2019 年度 構造力学 II 講義メモ 3

1　曲げ-軸力問題

梁の長手方向に対して傾いた荷重が作用するとき，曲げモーメントと軸力が同時に発生する．この場合，軸力問題と曲げ問題の方程式両方を解く必要がある．構造部材全てが同一直線上に並んでいる場合，軸力問題と曲げ問題は各々独立に解くことができる．一方，骨組構造のように，部材軸が様々な方向を向く構造では，軸力と曲げに関する問題を分離することはできず，軸力と曲げ問題を同時に解く必要がある．強形式による骨組み構造の解析は非常に煩雑となるが，弱形式，あるいは仮想仕事式を骨組み構造に拡張することは容易である．ここでは，仮想仕事式を骨組み構造に適用するための準備として，単一部材に対する曲げー軸力問題の仮想仕事式を示し，単位荷重法の公式を導く．なお，以下の内容は，諸公式の表記法の問題に過ぎず，本質的に新しい内容を含むものではない．

1.1　弱形式，仮想仕事式

図 1 に示すような，軸方向と軸直角方向の外力を受ける片持梁の曲げ-軸力問題を考える．軸変位を u, たわみを v とすれば，この問題の弱形式が次のようになることは，既に示した通りである．

$$\int_0^l EAu'\xi' dx = \bar{N}\xi(l) + \int_0^l p\xi dx \tag{1}$$

$$\int_0^l EIv''\eta'' dx = \bar{Q}\eta(l) - \bar{M}\eta'(l) + \int_0^l q\eta dx \tag{2}$$

ただし，$\xi(x), \eta(x)$ は，$0 \le x \le l$ 上で定義された，次の条件を満足する任意の関数である．

$$\xi(0) = 0, \quad \eta(0) = 0, \quad \eta'(0) = 0 \tag{3}$$

また，$p(x), q(x)$ は軸方向，軸直角方向の分布荷重を，$\bar{N}, \bar{Q}, \bar{M}$ は，それぞれ部材右端に作用する既知の軸力，せん断力および曲げモーメントを表す．(u, v) は変位ベクトルを，(p, q) と $(\bar{N}, \bar{Q})$ は，それぞれ，分布力と部材端に作用する集中外力を表すベクトルとみなすことができる．そこで，これらを

$$\boldsymbol{u}(x) = (u(x),\, v(x))^T, \quad \boldsymbol{p}(x) = (p(x),\, q(x))^T, \quad \bar{\boldsymbol{F}}(x) = \left(\bar{N},\, \bar{Q}\right)^T \tag{4}$$

と書くことにする．

次に，図 2 に示すような 2 つの系を考える．軸力と曲げ問題の弱形式を表す式 (1) と (2) において

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 = (u_1,\, v_1)^T, \quad (\xi,\, \eta)^T = \boldsymbol{u}_2 = (u_2,\, v_2)^T, \tag{5}$$

とすれば，各々の問題に対する仮想仕事式は

$$\int_0^l \frac{N_1 N_2}{EA} dx = \bar{N}_1 u_2(l) + \int_0^l p_1 u_2 dx \tag{6}$$

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI} dx = \bar{Q}_1 v_2(l) - \bar{M}_1 v_2'(l) + \int_0^l q_1 v_2 dx \tag{7}$$

となる．ただし，インデックス 1 と 2 は，それぞれ系 1 と系 2 に関する量であることを意味する．これら，式 (6) と (7) の辺々を加えると，

$$\int_0^l \left(\frac{N_1 N_2}{EA} + \frac{M_1 M_2}{EI} \right) dx = \bar{\boldsymbol{F}}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2(l) - \bar{M}_1 v_2'(l) + \int_0^l \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 dx \tag{8}$$

となる．ここで，

$$a(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \int_0^l \left(\frac{N_1 N_2}{EA} + \frac{M_1 M_2}{EI} \right) dx \tag{9}$$

$$b(\boldsymbol{u}_2) = \bar{\boldsymbol{F}}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2(l) - \bar{M}_1 v_2'(l) + \int_0^l \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 dx \tag{10}$$

と置けば,

$$a(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = b(\boldsymbol{u}_2) \tag{11}$$

と，曲げ-軸力問題の仮想仕事式を表すことができる．

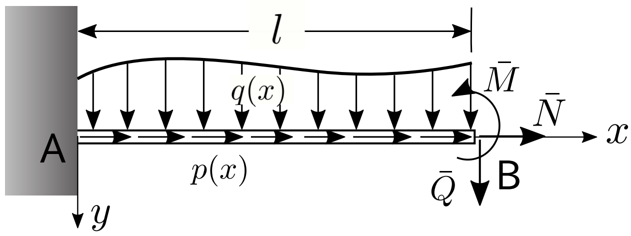

図 1: 軸力と鉛直力を受ける片持梁.

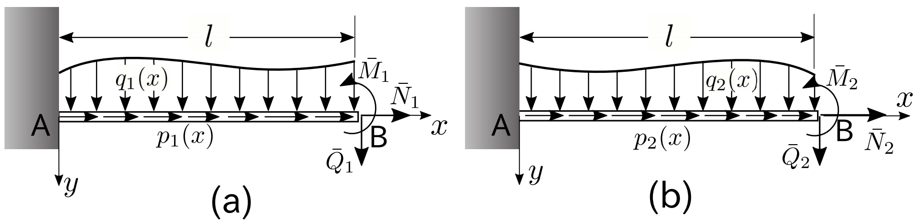

図 2: 荷重条件が異なる 2 つの系.(a) 系 1, (b) 系 2.

1.2　単位荷重法

図 3 に示すような，傾いた単位集中荷重を受ける梁を考える，これを，仮想仕事式 (11) の系 1 として用いる．単位荷重の作用点位置を $x = a$，方向を部材軸からの角度で α とすれば，系 1 の外力項は

$$\bar{\boldsymbol{F}}_1 = \boldsymbol{0},\ \bar{M}_1 = 0,\ \boldsymbol{p}_1 = \hat{\mathbf{e}}(\alpha)\delta(x-a), \quad \hat{\mathbf{e}} = (\cos\alpha,\, \sin\alpha)^T \tag{12}$$

と表され，式 10 は,

$$b(\boldsymbol{u}_2) = \hat{\boldsymbol{e}} \cdot \boldsymbol{u}_2(a) \tag{13}$$

となる，従って，仮想仕事式 (11) から

$$\hat{\boldsymbol{e}} \cdot \boldsymbol{u}_2(a) = \int_0^l \left(\frac{N_1 N_2}{EA} + \frac{M_1 M_2}{EI} \right) dx \tag{14}$$

が得られる．$\hat{\boldsymbol{e}}$ は単位ベクトルだから, 式 (14) の左辺は $x = a$ における変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ の $\hat{\boldsymbol{e}}$ 方向成分を意味する．よって，式 (14) を用いることで，単位荷重の作用点位置 $x = a$ における変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ の，単位荷重方向成分が得られることが分かる．最後に,

$$\left(\tilde{N},\, \tilde{M}\right) = (N_1,\, M_1)\,, \quad (N,\, M) = (N_2,\, M_2)\,, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_2 \tag{15}$$

とおき，式 (14) を次のように書き直しておく.

$$\hat{\boldsymbol{e}} \cdot \boldsymbol{u}(a) = \int_0^l \left(\frac{N\tilde{N}}{EA} + \frac{M\tilde{M}}{EI} \right) dx \tag{16}$$

以下では，これを用いて傾斜部材や骨組み構造の変位計算を行う.

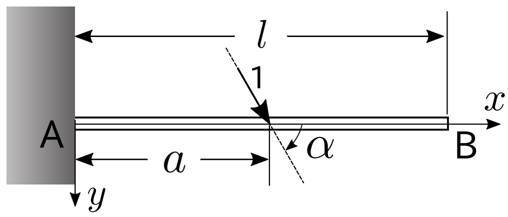

図 3: 曲げー軸力問題の単位荷重法における補助系 (片持梁の場合).

1.3　例題 1

図 4 に示す 4 つの系 (a)∼(d) について，以下の問に答えよ．なお，ヤング率 E，断面積 A，断面 2 次モーメント I は全ての部材と断面で一定とする．

1. 系 (a) から (d) における曲げモーメント分布を求めよ．
2. 系 (a) の, 点 B における鉛直変位と水平変位を求めよ．
3. 系 (b) の, 点 B における鉛直変位と水平変位を求めよ．

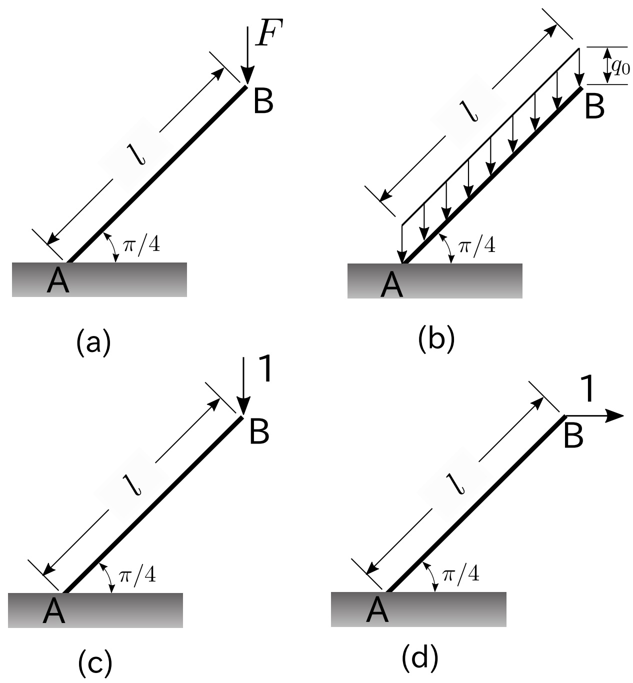

図 4: 荷重条件の異なる 4 種類の傾斜した片持梁.

2　骨組構造に対する仮想仕事式

n 本の直線部材を連結してできる骨組み構造を考える．図 5-(a) は部材数が $n = 3$ の骨組み構造を示したもので，以下ではこれを具体例として参照しながら，一般の骨組み構造に対する仮想仕事式を導く．なお，ここで対象とする骨組み構造では，部材間の連結は剛結でもピン結合でもよく，一つの節点 (部材の接合点) には何本の部材が連結されていてもよい．各部材は，部材番号が与えられており，一般の部材の番号を e とし断面力や断面係数等，その部材に関する諸量にはインデックス e をつけて表す．例えば，部材 e における軸力を N_e, 部材長さを l_e 等と書く．なお，部材中の断面位置や，荷重，変位方向を指定するためには, 図 5-(b) に示すように，部材軸方向に x_e 軸を，部材軸直角方向に y_e 軸をとった (x_e, y_e) 直交座標系を用いる．

2.1 仮想仕事式

図 5 に示す骨組み構造について，2 つの異なる荷重条件:

$$\text{条件 }1:\left(\bar{\boldsymbol{F}},\,\bar{M},\boldsymbol{p}\right) = \left(\bar{\boldsymbol{F}}^{(1)},\,\bar{M}^{(1)},\boldsymbol{p}^{(1)}\right) \tag{17}$$

$$\text{条件 }2:\left(\bar{\boldsymbol{F}},\,\bar{M},\boldsymbol{p}\right) = \left(\bar{\boldsymbol{F}}^{(2)},\,\bar{M}^{(2)},\boldsymbol{p}^{(2)}\right) \tag{18}$$

に対して生じる変位を, それぞれ $\boldsymbol{u}^{(1)},\boldsymbol{u}^{(2)}$ と書く．条件 1 にある骨組み構造を系 1, 同じ骨組み構造が条件 2 の状態にある場合を系 2 とよぶ．これら 2 つの系の，部材 e に対する仮想仕事式は，部材両端部が図 5-(b) のように荷重が既知の境界と考えて仮想仕事式を立てれば,

$$\int_{x_e=0}^{l_e}\left(\frac{N_e^{(1)}N_e^{(2)}}{EA_e}+\frac{M_e^{(1)}M_e^{(2)}}{EI_e}\right)dx_e = \left[\bar{\boldsymbol{F}}_e^{(1)}\cdot\boldsymbol{u}^{(2)}-\bar{M}_e^{(1)}(v^{(2)})'\right]_{x_e=0}^{l_e}+\int_{x_e=0}^{l_e}\boldsymbol{p}^{(1)}\cdot\boldsymbol{u}^{(2)}dx_e \tag{19}$$

となる．ただし,

$$\bar{\boldsymbol{F}}_e(0)=\left(\bar{N}_1^e,\,\bar{Q}_1^e\right)^T,\quad \bar{M}_e(0)=\bar{M}_1^e \tag{20}$$

$$\bar{\boldsymbol{F}}_e(l_e)=\left(\bar{N}_2^e,\,\bar{Q}_2^e\right)^T,\quad \bar{M}_e(l_e)=\bar{M}_2^e \tag{21}$$

で，右肩の括弧内の数字は，いずれの系に関する量であるかを示すためのものである．なお，図 5-(a) に示す構造において，部材 $e=1$ では，$x_e=0$ において変位ベクトルとたわみ角がゼロであることから，仮想仕事式は

$$\int_{x_1=0}^{l_1}\left(\frac{N_1^{(1)}N_1^{(2)}}{EA_1}+\frac{M_1^{(1)}M_1^{(2)}}{EI_1}\right)dx_1 = \bar{\boldsymbol{F}}_1^{(1)}\cdot\boldsymbol{u}^{(2)}\Big|_{x_1=l_1}-\bar{M}_1^{(1)}(v^{(2)})'\Big|_{x_1=l_1}+\int_{x_1=0}^{l_1}\boldsymbol{p}^{(1)}\cdot\boldsymbol{u}^{(2)}dx_1 \tag{22}$$

となる．また，部材 $e=3$ では $x_3=l_3$ すなわち D 点において，実際に荷重が指定された境界となっていることから

$$\bar{\boldsymbol{F}}_3(l_3)=\left(\bar{N}_2^e=\bar{N},\,\bar{Q}_2^3=\bar{Q}\right)^T,\quad \bar{M}_3(l_3)=\bar{M} \tag{23}$$

とできる．この他の節点 (B,C) における力は全て内力である．以上を踏まえ, 全ての部材に対する仮想仕事式の辺々の和をとると，骨組み構造全体に対する仮想仕事式が

$$a\left(\boldsymbol{u}^{(1)},\,\boldsymbol{u}^{(2)}\right)=b\left(\boldsymbol{u}^{(2)}\right) \tag{24}$$

$$a\left(\boldsymbol{u}^{(1)},\,\boldsymbol{u}^{(2)}\right) = \sum_{e=1}^{n}\int_{x_e=0}^{l_1}\left(\frac{N_e^{(1)}N_e^{(2)}}{EA_e}+\frac{M_e^{(1)}M_e^{(2)}}{EI_e}\right)dx_e \tag{25}$$

$$b\left(\boldsymbol{u}^{(2)}\right) = \bar{\boldsymbol{F}}^{(1)}\cdot\boldsymbol{u}^{(2)}\Big|_{x_3=l_3}-\bar{M}^{(1)}(v^{(2)})'\Big|_{x_3=l_3}+\sum_{e=1}^{n}\int_{x_e=0}^{l_e}\boldsymbol{p}^{(1)}\cdot\boldsymbol{u}^{(2)}dx_e \tag{26}$$

と得られる．ここで，系 1 に対する荷重条件を

$$\bar{\boldsymbol{F}}^{(1)}=\boldsymbol{0},\quad \bar{M}^{(1)}=0,\quad \boldsymbol{p}^{(1)}=\begin{cases}\hat{\mathbf{e}}\delta(x_e-a) & (e=e')\\ \boldsymbol{0} & (e\neq e')\end{cases} \tag{27}$$

とする．これは，部材 $e=e'$ の $x_{e'}=a$ で，単位ベクトル $\hat{\mathbf{e}}$ の方向に作用する単位荷重のみが作用する場合を表す．このとき，仮想仕事式 (24) は

$$\hat{\mathbf{e}}\cdot\boldsymbol{u}^{(2)}\Big|_{x_{e'}=a}=\sum_{e=1}^{n}\int_{x_e=0}^{l_1}\left(\frac{N_e^{(1)}N_e^{(2)}}{EA_e}+\frac{M_e^{(1)}M_e^{(2)}}{EI_e}\right)dx_e \tag{28}$$

となり，骨組み構造に対する単位荷重法の式が導かれる．なお，図 6 は，$e'=2$ とした場合の，系 1 の荷重条件を示したものである．最後に,

$$\left(M_e^{(1)},\,N_e^{(1)}\right)=\left(\tilde{M}_e,\,\tilde{N}_e\right)\quad\left(M_e^{(2)},\,N_e^{(2)}\right)=\left(M_e,\,N_e\right),\quad \boldsymbol{u}^{(2)}=\boldsymbol{u},\quad (e=1,\ldots n) \tag{29}$$

と書き直せば，式 (28) は次のようになる．

$$\hat{\boldsymbol{e}} \cdot \boldsymbol{u}|_{x_{e'}=a} = \sum_{e=1}^{n} \int_{x_e=0}^{l_1} \left(\frac{N_e \tilde{N}_e}{EA_e} + \frac{M_e \tilde{M}_e}{EI_e} \right) dx_e \tag{30}$$

この結果は一般の骨組み構造に対して成立するものである．一方，トラス構造の場合，各部材には軸力のみが作用することから，曲げモーメントに関する項は現れない．また，節点の変位を単位荷重法で求める場合，問題と補助系ともに，外力は全て節点に加えられるおとから，軸力が部材内で一定となる．その結果，軸力に関する積分は簡単に実行することができ，単位荷重法の式は次のようになる．

$$\hat{\boldsymbol{e}} \cdot \boldsymbol{u}|_{x_{e'}=a} = \sum_{e=1}^{n} \frac{N_e \tilde{N}_e}{EA_e} l_e \tag{31}$$

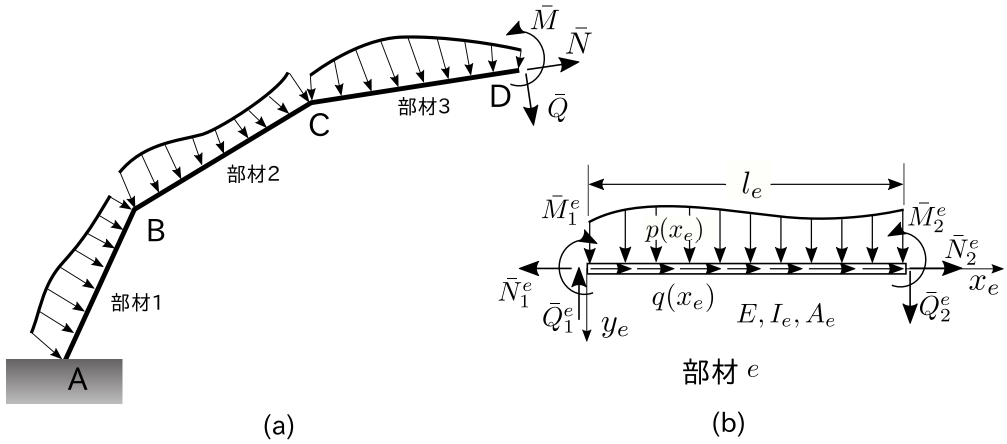

図 5: (a) 骨組み構造の例. (b) 部材 e に関する諸量と局所座標 (x_e, y_e).

2.2　例題 2

図 7 に示した 3 種類の骨組み構造について以下の問に答えよ．なお，断面剛性 EA と EI は全ての部材，全ての断面で一定とする．

1. 骨組み構造 (a),(b),(c) のそれぞれにおける曲げモーメント分布を求めよ．

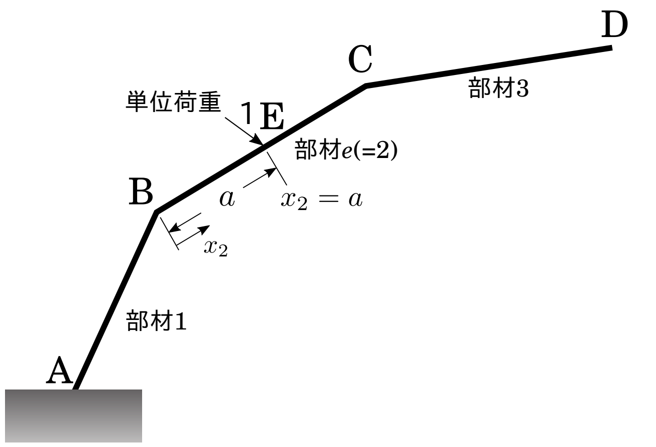

図 6: 単位集中荷重を受ける骨組み構造.

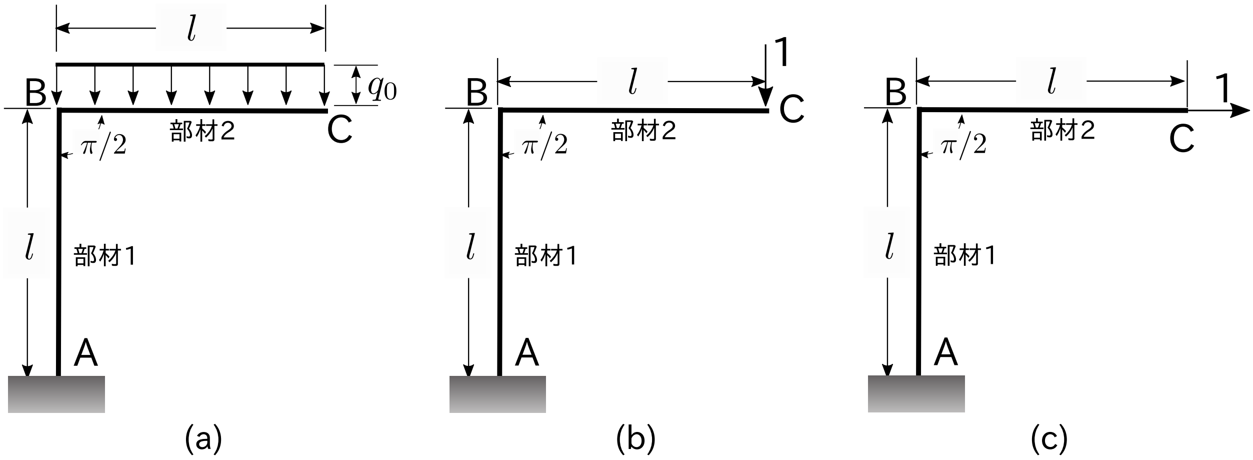

図 7: 荷重条件が異なる 3 種類の骨組み構造 (a)-(c).

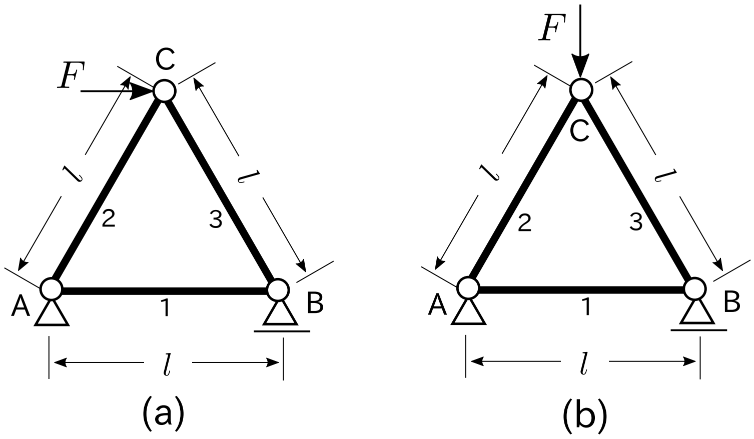

図 8: (a) 節点 C で水平力を受けるトラス.(b) 節点 C で鉛直力を受けるトラス.

2. 骨組み構造 (a) の点 C における鉛直変位 v_C を求めよ.

3. 骨組み構造 (a) の点 C における水平変位 u_C を求めよ.

2.3　例題 3

図 8 に示す 2 つのトラス構造について次の問に答えよ．なお，トラス部材の断面剛性 EA は，全ての部材，全ての断面で一定とする．

1. トラス構造 (a) の点 C における水平変位を求めよ.

2. トラス構造 (b) の点 C における鉛直変位を求めよ.

3. トラス構造 (a) の点 C における鉛直変位を求めよ.

2.4　問題 1

図 9 に示す骨組み構造 (a)，(b) および (c) について以下の問に答えよ. なお，断面剛性 EI と EA は全ての部材，全ての断面で一定とする.

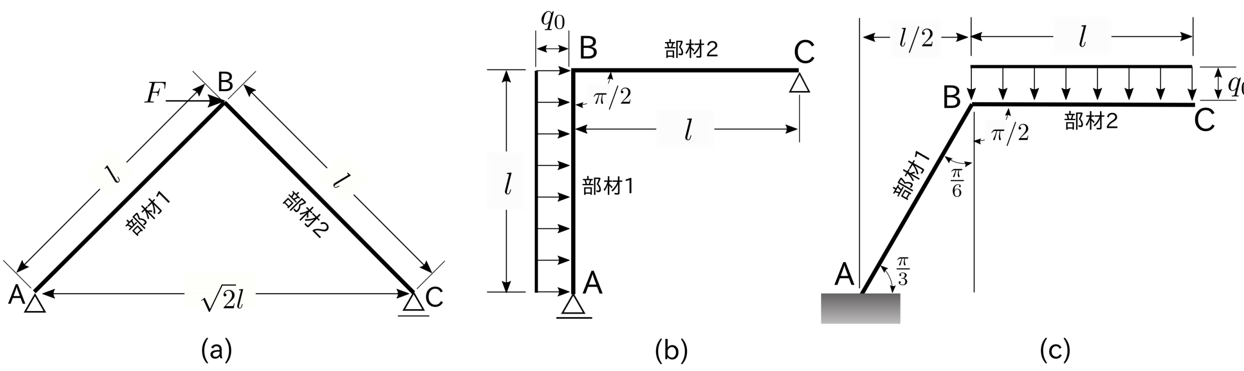

図 9: 支持条件と荷重条件の異なる 3 種類の骨組み構造.

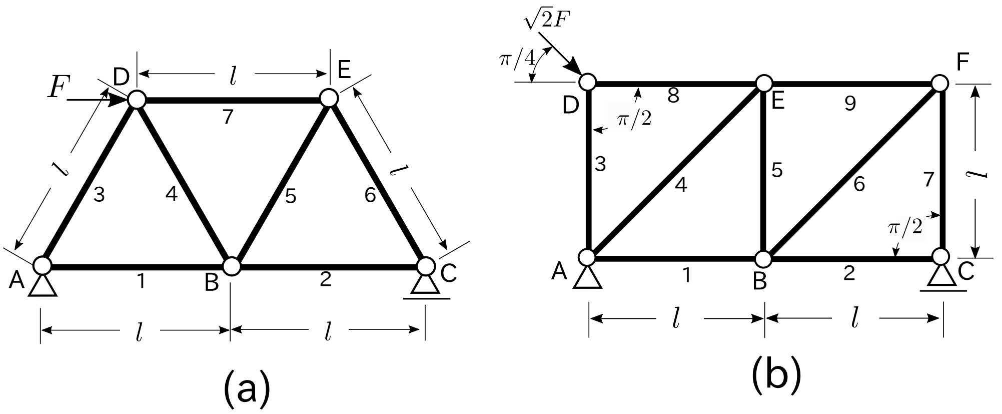

図 10: 単純支持された二つのトラス構造.

1. 骨組み構造 (a) の点 B における水平変位を求めよ.
2. 骨組み構造 (a) の点 B における鉛直変位を求めよ.
3. 骨組み構造 (b) の点 A における水平変位を求めよ.
4. 骨組み構造 (c) の点 C における鉛直変位を求めよ.
5. 骨組み構造 (c) の点 C における水平変位を求めよ.

2.5 問題 2

図 9 に示す，2 つのトラス骨組 (a) と (b) について以下の問に答えよ．なお，トラス部材の断面剛性 EA は，全ての部材，全ての断面で一定とする．

1. トラス構造 (a) の点 D における水平変位を求めよ.
2. トラス構造 (a) の点 E における水平変位を求めよ.
3. トラス構造 (b) の点 D における荷重方向の変位を求めよ.