

អារម្ភកថា

ជាទូទៅអ្នកសិក្សាជាពិសេសសិស្សានុសិស្សគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន ភាគច្រើនមានផ្នត់គំនិតគិតថាមុខវិជ្ជា **គណិតវិទ្យា** ជាមុខវិជ្ជាមួយដែលមានភាពស្មុគស្មាញ និងពិបាកក្នុងការចាប់យកចំណេះដឹង។ ជាក់ស្តែងមុខវិជ្ជានេះ ជាមុខវិជ្ជាវិទ្យាសាស្ត្រមួយដែលមានឥទ្ធិពលជាងគេ ដូចនេះវាពិតណាស់ថា ពិបាកក្នុងការរៀន តែផ្ទុយទៅវិញបើសិនជាអ្នកសិក្សាបានចំណាយពេលនៅជាមួយគណិតវិទ្យាក្នុង ការគិតលើខ្លឹមសារ និងអនុវត្តលើលំហាត់ឱ្យបានគ្រប់គ្រាន់ វានឹងមានភាពងាយស្រួលសម្រាប់អ្នក ទៅលើអ្វីដែលអ្នកបានសិក្សា។ ដើម្បីជាជំនួយក្នុងការស្វ័យសិក្សា អ្នកសិក្សាគប្បីមានឯកសារគ្រប់គ្រាន់ ប៉ុន្តែខ្ញុំយល់ឃើញថាឯកសារគណិតវិទ្យាជាភាសាជាតិមានចំនួនតិចតួចដែលជាពិបាកសម្រាប់ ការសិក្សា ជាហេតុដែលធ្វើឱ្យសៀវភៅមួយក្បាលនេះត្រូវបានបង្កើតឡើង។

សៀវភៅ **ភោគិម** នេះគឺត្រូវបានរៀបចំឡើងដោយផ្សារភ្ជាប់ជាមួយមេរៀនយ៉ាងក្បោះក្បាយក្នុង នោះរួមមាន មេរៀនក្នុងកម្រិតវិទ្យាល័យជាមួយសាកលវិទ្យាល័យ និយមន័យ រូបមន្ត ការសម្រាយ រូបមន្ត ខ្លឹមសារមេរៀនថ្មីៗ ការសិក្សាលើទីតាំងធៀប , បន្ទាត់ប៉ះ , បន្ទាត់ណរម៉ាល់ , លក្ខណៈអុបទិច ជាដើម។ ម្យ៉ាងវិញ ក្នុងសៀវភៅនេះ សម្បូរទៅដោយលំហាត់ជាច្រើន រួមមានទាំងកម្រិតវិទ្យាល័យ លំហាត់ប្រកួតប្រជែងនានា លំហាត់ដែលទាក់ទងនឹងជីវភាពរស់នៅជាដើម។ លើសពីនេះ ផ្នែកខាងក្រោយ នៃសៀវភៅនេះ មាននូវការបង្ហាញពីដំណើរការនៃការសង់ រង្វង់ ប៉ារ៉ាបូល អេលីប និងអ៊ីពែបូល និង មានភាសាអង់គ្លេសក្នុងន័យគណិតវិទ្យាសម្រាប់ស្រាវជ្រាវ និងស្វែងរកឯកសារបន្ថែម។

ក្នុងនាមជាអ្នករៀបរៀង និងនិពន្ធ ខ្ញុំបាទនឹងងេតាំនូវការរិះគន់គ្រប់មជ្ឈដ្ឋានអ្នកសិក្សាជានិច្ច ដើម្បីកែលម្អឱ្យកាន់តែល្អប្រសើរបន្ថែមទៀត។ ខ្ញុំជឿជាក់ថាសៀវភៅនេះនៅតែមានកំហុសកើតមានឡើង ត្រង់ចំណុចណាមួយ ហេតុនេះខ្ញុំសូមអភ័យទោសទុកជាមុនរាល់កំហុស ទាំងអស់ដែលកើតមានឡើង។ ប្រសិនបើមិត្តអ្នកអាន រកឃើញនូវកំហុសក្នុងសៀវភៅនេះ សូមទំនាក់ទំនងមកកាន់ខ្ញុំបាទតាមរយៈ

Facebook Account: Phan Kimsia

Gmail: phankimsie03@gmail.com

ភ្នំពេញ, ថ្ងៃទី ១៥ ខែ កក្កដា ឆ្នាំ ២០២១



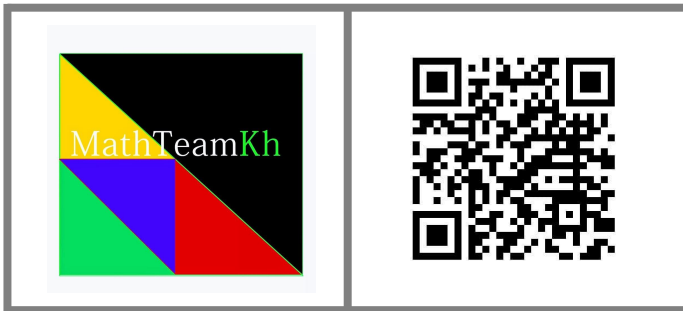
ផាន់ គីមសៀ

សំណូមពររបស់អ្នករៀបរៀងនៅកាន់បង្គោលអ្នកសិក្សា

ការស្រាវជ្រាវឯកសារបន្ថែម ពិតជាមានសារៈសំខាន់ណាស់សម្រាប់ការអភិវឌ្ឍសមត្ថភាពខ្លួន ក្នុង ផ្នែកណាៗទាំងអស់។ ហេតុនេះហើយខ្ញុំទស្សនៈលើកទឹកចិត្តដល់ប្អូនសិស្សានុសិស្ស និស្សិត និងលោកគ្រូអ្នកគ្រូទាំងអស់ខិតខំប្រឹងប្រែងស្រាវជ្រាវបន្ថែម ព្រមទាំងបង្កើតឯកសារល្អៗសម្រាប់ប្រទេសជាតិ យើង។ ដូចទស្សនៈមួយបានសម្តែងថា ទូកទៅកំពង់នៅ ដែលមានន័យថា មនុស្សស្លាប់តែស្នាដៃ ដែលមនុស្សខំសាងគឺមានជីវិតជារៀងរហូត។

ការប្រឹងប្រែងចងក្រងឯកសារជាភាសាជាតិ ជាបុព្វហេតុមួយយ៉ាងសំខាន់ដែលធ្វើឱ្យមនុស្សជំនាន់ ក្រោយមានភាពសម្បូរបែបក្នុងការសិក្សា ហើយពួកគេនឹងអាចស្រាវជ្រាវចំណេះដឹងទៅមុខទៀតបាន ឆ្ងាយ។ សំណៅឯកសារដែលពួកគេបានបន្សល់ទុកទៀតសោតនឹង បន្តជះឥទ្ធិពលបែបនេះជាបន្តបន្ទាប់ រហូតទៅដល់ចំណុចអភិវឌ្ឍអស្ចារ្យមួយ។

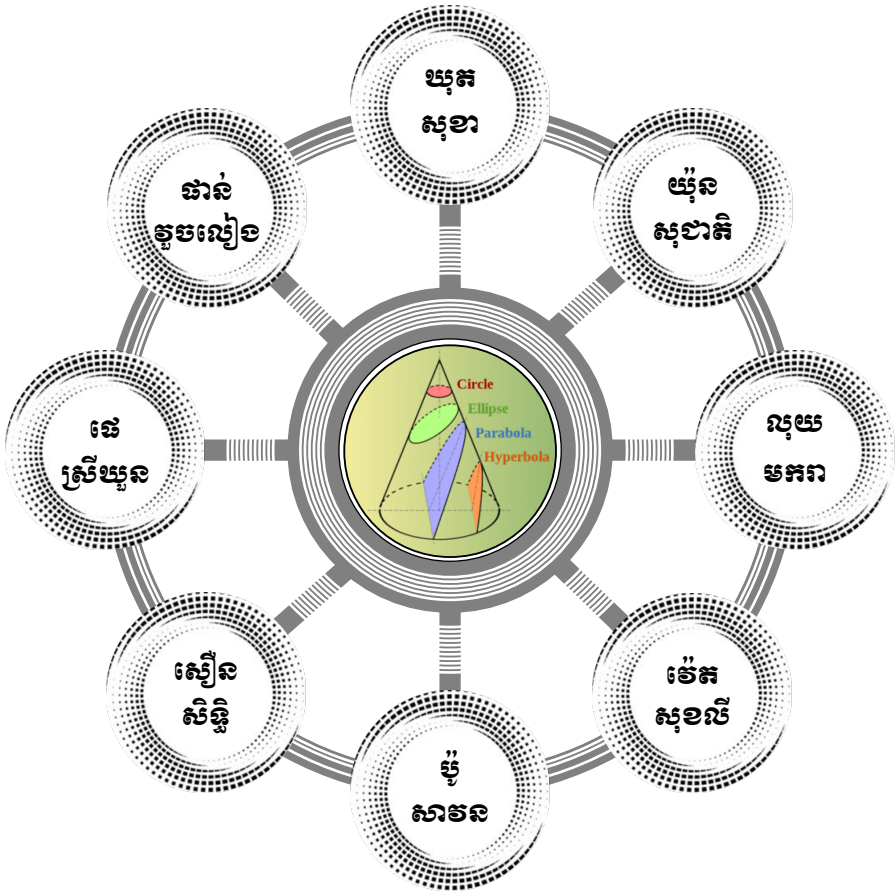
ទទួលសិទ្ធិលក់ផ្តាច់មុខដោយ Math Team Kh



Facebook Page: Math Team Kh

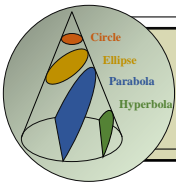
សៀវភៅនេះមាននៅ Math Team Kh តែមួយគត់ ។
រាល់ការលួចចម្លង នឹងត្រូវទទួលខុសត្រូវចំពោះមុខច្បាប់ ។

គណៈកម្មការ ត្រួតពិនិត្យ



Designed Cover by: ម៉ែត នាណី

រៀបរៀងដោយ៖ ផាន់ គឹមស្នេ



មាតិកា

មេរៀន

១	កោនិច	៣
១.១	សេចក្តីផ្តើមនៃកោនិច	៣
១.២	គុណសម្បត្តិនៃកោនិច	៤
២	រង្វង់	៥
២.១	សេចក្តីផ្តើមនៃរង្វង់	៥
២.២	សមីការរង្វង់	៦
២.២.១	ទម្រង់ស្តង់ដារនៃសមីការរង្វង់	៦
២.២.២	សមីការទូទៅនៃរង្វង់	៩
២.៣	ទម្រង់ខុសគ្នានៃសមីការរង្វង់	១០
២.៤	ទីតាំងធៀបរវាងចំណុច/បន្ទាត់នឹងរង្វង់	១២
២.៤.១	ទីតាំងធៀបរវាងចំណុចនឹងរង្វង់	១២
២.៤.២	ទីតាំងធៀបរវាងបន្ទាត់នឹងរង្វង់	១៣
២.៥	សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់	១៣
២.៥.១	សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ដែលផ្ចិតស្ថិតនៅលើតម្រុយ	១៣
២.៥.២	សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ដែលផ្ចិតមិនស្ថិតនៅលើតម្រុយ	១៥
២.៦	ចម្ងាយពីផ្ចិតទៅចំណុចដែលបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់	១៦
២.៧	ការអនុវត្តន៍លើរង្វង់	២៤
២.៨	លំហាត់ និងជំនួយស្រាយនៃរង្វង់	២៨
៣	ប៉ារ៉ាបូល	៥៧
៣.១	សេចក្តីផ្តើមនៃប៉ារ៉ាបូល	៥៧
៣.២	និយមន័យប៉ារ៉ាបូល និងផ្នែកសំខាន់ៗនៃប៉ារ៉ាបូល	៥៧
៣.២.១	និយមន័យប៉ារ៉ាបូល	៥៧
៣.២.២	និយមន័យផ្នែកសំខាន់ៗនៃប៉ារ៉ាបូល	៥៨

៣.៣	សមីការស្តង់ដារនៃប្លង់កាបូន	៥៩
៣.៣.១	សមីការស្តង់ដារនៃប្លង់កាបូនដែលមានកំពូលជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ	៥៩
៣.៣.២	សមីការស្តង់ដារនៃប្លង់កាបូនដែលមានកំពូលមិនស្ថិតក្នុងគល់តម្រុយ	៦២
៣.៤	សមីការចូទៅនៃប្លង់កាបូន	៦៥
៣.៥	ទីតាំងនៃចំណុចនឹងបន្ទាត់ធៀបនឹងប្លង់កាបូន	៦៩
៣.៥.១	ទីតាំងនៃចំណុចធៀបនឹងប្លង់កាបូន	៦៩
៣.៥.២	ទីតាំងនៃបន្ទាត់ធៀបនឹងប្លង់កាបូន	៧០
៣.៦	សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងប្លង់កាបូន	៧៣
៣.៧	សមីការបន្ទាត់ឈរម៉ាល់នឹងប្លង់កាបូន	៧៩
៣.៨	ការអនុវត្តន៍លើប្លង់កាបូន	៨៤
៣.៩	លក្ខណៈអុបទីចនៃប្លង់កាបូន	៨៧
៣.១០	លំហាត់ និងដំណោះស្រាយនៃប្លង់កាបូន	៨៩

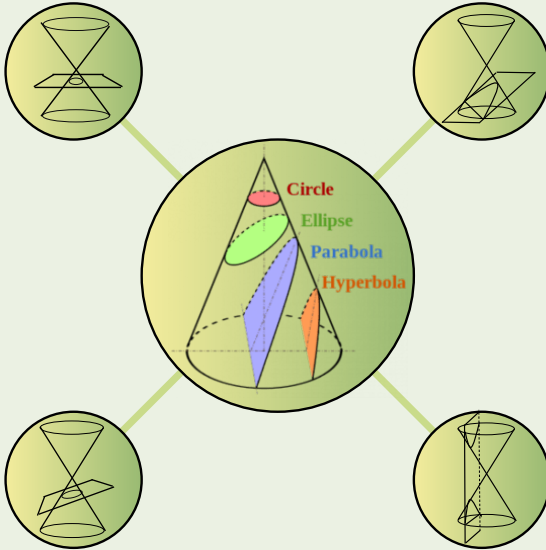
៤ អេលីប ១៣៧

៤.១	សេចក្តីផ្តើមនៃអេលីប	១៣៧
៤.២	និយមន័យអេលីប និងផ្នែកសំខាន់ៗនៃអេលីប	១៣៧
៤.២.១	និយមន័យអេលីប	១៣៧
៤.២.២	ផ្នែកសំខាន់ៗនៃអេលីប	១៣៨
៤.៣	សមីការស្តង់ដារនៃអេលីប	១៤០
៤.៣.១	សមីការស្តង់ដារនៃអេលីបដែលមានកំពូលជាស្ថិតក្នុងគល់តម្រុយ	១៤០
៤.៣.២	សមីការស្តង់ដារនៃអេលីបដែលមានកំពូលមិនស្ថិតក្នុងគល់តម្រុយ	១៤៥
៤.៤	សមីការចូទៅនៃអេលីប	១៤៩
៤.៥	ទីតាំងធៀបនៃចំណុចនឹងអេលីប	១៥០
៤.៦	ទីតាំងធៀបនៃបន្ទាត់នឹងអេលីប	១៥២
៤.៧	សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងអេលីប	១៥៤
៤.៨	សមីការឈរម៉ាល់កែងនឹងអេលីប	១៥៧
៤.៩	អ៊ុបសង់ទ្រីស៊ីតេ	១៦១
៤.១០	លក្ខណៈចំណាត់ថ្នាក់នៃអេលីប	១៦២
៤.១១	ការអនុវត្តន៍លើអេលីប	១៦៣

៤.១២	លំហាត់និងដំណោះស្រាយ	១៦៧
៥	អ៊ីពែបូល	២១៥
៥.១	សេចក្តីផ្តើមនៃអ៊ីពែបូល	២១៥
៥.២	និយមន័យ និងផ្នែកសំខាន់ៗនៃអ៊ីពែបូល	២១៥
៥.២.១	និយមន័យអ៊ីពែបូល	២១៥
៥.២.២	ផ្នែកសំខាន់ៗនៃអ៊ីពែបូល	២១៦
៥.៣	សមីការស្តង់ដារនៃអ៊ីពែបូល	២១៧
៥.៣.១	សមីការស្តង់ដារនៃអ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិតស្ថិតក្រុងត្រង់តល់តម្រុយ	២១៧
៥.៣.២	សមីការស្តង់ដារនៃអ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិតស្ថិតក្រុងត្រង់តល់តម្រុយ	២២៦
៥.៤	សមីការទូទៅនៃអ៊ីពែបូល	២៣០
៥.៥	ទីតាំងធៀបនៃចំណុចនិងអ៊ីពែបូល	២៣៣
៥.៦	ទីតាំងធៀបនៃបន្ទាត់និងអ៊ីពែបូល	២៣៤
៥.៧	សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងអ៊ីពែបូល	២៣៦
៥.៨	សមីការព្រាម៉ាល់កែងនឹងអ៊ីពែបូល	២៣៩
៥.៩	អ៊ុបសង់ទ្រីស៊ីតេ	២៤២
៥.១០	លក្ខណៈចំណាត់ថ្នាក់នៃអ៊ីពែបូល	២៤៣
៥.១១	ការអនុវត្តន៍លើអ៊ីពែបូល	២៤៣
៥.១២	លំហាត់ និងដំណោះស្រាយ	២៤៦

II
ចំណេះដឹងបន្ថែមលើកោសិច

៥.១៣	សំណាងរូបធរណីមាត្រ	២៩៥
៥.១៣.១	សំណាងនៃអង្កត់	២៩៥
៥.១៣.២	សំណាងនៃប្លង់កែង	២៩៥
៥.១៣.៣	សំណាងនៃអេលីប	២៩៨
៥.១៣.៤	សំណាងនៃអ៊ីពែបូល	៣០១
៥.១៤	វាសាតព្វិតវិទ្យាខ្មែរ-អង់គ្លេសមួយចំនួន	៣០៤



Mathematics
may not teach us how to
add love or subtract hate,
but it gives us hope
that every problem
has a solution.

Anonymous

Education is the most
powerful weapon
which you can use to
change the world.

Nelson Mandela



P H A N K I M S I E

Circle

Parabola

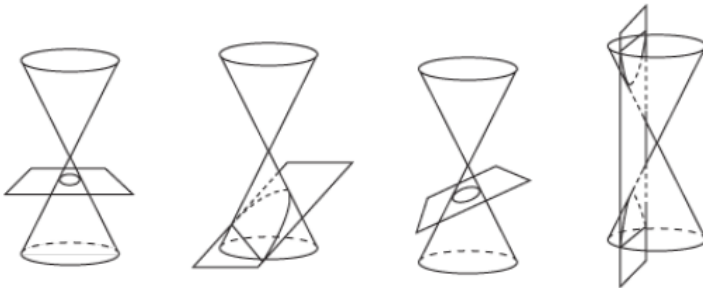
Ellipse

Hyperbola

កោនិច

១.១ សេចក្តីផ្តើមនៃកោនិច

ផ្នែករាងសាជីត្រូវបានគេរកឃើញក្នុងកំឡុងសម័យក្រិកបុរាណដែលមានរយៈពេលពី 600 ទៅ 300 ឆ្នាំមុនគ.ស។ ការចាប់ផ្តើមវិវត្តន៍ស្រាវជ្រាវពីសាជីនៅក្នុងសម័យរជ្ជកាលអេឡិចសាន់ដ័រ ដែលត្រូវបានគេទទួលស្គាល់អំពីការស្រាវជ្រាវរបស់លោក Apollonius (262-190 B.C)។ ការសិក្សាកាសាក្រិកបុរាណមានការពិបាកយ៉ាងខ្លាំងជាមួយនឹងលក្ខណៈធរណីមាត្រនៃសាជី។ រហូតមកដល់ដើមសតវត្សទី 17 ភាពងាយស្រួលនៃសាជីបានលេចឡើងយ៉ាងច្បាស់។ តាមការសិក្សាស្រាវជ្រាវរបស់អ្នកប្រាជ្ញកន្លងមក គេបានរកឃើញពីលក្ខណៈនៃកោណ។ ផ្នែកនៃរាងសាជីគឺជាខ្សែកោងដែលទទួលបានដោយការប្រសព្វគ្នារវាងប្លង់និងកោណនៅផ្នែកខាងស្តាំ។ ប្លង់កាត់កែងនឹងកោណបង្កើតបានជា រង្វង់។ ប្លង់កាត់ស្របទៅនឹងចំហៀងនៃកោណបង្កើតបានជា ប៉ារ៉ាបូល។ ប្លង់កាត់អ័ក្សកោណបង្កើតបានមុំស្រួចបង្កើតបាន អេលីប៊ី។ ចុងក្រោយគឺ ប្លង់កាត់ស្របនឹងអ័ក្សកោណបង្កើតបានជា អ៊ីបេរីបូល ដែលចែកជាពីរផ្នែកដូចរូប។



ប្លង់ប្រសព្វកោណបង្កើតបានខ្សែកោងចំនួនបួន



១.២ គុណសម្បត្តិនៃកោនិច

ដើម្បីឆ្លើយតបទៅនឹងកម្មវិធីសិក្សាថ្នាក់វិទ្យាល័យ យើងនឹងសិក្សាពីប្លង់មួយកាត់កោណពីរមិនត្រង់ កំពូលដែលរួមមាន រង្វង់ ប៉ារ៉ាបូល អេលីប និងអ៊ីពែបូល។ ប៉ារ៉ាបូល និងអ៊ីពែបូលត្រូវបានអ្នកប្រាជ្ញក្រិក ម្នាក់ឱ្យឈ្មោះ ដែលលោកមានឈ្មោះថា Apollonius។ ប៉ារ៉ាបូលជារូបរាងមួយដែលគេប្រើនៅក្នុង កែវពង្រីកដែលមានអានុភាពខ្លាំង និងជាឧបករណ៍សម្រាប់ចាប់យកថាមពលពន្លឺព្រះអាទិត្យ។ ចំណែក ឯអ៊ីពែបូលត្រូវបានគេប្រើក្នុងដំណើរការកំណត់សម្គាល់នូវទីតាំងមួយដោយមានការបង្រួមគល់ដៅ នេះជាអ្វីដែលធ្វើឱ្យប្រព័ន្ធ GPS អាចធ្វើទៅបាន។ រីឯអេលីប ត្រូវបានគេយកទៅសិក្សាលើគន្លងនៃ ភពផែនដីដោយដឹងពីល្បឿននៃអង្គធាតុធ្វើចម្លងលើគន្លងជាអេលីប។

$$\text{Ego} = \frac{1}{\text{Knowledge}}.$$

—Albert Einstein



Mathematics may not teach us how to add love or subtract hate, but it gives us hope that every problem has a solution.

Annoymous

Education is the most powerful weapon which you can use to change the world.

Nelson Mandela

Circle

Parabola

Ellipse

Hyperbola

រង្វង់

២.១ សេចក្តីផ្តើមនៃរង្វង់

ពាក្យថា រង្វង់ គឺបានមកពីពាក្យក្រិក Kirkos ដែលមានន័យថា រង្វង់មួយបានមកពីមូលដ្ឋាន Ker ដែលមានន័យថា ប្រែប្រួល។ រង្វង់ត្រូវបានគេស្គាល់តាំងពីមុនពេលចាប់ផ្តើមនៃប្រវត្តិសាស្ត្រដែលបានកត់ត្រាទុក។ ក្នុងធម្មជាតិ រង្វង់ត្រូវបានគេសង្កេតឃើញដូចជាព្រះច័ន្ទ ព្រះអាទិត្យ និងដើមរុក្ខជាតិខ្លីមួយដែលបក់តាមខ្យល់នៅលើដីខ្សាច់ដែលមានទម្រង់ជារង្វង់។ ក្នុងគណិតវិទ្យា ការសិក្សារង្វង់បានជួយដល់ការអភិវឌ្ឍនូវផ្នែកធរណីមាត្រ តារាសាស្ត្រ និងការគណនា។ មកដល់ពេលនេះក្នុងកំឡុងអារ្យធម៌ទំនើបមានសមត្ថភាពក្នុងការបង្កើតអ្វីៗដែលមានរាងជារង្វង់បានដែលជាដើមចងនៃការកំណត់ពីរូបរាងរបស់វា។



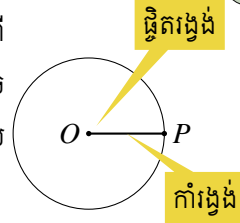
និយមន័យ ១

ចំណុចប្រសព្វ រវាង កោណ និង ប្លង់ ដែលកាត់ កោណបង្កើតបានជារង្វង់ដែលស្ថិតក្នុងកោណនោះ។ បញ្ជាក់ប្លង់ត្រូវកាត់កែងនឹងអ័ក្សអរដោនេ និងស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។ ដូចនេះ រង្វង់គឺជារូបរាងនៃការប្រសព្វគ្នារវាងកោណនិងប្លង់ដែលកែងនឹងស្របអ័ក្សមេ។

និយមន័យ ២



រង្វង់គឺជាសំណុំនៃចំនុចទាំងអស់ក្នុងប្លង់ដែលមានភាពស្មើគ្នាពីចំនុចមួយនៅក្នុងប្លង់។ ចំនុចបើត្រូវបានគេហៅថា ចំនុចកណ្តាលនៃរង្វង់ ឬ ផ្ចិតនៃរង្វង់ O ហើយចម្ងាយពីចំនុចកណ្តាលនោះទៅនឹងចំនុចនៅលើរង្វង់ហៅថា កាំនៃរង្វង់ OP ។

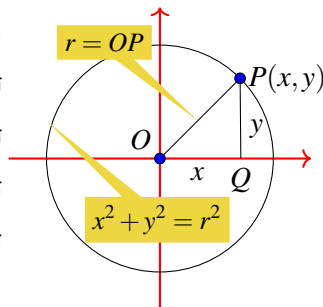


២.២ សមីការរង្វង់

២.២.១ ទម្រង់ស្តង់ដារនៃសមីការរង្វង់

ផ្ចិតរង្វង់ស្ថិតត្រង់គល់តម្រុយ

ដោយសាររង្វង់មួយត្រូវបានកំណត់ជាសំណុំចំនុចស្មើគ្នាពីចំនុចកណ្តាលនៃរង្វង់ ដូច្នេះយើងអាចប្រើរូបមន្តចម្ងាយរវាងពីរចំណុចដើម្បីកំណត់សមីការនៃរង្វង់។ យើងចាប់ផ្តើមសិក្សាដំបូងជាមួយនឹងរង្វង់ដែលមានចំណុចកណ្តាលរបស់វានៅត្រង់គល់តម្រុយ $O(0,0)$ កាត់ចំនុច $P(x,y)$ មួយ ហើយមានកាំ $r = OP$ ។



សម្រាយបញ្ជាក់៖ សមីការរង្វង់ដែលមានផ្ចិតត្រង់គល់តម្រុយ

$$OP = \sqrt{(x_P - x_O)^2 + (y_P - y_O)^2} \quad \{\text{រូបមន្តចម្ងាយរវាងពីរចំណុច}\}$$

$$r = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} \quad \{\text{ដោយ } x_O = 0, y_O = 0\}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \{\text{លើកអង្គទាំងពីរជាការ}\}$$

$$\text{ឬ } x^2 + y^2 = r^2$$

ម្យ៉ាងវិញយើងអាចពិនិត្យលើត្រីកោណកែង OPQ កែងត្រង់ Q

$$\text{តាមទ្រឹស្តីបទពីតាករ៉េ } OP^2 = OQ^2 + PQ^2$$

$$\iff r^2 = x^2 + y^2$$



តាមទ្រឹស្តីបទពីតាករ៉េ៖ អ៊ីប៉ូតេនុសការេស្មើផលបូកការេនៃជ្រុងជាប់មុំកែងទាំងពីរ។



ជាទូទៅ ២.២.១ សមីការរង្វង់ដែលមានផ្ចិតត្រង់គល់តម្រុយដែលមានផ្ចិត $(0,0)$ និងកាំ $r > 0$ គឺ៖ $x^2 + y^2 = r^2$ ។

វិធាន ១

ដើម្បីគូសរង្វង់ដែលមានផ្ចិតត្រង់គល់តម្រុយឱ្យបានត្រឹមត្រូវតាមសមីការ យើងត្រូវ៖

- កំណត់ទីតាំងនិងតាងត្រង់គល់តម្រុយដូចទៅនឹងផ្ចិតរង្វង់
- កំណត់ទីតាំងនិងតាងចំណុចកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសគឺ $(r, 0)$ និង $(-r, 0)$
- កំណត់ទីតាំងនិងតាងចំណុចកាត់អ័ក្សអរដោនេគឺ $(0, r)$ និង $(0, -r)$
- គូសរង្វង់កាត់តាមចំណុចទាំងនោះ ។

ឧទាហរណ៍ ១

ចូរគូសរង្វង់តាមសមីការរង្វង់ដូចខាងក្រោម៖

១ $x^2 + y^2 = 8$

៣ $x^2 + y^2 = -2$

២ $x^2 - y^2 = 9$

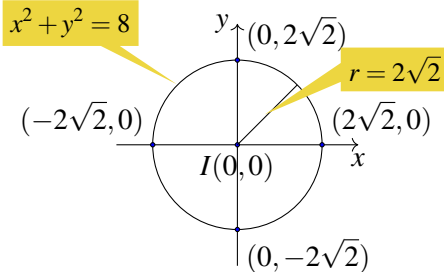
៤ $-y^2 - x^2 = -25$

ដំណោះស្រាយ៖ គូសរង្វង់តាមសមីការរង្វង់ដូចខាងក្រោម៖

១ $x^2 + y^2 = 8$

$x^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2$, {សរសេរចំនួនពិតជាចំនួនមួយលើកជាការេ}

កំណត់បាន ផ្ចិតរង្វង់ $I(0,0)$ និងកាំ $r = 2\sqrt{2}$



២ $x^2 - y^2 = 9$

តាមសមីការរង្វង់មានរាង $x^2 + y^2 = r^2$

នោះសមីការ $x^2 - y^2 = 9$ មិនមែនជាសមីការរង្វង់ទេ ព្រោះសមីការនេះមានវ៉ិចទ័រមានសញ្ញាដកនៅពីមុខមេគុណ y^2 តែជាសមីការអ៊ីពែបូលដែលនឹងត្រូវសិក្សាចំណុចបន្ទាប់។

ដូចនេះ សមីការ $x^2 - y^2 = 9$ មិនអាចកំណត់នៃការគូសរង្វង់បានទេ។

៣ $x^2 + y^2 = -2$

ក្នុងសមីការរង្វង់ $x^2 + y^2 = r^2$ ដែលត្រូវបានកំណត់ $r > 0$ ព្រោះកាំគឺជាប្រវែង

យើងអាចសន្និដ្ឋានបានថាសមីការ $x^2 + y^2 = -2$ មិនមែនជាសមីការរង្វង់ព្រោះ $-2 < 0$

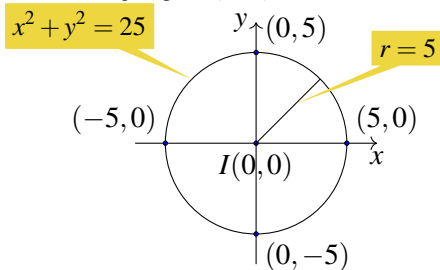
ដូចនេះ សមីការ $x^2 + y^2 = -2$ មិនអាចកំណត់នៃការគូសរង្វង់បានទេ។

៤ $-y^2 - x^2 = -25$

$x^2 + y^2 = 25$, {សម្រួលសញ្ញាដកនៃអង្គទាំងពីរ}

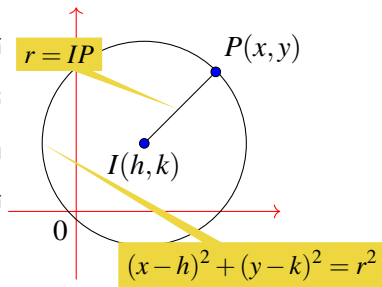
$x^2 + y^2 = 5^2$

កំណត់បាន ផ្ចិតរង្វង់ $I(0,0)$ និងកាំ $r = 5$



ផ្ចិតរង្វង់មិនស្ថិតក្នុងគល់តម្រុយ

យើង អាច ប្រើ រូបមន្ត ចម្ងាយ រវាង ពីរ ចំណុច ដើម្បី កំណត់ សមីការរង្វង់ដែលមាន កាំ r និងផ្ចិត $I(h,k)$ ដែលមិន បិតនៅត្រង់គល់តម្រុយ។ យើងចាប់ផ្តើមស្រាយសមីការរង្វង់ ដោយសិក្សាលើរង្វង់ដែលមានផ្ចិត $I(h,k)$ ហើយកាត់ចំនុច $P(x,y)$ ដែលមានកាំ $r = IP$ ។



សម្រាយបញ្ជាក់៖ សមីការរង្វង់ដែលមានផ្ចិតមិនស្ថិតត្រង់គល់តម្រុយ

$$IP = \sqrt{(x_P - x_I)^2 + (y_P - y_I)^2}, \quad \{\text{ប្រមាណម្ងាយរវាងពីរចំណុច}\}$$

$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}, \quad \{\text{លើកអង្គទាំងពីរជាការ៉េ}\}$$

$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

ឬ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

ជំនួស ២.២.២ សមីការរង្វង់ដែលមានផ្ចិតមិនស្ថិតត្រង់គល់តម្រុយដែលមានផ្ចិត $I(h, k)$ និងកាំ $r > 0$ គឺមានរាង៖ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ដែលហៅថាសមីការស្តង់ដារនៃរង្វង់។

ចំណាំ ២.២.៣ យើងអាចប្រើសមីការរង្វង់នេះដើម្បីបង្ហាញសមីការរង្វង់ដែលមានផ្ចិតត្រង់គល់តម្រុយ ($h = 0; k = 0$) គេបាន៖ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

វិធាន ២

ដើម្បីសង់រង្វង់ដែលមានផ្ចិតមិនស្ថិតត្រង់គល់តម្រុយ យើងត្រូវ៖

- កំណត់និងតាងផ្ចិត $I(h, k)$ និងកាំនៃរង្វង់
- កំណត់ចុងចំណុចនៃកាំដែលគូសចេញពីផ្ចិត
- គូសរង្វង់ដោយកាត់តាមចុងចំណុចនោះ។

២.២.២ សមីការទូទៅនៃរង្វង់

សមីការស្តង់ដារនៃរង្វង់ដែលមានកាំ r និងផ្ចិត (h, k) គឺ៖

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \iff x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

$$\iff x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

តាង $A = -2h$, $B = -2k$ និង $C = h^2 + k^2 - r^2$

គេបាន $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ ហៅថា សមីការទូទៅនៃសមីការ ។



ជាទូទៅ ២.២.៤ សមីការទូទៅនៃរង្វង់គឺ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ ដែលមានផ្ចិត (h, k) និងកាំ $r = \sqrt{h^2 + k^2 - C}$, C ជាចំនួនពិត។

វិធាន ៣

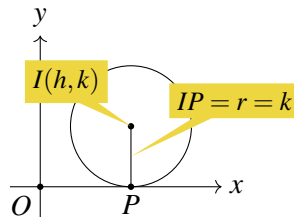
វិធាននៃការកំណត់កាំនិងផ្ចិតដែលឱ្យដោយសមីការទូទៅនៃរង្វង់៖

- ១ ធ្វើយ៉ាងណាឱ្យមេគុណ x^2 និង y^2 ស្មើ ១ និងនៅអង្គទីពីរស្មើ ០
- ២ យើងនឹងកំណត់បានផ្ចិតមានកូអរដោនេ (h, k) ដែល $h = -\frac{1}{2}A$ និង $k = -\frac{1}{2}B$
- ៣ កាំនៃរង្វង់ $r = \sqrt{h^2 + k^2 - C}$ ។

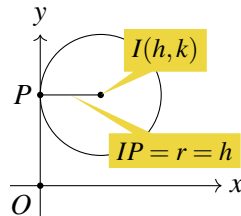
ចំណាំ ២.២.៥ យើងក៏អាចកំណត់កូអរដោនេផ្ចិត និងកាំតាមរយៈការបម្លែងសមីការទូទៅទៅជាសមីការស្តង់ដារនៃរង្វង់ដែលមានរាង $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ កំណត់បាន ផ្ចិត (h, k) និងកាំ r ។

២.៣ ទម្រង់ខុសគ្នានៃសមីការរង្វង់

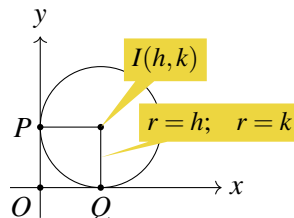
- I** នៅពេលដែលរង្វង់ប៉ះអ័ក្សអាប់ស៊ីស
នោះសមីការរង្វង់មានរាង
 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = k^2$



- II** នៅពេលដែលរង្វង់ប៉ះអ័ក្សអរដោនេ
នោះសមីការរង្វង់មានរាង
 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = h^2$



- III** នៅពេលដែលរង្វង់ប៉ះអ័ក្សទាំងពីរ
នោះសមីការរង្វង់មានរាង
 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = k^2$
 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = h^2$

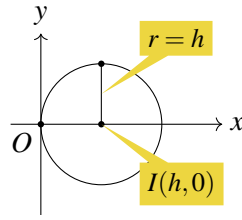


- IV** នៅពេលដែលរង្វង់កាត់គល់តម្រុយ និងផ្ចិតស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស

នោះសមីការរង្វង់មានរាង

$$(x-h)^2 + y^2 = h^2$$

$$\text{ឬ } x^2 + y^2 - 2hx = 0$$

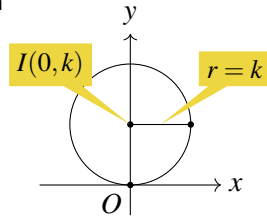


- V** នៅពេលដែលរង្វង់កាត់គល់តម្រុយ និងផ្ចិតស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស

នោះសមីការរង្វង់មានរាង

$$x^2 + (y-k)^2 = k^2$$

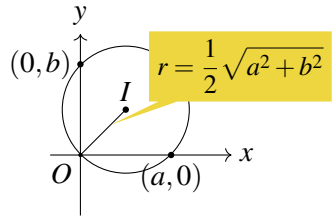
$$\text{ឬ } x^2 + y^2 - 2ky = 0$$



- VI** នៅពេលដែលរង្វង់កាត់គល់តម្រុយនិងកាត់ពីរចំណុច a និង b ដែល b ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ និង a ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស នោះសមីការរង្វង់មានរាង

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0 \quad \text{ដែល មាន ផ្ចិត}$$

$$I\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \text{ ។}$$



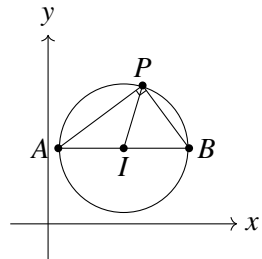
- VII លក្ខណៈពិសេស** ៖ តាង $A(x_1, y_1)$ និង $B(x_2, y_2)$ ជាចុងចំណុចសងខាងនៃអង្កត់ផ្ចិត AB និងតាង $P(x, y)$ ជាចំណុចមួយនៅរង្វង់

$$\text{មេគុណប្រាប់ទិសនៃ } AP = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\text{មេគុណប្រាប់ទិសនៃ } BP = \frac{y - y_2}{x - x_2}$$

$$\text{ដោយសារតែ } \angle APB = 90^\circ$$

$$\text{យើងបាន មេគុណប្រាប់ទិស } AP \times BP = -1$$



$$\Rightarrow \left(\frac{y - y_1}{x - x_1} \right) \times \left(\frac{y - y_2}{x - x_2} \right) = -1$$

$$\Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{សមីការរង្វង់មានរាង } (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0 \text{ ។}}$$

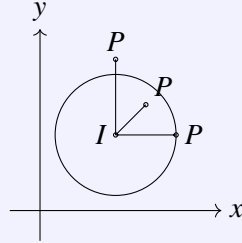


២.៤ ទីតាំងធៀបនាងចំណុច/បង្គោលនីមួយៗ

២.៤.១ ទីតាំងធៀបនាងចំណុចនីមួយៗ

ជំនួស ២.៤.១ ទីតាំងធៀបនាងចំណុច $P(x_0, y_0)$ និងរង្វង់ដែលមានផ្ចិត $I(h, k)$ និងកាំ r គឺ៖

- បើ $IP = r$ នោះចំណុច P នៅលើរង្វង់
- បើ $IP > r$ នោះចំណុច P នៅខាងក្រៅរង្វង់
- បើ $IP < r$ នោះចំណុច P នៅខាងក្នុងរង្វង់។



ក្នុងការបង្ហាញថាចំណុចមួយស្ថិតនៅលើ, ក្រៅ, ឬក្នុងរង្វង់ យើងត្រូវរកចម្ងាយពីចំណុចនោះទៅនឹងផ្ចិតនៃរង្វង់ ហើយប្រៀបធៀបជាមួយប្រវែងកាំនៃរង្វង់។ តែយ៉ាងណាមិញ យើងនឹងសិក្សាលើករណីមួយផ្សេងទៀតដែលមិនចាំបាច់រកប្រវែងពីចំណុចមួយទៅផ្ចិតទេ ពោលគ្រាន់តែយកកូអរដោនេនៃចំណុចនោះទៅជំនួសក្នុងសមីការរង្វង់ យើងនឹងដឹងពីទីតាំងនៃចំណុចយ៉ាងប្រាកដ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖ • ចំពោះ $IP = r$ នោះចំណុច P នៅលើរង្វង់

$$\iff IP^2 = r^2$$

$$\iff (x_0 - h)^2 + (y_0 - k)^2 = r^2$$

$$\iff (x_0 - h)^2 + (y_0 - k)^2 - r^2 = 0$$

$$\text{ឬ } x_0^2 + y_0^2 - 2hx_0 - 2ky_0 + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

$$\text{តាង } f(x_0, y_0) = (x_0 - h)^2 + (y_0 - k)^2 - r^2 = 0$$

$$\text{ឬ } f(x_0, y_0) = x_0^2 + y_0^2 - 2hx_0 - 2ky_0 + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

- ចំពោះ $IP > r$ នោះចំណុច P នៅក្រៅរង្វង់
- ចំពោះ $IP < r$ នោះចំណុច P នៅក្នុងរង្វង់

សម្រាយពីករណីខាងលើដូចសម្រាយក្នុងករណីទីមួយ គ្រាន់តែផ្លាស់ប្តូរសញ្ញាវិសមភាព។

