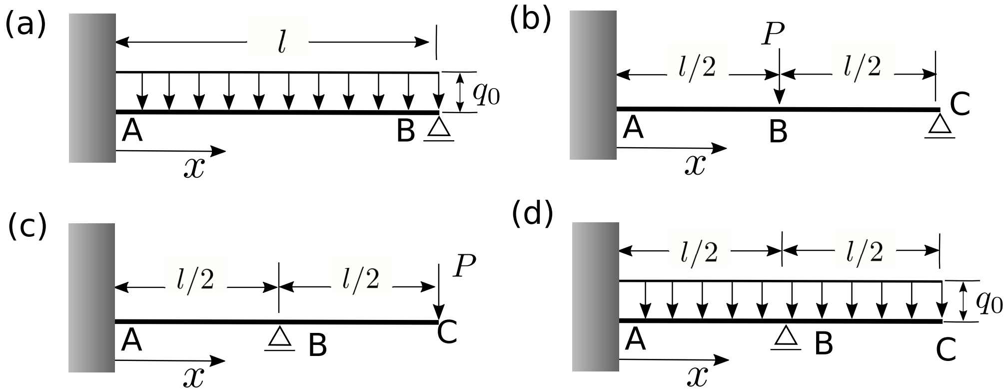

図 8: 支持条件と荷重条件の異なる 4 種類の不静定梁.