អារម្ភកថា

ជាទូទៅអ្នកសិក្សាជាពិសេសសិស្សានុសិស្សគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន ភាគច្រើនមានផ្នត់គំនិតគិតថាមុខវិជ្ជា **គណិតវិទ្យា** ជាមុខវិជ្ជាមួយដែលមានភាពស្មុគស្មាញ និងពិបាកក្នុងការចាប់យកចំណេះដឹង។ ជាក់ស្តែងមុខវិជ្ជានេះ ជាមុខវិជ្ជាវិទ្យាសាស្ត្រមួយដែលមានឥទ្ធិពលជាងគេ ដូចនេះវាពិតណាស់ថាពិបាកក្នុងការរៀន តែផ្ទុយទៅវិញបើសិនជាអ្នកសិក្សាបានចំណាយពេលនៅជាមួយគណិតវិទ្យាឱ្យបានគ្រប់គ្រាន់ក្នុងការគិតលើខ្លឹមសារ និងអនុវត្តលើលំហាត់បានគ្រប់គ្រាន់ វានឹងមានភាពងាយស្រួលសម្រាប់អ្នកទៅលើអ្វីដែលអ្នកបានសិក្សា។ ដើម្បីជាជំនួយក្នុងការស្វ័យសិក្សា អ្នកសិក្សាគប្បីមានឯកសារគ្រប់គ្រាន់ ប៉ុន្តែខ្ញុំយល់ឃើញថាឯកសារគណិតវិទ្យាជាភាសាជាតិមានចំនួនតិចតួចដែលជាការពិបាកសម្រាប់អ្នកសិក្សា ជាហេតុដែលធ្វើឱ្យសៀវភៅមួយក្បាលនេះមានវត្តមានឡើង។

សៀវភៅ **សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល** នេះគឺត្រូវបានរៀបចំឡើងដោយផ្សាភ្ជាប់ជាមួយមេរៀនសង្ខេបក្នុងនោះរួមមាន និយមន័យ ជាទូទៅ រូបមន្ត និងវិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការជាដើម។ លើសពីនេះទៅទៀត សៀវភៅនេះមានតំណភ្ជាប់ជាមួយនឹងឧទាហរណ៍ លំហាត់គ្រប់បែបផែន និងលំហាត់សម្រាប់វាស់ស្ទង់សមត្ថភាពអ្នកសិក្សាផងដែរ ដែលសមស្របទៅនឹងកម្រិតវិទ្យាល័យ ជាហេតុនាំឱ្យសិស្សានុសិស្សងាយទទួលបានចំណេះដឹងពីសៀវភៅមួយក្បាលនេះ។

ក្នុងនាមជាអ្នករៀបរៀង និងនិពន្ធ ខ្ញុំបាទនឹងរងចាំនូវការរិះគន់គ្រប់មជ្ឈដ្ឋានអ្នកសិក្សាជានិច្ចដើម្បីកែលម្អឱ្យកាន់តែល្អប្រសើរបន្ថែមទៀត។ ខ្ញុំជឿជាក់ថាសៀវភៅនេះនៅតែមានកំហុសកើតមានឡើងត្រង់ចំណុចណាមួយ ហេតុនេះហើយខ្ញុំសូមអភ័យទោសទុកជាមុនរាល់កំហុស ទាំងអស់ដែលកើតឡើង។ ប្រសិនបើមិត្តអ្នកអាន រកឃើញនូវកំហុសក្នុងសៀវភៅនេះ សូមទំនាក់ទំនងមកកាន់ខ្ញុំបាទតាមរយៈ

Faceook Account: Phan Kimsia

Gmail: phankimsie03@gmail.com

ភ្នំពេញ, ថ្ងៃទី ០១ ខែ សីហា ឆ្នាំ ២០២១

ផាន់ គឹមសៀ

សំណូមពររបស់អ្នករៀបរៀងទៅកាន់មជ្ឍដ្ឋានអ្នកសិក្សា

ការស្រាវជ្រាវឯកសារបន្ថែម ពិតជាមានសារៈសំខាន់ណាស់សម្រាប់ការអភិវឌ្ឍសមត្ថភាពខ្លួនក្នុង ផ្នែកណាៗទាំងអស់។ ហេតុនេះហើយខ្ញុំបាទសូមលើកទឹកចិត្តដល់ប្អូនសិស្សានុសិស្ស និស្សិត និងលោកគ្រូអ្នកគ្រូទាំងអស់ខិតខំប្រឹងប្រែងស្រាវជ្រាវបន្ថែម ព្រមទាំងបង្កើតឯកសារល្អៗសម្រាប់ប្រទេសជាតិយើង។ ដូចទស្សនៈមួយបានសម្តែងថា ទូកទៅកំពង់នៅ ដែលមានន័យថា មនុស្សស្លាប់តែស្នាដៃដែលមនុស្សខំសាងគឺមានជីវិតជារៀងរហូត។

ការប្រឹងប្រែងចងក្រងឯកសារជាភាសាជាតិ ជាបុព្វហេតុមួយយ៉ាងសំខាន់ដែលធ្វើឱ្យមនុស្សជំនាន់ក្រោយមានភាពសម្បូរបែបក្នុងការសិក្សា ហើយពួកគេនឹងអាចស្រាវជ្រាវចំណេះដឹងទៅមុខទៀតបានឆ្ងាយ។ សំណៅឯកសារដែលពួកគេបានបន្សល់ទុកទៀតសោតនឹង បន្តជះឥទ្ធិពលបែបនេះជាបន្តបន្ទាប់រហូតទៅដល់ចំណុចអភិវឌ្ឍអស្ចារ្យមួយ។

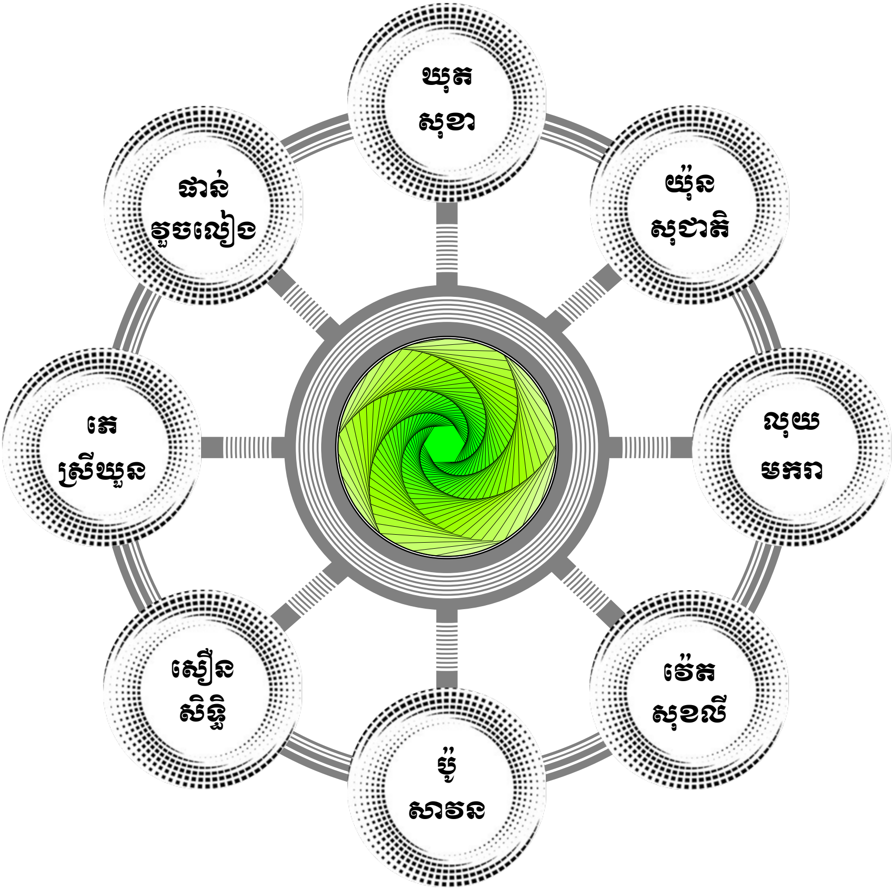
ទទួលសិទ្ធិលក់ផ្តាច់មុខដោយ Math Team Kh

Facebook Page: Math Team Kh

សៀវភៅនេះមាននៅ Math Team Kh **តែមួយគត់ ។**

រាល់ការលួចចម្លង នឹងត្រូវទទួលខុសត្រូវចំពោះមុខច្បាប់ ។

គណៈកម្មការ ត្រួតពិនិត្យ



Designed Cover by: **អ៊ុន ឆាលី**

រៀបរៀងដោយ៖ ឆាន់ គឹមសៀ

មាតិកា

Mathematics
may not teach us how to
add love or subtract hate,
but it gives us hope
that every problem
has a solution.
Annoymous

១

Education is the most
powerful weapon
which you can use to
change the world.
Nelson Mandela

P H A N K I M S I E

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

១.១ សេចក្តីផ្តើមនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺជាតួនាទីមួយយ៉ាងសំខាន់ក្នុងមែកជាងវិភាគគណិតវិទ្យា។ កំណើតនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលកើតឡើងពីទំនាក់ទំនងរវាងការគណនាដេរីវេ និងអាំងតេក្រាលក្នុងសតវត្សទី 17។ អ្នកប្រាជ្ញពីររូបជាអ្នកផ្តើមគំនិតនៃការបង្កើតសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនេះឡើងក្នុងនោះមានអ្នកប្រាជ្ញរូបវិទូជនជាតិអង់គ្លេសឈ្មោះ Sir Isaac Newton (1642-1727) និងអ្នកប្រាជ្ញគណិតវិទូជនជាតិអាឡឺម៉ង់ឈ្មោះ Gottfried Wihelm von Leibniz (1646-1716) ។

Isaac Newton ជាអ្នកដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមុនគេបង្អស់ដោយផ្សាភ្ជាប់នូវជំនួយនៃស៊េរីអនន្តតួ។ គាត់បានបែងចែកលំដាប់នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដំបូងជាបីផ្នែកគឺៈ

១ $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ២ $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ ៣ $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$

សមីការបីប្រភេទខាងលើនេះគឺពីរប្រភេទដំបូងជាលំដាប់ដេរីវេនៃអថេរអាស្រ័យមួយឬច្រើន និងទីបីហៅថាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដោយផ្នែក។ ចំពោះលោក Leibniz បានដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ដំបូងនៅក្នុងឆ្នាំដែល Newton បានចេញផ្សាយនូវលទ្ធផលរបស់គាត់ជាលើកដំបូង។ ក្រោយៗមកទៀត អ្នកប្រាជ្ញទាំងពីរ និងអ្នកប្រាជ្ញជាច្រើនរូបទៀត បានអភិវឌ្ឍបន្តទៀតឱ្យមានភាពទូលំទូលាយមកដល់ពេលបច្ចុប្បន្ន។

គេប្រើសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដើម្បីពណ៌នាអំពីការវិវឌ្ឍរូបធាតុនៃវត្ថុទាំងឡាយទៅតាមពេលវេលា ដើម្បីពន្យល់និងទស្សន៍ទាញទុកមុននូវដំណើរការប្រែប្រួលជាបន្តបន្ទាប់នៃរាល់វត្ថុទាំងនោះ។

១.២ និយមន័យ

និយមន័យ ១.២.១

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺជាសមីការដែលមានអនុគមន៍ $y = f(x)$ និងដេរីវេមួយឬច្រើននៃអនុគមន៍នោះគឺ $y^{'}, y^{''}, y^{'''}, \ldots, y^{(n)}$ ឬ $f^{'}(x), f^{''}(x), f^{'''}(x), \ldots, f^{n}(x)$។

ចំណាំ ១.២.១

លំដាប់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺជាលំដាប់នៃដេរីវេរបស់អនុគមន៍ដែលខ្ពស់ជាងគេបំផុតនៅក្នុងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនោះ។

ឧទាហរណ៍ ១

សមីការមួយចំនួនដូចជា $y^{'} + 2y = 4$, $y^{''} + 3y + 1 = 0$, $2y^{''} + 5y^{'} + y = 2$, $xy^{'} - 3y = x$, $\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^{2x} + 1$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = \sin x$ សុទ្ធតែជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល។

ចំណាំ ១.២.២

$\dfrac{dy}{dx} = y^{'}$ ជាដេរីវេទី 1 នៃអនុគមន៍ និង $\dfrac{d^2y}{dx^2} = y^{''}$ ជាដេរីវេទី 2 នៃអនុគមន៍ ឬ $\dfrac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}$ ជាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍។

! ក្នុងកម្រិតវិទ្យាល័យ យើងសិក្សាត្រឹមសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ 1 និង 2 តែប៉ុណ្ណោះ ។

ឧទាហរណ៍ ២

១ $y' + 2y = 1$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ 1

២ $y'' - 3y' + 2y = x + 1$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ 2

៣ $\frac{d^4y}{dx^4} + 5\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{dy}{dx} + y = \cos x$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ 4 ។

១.៣ អនុគមន៍ចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ជាទូទៅ ១.៣.១

អនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមួយ កាលណាអនុគមន៍ $y = f(x)$ និងដេរីវេរបស់វាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ។

ចំណាំ ១.៣.៣

អនុគមន៍ចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានច្រើនរាប់មិនអស់។ គ្រប់ខ្សែកោងដែលតាងចម្លើយនីមួយៗនៃសមីការ បង្កើតបានជា **គ្រួសារនៃខ្សែកោង** ។

ឧទាហរណ៍ ៣

បង្ហាញថាអនុគមន៍ចម្លើយ $y = \cos x$ ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' + y = 0$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

បង្ហាញថាអនុគមន៍ចម្លើយ $y = \cos x$ ជាចម្លើយនៃ $y'' + y = 0$

បើ $y = \cos x$ ជាអនុគមន៍ចម្លើយនៃសមីការ $y'' + y = 0$

នោះ y និងដេរីវេនៃអនុគមន៍ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

គេមាន $y = \cos x$

$\Longrightarrow y' = -\sin x$

$\Longrightarrow y'' = -\cos x$

យក y'' និង y ជំនួសក្នុងសមីការ $y'' + y = 0$

គេបាន $-\cos x + \cos x = 0$

$\Longleftrightarrow 0 = 0$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\text{អនុគមន៍ចម្លើយ } y = \cos x \text{ ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល } y'' + y = 0\text{។}}$ ■

Mathematics is not just a language.

Mathematics is a language plus reasoning.

It's like a language plus logic.

Mathematics is a tool for reasoning. It's, in fact, a big collection

of the results of some person's careful thought and reasoning.

By mathematics, it is possible to connect one statement to another.

—RICHARD FEYNMAN

Mathematics may not teach us how to add love or subtract hate, but it gives us hope that every problem has a solution.
Annoymous

Education is the most powerful weapon which you can use to change the world.
Nelson Mandela

២

P H A N K I M S I E

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី 1

២.១ សញ្ញាណនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី 1

សញ្ញាណ

សរសេរទំនាក់ទំនងរវាងអនុគមន៍ y និងដេរីវេទីមួយរបស់វា ដែលគេដឹងថា $y = ax+1$។

គេមាន $y = ax+1$

$$\Longrightarrow y' = a$$

នោះ: $y = ax+1$

$$-ax+y-1 = 0$$

$$-xy'+y-1 = 0, \quad \{\text{ប្តូរពី } a = y'\}$$

ឬ $y' - \frac{1}{x}y + \frac{1}{x} = 0, \quad \{\text{ចែកអង្គទាំងពីរនឹង } -x\}$

សមីការ $y' - \frac{1}{x}y + \frac{1}{x} = 0$ ហៅថាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី 1 ដែលមានអនុគមន៍ $y = ax+1$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនេះ។

និយមន័យ ២.១.២

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី 1 ជាទំនាក់ទំនងរវាងអនុគមន៍ ដេរីវេទី 1 របស់អនុគមន៍ដើម អថេរ និងចំនួនថេរ។

ឧទាហរណ៍ ៤

សមីការ $y' + y = 0$, $y' = e^x$, $y' + 4y + 1 = \sin x$ ឬ $2y' + xy = 3$ សុទ្ធតែជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ 1 ។

! ការកំណត់នូវសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ 1 បាន គឺសង្កេតទៅលើដេរីវេទី 1 របស់អនុគមន៍ y គឺ y' ដែលមានក្នុងសមីការ។

២.២ ដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ 1

២.២.១ សមីការមានទម្រង់ $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ឬ $y' = f(x)$

វិធាន ១

របៀបដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានទម្រង់ $\frac{dy}{dx} = f(x)$:

- គេមាន $\frac{dy}{dx} = f(x) \Longleftrightarrow dy = f(x)dx$
- បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ : $\int dy = \int f(x)dx$
- រកអាំងតេក្រាលអង្គទាំងពីរ ឬ $y = \int f(x)dx + c, \quad c$ ជាចំនួនថេរ
- $y = \int f(x)dx + c$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ។

ចំណាំ ២.២.៤

រកចម្លើយពិសេសតាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(x_0) = y_0$ គឺយក x_0 និង y_0 ទៅជំនួសក្នុងចម្លើយទូទៅ រួចទាញយក $c = y_0 - F(x_0)$ ដែល $\int f(x)dx = F(x)$
នោះ $y = \int f(x)dx + y_0 - F(x_0)$ ជាចម្លើយពិសេសតាមលក្ខខណ្ឌ $y(x_0) = y_0$ ។

ឧទាហរណ៍ ៥

ចូរដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y' = 2x^2$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y^{'} = 2x^2$

គេមាន $y^{'} = 2x^2$

ឬ $\frac{dy}{dx} = 2x^2, \quad \left\{\frac{dy}{dx} = y^{'}\right\}$

$dy = 2x^2 dx$

$\int dy = \int 2x^2 dx, \quad$ {បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ}

$y = 2 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + c$

$y = \frac{2}{3}x^3 + c$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{ចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានរាង } y = \frac{2}{3}x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R} \text{ ។}}$ ■

! ប្រសិនបើគេមានលក្ខខណ្ឌ $f(x_0) = x_0$ នោះយើងត្រូវរក c ដើម្បីឱ្យក្លាយជាចម្លើយពិសេសតាមលក្ខខណ្ឌ។

ចំណាំ ២.២.៧

មុនពេលគណនាអាំងតេក្រាល ឬបំពាក់សញ្ញាអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ អ្នកសិក្សាចាំបាច់ត្រូវធ្វើយ៉ាងណាឱ្យអថេរ y នៅជាមួយ dy និង អថេរ x នៅជាមួយ dx។

២.២.២ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី 1 ដែលអាចញែកអថេរបាន

និយមន័យ ២.២.៣

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី 1 ដែលអាចញែកអថេរបាន ជាសមីការដែលក្រោយពីសម្រួលរួចមានទម្រង់ទូទៅ ៖ $g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$ ឬ $g(y)dy = f(x)dx$ ។

វិធាន ២

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី 1 ដែលអាចញែកអថេរបាន គេត្រូវ៖

- គេមានសមីការ $g(y)\dfrac{dy}{dx}=f(x) \Longleftrightarrow g(y)dy=f(x)dx$
- បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ៖ $\displaystyle\int g(y)dy=\int f(x)dx$
- គេបាន $G(y)=F(x)+c, c\in\mathbb{R}$ ដែល $G(y)$ និង $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $g(y)$ និង $f(x)$ រៀងគ្នា។

ឧទាហរណ៍ ៦

ចូរដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(2-x)\dfrac{dy}{dx}-3y=0$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(2-x)\dfrac{dy}{dx}-3y=0$

គេមាន $(2-x)\dfrac{dy}{dx}-3y=0$

$$(2-x)dy=3ydx$$

$$\frac{1}{3y}dy=\frac{1}{2-x}dx$$

$$\int\frac{1}{3y}dy=\int\frac{1}{2-x}dx$$

$$\frac{1}{3}\int\frac{1}{y}dy=-\int\frac{1}{x-2}dx$$

$$\frac{1}{3}\ln|y|=-\ln|x-2|+c$$

$$\ln|y|=-3\ln|x-2|+c$$

$$|y|=e^{-3\ln|x-2|+c}$$

$$y=\pm e^{c}\cdot e^{-3\ln|x-2|},\quad [\text{តាង } A=\pm e^{c}, c\in\mathbb{R}]$$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{ចម្លើយនៃសមីការមានរាង } y=Ae^{-3\ln|x-2|},\quad A\in\mathbb{R}\text{។}}$ ∎

! គ្រប់សមីការទាំងអស់មិនប្រាកដថាជាសមីការដែលអាចញែកអថេរបានទេ។

ឧទាហរណ៍ ៧

១ $y^{'} = -2 + y$ ជាសមីការដែលអាចញែកអថេរបាន។

២ $y^{'} - y = 4$ ជាសមីការដែលអាចញែកអថេរបាន។

៣ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-1}{xy} - x$ ជាសមីការដែលមិនអាចញែកអថេរបាន។

២.២.៣ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី 1 មេគុណថេរអូម៉ូសែន

និយមន័យ ២.២.៤

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី 1 មេគុណថេរអូម៉ូសែន (អង្គទី 2 ស្មើសូន្យ) ជាសមីការដែលមានរាងទូទៅ $y' + ay = 0$ ដែល a ជាមេគុណថេរនៃសមីការ។ ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y = Ae^{-ax}$ ដែល A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន។

វិធាន ៣

របៀបដោះស្រាយសមីការ $y' + ay = 0, \quad a \in \mathbb{R}$

គេអាចសរសេរ :
$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -ay\\
\frac{dy}{y} &= -adx\\
\int \frac{dy}{y} &= -a\int dx\\
\ln|y| &= -ax + c\\
|y| &= e^{-ax+c}\\
y &= \pm e^{c}\cdot e^{-ax}, \quad [\text{តាង } A = \pm e^{c}, c \in \mathbb{R}]\\
\Longrightarrow y &= Ae^{-ax}, \quad A \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{អនុគមន៍ } y = Ae^{-ax} \text{ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ } y^{'} + ay = 0 \text{ ។}}$

! ពាក្យថា អូម៉ូសែន សំដៅទៅលើសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានអង្គទីពីរស្មើសូន្យជានិច្ច។

ចំណាំ ២.២.៩

រាល់លំហាត់ដែលអ្នកសិក្សានឹងជួបប្រទះនូវសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានមេគុណរបស់ y' ខុសពី 1។ ក្នុងករណីនេះ អ្នកសិក្សាត្រូវធ្វើយ៉ាងណាឱ្យសមីការនោះក្លាយទៅជាសមីការដែល y' មានមេគុណស្មើមួយសិនទើបអាចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការនោះបានតាមនិយមន័យខាងលើ។

ឧទាហរណ៍ ៨

ចូរដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $2y' - 5y = 0$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $2y' - 5y = 0$

គេមាន $2y' - 5y = 0$

$$2 \times \frac{dy}{dx} = 5y$$

$$\frac{1}{y}dy = \frac{5}{2}dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{5}{2}dx$$

$$\ln|y| = \frac{5}{2}x + c$$

$$|y| = e^{\frac{5}{2}x+c}$$

$$y = \pm e^{c} \cdot e^{\frac{5}{2}x}, \quad [\text{តាង } A = \pm e^{c}]$$

ដូចនេះ: ចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានរាង $y = Ae^{\frac{5}{2}x}, \quad A \in \mathbb{R}$ ។ ■

ចំណាំ ២.២.១១

អ្នកសិក្សាអាចប្រើនិយមន័យ ២.២.៤ ដើម្បីទាញរកអនុគមន៍ចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលបានផងដែរ ដោយមិនចាំបាច់គណនាដូចខាងលើ។

២.២.៤ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី 1 មេគុណថេរមិនអូម៉ូសែន

និយមន័យ ២.២.៤

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី 1 មេគុណថេរ (អង្គទី 2 ខុសពីសូន្យ) ជាសមីការដែលមានរាងទូទៅ $y^{'}+ay=p(x)$ ដែល a ជាចំនួនថេរ និង $p(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់អថេរ x ។

វិធាន ៤

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី 1 មេគុណថេរមិនអូម៉ូសែន $y^{'}+ay=p(x)$ ដែល $p(x)\neq 0$ គេត្រូវអនុវត្តតាមជំហានដូចខាងក្រោម៖

- រកអនុគមន៍ចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែន $y^{'}+ay=0$ តាងដោយ y_c ដែលត្រូវអនុវត្តនៅចំណុច **២.២.៣** ។
- រកអនុគមន៍ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y^{'}+ay=p(x)$ តាងដោយ y_p
- រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y^{'}+ay=p(x)$ តាងដោយ y ដែល $y=y_c+y_p$។

!

ពាក្យថា **មិនអូម៉ូសែន** សំដៅទៅលើសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានអង្គទីពីរខុសពីសូន្យ អាចជាចំនួនពិត ឬអនុគមន៍ណាមួយ។ ការតាងអនុគមន៍ចម្លើយពិសេស y_p នៃសមីការ $y^{'}+ay=p(x)$ អាស្រ័យនឹងរាងនៃគ្រប់អនុគមន៍ $p(x)$ ដែលនៅអង្គទីពីរ។

ឧទាហរណ៍ ៩

ចូរដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមិនអូម៉ូសែន $-2y^{'}+3y=3x^2+5x-3$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $-2y' + 3y = 3x^2 + 5x - 3$

❍ រកអនុគមន៍ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $-2y' + 3y = 0$

គេមាន $\quad -2y' + 3y = 0 \Longleftrightarrow y' - \dfrac{3}{2} = 0, \quad$ {ចែកអង្គទាំងពីរនឹង -2}

ជាទូទៅកាលណាគេមានសមីការ $y' + ay = 0$ មានចម្លើយទូទៅគឺ $y_c = Ae^{-ax}, A \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ $y_c = Ae^{-(-\frac{3}{2})x} = Ae^{\frac{3}{2}x}, \quad A \in \mathbb{R}$ ។

❍ រកអនុគមន៍ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $-2y' + 3y = 3x^2 + 5x - 3$

តាង $y_p = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការដើម នោះ y_p ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

នាំឱ្យ $y_p' = 2ax + b$ រួចយកលទ្ធផល y_p' និង y_p ជំនួសក្នុងសមីការដើម

គេបាន $\quad -2(2ax + b) + 3(ax^2 + bx + c) = 3x^2 + 5x - 3$

$$-4ax - 2b + 3ax^2 + 3bx + 3c = 3x^2 + 5x - 3$$

$$3ax^2 + (-4a + 3b)x - 2b + 3c = 3x^2 + 5x - 3$$

នាំឱ្យ

$$\begin{cases} 3a = 3 \\ -4a + 3b = 5 \\ -2b + 3c = -3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

គេបាន $y_p = x^2 + 3x + 1$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការដើម។

❍ រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $-2y' + 3y = 3x^2 + 5x - 3$

គេបាន $\quad y = y_c + y_p$

ដោយ $\quad y_c = Ae^{\frac{3}{2}x}, \quad$ {ចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែន}

$\quad y_p = x^2 + 3x + 1, \quad$ {ចម្លើយពិសេសនៃសមីការដើម}

នាំឱ្យ $\quad y = Ae^{\frac{3}{2}x} + x^2 + 3x + 1$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចម្លើយទូទៅនៃសមីការដើមគឺ } y = Ae^{\frac{3}{2}x} + x^2 + 3x + 1, \quad A \in \mathbb{R} \text{ ។}}$ ■

! តាមលំហាត់ខាងលើ សង្កេតឃើញថា $p(x)=3x^2+4x-1$ ជាអនុគមន៍ពហុធាដឺក្រេទី 2 មានមួយអញ្ញាត ដូចនេះអ្នកសិក្សាត្រូវតាងអនុគមន៍ចម្លើយពិសេស y_p ឱ្យទៅជាអនុគមន៍ពហុធាដឺក្រេទី 2 មានមួយអញ្ញាតដូចនឹង $p(x)$ តែអនុគមន៍ y_p ត្រូវតាងជាភាពទូទៅនៃអនុគមន៍នោះ ដែលកំណត់សរសេរ $y_p=ax^2+bx+c$ ។

ដំណោះស្រាយសមីការ $y'+ay=p(x)$ តាមវិធីបម្រែបម្រួលចំនួនថេរ

វិធាន ៤

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការ $(E): y'+ay=p(x)$ ដែល $p(x)\neq 0$ នោះគេត្រូវ៖

- រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'+ay=0$ គឺ $y=Ae^{-ax},\quad a,A\in\mathbb{R}$
- ក្នុងចម្លើយ $y=Ae^{-ax}$ ជំនួសចំនួនថេរ A ដោយអនុគមន៍ $A(x)$
- ពី $y=A(x)e^{-ax}$ ទាញរក y' រួចយក y និង y' ជំនួសក្នុង $y'+ay=p(x)$ ។

ក្រោយពេលប្តូរចំនួនថេរ A ទៅជាអនុគមន៍ $A(x)$ នោះអ្នកសិក្សាត្រូវរក $A(x)$ ដើម្បីជំនួសក្នុងអនុគមន៍ចម្លើយវិញ។ ដូចនេះដើម្បីកំណត់ $A(x)$ អ្នកសិក្សាគប្បីអនុវត្តដូចតទៅ៖

គេមាន $y=A(x)e^{-ax}\Longrightarrow y'=-aA(x)e^{-ax}+A'(x)e^{-ax}$

យក y' និង y ជំនួសក្នុងសមីការ $(E): y'+ay=p(x)$

គេបាន $\quad p(x)=A'(x)e^{-ax}-aA(x)e^{-ax}+aA(x)e^{-ax}$

$$A'(x)e^{-ax}=p(x)$$

$$\frac{d(A(x))}{dx}=e^{ax}p(x)$$

$$\int d(A(x))=\int e^{ax}p(x)dx$$

$$A(x)=\int e^{ax}p(x)dx+c$$

ដូចនេះ: $\boxed{y=e^{-ax}\left[\int e^{ax}p(x)dx+c\right]=ce^{-ax}+e^{-ax}\int e^{ax}p(x)dx}$

ដែល $y_c=ce^{-ax}$ និង $y_p=e^{-ax}\int e^{ax}p(x)dx$ ។

ឧទាហរណ៍ ១០

ចូរដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $2y^{'}+3y=e^{-x}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $2y^{'}+3y=e^{-x}$

❍ រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $2y^{'}+3y=0$

គេមាន $2y^{'}+3y=0$

$$y^{'}+\frac{3}{2}y=0,\quad \{\text{ចែកអង្គទាំងពីរនឹង } 2\}$$

តាមជាទូទៅកាលណាគេមានសមីការ $y^{'}+ay=0$ មានចម្លើយទូទៅ $y_c=Ae^{-ax}$

ទាញបានសមីការ $y^{'}+\frac{3}{2}y=0$ មានចម្លើយទូទៅ $y_c=Ae^{-\frac{3}{2}x},\quad A\in\mathbb{R}$

តាង $y=A(x)e^{-\frac{3}{2}x}$ ជាចម្លើយទូទៅ, $\left[\text{ប្តូរចំនួនពិត } A \text{ ទៅជាអនុគមន៍ } A(x)\right]$

នាំឱ្យ $y^{'}=A'(x)e^{-\frac{3}{2}x}-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}A(x)$

យក $y^{'}$ និង y ជំនួសក្នុងសមីការ $2y^{'}+3y=0$ គេបាន

$$2\left(A'(x)e^{-\frac{3}{2}x}-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}A(x)\right)+3A(x)e^{-\frac{3}{2}x}=e^{-x}$$

$$\begin{aligned}
2A'(x)e^{-\frac{3}{2}x}&=e^{-x}\\
A'(x)&=\frac{1}{2}e^{-x}\cdot e^{\frac{3}{2}x}\\
\Longrightarrow A(x)&=\frac{1}{2}\int e^{\frac{1}{2}x}dx\\
&=e^{\frac{1}{2}x}+c,\quad \left[\text{ជំនួសក្នុង } y\right]
\end{aligned}$$

$$\text{គេបាន}\quad y=\left(e^{\frac{1}{2}x}+c\right)e^{-\frac{3}{2}x}=e^{-x}+ce^{-\frac{3}{2}x}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ } 2y^{'}+3y=5 \text{ គឺ } y=e^{-x}+ce^{-\frac{3}{2}x},\quad c\in\mathbb{R} \text{ ។}}$ ■