2019 年度 構造力学 II 講義メモ 4

修正履歴:

1. 式 (48)-(50)，$F/2$ の項を F に修正 (2019/06/03)

1 マトリクス構造解析 (有限要素法)

図 1 に示すような荷重を受ける軸力部材を考える．いま，部材の左端部を節点 1, 右端を節点 2 と呼び，これらの節点における荷重を，x 軸方向を正として f_1, f_2 と表す．同様に，節点 1 と 2 における変位を u_1, u_2 とし，節点荷重 $(f_1,\ f_2)$ と節点変位 $(u_1,\ u_2)$ が満足すべき関係を求める．ただしここでは，軸力問題の厳密な解 $u(x)$ を求めるのでなく，その近似解を求めることを考える．従って，以下に示す方法で求められるものはあくまで近似解だが，問題によっては厳密な解が与えられることもできる．また，計算量の増加を許容するならば，必要に応じて任意に高い精度の近似解を構成することができる．

1.1 近似解と内挿関数

軸力問題の厳密解を $u(x)$, 近似解を $\tilde{u}(x)$ と表す．はじめに，未知の解 $u(x)$ を $0 < x < l$ において直線で近似することを考える．このとき，$\phi_1(x)$ と $\phi_2(x)$ を

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{x}{l}, \quad \phi_2(x) = \frac{x}{l} \tag{1}$$

とすれば，近似解 $\tilde{u}(x)$ を，

$$u(x) \simeq \tilde{u}(x) = u_1\phi_1(x) + u_2\phi_2(x) = \sum_{j=1}^{2} u_j\phi_j(x) \tag{2}$$

と表すことができる．ϕ_1, ϕ_2 は，節点間の解を内挿する役割を果たすことから”内挿関数” と呼ばれる．ここで，$x_1 = 0, x_2 = l$ とすれば、内挿関数 ϕ_1, ϕ_2 は

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2) \tag{3}$$

の関係を満足する．

1.2 弱形式

図 1 に示す軸力問題に対する弱形式:

$$a(u, \xi) = b(\xi) \tag{4}$$

の各項は，節点における荷重 f_1, f_2 が既知と考えるとき，

$$a(u, \xi) = \int_0^l EAu'\xi' dx \tag{5}$$

$$b(\xi) = \sum_{i=1}^{2} f_i\xi(x_i) + \int_0^l p\xi dx \tag{6}$$

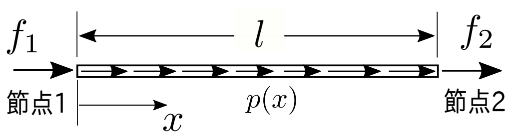

図 1: 軸力問題.

で与えられる．そこで，近似解 (2) を $u = \tilde{u}$ とし，$\xi = \phi_i$, $(i = 1, 2)$ をとして式 (4) に代入すれば，

$$a\left(\sum_{j=1}^{2} u_j \phi_j, \phi_i\right) = \sum_{j=1} a\left(\phi_i, \phi_j\right) u_j = b(\phi_i), \quad (i = 1, 2) \tag{7}$$

の関係が得られる．ここで，式 (7) を得るにあたり，

$$a(u_j \phi_j, \phi_i) = u_j a(\phi_i, \phi_j), \quad a(\phi_j, \phi_i) = a(\phi_i, \phi_j) \tag{8}$$

とできることを利用した．式 (7) を，$i = 1, 2$ の場合をまとめ，行列とベクトルを用いて整理すると，次のようになる．

$$\begin{pmatrix} a(\phi_1, \phi_1) & a(\phi_1, \phi_2) \\ a(\phi_2, \phi_1) & a(\phi_2, \phi_2) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \tag{9}$$

ただし，

$$p_i := \int_0^l p \phi_i dx, \quad (i = 1, 2) \tag{10}$$

とし，式 (9) の右辺第 1 項を得るためには，式 (3) を用いた．ここで，式 (9) 左辺の係数行列を

$$\boldsymbol{k} := \begin{pmatrix} a(\phi_1, \phi_1) & a(\phi_1, \phi_2) \\ a(\phi_2, \phi_1) & a(\phi_2, \phi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \tag{11}$$

と置き，EA が $0 < x < l$ において一定の場合について，行列 $\boldsymbol{k}$ の成分を計算すると，

$$\boldsymbol{k} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

となる．式 (11) で与えられる行列 $\boldsymbol{k}$ は，要素剛性マトリクスと呼ばれる．さらに，

$$\boldsymbol{u} := (u_1, u_2)^T \tag{13}$$

$$\boldsymbol{f} := (f_1, f_2)^T \tag{14}$$

$$\boldsymbol{p} := (p_1, p_2)^T \tag{15}$$

とすれば，式 (9) を

$$\boldsymbol{ku} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{p} \tag{16}$$

と書くことができる．式 (16) すなわち式 (9) は剛性方程式と呼ばれる．

1.3　例題 1

1. 図 2 に示す軸力部材に生じる変位の近似解 $\tilde{u}(x)$ を，剛性方程式 (9) を用いて求める．分布力は $p(x) = 0$ だから，$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)^T = \boldsymbol{0}$ である．また，節点 1 は固定壁であることから，節点 1 の変位は $u_1 = 0$ である．さらに，節点 2 では荷重が与えられていることから $f_2 = F$ と置くことができる．以上より，剛性方程式は

$$\frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 = F \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1 = 0 \\ p_2 = 0 \end{Bmatrix} \tag{17}$$

となる．この方程式を u_2 と F_1 について解けば，

$$u_2 = \frac{Fl}{EA}, \quad F_1 = -F \tag{18}$$

が得られる．従って，求めるべき近似解は

$$\tilde{u}(x) = u_1 \phi_1(x) + u_2 \phi_2(x) = \frac{Fx}{EA} \tag{19}$$

と，この場合は厳密解に一致する結果が得られる．

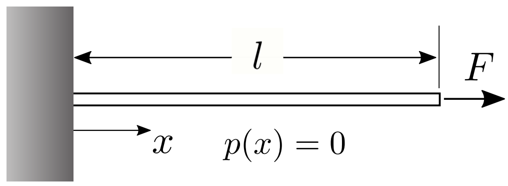

図 2: 部材右端部に既知の荷重 F を受ける軸力部材.

2. 図 3 に示すような，部材両端で軸方向の荷重が加えられた軸力部材を考える．この場合剛性方程式は，$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{f}=(F_1,F_2)^T$ から，

$$\frac{EA}{l}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \tag{20}$$

となる．式 (20) の剛性マトリクスは，逆行列を持たないことから，この連立方程式の条件は互いに独立でない．そのため，u_1 と u_2 を一意に決定することができず,

$$F_1=-F_2, \tag{21}$$

すなわち，力の釣り合い条件が成り立つことだけが結論される.

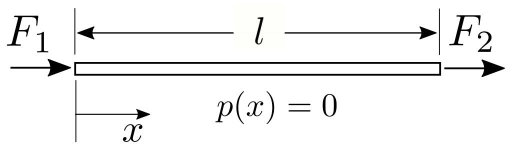

図 3: 部材両端部で軸方向の力が加えられた軸力部材.

3. 図 4 に示すような，軸方向に等分布荷重を受ける軸力問題を考える．この場合，$p(x)=p_0$ より，$\boldsymbol{p}$ の成分を計算すると,

$$\begin{aligned} p_1 &= \int_0^l p_0\phi_1(x)dx=\frac{p_0 l}{2} && (22)\\ p_2 &= \int_0^l p_0\phi_2(x)dx=\frac{p_0 l}{2} && (23)\end{aligned}$$

となる．また，$u_1=0, f_2=0$ だから，剛性方程式は

$$\frac{EA}{l}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f_1 \\ 0 \end{Bmatrix}+\frac{p_0 l}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{24}$$

と縮約され,

$$u_2=\frac{p_0 l^2}{2EA},\quad f_1=-p_0 l \tag{25}$$

が得られる．よって，変位の近似解は

$$\tilde{u}(x)=\frac{p_0 l^2}{2EA}\frac{x}{l} \tag{26}$$

となる．厳密解は x の 2 次関数だから，この問題では近似解と厳密解は一致し得ない．しかしながら，部材端部では，近似解と厳密解が一致することを確かめることができる.

4. 図 5 に示すような，部材中央の点に集中荷重を受ける軸力部材に生じる変位を求める．外力 $p(x)$ は

$$p(x)=F\delta\left(x-\frac{l}{2}\right) \tag{27}$$

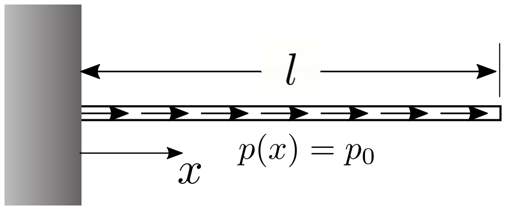

図 4: 等分布荷重を受ける軸力部材.

だから，デルタ関数の性質より，

$$p_i = \int_0^l F\delta\left(x - \frac{l}{2}\right)\phi_i dx = F\phi_i\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{F}{2}, \quad (i = 1, 2) \tag{28}$$

で，剛性方程式は

$$\frac{EA}{l}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{F}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{29}$$

となる．これを u_2 と f_1 について解けば，

$$u_2 = \frac{1}{2}\frac{Fl}{EA}, \quad f_1 = -F \tag{30}$$

が得られる．この問題の厳密な変位分布は，区分的 1 次関数 (折れ線) で表されるため，近似解と厳密解が完全に一致することは期待できないが，部材端部では正確な結果が得られていることを示すことができる．

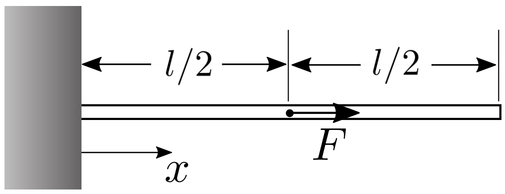

図 5: 部材中央で集中荷重を受ける軸力部材.

1.4 問題 1

図 6 に示すような，右半分の区間に等分布荷重を受ける軸力部材に生じる変位を，式 (16) を用いて求めよ．なお，部材の断面剛性 EA は一定とする．

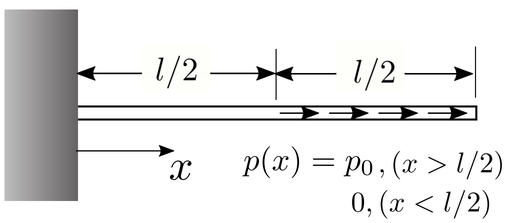

図 6: 右半分の区間に，大きさ p_0 の等分布荷重を受ける片端が固定された軸力部材.

1.5　2 要素近似

ここでは，近似精度を改善するために，軸力部材を図 7 に示すような 2 つの要素に分割して近似解 $\tilde{u}(x)$ を構成する．2 つの要素への分割位置を指定するために，軸力部材の左端を節点 1, 右端を節点 3, 部材内部の分割位置を節点 2 とし，節点 1 と 2 の区間を要素 1，節点 2 と 3 の区間を要素 2 と呼ぶことにする．これらの節点 1 から 3 は，部材全体の中での節点配置を表すため，その番号を全体節点番号と呼ぶ．一方，特定の要素における力や変位，断面位置といった量を表現するには，当該要素の左端と右端を参照するために，要素毎に設定した節点番号 (要素節点番号) を用いることが便利である．そこで，図 7 の (b) と (c) 示すように，要素節点 1 と 2 を定め，要素 e の要素節点 i における軸変位を u_i^e，軸方向の力 f_i^e と表す．さらに，要素長を l_e，部材軸方向の座標を x_e，断面積を A_e 等と，要素毎に変化しうる量を表す際には，要素番号を付すことにする．このとき，要素 $e(=1,2)$ に対する剛性方程式は，前節の議論から

$$\frac{EA_e}{l_e}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1^e \\ p_2^e \end{Bmatrix},\quad (e=1,2) \tag{31}$$

と書くことができる．なお, 分布力 $p(x)$ に起因する節点荷重ベクトル $\boldsymbol{p}^e=(p_1^e,\,p_2^e)^T$ の成分は，要素 e 上の内挿関数:

$$\phi_1^e = 1-\frac{x_e}{l_e},\quad \phi_2^e=\frac{x_e}{l_e} \tag{32}$$

を用いて，次の式で与えられる．

$$p_i^e := \int_{x_e=0}^{l_e} p(x_e)\phi_i^e(x_e)dx_e,\quad (i,e=1,2) \tag{33}$$

ここで，全体節点番号 I の節点における変位を u_I，集中外力を F_I とすれば，要素節点変位 u_i^e と荷重 f_i^e と

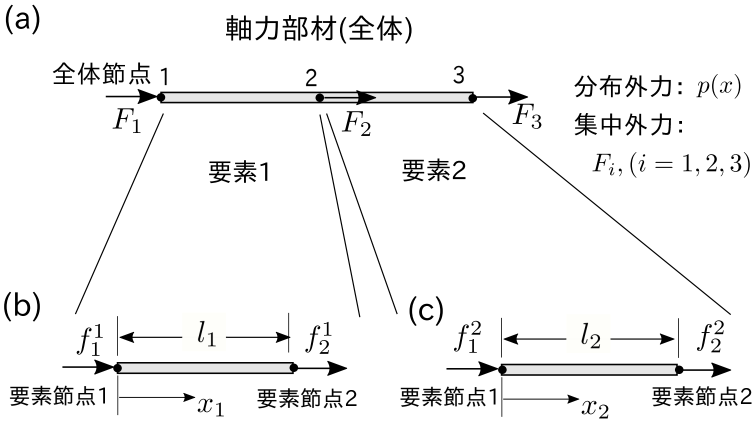

図 7: 軸力部材の 2 つの要素への分割.

の関係は

$$u_1^1=u_1,\quad u_2^1=u_1^2=u_2,\quad u_2^2=u_3 \tag{34}$$

$$f_1^1=F_1,\quad f_2^1+f_1^2=F_2,\quad f_2^2=F_3 \tag{35}$$

となる．従って，$e=1$ に対する剛性方程式 (31) は

$$\frac{EA_1}{l_1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{36}$$

と書くことができる．同様に，要素 $e=2$ の剛性方程式は

$$\frac{EA_2}{l_2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1^2 \\ f_2^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \end{Bmatrix} \tag{37}$$

と書くことができる．そこで，式 (36) と (37) の辺々を加え，式 (35) を用いれば，

$$\begin{pmatrix} \frac{EA_1}{l_1} & -\frac{EA_1}{l_1} & 0 \\ -\frac{EA_1}{l_1} & \frac{EA_1}{l_1}+\frac{EA_2}{l_2} & -\frac{EA_2}{l_2} \\ 0 & -\frac{EA_2}{l_2} & \frac{EA_2}{l_2} \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} p_1^1 \\ p_2^1 + p_1^2 \\ p_2^2 \end{array} \right\} \tag{38}$$

となる．これは，部材全体の接点変位と節点荷重の関係を表す式であることから，”全体剛性方程式”と呼ばれる．

1.6　例題 2

1. 図 4 に示す軸力部材の近似解を，式 (38) を用いて求める．２つの要素の長さ l_1, l_2 を

$$l_1 = l_2 = \frac{l}{2} \tag{39}$$

とすれば，

$$p_1^1 = \int_{x_1=0}^{l_1} p_0 \phi_1^1(x_1) dx_1 = \frac{p_0 l}{4} \tag{40}$$

で，同様にして

$$p_i^e = \frac{p_0 l}{4}, \quad (e = 1, 2,\ i = 1, 2) \tag{41}$$

であることが示される．また，節点 1 は固定端，節点 2 と 3 に集中荷重は外部から加えられていないため，

$$u_1 = 0, \quad F_2 = F_3 = 0 \tag{42}$$

とすることができる．よって，全体剛性方程式 (38) は

$$\frac{2EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} + \frac{p_0 l}{4} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right\} \tag{43}$$

となる．そこで，式 (43) を，未知の節点変位 u_2, u_3 に関する方程式に縮約して

$$\frac{2EA}{l} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} u_2 \\ u_3 \end{array} \right\} = \frac{p_0 l}{4} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right\} \tag{44}$$

を解けば，

$$u_2 = \frac{3}{8}\frac{p_0 l^2}{EA}, \quad u_3 = \frac{1}{2}\frac{p_0 l^2}{EA} \tag{45}$$

が得られる．これを，式 (43) に代入すれば，全体節点 1 における力 (反力が)$F_1 = -p_0 l$ と求められる．要素 e における変位の近似解 $\tilde{u}(x_e)$ は，式 (45) を

$$\tilde{u}(x_e) = \sum_{i=1}^{2} u_i^e \phi_i^e(x_e), \quad (0 \le x_e \le l_e) \tag{46}$$

に代入することで得られる．ここでは，変位分布を要素毎に 1 次式で近似しているため，2 次式で与えられる厳密解には一致し得ない．しかしながら，部材全体の変位分布を一つの直線で近似よりも，解の精度は向上している．

2. 図 5 に示す軸力部材に生じる変位分布を求める．ここでも，式 (39) のように，長さの等しい 2 つの要素に部材を要素分割すれば，

$$u_1 = 0, \quad F_2 = F, \quad F_3 = 0, \quad p(x) \equiv 0 \tag{47}$$

より，剛性方程式 (38) は

$$\frac{2EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \right\} = F \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} F_1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \tag{48}$$

となる．これを縮約して得られる

$$\frac{2EA}{l}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = F\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{49}$$

を解いて未知の節点変位と節点荷重を求めると，

$$u_2 = u_3 = \frac{Fl}{2EA}, \quad F_1 = -F \tag{50}$$

と，厳密解に一致する結果が得られる．

1.7 問題 2

図 8 に示すような，両端が固定された 2 つの軸力部材について，式 (38) を用いて変位の近似解を求めよ．なお，部材の断面剛性 EA は一定とし，要素 1 と要素 2 の長さは $l/2$ となるように要素分割が行われているものとする．

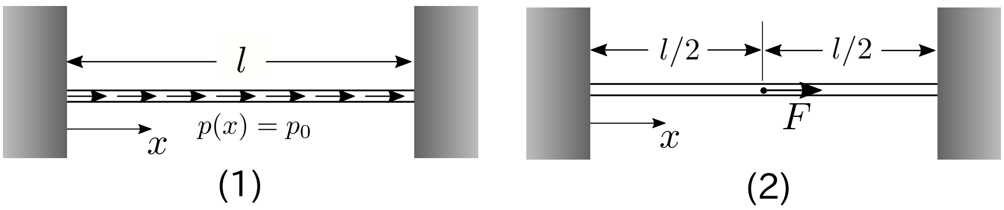

図 8: 両端が固定された荷重条件の異なる 2 つの軸力部材.