2020 年度 構造力学II 第1回

1　1次元軸力問題

1.1　強形式 (復習)

1.1.1　支配方程式

1次元軸力問題の支配方程式は

$$\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right)+p=0, \quad (x\in(0,l)) \tag{1}$$

で与えられる．ここに，u は軸変位を，E はヤング率，A は部材の断面積を表す．また，$p(x)$ は部材軸方向に働く分布力で，単位長さあたりの力の次元を持つ量で，x は部材長手方向にとった座標である．式 (1) は, 軸力 N に関する釣り合い条件:

$$\frac{dN}{dx}+p=0, \quad (x\in(0,l)) \tag{2}$$

と，フックの法則:

$$\sigma=E\varepsilon \tag{3}$$

に由来するものである．式 (3) において，σ は部材軸方向の直応力を，ε は直ひずみを表し，ポアソン比による効果は無視されている．ひずみと変位の関係は

$$\varepsilon=\frac{du}{dx} \tag{4}$$

で，軸力と軸応力の関係は

$$\sigma=\frac{N}{A} \tag{5}$$

であることから，式 (2)∼(5) より，冒頭の軸変位に関する支配微分方程式 (1) が導かれる．

1.1.2　境界条件

棒部材が図1のように支持されている場合，$x=0$ と $x=l$ における境界条件 (支持条件) は次のように表すことができる．

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \quad &(6)\\ N(l) &= EAu'(l)=\bar{F} \quad &(7)\end{aligned}$$

なお，部材の支持条件は，図1に示したもの以外にも，例えば，両端が固定された場合等が考えられる．しか

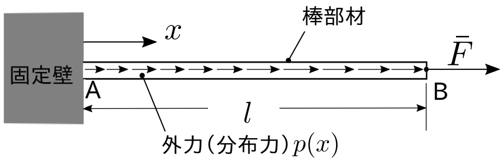

図 1: 軸方向の外力 $p(x)$ と $\bar{F}$ を受ける左端が固定支持された棒部材.

しながら，議論を具体的にするために，以下では図1の支持条件に対して問題の定式化を行う．ただし，同様な定式化は一般の支持条件に対しても行うことができる．

1.1.3 強形式と強解 (新しい用語)

以上に示したような，支配微分方程式 (1) と境界条件 (6),(7) による問題の定式化は強形式 (strong form) と呼ばれる．またその解 $u(x)$ のことを強解 (strog form solution) と呼ぶ.

1.2 弱形式

ここでは，微分方程式を直接用いることなく軸力問題を定式化する方法を示す.

1.2.1 弱形式の導出

$\xi(x)$ を区間:$0 \leq x \leq l$ で定義され，$\xi(0) = 0$ を満たす任意の関数とする．ここで，$\xi(x)$ を式 (2) の両辺に掛け，$x = 0$ から $x = l$ の範囲で次のように積分する.

$$\int_0^l (N' + p)\,\xi dx = 0 \tag{8}$$

$N(x)$ が軸力問題の解であれば，式 (8) は $\xi(x)$ に依らず成立する．ここで，式 (8) の左辺第一項を部分積分を用いて変形すると，

$$\begin{aligned} \int_0^l N'\xi dx &= [N\xi]_0^l - \int_0^l N\xi' dx && (9) \\ &= \bar{F}\xi(l) - \int_0^l N\xi' dx && (10) \end{aligned}$$

となる．なお，式 (9) から式 (10) への変形には，$\xi(0) = 0$ と $N(0) = 0$ であることを用いた．式 (10) を式 (8) に代入すれば，次の関係が得られる.

$$a(u, \xi) = b(\xi) \tag{11}$$

ただし，$a(u, \xi)$ と $b(\xi)$ は以下のように定義する.

$$a(u, \xi) = \int_0^l N\xi' dx = \int_0^l EAu'\xi' dx \tag{12}$$

$$b(\xi) = \bar{F}\xi(l) + \int_0^l p\xi dx \tag{13}$$

式 (11) の関係は，$u(x)$ が強解である限り $\xi(x)$ に依らず成り立つ．逆に，任意の $\xi(x)$ について式 (11) を満足するような $u(x)$ があったとし，これを強解と区別するために $\tilde{u}(x)$ と書く．すなわち，

$$a(\tilde{u}, \xi) = b(\xi), \quad (\forall\xi(x) \text{ s.t. } \xi(0) = 0) \tag{14}$$

であるとする．なお，式 (14) において $\forall$ は"for all (全ての，任意の)"を，s.t. は"such that∼"(∼ であるような) と読む．従って，式 (14) は $\xi(0) = 0$ であるような任意の $\xi(x)$ について $a(\tilde{u}, \xi) = b(\xi)$ が満たされる，ということを表している．式 (14) の関係を満足するよう $\tilde{u}$ を求める問題を弱形式 (weak form) と呼び，その解である $\tilde{u}$ は弱解と呼ばれる.

1.2.2 弱形式と強形式の等価性

これまでの議論から，強形式の解 u(強解) は必ず弱形式の解 (弱解) になることが分かる.

$$\text{強形式の解 (強解)} \;\Rightarrow\; \text{弱形式の解 (弱解)} \tag{15}$$

一方，この逆，つまり弱解が同時に強形式の解となるかは自明で無い. しかしながら，

$$\text{強形式の解 (強解)} \;\Leftarrow\; \text{弱形式の解 (弱解)} \tag{16}$$

となることは以下のようにして示すことができる．式 (14) の左辺を，部分積分を行い次のように変形する．

$$
\begin{aligned}
a(\tilde{u},\xi) &= \int_0^l EA\tilde{u}'\xi' dx \\
&= [EA\tilde{u}'\xi]_0^l - \int_0^l (EA\tilde{u}')'\xi dx \\
&= EA\tilde{u}'\xi|_{x=l} - \int_0^l (EA\tilde{u}')'\xi dx
\end{aligned} \tag{17}
$$

以上では，$\xi(0) = 0$ であることを用いたが，$\tilde{u}$ が強形式の解であるかどうかこの時点では不明であるため、$\tilde{N} = EA\tilde{u}' = \bar{F}$ とすることはできないことに注意が必要である．この結果を式 (14) に代入して整理すると，

$$
\int_0^l \{(EA\tilde{u}')' + p\}\xi dx + \left\{\bar{F} - EA\tilde{u}'(l)\right\}\xi(l) = 0 \tag{18}
$$

となる. ここで,$\xi(x)$ として

$$
\xi(x) = \{(EA\tilde{u}')' + p\}\phi(x) \tag{19}
$$

のような形を持つ特別な場合について考える. 式 (19) の $\phi(x)$ を

$$
\phi(x) = x(l - x) \tag{20}
$$

とすれば,$\xi(0) = 0$ とすることができる. 式 (19) を式 (18) に代入すると，

$$
\int_0^l \{(EA\tilde{u}')' + p\}^2 \phi dx = 0 \tag{21}
$$

式 (21) において，被積分関数は全て正または零で，$\phi(x)$ は $0 < x < l$ で正であるため，この積分が零であるためには

$$
(EA\tilde{u}')' + p = 0 \tag{22}
$$

でなければならない．このことを踏まえれば，式 (18) は

$$
\left\{\bar{F} - EA\tilde{u}'(l)\right\}\xi(l) = 0 \tag{23}
$$

となることから，

$$
\tilde{N} = EA\tilde{u}' = \bar{F} \tag{24}
$$

が言える．従って，式 14 と $\tilde{u}(0) = 0$ となるものは，強形式の解であることがわかり，

$$
u = \tilde{u} \tag{25}
$$

となることが示される．以上より，強形式と弱形式は同じ解を与えることから双方とも同じ軸力問題を表現する等価なものであることが分かる．

1.2.3 弱解

任意の $\xi(x)$(ただし $\xi(0) = 0$) について式 (11) を満足する $u(x)$ のうち，$u(0) = 0$ となる $u(x)$(”弱解” と呼ぶ) は，強形式の解 (”強解” と呼ぶ) に一致することは数学的に証明することができる．従って，強解を直接求める代わりに弱解を求めることでも，軸力問題を解くことができる．式 (11) に基づく問題の表現を弱形式と呼ぶ．弱解と強解が一致するという意味において，弱形式と強形式は等価である．

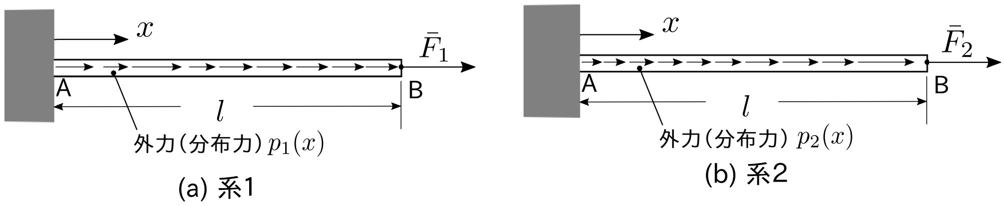

図 2: 外力のみが異なる 2 つの系 1 と 2.

1.3 仮想仕事式

図 2 に示すような 2 つの系を考える．これらの系は，部材に加えられる外力のみが異なり，支持条件と材料定数 E, A は同じであるとする．そこで，系 i, $(i = 1, 2)$ に加えれた分布力を $p_i(x)$ 部材右端 B に作用する集中荷重を $\bar{F}_i$, その結果生じる変位と軸力をそれぞれ $u_i(x), N_i(x)$ と表す．ここで式 (11) において，$u = u_1, \xi = u_2$ とすれば,

$$a(u_1, u_2) = \int_0^l N_1 u_2' dx = \int_0^l \frac{N_1 N_2}{EA} dx \tag{26}$$

$$b(u_2) = \bar{F}_1 u_2(l) + \int_0^l p_1 u_2 dx \tag{27}$$

となる．ここで，式 (26) と式 (27) は，ともに力 × 長さ，すなわち仕事の次元を持つ量となっている．前者は内力である N_1, 後者は外力 $\bar{F}_1$ と $p_1(x)$ に関するものであることから，これらの量をそれぞれ，内部仮想仕事, 外部仮想仕事と呼ぶ．”仮想” と呼ぶ理由は，力は系 1 の，変位は系 2 に関するものであることから，両者の積が物理的に存在する仕事を指す訳ではないことによる．系 1 と系 2 の間に成り立つ関係

$$a(u_1, u_2) = b(u_2) \tag{28}$$

を，仮想仕事式と呼ぶ.

1.4 単位荷重法

仮想仕事式 (28) における系 1 として，次のような特別な場合を考える.

$$\bar{F}_1 = 0, \quad p_1(x) = \delta(x - a), \quad (0 < a < l) \tag{29}$$

すなわち，系 1 として $x = a$ に単位集中荷重だけが作用する場合を考える．このとき，デルタ関数の性質

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0) \tag{30}$$

を用いれば，式 (27) は次のようになる．ただし $f(x)$ は実数軸上全体で定義された任意の関数である．よって

$$b(u_2) = \int_0^l \delta(x - a) u_2(x) dx = u_2(a) \tag{31}$$

とすることができ，これを仮想仕事式 (28) に代入すれば,

$$u_2(a) = \int_0^l \frac{N_1 N_2}{EA} dx \tag{32}$$

の結果を得る．これは，2 つの系 1 と 2 における軸力 N_1, N_2 から，系 2 の $x = a$ における変位 $u_2(a)$ を求めることができることを意味する．言い換えれば，系 1 を変位計算の補助に用いることで，系 2 の変位を微分方程式を直接解くこと無く得ることができることを意味している．そこで, 系 1 を補助系，系 2 を解くべき問題とみる立場がより明確になるように，2 つの系に関する諸量を, あらためて

$$\left(u_1, N_1; \bar{F}_1, p_1\right) = \left(\tilde{u}, \tilde{N};\ \bar{\tilde{F}} = 0, \tilde{p} = \delta(x - a)\right) \tag{33}$$

$$\left(u_2, N_2; \bar{F}_2, p_2\right) = \left(u, N;\ \bar{F}, p\right) \tag{34}$$

と書き直す．このとき式 (32) は，

$$u(a) = \int_0^l \frac{N\tilde{N}}{EA} dx \tag{35}$$

と表される．式 (35) を利用して変位の計算を行う解法を単位荷重法と呼ぶ．

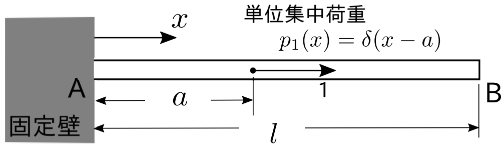

図 3: $x = a$ に部材軸方向への単位集中荷重を受ける棒部材．

1.4.1 例題

図 4-(a) に示す棒部材の点 B と点 C に発生する軸変位を，単位荷重法を用いて求めよ．断面剛性 EA は全断面で一定とする．

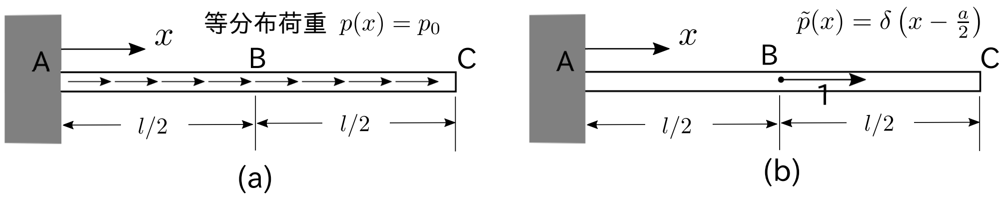

図 4: (a) 等分布荷重を受ける棒部材 (問題)．(b) 単位荷重法の適用において用いる補助系．

1.4.2 問題

図 5 に示す 3 種類の系について，以下の問に答えよ．なお，断面剛性 EA は全ての部材，全ての断面で一定とする．

1. 図 5-(a) に示す棒部材の, 点 C における軸変位を求めよ．
2. 図 5-(a) に示す棒部材の, 点 B における軸変位を求めよ．
3. 図 5-(b) に示す棒部材に作用する支点反力を求め, 点 B における軸変位を求めよ．
4. 図 5-(c) に示す棒部材に作用する支点反力を求め, 点 B における軸変位を求めよ．

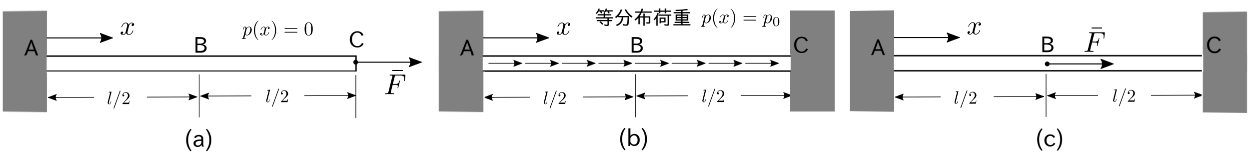

図 5: 支持条件と荷重条件の異なる 3 種類の系．