2019 年度 構造力学 II 講義メモ 1

1　1 次元軸力問題

1.1　強形式

1 次元軸力問題の支配方程式は

$$\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right)+p=0,\quad (x\in(0,l)) \tag{1}$$

で与えられる．ここで，u は軸変位を，E はヤング率，A は部材の断面積を表し，$p(x)$ は部材軸方向に働く分布力で，単位長さあたりの力の次元を持つ．式 (1) は, 軸力 N に関する釣り合い条件:

$$\frac{dN}{dx}+p=0,\quad (x\in(0,l)) \tag{2}$$

と，フックの法則:

$$\sigma=E\varepsilon \tag{3}$$

に由来するものである．なお，σ は軸方向の直応力を，ε は直ひずみを表し，ひずみと変位の関係は

$$\varepsilon=\frac{du}{dx}, \tag{4}$$

軸力と応力の関係は

$$\sigma=\frac{N}{A} \tag{5}$$

である．棒部材が図 1 のように支持されている場合，$x=0$ と $x=l$ における境界条件 (支持条件) は次のようになる．

$$u(0) = 0 \tag{6}$$
$$N(l) = EAu'(l)=\bar{F} \tag{7}$$

以上のように，微分方程式と境界条件による問題の定式化を強形式 (strong form) と呼ぶ．

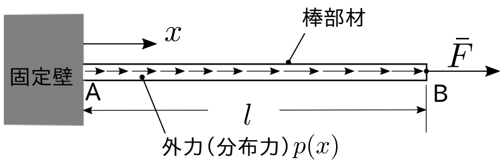

図 1: 軸方向の外力 $p(x)$ と $\bar{F}$ を受ける棒部材．

1.2　弱形式

$\xi(x)$ を $0\le x\le l$ で定義された $\xi(0)=0$ を満たす任意の関数であるとする．$\xi(x)$ を式 (2) の両辺に掛け，$x=0$ から $x=l$ の範囲で次のように積分する．

$$\int_0^l \left(N'+p\right)\xi dx=0 \tag{8}$$

この式の左辺第一項を，部分積分を用いて変形すると，

$$\int_0^l N'\xi dx = [N\xi]_0^l-\int_0^l N\xi' dx \tag{9}$$
$$= \bar{F}\xi(l)-\int_0^l N\xi' dx \tag{10}$$

となる．これを，式 (8) に代入すれば，次の関係が得られる．

$$a(u,\xi)=b(\xi) \tag{11}$$

ただし，$a(u,\xi)$ と $b(\xi)$ は以下の通りとする．

$$a(u,\xi)=\int_0^l N\xi' dx=\int_0^l EAu'\xi' dx \tag{12}$$

$$b(\xi)=\bar{F}\xi(l)+\int_0^l p\xi dx \tag{13}$$

任意の $\xi(x)$(ただし $\xi(0)=0$) について式 (11) を満足する $u(x)$ のうち，$u(0)=0$ となる $u(x)$(”弱解”と呼ぶ) は，強形式の解 (”強解”と呼ぶ) に一致することは数学的に証明することができる．従って，強解を直接求める代わりに弱解を求めることでも，軸力問題を解くことができる．式 (11) に基づく問題の表現を弱形式と呼ぶ．弱解と強解が一致するという意味において，弱形式と強形式は等価である．

1.3　仮想仕事式

図 2 に示すような 2 つの系を考える．これらの系は，部材に加えられる外力のみが異なり，支持条件と材料定数 E, A は同じであるとする．そこで，系 i, $(i=1,2)$ に加えれた分布力を $p_i(x)$ 部材右端 B に作用する集中荷重を $\bar{F}_i$, その結果生じる変位と軸力をそれぞれ $u_i(x), N_i(x)$ と表す．ここで式 (11) において，$u=u_1, \xi=u_2$

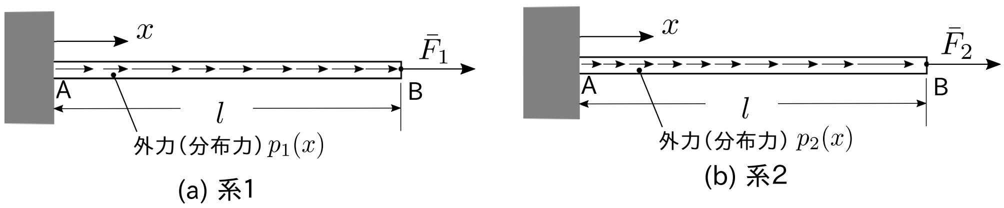

図 2: 外力のみが異なる 2 つの系 1 と 2.

とすれば,

$$a(u_1,u_2)=\int_0^l N_1u_2' dx=\int_0^l \frac{N_1N_2}{EA}dx \tag{14}$$

$$b(u_2)=\bar{F}_1u_2(l)+\int_0^l p_1u_2 dx \tag{15}$$

となる．ここで，式 (14) と式 (15) は，ともに力 × 長さ，すなわち仕事の次元を持つ量となっている．前者は内力である N_1, 後者は外力 $\bar{F}_1$ と $p_1(x)$ に関するものであることから，これらの量をそれぞれ，内部仮想仕事，外部仮想仕事と呼ぶ．”仮想”と呼ぶ理由は，力は系 1 の，変位は系 2 に関するものであることから，両者の積が物理的に存在する仕事を指す訳ではないことによる．系 1 と系 2 の間に成り立つ関係

$$a(u_1,u_2)=b(u_2) \tag{16}$$

を，仮想仕事式と呼ぶ.

1.4　単位荷重法

仮想仕事式 (16) における系 1 として，次のような特別な場合を考える．

$$\bar{F}_1=0,\quad p_1(x)=\delta(x-a),\quad (0<a<l) \tag{17}$$

すなわち，系 1 として $x = a$ に単位集中荷重だけが作用する場合を考える．このとき，デルタ関数の性質

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \tag{18}$$

を用いれば，式 (15) は次のようになる．ただし $f(x)$ は実数軸上全体で定義された任意の関数である．よって

$$b(u_2) = \int_0^l \delta(x-a)u_2(x)dx = u_2(a) \tag{19}$$

とすることができ，これを仮想仕事式 (16) に代入すれば，

$$u_2(a) = \int_0^l \frac{N_1 N_2}{EA} dx \tag{20}$$

の結果を得る．これは，2 つの系 1 と 2 における軸力 N_1, N_2 から，系 2 の $x = a$ における変位 $u_2(a)$ を求めることができることを意味する．言い換えれば，系 1 を変位計算の補助に用いることで，系 2 の変位を微分方程式を直接解くこと無く得ることができることを意味している．そこで, 系 1 を補助系，系 2 を解くべき問題とみる立場がより明確になるように，2 つの系に関する諸量を, あらためて

$$\left(u_1, N_1; \bar{F}_1, p_1\right) = \left(\tilde{u}, \tilde{N};\ \tilde{\bar{F}} = 0, \tilde{p} = \delta(x-a)\right) \tag{21}$$

$$\left(u_2, N_2; \bar{F}_2, p_2\right) = \left(u, N;\ \bar{F}, p\right) \tag{22}$$

と書き直す．このとき式 (20) は,

$$u(a) = \int_0^l \frac{N\tilde{N}}{EA} dx \tag{23}$$

と表される．式 (23) を利用して変位の計算を行う解法を単位荷重法と呼ぶ.

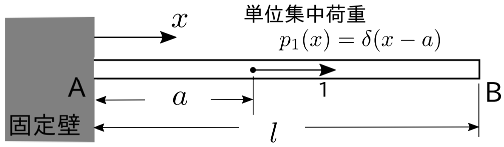

図 3: $x = a$ に部材軸方向への単位集中荷重を受ける棒部材.

1.4.1 例題

図 4-(a) に示す棒部材の点 B と点 C に発生する軸変位を，単位荷重法を用いて求めよ．断面剛性 EA は全断面で一定とする.

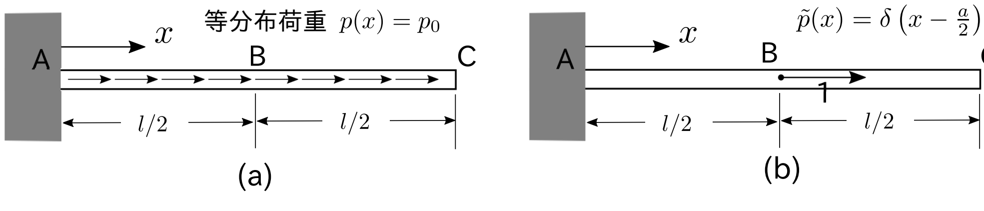

図 4: (a) 等分布荷重を受ける棒部材 (問題). (b) 単位荷重法の適用において用いる補助系.

1.4.2 問題

図 5 に示す 3 種類の系について，以下の問に答えよ．なお，断面剛性 EA は全ての部材，全ての断面で一定とする．

1. 図 5-(a) に示す棒部材の, 点 C における軸変位を求めよ.
2. 図 5-(a) に示す棒部材の, 点 B における軸変位を求めよ.
3. 図 5-(b) に示す棒部材に作用する支点反力を求め, 点 B における軸変位を求めよ.
4. 図 5-(c) に示す棒部材に作用する支点反力を求め, 点 B における軸変位を求めよ.

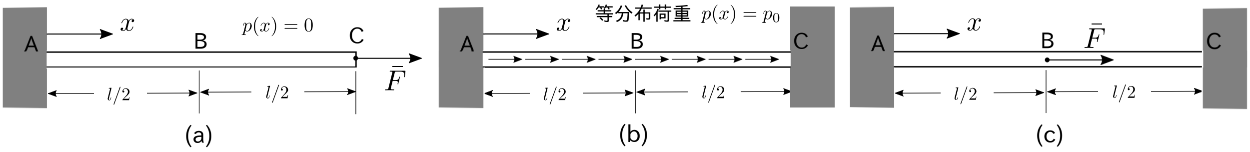

図 5: 支持条件と荷重条件の異なる 3 種類の系.