2020 年度 構造力学 II 第 1 回

1　1 次元軸力問題

1.1　強形式 (復習)

1.1.1　支配方程式

1 次元軸力問題の支配方程式は

$$\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right)+p=0,\quad (x\in(0,l)) \tag{1}$$

で与えられる．ここに，u は軸変位を，E はヤング率，A は部材の断面積を表す．また，$p(x)$ は部材軸方向に働く分布力で，単位長さあたりの力の次元を持つ量で，x は部材長手方向にとった座標である．式 (1) は, 軸力 N に関する釣り合い条件:

$$\frac{dN}{dx}+p=0,\quad (x\in(0,l)) \tag{2}$$

と，フックの法則:

$$\sigma=E\varepsilon \tag{3}$$

に由来するものである．式 (3) において，σ は部材軸方向の直応力を，ε は直ひずみを表し，ポアソン比による効果は無視されている．ひずみと変位の関係は

$$\varepsilon=\frac{du}{dx} \tag{4}$$

で，軸力と軸応力の関係は

$$\sigma=\frac{N}{A} \tag{5}$$

であることから，式 (2)∼(5) より，冒頭の軸変位に関する支配微分方程式 (1) が導かれる．

1.1.2　境界条件

棒部材が図 1 のように支持されている場合，$x=0$ と $x=l$ における境界条件 (支持条件) は次のように表すことができる．

$$u(0) = 0 \tag{6}$$

$$N(l) = EAu'(l)=\bar{F} \tag{7}$$

部材の支持条件は図 1 に示したもの以外にも，例えば，両端が固定された場合等が考えられるが，議論を具体

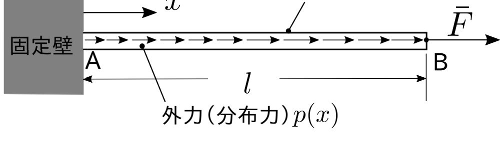

図 1: 軸方向の外力 $p(x)$ と $\bar{F}$ を受ける左端が固定支持された棒部材.

的にするために，以下では別途断りの無い限り， 図 1 の支持条件を対象として一連の定式化方法 (後述する弱形式、強形式) を示す．なお，一般の支持条件に対しても同様な定式化は可能である．

1.1.3　強形式と強解 (新しい用語)

以上で示したような，支配微分方程式 (1) と境界条件 (6),(7) による問題の定式化は**強形式 (strong form)** と呼ばれ，その解 $u(x)$ のことを**強解 (strong form solution)** と呼ぶ．

1.2　弱形式

1.2.1　弱形式の導出

$\xi(x)$ を区間:$0 \leq x \leq l$ で定義され，$\xi(0) = 0$ を満たす任意の関数とする．式 (2) の両辺に $\xi(x)$ を掛け，$x = 0$ から $x = l$ の範囲で次のように積分する．

$$\int_0^l (N' + p)\,\xi dx = 0 \tag{8}$$

$N(x)$ が軸力問題の解であれば，式 (8) は $\xi(x)$ に依らず成立する．式 (8) の左辺第一項を部分積分を用いて変形すると，

$$\begin{aligned} \int_0^l N'\xi dx &= [N\xi]_0^l - \int_0^l N\xi' dx && (9) \\ &= \bar{F}\xi(l) - \int_0^l N\xi' dx && (10) \end{aligned}$$

となる．ここで，式 (9) から式 (10) への変形には，$\xi(0) = 0$ と $N(0) = 0$ であることを用いた．式 (10) を式 (8) に代入して整理し，

$$a(u, \xi) = \int_0^l N\xi' dx = \int_0^l EAu'\xi' dx \tag{11}$$

$$b(\xi) = \bar{F}\xi(l) + \int_0^l p\xi dx \tag{12}$$

と表すことにすれば，その結果は簡潔に次のように表すことができる．

$$a(u, \xi) = b(\xi) \tag{13}$$

式 (13) の関係は，$u(x)$ が強解である限り $\xi(x)$ に依らず成り立つことに注意する．逆に，任意の $\xi(x)$ について式 (13) を満足するような $u(x)$ があったとし，これを強解と区別して $\tilde{u}(x)$ と書く．すなわち，$\tilde{u}(x)$ は

$$a(\tilde{u}, \xi) = b(\xi), \quad (\forall \xi(x) \text{ s.t. } \xi(0) = 0) \tag{14}$$

の関係を満足するような関数であるとする．ここで，$\forall$ は”for all (全ての，任意の)” と，s.t. は”such that∼(∼であるような)” と読む．従って，式 (14) は $\xi(0) = 0$ であるような任意の $\xi(x)$ について $a(\tilde{u}, \xi) = b(\xi)$ が満たされる，ということを述べたものである．式 (14) の関係を満たし，$\tilde{u}(0) = 0$ となるような $\tilde{u}(x)$ を求める問題を**弱形式 (weak form)** と呼び，その解である $\tilde{u}(x)$ は**弱解**と呼ばれる．

1.2.2　弱形式と強形式の等価性

これまでの議論から，強形式の解 u(強解) は必ず弱形式の解 (弱解) になることは明らかである．このことを図式的に書くと，

$$\text{強形式の解 (強解)} \;\Rightarrow\; \text{弱形式の解 (弱解)} \tag{15}$$

となる．一方この逆，すなわち，弱解が同時に強形式の解となるか否かは自明で無い．しかしながら，

$$\text{弱形式の解 (弱解)} \;\Rightarrow\; \text{強形式の解 (強解)} \tag{16}$$

となることは以下のようにして示すことができる．

式 (14) の左辺を，部分積分により次のように変形する．

$$
\begin{aligned}
a(\tilde{u},\xi) &= \int_0^l EA\tilde{u}'\xi' dx \\
&= [EA\tilde{u}'\xi]_0^l - \int_0^l (EA\tilde{u}')'\xi dx \\
&= EA\tilde{u}'\xi\big|_{x=l} - \int_0^l (EA\tilde{u}')'\xi dx
\end{aligned} \tag{17}
$$

以上では，$\xi(0)=0$ であることを用いた．一方，$\tilde{u}$ が強解であるかどうかこの時点では不明であるため、$\tilde{N} = EA\tilde{u}' = \bar{F}$ とすることはできないことに注意が必要である．式 (14) に代入して整理すると，

$$
\int_0^l \{(EA\tilde{u}')' + p\}\xi dx + \left\{\bar{F} - EA\tilde{u}'(l)\right\}\xi(l) = 0 \tag{18}
$$

となる.$\xi(x)$ は任意の関数でよいことから，適当な関数 $\phi(x)$ を用いて，

$$
\xi(x) = \{(EA\tilde{u}')' + p\}\phi(x), \quad (\phi(0)=0) \tag{19}
$$

としてもよい．さらに $\phi(x)$ を

$$
\phi(x) = x(l-x) \tag{20}
$$

とすれば，$\xi(0)=\xi(l)=0$ となるようにでき，これを踏まえて式 (19) の $\xi(x)$ を式 (18) に代入すると，

$$
\int_0^l \{(EA\tilde{u}')' + p\}^2 \phi dx = 0 \tag{21}
$$

となることが分かる． 式 (21) の被積分関数は全て正または零で，$\phi(x)$ は $0<x<l$ で正である．従って, 式 (21) となるためには,

$$
(EA\tilde{u}')' + p = 0 \tag{22}
$$

でなければならない．このことを踏まえれば，式 (18) は，任意の $\xi(l)$ について

$$
\left\{\bar{F} - EA\tilde{u}'(l)\right\}\xi(l) = 0 \tag{23}
$$

でなければならず,

$$
\tilde{N} = EA\tilde{u}' = \bar{F} \tag{24}
$$

が言える．以上のことから，式 (14) を満たすものの中で，$\tilde{u}(0)=0$ となるものは強形式の解であることがわかり,

$$
u = \tilde{u} \tag{25}
$$

となることが結論される．すなわち，強形式と弱形式は同じ解を与え，この意味において 2 つの問題の定式化は互いに等価なものということができる．

1.3 仮想仕事式

図 2 に示す 2 つの系を考える．これらの系では，部材に加えられた外力だけが互いに異なり，支持条件と断面係数 E, A は同じとする．そこで，系 i, $(i=1,2)$ に加えれた分布力を $p_i(x)$，部材右端 B に作用する集中荷重を $\bar{F}_i$, その結果生じる変位と軸力をそれぞれ $u_i(x), N_i(x)$ と表す．ここで式 (13) において，$u=u_1, \xi=u_2$ とすれば,

$$
a(u_1,u_2) = \int_0^l N_1 u_2' dx = \int_0^l \frac{N_1 N_2}{EA} dx \tag{26}
$$

$$
b(u_2) = \bar{F}_1 u_2(l) + \int_0^l p_1 u_2 dx \tag{27}
$$

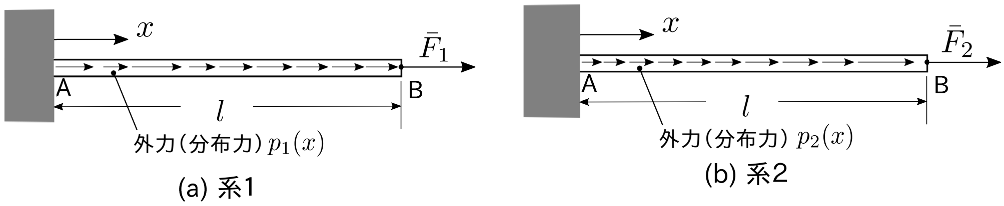

図 2: 外力のみが異なる 2 つの系 1 と 2.

となり，これらの量が互いに等しいとの結果が得られる．式 (26) と式 (27) は，ともに力 $\times$ 長さ，すなわち仕事の次元を持つ量となっている．前者は内力である N_1, 後者は外力 $\bar{F}_1$ と $p_1(x)$ に関するものであることから，これらの量をそれぞれ，内部仮想仕事，外部仮想仕事と呼ぶ．”仮想”と呼ぶ理由は，力は系 1 の，変位は系 2 に関するものであることから，両者の積が物理的に行われた仕事を指す訳ではないことによる．系 1 と系 2 の間に成り立つ関係

$$a(u_1, u_2) = b(u_2) \tag{28}$$

は，**仮想仕事式**と呼ばれる．

1.4　力学的エネルギー保存則

仮想仕事式 (28) において，$u_1 = u_2$ とする．すなわち，系 1 だけを考え，弱形式 (13) において

$$u = u_1, \quad \xi = u_1$$

とした場合の仮想仕事式を考える．このとき，$a(u_1, u_2)$ と $b(u_2)$ はそれぞれ

$$a(u_1, u_1) = \int_0^l N_1 u_1' dx = \int_0^l \frac{N_1 N_1}{EA} dx \tag{29}$$

$$b(u_1) = \bar{F}_1 u_1(l) + \int_0^l p_1 u_1 dx \tag{30}$$

となる．いずれも

系 1 に作用する力 $\times$ 系 1 に生じる変位 $=$ 実際に行われた仕事

であることが分かる．ことから，

$$a(u_1, u_1) = b(u_1) \tag{31}$$

は，(仮想ではなく) 実際に行われた内部仕事と外部仕事が等しくなることを意味する．また，外力が過度に大きなものでない限り，外力が無くなれば部材は元の状態に戻ると期待される．このことに加え，外力に起因して内力やひずみが発生するという見方をすれば，外力によってなされた仕事として系に加えられたエネルギーは，部材内部に内力やひずみとして蓄えられていると考えることができる．仕事とエネルギーは同じ次元を持つことから，内力仕事を系内に蓄えれれたエネルギーの大きさとみなせば，式 (31) は，系外から加えられたエネルギーと，系内に蓄えられたエネルギーが等しいことを示すと解釈できる．この意味で，式 (31) は**力学的エネルギー保存則**を表していると言うことができる．

1.5　単位荷重法

仮想仕事式 (28) における系 1 として，次のような特別な場合を考える．

$$\bar{F}_1 = 0, \quad p_1(x) = \delta(x - a), \quad (0 < a < l) \tag{32}$$

すなわち，図 3 に示すように，$x = a$ に単位集中荷重だけが作用する場合を考える．ここで，$\delta(x-a)$ はディラクのデルタ関数を表し，実数軸上全体で定義された任意の関数 $f(x)$ に対して，次のような性質を持つ．

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \tag{33}$$

この性質を利用すれば，式 (27) は次のようになる．

$$b(u_2) = \int_0^l \delta(x-a)u_2(x)dx = u_2(a) \tag{34}$$

そこで式 (34) を仮想仕事式 (28) に代入すれば，

$$u_2(a) = \int_0^l \frac{N_1 N_2}{EA} dx \tag{35}$$

が得られる．これは，系 1 と系 2 のそれぞれにおける軸力 N_1 と N_2 から，$x = a$ における系 2 の変位 $u_2(a)$ が求められることを意味する．言い換えれば，系 1 を補助として用いれば，微分方程式を解くこと無く，系 2 の変位が得られることを意味する．そこで, 系 1 を補助系とし，系 2 を解くべき問題とする立場を明確にするために，2 つの系に関する諸量を，あらためて

$$\left(u_1, N_1; \bar{F}_1, p_1\right) = \left(\tilde{u}, \tilde{N}; \bar{\tilde{F}} = 0, \tilde{p} = \delta(x-a)\right) \tag{36}$$

$$\left(u_2, N_2; \bar{F}_2, p_2\right) = \left(u, N; \bar{F}, p\right) \tag{37}$$

と書くことにする．このとき，式 (35) は,

$$u(a) = \int_0^l \frac{N\tilde{N}}{EA} dx \tag{38}$$

と表され，この式 (38) を利用して変位を計算する解法を**単位荷重法**と呼ぶ.

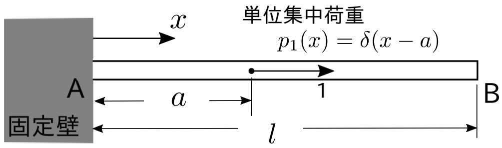

図 3: $x = a$ に部材軸方向への単位集中荷重を受ける棒部材.

1.5.1　例題

図 4-(a) に示す棒部材の点 B と点 C に発生する軸変位を，単位荷重法を用いて求めよ．断面剛性 EA は全断面で一定とする．

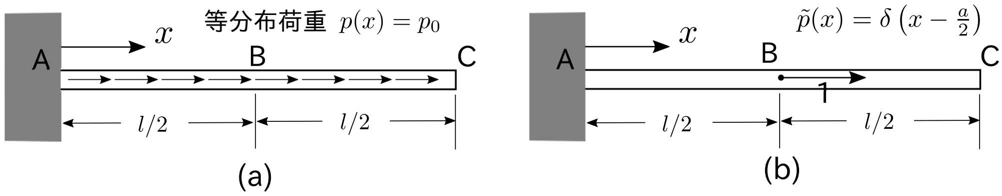

図 4: (a) 等分布荷重を受ける棒部材 (問題). (b) 単位荷重法の適用において用いる補助系.

1.5.2 問題

図 5 に示す 3 種類の系について，以下の問に答えよ．なお，断面剛性 EA は全ての部材，全ての断面で一定とする．

1. 図 5-(a) に示す棒部材の, 点 C における軸変位を求めよ.
2. 図 5-(a) に示す棒部材の, 点 B における軸変位を求めよ.
3. 図 5-(b) に示す棒部材に作用する支点反力を求め, 点 B における軸変位を求めよ.
4. 図 5-(c) に示す棒部材に作用する支点反力を求め, 点 B における軸変位を求めよ.

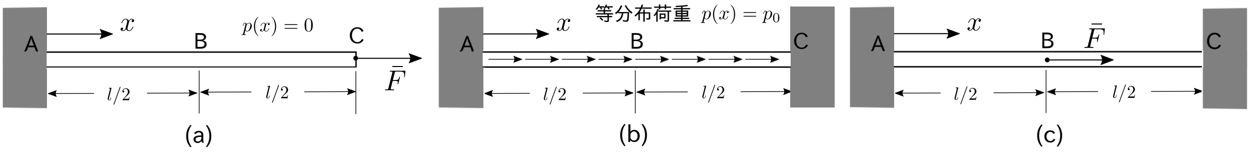

図 5: 支持条件と荷重条件の異なる 3 種類の系.