2019 年度 構造力学 II 演習問題 1 解答

問題 1.

問題で与えられた梁を図 1 に示す 2 つの系の重ね合わせで表現する．このとき，2 つの系の曲げモーメント M_1 と M_2 を，釣り合い条件から求めると，

$$M_1 = \begin{cases} -Fx & (0 < x < l/2) \\ -\frac{F}{2}s = -\frac{F}{2}(l-t) & (0 < s < l) \end{cases} \tag{1}$$

$$M_2 = \begin{cases} 0 & (0 < x < l/2) \\ \frac{F}{2}t & (0 < t < l/2) \\ \frac{F}{2}s & (0 < s < l/2) \end{cases} \tag{2}$$

と表され, 問題で与えられた系の曲げモーメント M はこれらの和で与えられる．ただし，x, s および t は図 1 に示した座標を表す．これらの結果を曲げモーメント図として表すと，同図の下側に示したようになる．単位荷重法を用いて点 A のたわみを求めるには，図 1-(a) において $F = \tilde{F} = 1$ としたものを補助系として用いればよい．このときの曲げモーメントを $\tilde{M}$ とすれば，$i = 1, 2$ に対して

$$\int_A^D M_i\tilde{M}dx = \int_{x=0}^{l/2} M_i\tilde{M}dx + \int_{t=0}^{l/2} M_i\tilde{M}dt + \int_{s=0}^{l/2} M_i\tilde{M}ds, \quad (i = 1, 2) \tag{3}$$

であるから，右辺の積分を一つずつ計算すると，

$$\int_A^B M_1\tilde{M}dx = \int_0^{l/2} M_1\tilde{M}dx = \int_0^{l} (-Fx)(-\tilde{F}x)dx = \frac{Fl^3}{24}\tilde{F} \tag{4}$$

$$\int_D^B M_1\tilde{M}ds = \int_0^{l} M_1\tilde{M}ds = \int_0^{l} \left(-\frac{Fs}{2}\right)\left(-\frac{\tilde{F}s}{2}\right)ds = \frac{Fl^3}{12}\tilde{F} \tag{5}$$

$$\int_B^C M_2\tilde{M}dt = \int_0^{l/2} M_2\tilde{M}dt = \int_0^{l/2} \left(\frac{Ft}{2}\right)\left(-\frac{\tilde{F}}{2}(l-t)\right)dt = -\frac{Fl^3}{48}\tilde{F} \tag{6}$$

$$\int_D^C M_2\tilde{M}ds = \int_0^{l/2} M_2\tilde{M}ds = \left(\frac{Fs}{2}\right)\left(-\frac{\tilde{F}s}{2}\right)ds = -\frac{Fl^3}{96}\tilde{F} \tag{7}$$

となることが示される．以上に $\tilde{F} = 1$ を代入して用いれば,

$$\int_A^D M\tilde{M}dx = \int_A^D (M_1 + M_2)\tilde{M}dx = \frac{3}{32}Fl^3 \tag{8}$$

となることから，A 点のたわみ v_A が

$$v_A = \frac{3}{32}\frac{Fl^3}{EI} \tag{9}$$

と求められる．

問題 2.

問題で与えられた系を，図 2 に示す 2 つの系 1 と 2 に分解する．系 1 と系 2 の点 B におけるたわみを，それぞれ δ_1, δ_2 と表す. 系 1 と 2 の曲げモーメント M_1 と M_2 を力の釣り合いから求めると, M_1,$_M 2$ は

$$M_1 = \begin{cases} -\frac{1}{2}q_0x^2 & (0 < x < 2l/3) \\ -\frac{2}{3}q_0l^2\left(\frac{s}{l} + \frac{1}{3}\right) & (0 < s < l/3) \end{cases} \tag{10}$$

$$M_2 = \begin{cases} 0 & (0 < x < 2l/3) \\ R_Bs & (0 < s < l/3) \end{cases} \tag{11}$$

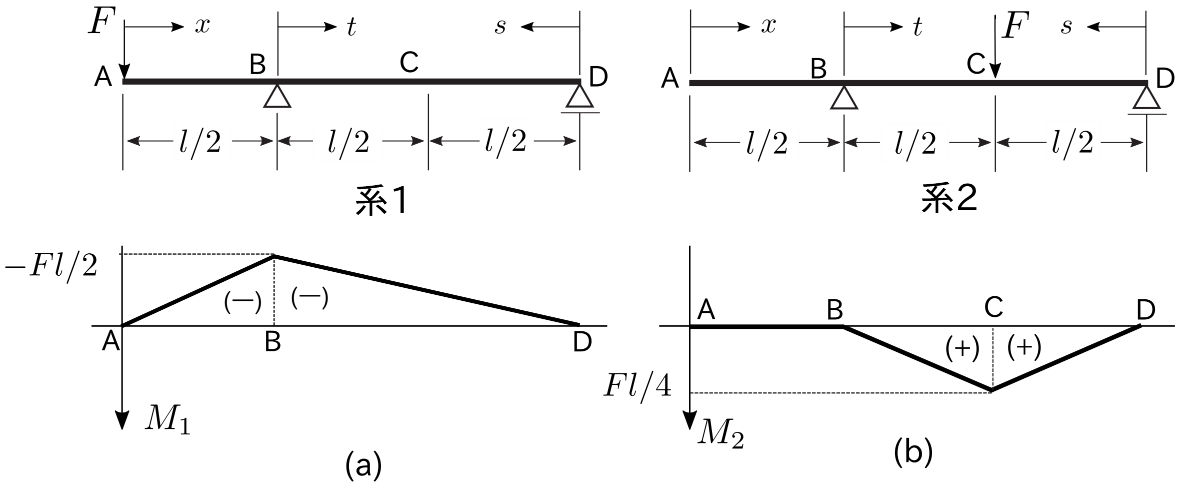

図 1: 問題 1 で与えられた系の 2 つの系 1 と 2 への分解と曲げモーメント図.

となる．ただし，x と s は図 2 に示したような座標を表す．これらの結果を曲げモーメント図として示せば，図 2 の下側のようである．単位荷重法によって δ_1, δ_2 を求めるための補助系は，系 2 において $R_B = -1$ とおけばよい．その結果として得られる曲げモーメント分布を $\tilde{M}$ と表せば，$\int_A^C M_1 \tilde{M} dx$, $(i = 1, 2)$ は,

$$\int_A^C M_1 \tilde{M} dx = \int_0^{l/3} M_1 \tilde{M} ds = \int_0^{l/3} -\frac{2}{3} q_0 l^2 \left(\frac{s}{l} + \frac{1}{3} \right) (-s)\, ds = \frac{5}{243} q_0 l^4 \tag{12}$$

$$\int_A^C M_2 \tilde{M} dx = \int_0^{l/3} M_2 \tilde{M} ds = (R_B s)(-s)\, ds = -\frac{R_B l^3}{81} \tag{13}$$

となるので,

$$\delta_1 = \frac{5}{243} \frac{q_0 l^4}{EI}, \quad \delta_2 = -\frac{R_B l^3}{81 EI} \tag{14}$$

が得られる．そこで，$\delta_1 + \delta_2 = 0$ とすることで，B 点における反力 R_B が

$$R_B = \frac{5}{3} q_0 l \tag{15}$$

と決まる．これを式 (10) と式 (11) に代入して $M_1 + M_2$ を計算することで，問題で与えられた梁の曲げモーメント分布を得ることができる．その結果を曲げモーメント図として示せば，図 3 のようになる．

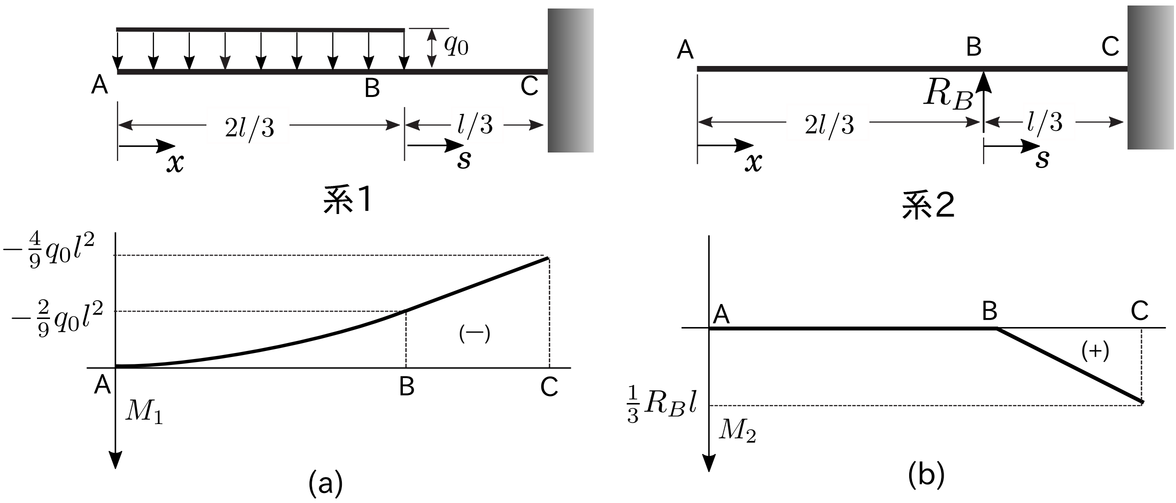

図 2: 問題 2 で与えられた系の 2 つの系 1 と 2 への分解と曲げモーメント図.

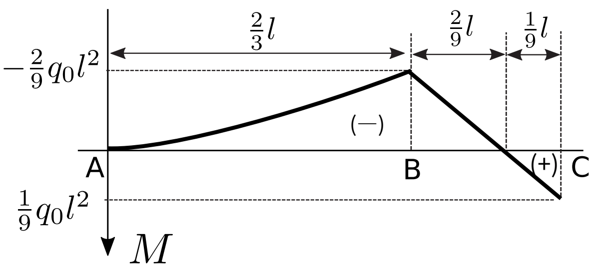

図 3: 曲げモーメント図 (問題 2).