

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

ЧАСТЬ II

Под редакцией *В. В. Демченко*

Допущено
Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области прикладных математики и физики
в качестве учебного пособия для студентов вузов
по направлению подготовки «Прикладные математика и физика»

МОСКВА
МФТИ
2014

УДК 519.6(075)
ББК 22.19я73
У66

Авторы:

А. В. Барабанщиков, Т. М. Гамилов,
В. В. Демченко, Р. С. Пастушков, С. С. Симаков

Рецензенты:

Кафедра высшей математики ФГОУ ВПО
«Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова»
(зав. кафедрой доктор технических наук, профессор *О. В. Татарников*)

Доктор физико-математических наук, профессор *В. П. Михайлов*

**У66 Упражнения и задачи контрольных работ
по вычислительной математике. Ч. II. : учеб. пособие /**
А. В. Барабанщиков, Т. М. Гамилов, В. В. Демченко и др.;
под ред. В. В. Демченко. – М. : МФТИ, 2014. – 182с.
ISBN 978-5-7417-0525-4 (Ч. II)

Учебное пособие сформировано на основе лекций и семинарских занятий по вычислительной математике для студентов III курса ФАКИ, ФФКЭ МФТИ (ГУ) и предназначено для самостоятельной подготовки студентов, аспирантов к выполнению контрольных и зачетных работ по курсу «Вычислительная математика», а также для преподавателей и научно-технических работников, использующих в своей деятельности методы вычислительной и прикладной математики.

**УДК 519.6(075)
ББК 22.19я73**

**ISBN 978-5-7417-0525-4 (Ч. II)
ISBN 978-5-7417-0523-0**

© Барабанщиков А. В., Гамилов Т. М., Демченко В. В.,
Пастушков Р. С., Симаков С. С., 2014
© Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)», 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
7. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (ОДУ). ЗАДАЧА КОШИ. УСТОЙЧИВОСТЬ	6
7.1. Функции и области устойчивости разностных схем	6
7.2. Жёсткие уравнения и системы уравнений.....	22
8. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (ОДУ). КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ	27
8.1. Линейные краевые задачи. Метод построения общего решения	27
8.2. Линейные краевые задачи. Метод прогонки	31
8.3. Нелинейные краевые задачи. Метод стрельбы	37
8.4. Нелинейные краевые задачи. Метод квазилинеаризации	41
8.5. Вариационные методы решения краевых задач ОДУ. Метод Ритца.....	42
8.6. Вариационные методы решения краевых задач ОДУ. Метод Бубнова–Галёркина.....	48
9. ЗАДАЧА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ. ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ	57
10. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ	69
10.1. Методы построения разностных схем	69
10.2. Спектральный признак устойчивости.....	86
11. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ	102
11.1. Уравнения переноса.....	102
11.2. Система уравнений газодинамики	106
11.3. Корректная постановка начальных и граничных условий	114
11.4. Волновое уравнение	119
12. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ	126
12.1. Постановка задач и основные свойства уравнений	126
12.2. Конечные ряды Фурье	131
12.3. Метод установления	140
12.4. Попеременно-треугольный метод (ПТМ).....	153
12.5. Метод конечных элементов	158
13. ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ	167
13.1. Явные и неявные разностные схемы.....	167
13.2. Многомерные уравнения теплопроводности	168

Введение

Для анализа процессов и событий, происходящих в окружающей человека среде, широко используются модели, в основу которых положены дифференциальные уравнения. Их применение позволяет в ряде случаев не только получить качественное представление о причинах и следствиях наблюдаемых явлений, но и дать точное количественное описание изменения основных параметров. Задачи во много раз усложняются, когда функциональные зависимости между определяющими величинами имеют существенно нелинейный характер. Как правило, классические аналитические методы не позволяют получить решения такого рода задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными в наиболее общей постановке. При анализе таких проблем чрезвычайно полезными могут оказаться приближённые методы численного анализа и вычислительной математики, на основе которых есть возможность разработать достаточно эффективные алгоритмы, реализуемые в виде программ для современных быстродействующих многоядерных ЭВМ. Как и для любых приближённых методов, в этом случае основным вопросом становится оценка точности полученных результатов.

Для этого необходимо иметь чёткое представление о том, от чего зависит погрешность полученных расчётных данных и что необходимо предпринять, чтобы её уменьшить. Приобретение качественных и научно обоснованных знаний по этому вопросу – одна из основных целей этого учебного пособия. Лучшим способом проверки теоретических положений является практика, т.е. проведение целой серии последовательных расчётов на всё более сгущающихся сетках и оценки точности полученных данных в нормах или метриках выбранного конечномерного пространства. Для апробации и закрепления приобретённых навыков можно рекомендовать выполнение цикла лабораторных работ из вычислительного практикума по прикладной математике, содержащего электронные версии проверочных программ.

Данный учебный материал является продолжением части I ранее изданного одноимённого пособия и посвящен математически строгому обоснованию численных подходов к решению самых разнообразных задач дифференциальных уравнений на конкретных примерах. В нём рассмотрены следующие разделы вычислительной математики: 7) обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ). Задача Коши; Устойчивость; 8) ОДУ. Краевые задачи, 9) задача Штурма–Лиувилля.

Собственные значения; 10) разностные схемы для уравнений с частными производными; 11) гиперболические уравнения; 12) эллиптические уравнения; 13) параболические уравнения. В начале каждой главы кратко излагаются основные теоретические положения, позволяющие в дальнейшем разрабатывать эффективные вычислительные алгоритмы, которые обеспечивают требуемую точность результатов. Затем в упражнениях на конкретных примерах разбираются и обосновываются численные методы (алгоритмы) решения соответствующих задач. В конце пособия приведены задачи для самостоятельного решения, позволяющие закрепить и развить приобретённые навыки. Для ряда задач даны ответы, указана литература, которая может быть полезна при изучении материала раздела.

7. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (ОДУ). ЗАДАЧА КОШИ. УСТОЙЧИВОСТЬ

7.1. Функции и области устойчивости разностных схем

Начнём изучение вопросов, связанных с устойчивостью разностных схем, с задачи Коши для системы ОДУ первого порядка:

$$\begin{cases} \vec{y}'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}), \\ \vec{y}(X_0) = \vec{y}_0, \\ x \in [X_0, X_L]; \end{cases} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}. \quad (7.1.1)$$

Пусть $\vec{\varphi}(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению из (7.1.1), т.е. $\vec{\varphi}'(x) = \vec{f}(x, \vec{\varphi}(x))$. Пусть справедливо разложение правой части дифференциального уравнения (7.1.1) в ряд Тейлора относительно $\vec{\varphi}(x)$:

$$\vec{y}'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}(x)) = \vec{f}(x, \vec{\varphi}(x)) + \left[\frac{\partial \vec{f}(x, \vec{\varphi}(x))}{\partial \vec{y}(x)} \right] (\vec{y}(x) - \vec{\varphi}(x)) + \dots$$

Ограничимся только линейным членом в этом представлении

$$\vec{y}'(x) - \vec{\varphi}'(x) = \left[\frac{\partial \vec{f}(x, \vec{\varphi}(x))}{\partial \vec{y}(x)} \right] (\vec{y}(x) - \vec{\varphi}(x)). \quad (7.1.2)$$

Введём обозначение $\vec{\Delta} = \vec{y}(x) - \vec{\varphi}(x)$ и подставим в (7.1.2):

$$\vec{\Delta}'(x) = \mathbf{J}(x)\vec{\Delta}(x), \quad \mathbf{J}(x) = \left[\frac{\partial \vec{f}(x, \vec{\varphi}(x))}{\partial \vec{y}(x)} \right]. \quad (7.1.3)$$

Предположим, что в области интегрирования обычным образом введена сетка и что для решения задачи (7.1.1) применён явный метод Эйлера первого порядка (см. часть I, раздел 6, глава 6.3 данного пособия). В силу линейности уравнения (7.1.3) получим

$$\frac{\vec{\Delta}_{l+1} - \vec{\Delta}_l}{h} = \mathbf{J}(x_l)\vec{\Delta}_l, \quad \vec{\Delta}_{l+1} = (\mathbf{E} + h\mathbf{J}(x_l))\vec{\Delta}_l. \quad (7.1.4)$$

Здесь \mathbf{E} — единичная матрица. Обозначим $\mathbf{Z} = \mathbf{J}(x)h$, $\mathbf{R}(\mathbf{Z}) = \mathbf{E} + \mathbf{Z} = \mathbf{E} + \mathbf{J}h$ и подставим в (7.1.4):

$$\vec{\Delta}_{l+1} = \mathbf{R}(\mathbf{Z})\vec{\Delta}_l. \quad (7.1.5)$$

Определение 7.1.1. Функция $\mathbf{R}(\mathbf{Z})$ из (7.5) называется функцией устойчивости рассматриваемого метода.

Исследование устойчивости выбранного метода осуществляется путём приведения матрицы Якоби $\mathbf{J}(x)$ к жордановой канонической форме. Пусть с помощью собственных линейно независимых векторов $\vec{\omega}_k$ и собственных чисел λ_k матрица $\mathbf{J}(x)$ приведена к диагональному виду. Разложим $\vec{\Delta}_l = \sum_{k=1}^N a_k \vec{\omega}_k$ по этому базису и подставим в (7.1.5):

$$\vec{\Delta}_{l+1} = \sum_{k=1}^N R_l(h\lambda_k) a_k \vec{\omega}_k. \quad (7.1.6)$$

Для того чтобы погрешность не возрастала при переходе от узла l к узлу $l+1$, достаточно потребовать $|R_l(h\lambda_k)| \leq 1$ для всех λ_k , $k = \overline{1, N}$. Если эти условия справедливы для всех узловых точек сетки, то погрешность не увеличивается и выполняются достаточные условия устойчивости.

Определение 7.1.2. Множество $S = \{z = h\lambda \in \mathbb{C}, |R(z)| \leq 1\}$ называется областью устойчивости данного метода.

Получим функции устойчивости для явных методов Рунге–Кутты (см. часть I, раздел 6, глава 6.3 данного пособия), которые в s -стадийном варианте имеют следующее представление:

$$y_{l+1} = y_l + h \sum_{i=1}^s b_i f_i, \quad (7.1.7)$$

$$f_i = f(x_l + hc_i, y_l + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f_j), \quad i = \overline{1, s}.$$

Для определения функции устойчивости необходимо осуществить линеаризацию расчётных формул (7.1.7) аналогично тому, как это было сделано ранее (7.1.2) – (7.1.5). Формально эта процедура сводится к замене в (7.1.7) y_l на Δ_l , f_y на J . Осуществим подобные преобразования на примере трёхстадийного метода Рунге–Кутты:

$$\Delta_{l+1} = \Delta_l + h \sum_{i=1}^3 b_i f_i, \quad f_1 = J \Delta_l, \quad f_2 = J \cdot (\Delta_l + ha_{21} f_1) = J \cdot (1 + hJa_{21}) \Delta_l, \quad (7.1.8)$$

$$f_3 = J \cdot (\Delta_l + ha_{31} f_1 + ha_{32} f_2) = J \cdot (1 + hJa_{31} + hJa_{32}(1 + hJa_{21})) \Delta_l.$$

После подстановки выражений f_i в формулу для Δ_{l+1} , перегруппировки членов в (7.1.8) и учитывая, что $z = Jh$, приходим к выражению

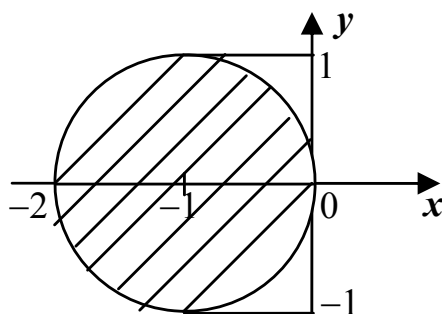
$$\Delta_{l+1} = \{1 + (b_1 + b_2 + b_3)z + [b_2 a_{21} + b_3(a_{31} + a_{32})]z^2 + b_3 a_{32} a_{21} z^3\} \Delta_l. \quad (7.1.9)$$

Если трёхстадийный метод Рунге–Кутты имеет третий порядок точности, то $\Delta_{l+1} = \{1 + z + z^2 / 2! + z^3 / 3!\} \Delta_l$. Следовательно, его функция устойчивости $R(z) = \{1 + z + z^2 / 2! + z^3 / 3!\}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 7.1.1. Если s -стадийный явный метод Рунге–Кутты имеет порядок точности $p = s$, то $R(z) = \{1 + z + \dots + z^s / s!\}$.

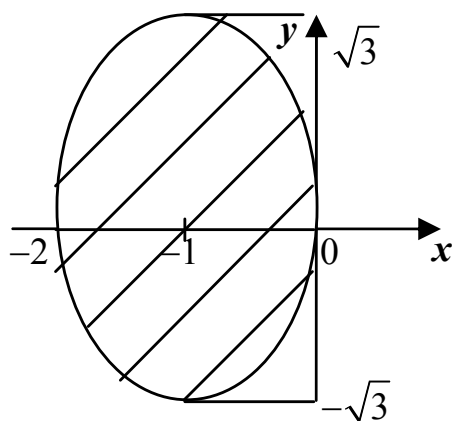
Получим области устойчивости для явных методов Рунге–Кутты первого и второго порядков.

Метод Эйлера первого порядка. Согласно (7.1.5) его функция устойчивости $R(z) = 1 + z$ и по определению (7.1.2) область устойчивости состоит из всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|R(z)| = |1 + z| = |1 + x + iy| \leq 1$ или $(1 + x)^2 + y^2 \leq 1$. Графически эта область представляет собой круг единичного радиуса на комплексной плоскости, центр которого находится в точке -1 на действительной оси абсцисс.



Метод Эйлера с пересчётом и модифицированный метод Эйлера второго порядка. Их функция устойчивости по теореме 7.1.1 равняется $R(z) = (1 + z + z^2 / 2)$, а область устойчивости состоит из точек $z = x + iy$, удовлетворяющих неравенству

$$2x(1 + x) + ((x^2 + y^2) / 2)^2 + x(x^2 + y^2) \leq 0.$$



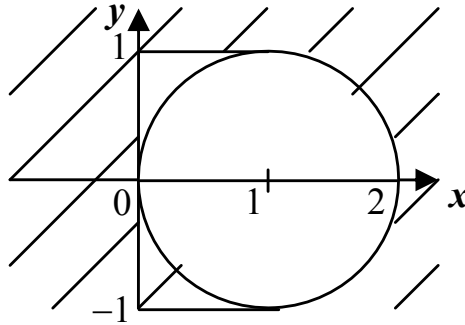
Расчётные формулы для неявных методов Рунге–Кутты имеют в s -стадийном случае следующий вид:

$$y_{l+1} = y_l + h \sum_{i=1}^s b_i f_i, \quad (7.1.10)$$

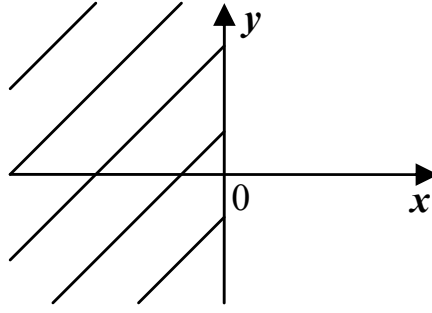
$$f_i = f(x_l + hc_i, y_l + h \sum_{j=1}^{s_i} a_{ij} f_j), \quad i = \overline{1, s}, \quad s_i \leq s.$$

Найдем функции и области устойчивости для часто используемых неявных методов Рунге–Кутты первого и второго порядков.

Неявный метод Эйлера первого порядка. Вычисления производятся по рекуррентной формуле $y_{l+1} = y_l + hf(x_{l+1}, y_{l+1})$, $l = \overline{0, L-1}$. Функция устойчивости находится из уравнений $\Delta_{l+1} = \Delta_l + hJ\Delta_{l+1}$, $\Delta_{l+1} = [1/(1-hJ)]\Delta_l = [1/(1-z)]\Delta_l$ и равняется $R(z) = 1/(1-z)$. Области устойчивости принадлежат точки комплексной плоскости, удовлетворяющие неравенству $(1-x)^2 + y^2 \geq 1$, т.е. находящиеся вне круга единичного радиуса с центром в точке 1 действительной оси абсцисс.



Неявный метод средней точки. Расчётные формулы: $y_{l+1} = y_l + hf_1$, $f_1 = f(x_l + h/2, y_l + hf_1/2)$, $l = \overline{0, L-1}$. Используя замены y_l на Δ_l , f на J , приходим к $\Delta_{l+1} = \Delta_l + hf_1$, $f_1 = J \cdot (\Delta_l + hf_1/2)$. Отсюда имеем $\Delta_{l+1} = [(1+z/2)/(1-z/2)]\Delta_l$. Следовательно, функция устойчивости есть $R(z) = (1+z/2)/(1-z/2)$, а область устойчивости составляют точки комплексной плоскости, удовлетворяющие неравенству $x \leq 0$.



Определение 7.1.3. Метод, имеющий область устойчивости $S \supset \mathbb{C}^- = \{z : \operatorname{Re} z \leq 0\}$, называется A -устойчивым.

Неявный метод трапеций. Этот метод представим в виде $y_{l+1} = y_l + h(f_1 + f_2)/2$, $f_1 = f(x_l, y_l)$, $f_2 = f(x_{l+1}, y_{l+1})$, $l = \overline{0, L-1}$. Произведя замены y_l на Δ_l , f на J , приходим к $f_1 = J\Delta_l$, $f_2 = J\Delta_{l+1}$, $\Delta_{l+1} = \Delta_l + h(J\Delta_l + J\Delta_{l+1})/2$, $\Delta_{l+1} = [(1 + z/2)/(1 - z/2)]\Delta_l$. Таким образом, функция и область устойчивости оказываются для этого метода такими же, как и для неявного метода средней точки. Все три ранее рассмотренные неявные методы Рунге–Кутты являются A -устойчивыми.

Определение 7.1.4. Метод называется L -устойчивым, если он A -устойчивый и выполнено условие $\lim_{z \rightarrow -\infty} R(z) = 0$.

Следовательно, неявный метод Эйлера первого порядка L -устойчивый, а неявный метод средней точки и неявный метод трапеций — нет.

Функцию устойчивости нетрудно вычислить и для произвольного неявного метода Рунге–Кутты. В этом случае формулы (7.1.8) примут следующий вид:

$$\Delta_{l+1} = \Delta_l + h \sum_{i=1}^s b_i f_i, \quad f_i = J \cdot \left(\Delta_l + h \sum_{k=1}^s a_{ik} f_k \right), \quad i = 1, \dots, s.$$

Введем векторы $\vec{f} = (f_1, \dots, f_s)^T$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_s)^T$, $\vec{1} = (1, \dots, 1)^T$ и матрицу \mathbf{A} с компонентами a_{ij} . Тогда $\vec{f} = J\Delta_l (\mathbf{E} - Jh\mathbf{A})^{-1} \vec{1}$ и

$$\Delta_{l+1} = \left(1 + Jh\vec{b}^T (\mathbf{E} - Jh\mathbf{A})^{-1} \vec{1} \right) \Delta_l = \left(1 + z\vec{b}^T (\mathbf{E} - z\mathbf{A})^{-1} \vec{1} \right) \Delta_l = R(z)\Delta_l.$$

Таким образом, функция устойчивости имеет вид

$$R(z) = 1 + z\vec{b}^T (\mathbf{E} - z\mathbf{A})^{-1} \vec{1}. \quad (7.1.11)$$

Нетрудно вывести и другую (эквивалентную) формулу:

$$R(z) = \det(\mathbf{E} - z\mathbf{A} + z\mathbf{1}\vec{b}^T) / \det(\mathbf{E} - z\mathbf{A}).$$

Здесь $\mathbf{1b}^T$ – $s \times s$ матрица, у которой каждый элемент столбца j равен b_j .

Другим важным классом методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений являются *линейные многошаговые методы*. Пусть для простоты задана сетка с постоянным шагом и значения сеточной функции y_i в $k+1$ соседних точках связаны линейным соотношением:

$$\alpha_k y_{l+k} + \alpha_{k-1} y_{l+k-1} + \dots + \alpha_0 y_l = h(\beta_k f_{l+k} + \beta_{k-1} f_{l+k-1} + \dots + \beta_0 f_l). \quad (7.1.12)$$

Здесь h обозначает величину шага интегрирования, $f_i = f(x_i, y_i)$, $x_i = x_0 + ih$. Параметры метода α_j и β_j – вещественные числа, причем $\alpha_k \neq 0$ и $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$.

Определение 7.1.5. Метод, задаваемый формулой (7.1.12), называется линейным k -шаговым методом. Различают явные ($\beta_k = 0$) и неявные ($\beta_k \neq 0$) многошаговые методы.

Примерами явных линейных многошаговых методов являются явный метод Эйлера, явный метод Адамса четвертого порядка (см. часть I, раздел 6, глава 6.4 данного пособия). Примерами неявных линейных многошаговых методов являются неявный метод Эйлера, метод трапеций, метод ФДН 2-го порядка (см. пример 3 этой главы и пример 1 главы 5.1 части I).

Для расчета с помощью k -шагового метода необходимо знать значения y_i в первых k точках. Значения в точках $i = 2, \dots, k$ можно получить с помощью других методов, например, методов Рунге–Кутты такого же порядка точности. Исследования на аппроксимацию и устойчивость проводятся стандартными методами. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 7.1.2 *Многошаговый метод (7.1.12) имеет порядок p тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0 \text{ и } \sum_{j=0}^k \alpha_j j^q = q \sum_{j=0}^k \beta_j j^{q-1} = 0, \quad q = 1, \dots, p. \quad (7.1.13)$$

Теорема 7.1.3 (второй барьер Далквиста) *Любой A -устойчивый многошаговый метод (7.1.12) должен иметь порядок $p \leq 2$.*

Более подробно о линейных многошаговых методах можно прочитать в [1, 2].

Упражнения

Пример 1

Покажите, что неявный метод Рунге–Кутты, заданный таблицей Бутчера:

$1/2 - \sqrt{3}$	$1/4$	$1/4 - \sqrt{3}/6$
$1/2 + \sqrt{3}$	$1/4 + \sqrt{3}/6$	$1/4$
	$1/2$	$1/2$

(метод Хаммера–Холлингсуорта порядка 4), имеет четвертый порядок аппроксимации. Найдите функцию устойчивости $R(z)$ и исследуйте метод на A -устойчивость и L -устойчивость.

Решение

Если выполнены условия Кутты $c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij} \quad \forall i$, то условия аппроксимации порядка p (при $p = 1, 2, 3, 4$) для неявного s -стадийного метода Рунге–Кутты записываются следующим образом ([1],[4]). Каждый следующий порядок аппроксимации приводит к следующим дополнительным соотношениям:

$$p = 1: \sum_{i=1}^s b_i = 1,$$

$$p = 2: \sum_{i=1}^s b_i c_i = 1/2,$$

$$p = 3: \sum_{i=1}^s b_i c_i^2 = 1/3, \quad \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j = 1/6,$$

$$p = 4: \sum_{i=1}^s b_i c_i^3 = 1/4, \quad \sum_{i,j=1}^s b_i c_i a_{ij} c_j = 1/8, \quad \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j^2 = 1/12,$$

$$\sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} a_{jk} c_k = 1/24.$$

Для данного метода все эти соотношения проверяются непосредственной подстановкой (соотношения пятого порядка не выполняются). Для нахождения функции устойчивости воспользуемся общей формулой (7.1.11):

$$\begin{aligned}
R(z) &= 1 + z \vec{b}^T (\mathbf{E} - z\mathbf{A})^{-1} \vec{1} = 1 + \frac{z}{2} (1, 1) \begin{pmatrix} 1 - \frac{z}{4} & -\frac{z}{4} + \frac{\sqrt{3}z}{6} \\ -\frac{z}{4} - \frac{\sqrt{3}z}{6} & 1 - \frac{z}{4} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= 1 + \frac{z/2}{\left(1 - \frac{z}{4}\right)^2 - \left(\frac{z^2}{16} - \frac{z^2}{12}\right)} (1, 1) \begin{pmatrix} 1 - \frac{z}{4} & \frac{z}{4} - \frac{\sqrt{3}z}{6} \\ \frac{z}{4} + \frac{\sqrt{3}z}{6} & 1 - \frac{z}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + \frac{z}{\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12}\right)} = \\
&= \frac{z^2 + 6z + 12}{z^2 - 6z + 12}.
\end{aligned}$$

Эта функция является регулярной в левой полуплоскости \mathbb{C}^- и по принципу максимума модуля ее модуль принимает максимальное значение на границе (вертикальная ось $z = iy$).

Напомним определение регулярной функции и принцип максимума модуля (см., например, [5]):

Определение 7.1.6. Функция $f(z)$ комплексного переменного z , однозначно определенная в области G и имеющая в каждой её точке конечную производную, называется регулярной в этой области.

Теорема 7.1.4. Модуль функции, регулярной в некоторой области, не может достигать наибольшего значения внутри этой области, если только функция отлична от тождественной постоянной.

На вертикальной оси $|R(z)| = \left| \frac{12 - y^2 + 6iy}{12 - y^2 - 6iy} \right| \quad \forall y$. Таким образом, метод

A -устойчив, но не L -устойчив, поскольку $\lim_{z \rightarrow -\infty} R(z) \neq 0$.

Пример 2

Определить функцию устойчивости и область устойчивости метода Рунге–Кутты заданного таблицей Бутчера:

0	0	0
2	3/2	1/2
	3/4	1/4

Исследовать его на A - и L -устойчивость.

Решение

Для нахождения функции устойчивости воспользуемся заменами: y_l на Δ_l , f'_y на J

$$f_1 = J\Delta_l; f_2 = J(\Delta_l + \frac{3}{2}Jh\Delta_l + \frac{1}{2}hf_2\Delta_l) \Rightarrow f_2 = \left[J(1 + \frac{3z}{2}) \right] / \left(1 - \frac{z}{2} \right);$$

$$\Delta_{l+1} = \left(1 + \frac{3z}{4} + \frac{z(1 + \frac{3z}{2})}{4(1 - \frac{z}{2})} \right) \Delta_l; \quad R(z) = \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}}.$$

Отображение $q = R(z) = \frac{1 + z/2}{1 - z/2}$ – это взаимно однозначное дробно-линейное отображение из комплексной плоскости z в комплексную плоскость q , которое, как известно, переводит прямые и окружности в прямые либо окружности. Чтобы понять, куда переходит внутренность единичного круга при обратном отображении $z(q) = 2 \left(\frac{q-1}{q+1} \right)$, достаточно

рассмотреть три точки из единичной окружности в комплексной плоскости q . Получаем: $z(1) = 0$, $z(i) = 4i$ и $z(-1) = \infty$. Поскольку отображение $z(q)$ конформное и сохраняет углы, то область, которая остается слева при обходе единичной окружности против часовой стрелки, отображается на область, которая остается слева при обходе вертикальной оси снизу вверх, то есть на левую полуплоскость. Значит, метод является A -устойчивым, но не L -устойчивым (так как $\lim_{z \rightarrow -\infty} R(z) \neq 0$). Тот же ответ можно получить, если заметить, что функция устойчивости у данного метода совпадает с функцией устойчивости неявного метода трапеций или неявного метода средней точки.

Отображение единичной окружности из плоскости $q: z(e^{i\varphi})$ (кривая локуса корней) – это удобный инструмент для расчета сложных областей устойчивости для линейных многошаговых методов.

Пример 3

Покажите, что метод ФДН 2-го порядка $\frac{3y_{l+1} - 4y_l + y_{l-1}}{2h} = f(x_{l+1}, y_{l+1})$ имеет второй порядок аппроксимации и является A -устойчивым.

Решение

Порядок аппроксимации получается из определения (7.1.12) с помощью непосредственной проверки соотношений (7.1.13). Менее тривиально исследование метода на A -устойчивость.

Действуя, как и в случае методов Рунге–Кутты, получаем следующее уравнение для Δ_l : $\frac{3\Delta_{l+1} - 4\Delta_l + \Delta_{l-1}}{2h} = J\Delta_{l+1}$. Подставляя $z = Jh$, получим

следующее линейное разностное уравнение: $3\Delta_{l+1} - 4\Delta_l + \Delta_{l-1} = 2z\Delta_{l+1}$. Его общее решение (при $3 - 2z \neq 0$, что выполняется, так как нам интересна область $\operatorname{Re}(z) \leq 0$) равно $\Delta_l = C_1 q_1^l + C_2 q_2^l$, если корни характеристического уравнения $(3 - 2z)q^2 - 4q + 1 = 0$ различны и $\Delta_l = (C_1 + C_2 l)q^l$, если корни кратные. Область устойчивости S (где решение не возрастает при больших l) – совокупность точек z , для которых все решения $|q_i(z)| \leq 1$ ($|q_i(z)| < 1$ для кратных корней, что выполняется, т.к. $q_1 = q_2 = 1/2$ при $z = -1/2$). Вместо исследования неоднозначного отображения из комплексной плоскости z в комплексную плоскость q рассмотрим обратное (однозначное) отображение, задаваемое формулой $z = \frac{3}{2} - \frac{2}{q} + \frac{1}{2q^2}$. Внеш-

ность единичного круга в плоскости q целиком отображается в правую полуплоскость C^+ плоскости z . Действительно, при $q = \rho e^{i\varphi}$, $\rho \geq 1$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(z(\rho e^{i\varphi})\right) &= \operatorname{Re}\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{\rho e^{i\varphi}} + \frac{1}{2\rho^2 e^{2i\varphi}}\right) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\rho} \cos(\varphi) + \\ &+ \frac{1}{2\rho} (2 \cos^2(\varphi) - 1) = \left(1 - \frac{\cos(\varphi)}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Значит, точки из левой полуплоскости плоскости z при отображении в плоскость q могут перейти только во внутренность единичного круга либо его границу, и схема A -устойчива.

Пример 4

Приведём пример, который показывает, что существуют случаи, когда есть сходимости разностных решений к следу аналитического решения дифференциальной задачи, если область интегрирования — замкнутое множество \bar{E} , принадлежащее открытому множеству D , $\bar{E} \subset D$, но нет сходимости в D .

Предложить численный метод решения задачи Коши ОДУ:

$$\begin{cases} y' + \frac{2y}{x-1} = \frac{2}{x-1}, \\ y(0) = 1, x \in [0,1]; \end{cases} \quad \begin{cases} Ly = y' + \frac{2y}{x-1}, \\ ly = y(0); \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi = \frac{2}{x-1}, \\ \varphi_0 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} Ly = \varphi, \\ ly = \varphi_0. \end{cases}$$

(7.1.14)

Исследовать разностную схему на аппроксимацию и устойчивость. При необходимости использовать операторную форму записи.

Решение

Предварительно напомним определение устойчивости (см. часть I, раздел 6, глава 6.2 данного пособия).

Определение 7.1.7 (устойчивость). Разностная схема устойчива, если существуют константы $h_0 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для всех $h < h_0$ и всех $\varepsilon_0^{(h)}, \varepsilon^{(h)} \in \mathbf{F}_h$, $\|\varepsilon_0^{(h)}\| < \delta$, $\|\varepsilon^{(h)}\| < \delta$ разностная задача

$$\begin{cases} L_h z^{(h)} = \varphi^{(h)} + \varepsilon^{(h)}, \\ l_h z^{(h)} = \varphi_0^{(h)} + \varepsilon_0^{(h)} \end{cases}$$

имеет одно и только одно решение $z^{(h)}$, причём справедлива оценка

$$\|z^{(h)} - y^{(h)}\|_{Y_h} \leq C_\varepsilon \|\varepsilon^{(h)} + \varepsilon_0^{(h)}\|_{F_h},$$

где $C_\varepsilon > 0$ – константа, не зависящая от шага h .

Функция $y \equiv 1$ является решением дифференциальной задачи, что проверяется непосредственно подстановкой этого выражения в дифференциальное уравнение и начальное условие.

Введём в области интегрирования сетку $D_h = \{x_l : x_l = lh, hL = 1, l = \overline{0, L-1}\}$ и применим метод Эйлера первого порядка для решения задачи:

$$\begin{cases} \frac{y_{l+1} - y_l}{h} + \frac{2y_l}{x_l - 1} = \frac{2}{x_l - 1}, \\ y_0 = 1, l = \overline{0, L-2}; \end{cases} \quad \begin{cases} L_h y^{(h)} = \frac{y_{l+1} - y_l}{h} + \frac{2y_l}{x_l - 1}, l = \overline{0, L-2}, \\ l_h y^{(h)} = y_0; \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi^{(h)} = \frac{2}{x_l - 1}, l = \overline{0, L-2}, \\ \varphi_0^{(h)} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} L_h y^{(h)} = \varphi^{(h)}, \\ l_h y^{(h)} = \varphi_0^{(h)}. \end{cases} \quad (7.1.15)$$

1) Исследуем разностную схему на аппроксимацию. Для этого определим сеточную функцию невязки: $\delta f^{(h)} = \begin{cases} L_h[y]_h - \varphi^{(h)}, \\ l_h[y]_h - \varphi_0^{(h)} \end{cases}$, и оценим, к чему будет стремиться её норма при стремлении $h \rightarrow 0$:

$$\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} = \max_l \left| \frac{[y]_{l+1} - [y]_l}{h} + \frac{2[y]_l}{x_l - 1} - \frac{2}{x_l - 1}, l = \overline{0, L-2} \right| \leq C_h h.$$

Следовательно, разностная схема (7.1.15) аппроксимирует дифференциальную задачу (7.1.14) на решении y с порядком, не меньшим, чем первый по шагу h .

2) Для проверки устойчивости разрешим основную подсистему уравнений (7.1.15) относительно y_{l+1} : $y_{l+1} = [1 - 2h / (x_l - 1)]y_l + 2h / (x_l - 1)$, $l = \overline{0, L-2}$. Представим решение разностной задачи (7.1.15) в виде $y_l = (y)_l + \Delta_l$, где $(y)_l \equiv 1$, $l = \overline{0, L-1}$ — точное решение задачи (7.1.15), Δ_l — погрешность, обусловленная округлениями при вычислениях и неточностью задания начальных данных. После подстановки этого выражения в формулу y_{l+1} , получаем $\Delta_{l+1} = [1 - 2h / (x_l - 1)]\Delta_l = [1 + 2h / (1 - x_l)]\Delta_l$, $l = \overline{0, L-2}$. Пусть начальная погрешность равна Δ_0 . Чему будет равна Δ_{L-1} при $h \rightarrow 0$ и $L \rightarrow \infty$? В результате вычислений находим, что

$$\Delta_{L-1} = \prod_{l=0}^{L-2} \left(1 + \frac{2h}{1 - lh} \right) \Delta_0 = \frac{(1 + 2h)(1 + h)}{(1 - (L-3)h)(1 - (L-2)h)} \Delta_0 = \frac{(L+1)(L+2)\Delta_0}{6} \rightarrow \infty$$

при стремлении $L \rightarrow \infty$. Это означает, что разностная схема (7.1.15) неустойчива на полуинтервале $[0, 1)$.

С другой стороны, рассмотрим ту же самую задачу Коши на отрезке $[0, 1 - h_0]$, где $h_0 \rightarrow 0$, но всегда конечно, т.е. $0 < h_0 < 1$. Тогда

$$\Delta_L = \Delta_0 \prod_{l=0}^{L-1} \left(\frac{h_0 + Lh - (l-2)h}{h_0 + Lh - lh} \right) = \Delta_0 \prod_{l=0}^{L-1} \left(\frac{1 - (l-2)h}{1 - lh} \right) \rightarrow c\Delta_0, c = \text{const}, h \rightarrow 0.$$

Следовательно, разностная схема (7.1.15) устойчива на отрезке $[0, 1 - h_0]$, $0 < h_0 < 1$.

Вывод 1: последовательность отображений решений разностных задач, полученных по схеме (7.1.15), сходится в норме выбранного фикси-

рованного конечномерного пространства к следу решения дифференциальной задачи при стремлении шага сетки к нулю $h \rightarrow 0$.

Вывод 2: последовательность одной и той же нормы решений разностных задач, полученных по схеме (7.1.15) в конечномерных пространствах на всё более сгущающихся сетках при стремлении $h \rightarrow 0$, может расходиться.

Задачи

7.1.1. Для решения задачи Коши ОДУ используется диагонально неявный метод Рунге–Кутты (метод Хаммера–Холингсуорта), заданный таблицей Бутчера:

0	0	0
2/3	1/3	1/3
	1/4	3/4

Каков порядок аппроксимации у данного метода? Найдите функцию устойчивости и исследуйте метод на A -устойчивость и L -устойчивость.

7.1.2. Для решения задачи Коши ОДУ используется однократно диагонально неявный метод Рунге–Кутты, заданный таблицей Бутчера:

1	1	0
0	-1	1
	1/2	1/2

Каков порядок аппроксимации у данного метода? Найдите функцию устойчивости и исследуйте метод на A -устойчивость и L -устойчивость.

7.1.3. Для решения задачи Коши ОДУ используется диагонально неявный метод Рунге–Кутты, заданный таблицей Бутчера:

1	1	0
1/3	-1/3	2/3
	1/4	3/4

Каков порядок аппроксимации у данного метода? Найдите функцию устойчивости и исследуйте метод на A -устойчивость, L -устойчивость.

7.1.4. Для решения задачи Коши ОДУ используется диагонально неявный метод Рунге–Кутты, заданный таблицей Бутчера:

0	0	0
2	1	1
	1/2	1/2

Каков порядок аппроксимации у данного метода? Найдите функцию и область устойчивости и исследуйте метод на A -устойчивость, L -устойчивость.

7.1.5. Для решения задачи Коши ОДУ используется диагонально неявный метод Рунге–Кутты, заданный таблицей Бутчера:

0	0	0
3/4	1/4	1/2
<hr/>		
	1/3	2/3

Каков порядок аппроксимации у данного метода? Найдите функцию и область устойчивости и исследуйте метод на A -устойчивость, L -устойчивость.

7.1.6. Для решения задачи Коши ОДУ используется диагонально неявный метод Рунге–Кутты, заданный таблицей Бутчера:

0	0	0
3	2	1
<hr/>		
	2/3	1/3

Каков порядок аппроксимации у данного метода? Найдите функцию и область устойчивости и исследуйте метод на A -устойчивость, L -устойчивость.

7.1.7. Для решения задачи Коши ОДУ используется диагонально неявный метод Рунге–Кутты, заданный таблицей Бутчера:

0	0	0
3/2	1	1/2
<hr/>		
	2/3	1/3

Каков порядок аппроксимации у данного метода? Найдите функцию и область устойчивости и исследуйте метод на A -устойчивость, L -устойчивость.

7.1.8. Для решения жестких систем ОДУ используется однократно диагонально неявный метод Рунге–Кутты, заданный таблицей Бутчера:

γ	γ	0
$1-\gamma$	$1-2\gamma$	γ
<hr/>		
	1/2	1/2

При каких значениях параметра γ метод имеет третий порядок аппроксимации? Найдите функцию устойчивости. При каких значениях γ метод A -устойчив? L -устойчив?

7.1.9. Для решения задачи Коши используется численный метод Рунге–Кутты, заданный таблицей Бутчера:

$$\left. \begin{array}{l} y' + 5y^5 + 2 \sin \pi y = 0 \\ y(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\}, \quad \begin{array}{c|cc} 1/9 & 1/9 & 0 \\ 8/9 & 7/9 & 1/9 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Определите его функцию устойчивости и исследуйте на выполнение условий A -, L -устойчивости при вещественных значениях z . Получите условие устойчивости в области $y(0) = 1$.

7.1.10. Для решения задачи Коши используется численный метод Рунге–Кутты, заданный таблицей Бутчера:

$$\left. \begin{array}{l} y' + 5y^4 = 0 \\ y(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\}; \quad \begin{array}{c|cc} 1/5 & 1/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 1/5 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Определите его функцию устойчивости и исследуйте на выполнение условий A -, L -устойчивости при вещественных значениях z . Получите условие устойчивости в области $y(0) = 1$.

7.1.11. Для решения задачи Коши используется численный метод Рунге–Кутты, заданный таблицей Бутчера:

$$\left. \begin{array}{l} y' + 10y^3 = 0 \\ y(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\}; \quad \begin{array}{c|cc} 1/6 & 1/6 & 0 \\ 5/6 & 4/6 & 1/6 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Определите его функцию устойчивости и исследуйте на выполнение условий A -, L -устойчивости при вещественных значениях z . Получите условие устойчивости в области $y(0) = 1$.

7.1.12. Для решения задачи Коши используется численный метод Рунге–Кутты, заданный таблицей Бутчера:

$$\left. \begin{array}{l} y' + 20y^2 = 0 \\ y(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\}; \quad \begin{array}{c|cc} 1/7 & 1/7 & 0 \\ 6/7 & 5/7 & 1/7 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Определите его функцию устойчивости и исследуйте на выполнение условий A -, L -устойчивости при вещественных значениях z . Получите условие устойчивости в области $y(0) = 1$.

7.1.13. Для решения задачи Коши используется численный метод Рунге–Кутты, заданный таблицей Бутчера. Каков порядок аппроксимации данного метода? Получите для него функцию устойчивости и условие устойчивости при $y(0) = 1$, исследуйте на A - и L -устойчивость:

$$\left. \begin{array}{l} y' + 100y + 10001 \sin x = 0 \\ y(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\}; \quad \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}$$

7.1.14. Для решения задачи Коши используется численный метод Рунге–Кутты, заданный таблицей Бутчера. Каков порядок аппроксимации данного метода? Получите для него функцию устойчивости и условие устойчивости при $y(0) = 1$, исследуйте на A - и L -устойчивость:

$$\left. \begin{array}{l} y' + 300y + 90001 \sin x = 0 \\ y(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\};$$

0	0	0	0
1	1	0	0
1/2	1/4	1/4	0
	1/6	1/6	2/3

7.1.15. Для решения задачи Коши используется численный метод Рунге–Кутты, заданный таблицей Бутчера. Каков порядок аппроксимации данного метода? Получите для него функцию устойчивости и условие устойчивости при $y(0) = 1$, исследуйте на A - и L -устойчивость:

$$\left. \begin{array}{l} y' + 200y + 40001 \sin x = 0 \\ y(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\};$$

0	0	0	0
2/3	2/3	0	0
2/3	-1/3	1	0
	1/4	1/2	1/4

7.1.16. Для решения задачи Коши используется численный метод Рунге–Кутты, заданный таблицей Бутчера. Каков порядок аппроксимации данного метода? Получите для него функцию устойчивости и условие устойчивости при $y(0) = 1$, исследуйте на A - и L -устойчивость:

$$\left. \begin{array}{l} y' + 5y^5 + 2 \sin \pi x = 0 \\ y(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\};$$

0	0	0	0
1/2	1/4	1/4	0
1	0	1	0
	1/6	2/3	1/6

7.1.17. Докажите теорему 7.1.2.

7.1.18. Покажите, что явный метод Адамса второго порядка

$$\frac{y_{l+1} - y_l}{h} = \frac{3}{2} f(x_l, y_l) - \frac{1}{2} f(x_{l-1}, y_{l-1})$$

имеет второй порядок аппроксимации и не является A -устойчивым.

7.1.19. Покажите, что явный метод Адамса третьего порядка

$$\frac{y_{l+1} - y_l}{h} = \frac{23}{12} f(x_l, y_l) - \frac{16}{12} f(x_{l-1}, y_{l-1}) + \frac{5}{12} f(x_{l-2}, y_{l-2})$$

имеет третий порядок аппроксимации и не является A -устойчивым. Как еще можно получить этот результат?

7.1.20. Покажите, что неявный метод Адамса третьего порядка

$\frac{y_{l+1} - y_l}{h} = \frac{5}{12} f(x_{l+1}, y_{l+1}) + \frac{8}{12} f(x_l, y_l) - \frac{1}{12} f(x_{l-1}, y_{l-1})$ имеет третий порядок аппроксимации и не является A -устойчивым. Как еще можно получить этот результат?

7.1.21. Покажите, что метод ФДН 3-го порядка $\sum_{j=1}^3 \frac{\nabla^j}{jh} y_{l+1} = f(x_{l+1}, y_{l+1})$, где

$\nabla y_l = y_l - y_{l-1}$ – конечная разность назад, имеет третий порядок аппроксимации и не является A -устойчивым.

7.2. Жёсткие уравнения и системы уравнений

Существуют классы задач для дифференциальных уравнений, решения которых с требуемой точностью интересуют исследователей не во всей области интегрирования, а только в определённых её частях. При численном интегрировании такого рода задач для достижения требуемой точности в одних разностных схемах, например явных, требуется существенно более мелкий шаг сетки, чем для других – неявных. Это обусловлено, с одной стороны, общими свойствами решений дифференциальных задач, а с другой стороны, вопросами устойчивости выбранных численных методов для конкретных уравнений, начальных и граничных условий.

Рассмотрим задачу Коши для линейного ОДУ первого порядка:

$$\begin{cases} y' + 1000y = 1000, \\ y(0) = 1, \quad x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (7.2.1)$$

Её решение: $y \equiv 1$. Введём в области интегрирования задачи (7.2.1) сетку $D_h = \{x_l : x_l = hl, Lh = 1, l = \overline{0, L}\}$ и для её решения применим два метода первого порядка аппроксимации по h .

Явный метод Эйлера:

$$\begin{cases} \frac{y_{l+1} - y_l}{h} + 1000y_l = 1000, \quad l = \overline{0, L-1}, \\ y_0 = 1. \end{cases} \quad (7.2.2)$$

Исследуем метод (7.2.2) на устойчивость:

$$\Delta_{l+1} = (1 - 1000h)\Delta_l = (1 - 1000h)^{l+1} \Delta_0, \quad -1 \leq 1 - 1000h \leq 1 \Rightarrow h \in (0, 1/500).$$

Достаточно существенное ограничение на шаг сетки и при его нарушении будут наблюдаться возрастающие осцилляции в численном решении.

Неявный метод Эйлера:

$$\begin{cases} \frac{y_{l+1} - y_l}{h} + 1000y_{l+1} = 1000, \quad l = \overline{0, L-1}, \\ y_0 = 1. \end{cases} \quad (7.2.3)$$

Проверим устойчивость метода (7.2.3):

$$\Delta_{l+1} = \Delta_l / (1 + 1000h) = \Delta_0 / (1 + 1000h)^{l+1}.$$

Метод – *безусловно устойчив*. Погрешность при расчётах обусловлена в основном величиной невязки и слабо зависит от ошибок округлений при вычислениях.

Рассмотрим задачу Коши для общей системы нелинейных уравнений (7.1.1). Поведение ее решения вблизи некоторой точки (x_0, \vec{y}_0) определяется матрицей Якоби $\mathbf{J}(x)$ (см. формулу (7.1.3)).

Определение 7.2.1. Система (7.1.1) называется жесткой, если для всех $(x, \vec{y}(x))$ (на решениях системы) собственные значения матрицы $\mathbf{J}(x)$ удовлетворяют условиям $\max_j |\operatorname{Re} \lambda_j| / \min_k |\operatorname{Re} \lambda_k| \gg 1$, $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$, $\max_j |\operatorname{Im} \lambda_j| \ll \max_k |\operatorname{Re} \lambda_k| \quad \forall j, k$. Число $s = \max_i |\operatorname{Re} \lambda_i| / \min_k |\operatorname{Re} \lambda_k|$ называется

числом жесткости системы.

Более подробно познакомиться с численными методами решения жестких уравнений и систем уравнений можно по специальной литературе [2, 3, 4].

Упражнения

Пример 1

Для решения задачи Коши системы ОДУ используется численный метод Рунге–Кутты, заданный таблицей Бутчера:

$$\left. \begin{aligned} u' &= -800u + 4 \cdot 10^{-2}v + 2 \cdot 10^{-2}w, \quad u(0) = 0, \\ v' &= -5v - 3w, \quad v(0) = 4, \\ w' &= v - w, \quad w(0) = 6, \end{aligned} \right\}$$

1/5	1/5	0
4/5	3/5	1/5
	1/2	1/2

Получите для него функцию и условие устойчивости. Вычислите число жесткости.

Решение

Вычислим функцию устойчивости, используя формулу (7.1.11) (см. также задачу 7.1.8.):

$$R(z) = \frac{1 + \frac{3}{5}z + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5} + \frac{1}{25}\right)z^2}{1 - \frac{2}{5}z + \frac{1}{25}z^2}.$$

Матрица $\mathbf{J}(x)$ (см. формулу (7.1.3)) постоянна и ее собственные значения $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = -800$ лежат на действительной оси. Так как $z_i = \lambda_i h$, то и функцию устойчивости достаточно исследовать на действительной оси. Область устойчивости определяется из условия $|R(z)| \leq 1$. Получаем $\operatorname{Im} z_i = 0$, $\operatorname{Re} z_i (1 + \operatorname{Re} z_i / 10) \leq 0$, $i = 1, 2, 3$.

Шаг интегрирования, который удовлетворяет всем условиям $h \in (0, 10/800]$. Число жесткости $s = 800/2 = 400$.

Задачи

7.2.1. Для решения задачи Коши системы ОДУ используется численный метод Рунге–Кутты, заданный таблицей Бутчера:

$$\left. \begin{aligned} u' &= -400u, u(0) = 1, \\ v' &= 3 \cdot 10^{-2}u - 10v + w, v(0) = -1, \\ w' &= -4 \cdot 10^{-2}u - 12v - 2w, w(0) = 0, \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{c|cc} 1/8 & 1/8 & 0 \\ 7/8 & 3/4 & 1/8 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Получите для него функцию и условие устойчивости. Вычислите число жесткости.

7.2.2. Для решения задачи Коши системы ОДУ используется численный метод Рунге–Кутты, заданный таблицей Бутчера:

$$\left. \begin{aligned} u' &= -3u + 2w, u(0) = 1, \\ v' &= 3 \cdot 10^{-2}u - 800v + 5 \cdot 10^{-2}w, v(0) = 1, \\ w' &= u - 4w, w(0) = 0, \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{c|cc} 1/10 & 1/10 & 0 \\ 9/10 & 8/10 & 1/10 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Получите для него функцию и условие устойчивости. Вычислите число жесткости.

7.2.3. Для решения задачи Коши системы ОДУ используется численный метод Рунге–Кутты, заданный таблицей Бутчера:

$$\left. \begin{aligned} u' &= -5u + 3 \cdot 10^{-2}v + 2w, u(0) = 2, \\ v' &= -800v, v(0) = 4, \\ w' &= -u - 5 \cdot 10^{-3}v - 2w, w(0) = 6, \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{c|cc} 1/6 & 1/6 & 0 \\ 5/6 & 4/6 & 1/6 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Получите для него функцию и условие устойчивости. Вычислите число жесткости.

7.2.4. Для решения задачи Коши системы ОДУ используется численный метод Рунге–Кутты, заданный таблицей Бутчера:

$$\left. \begin{aligned} u' &= -5u + 2v, u(0) = 1, \\ v' &= -4u + v, v(0) = 1, \\ w' &= 5 \cdot 10^{-2}u - 3 \cdot 10^{-2}v - 800w, w(0) = 1, \end{aligned} \right\}$$

1 / 7	1 / 7	0
6 / 7	5 / 7	1 / 7
	1 / 2	1 / 2

Получите для него функцию и условие устойчивости. Вычислите число жёсткости.

Ответы к задачам раздела 7

7.1.1. $p = 3$, $R(z) = \frac{z^2 + 4z + 6}{6 - 2z}$, не A -устойчив.

7.1.2. $p = 2$, $R(z) = \frac{-z^2 - 2z + 2}{z^2 - 2z + 1}$, не A -устойчив.

7.1.3. $p = 3$, $R(z) = \frac{-6z^2 - 8z + 15}{8z^2 - 20z + 12}$, не A -устойчив.

7.1.8. $p = 2$ ($p = 3$ при $\gamma = (1 \pm 1/\sqrt{3})/2$),

$$R(z) = \frac{z^2(1 - 4\gamma + 2\gamma^2) + z(2 - 4\gamma) + 2}{2(1 - \gamma z)^2}, \text{ } A\text{-устойчив при } \gamma \geq 1/4 \text{ (для дока-}$$

зательства можно использовать принцип максимума модуля), L -устойчив при $\gamma = 1 \pm 1/\sqrt{2}$.

7.1.9. $h \in \left(0, \frac{18}{5(25 - 2\pi)}\right]$ (см. 7.1.8).

7.1.10. $h \in (0, 1/2]$ (см. 7.1.8).

7.1.11. $h \in (0, 1/5]$ (см. 7.1.8).

7.1.12. $h \in (0, 7/60]$ (см. 7.1.8).

7.1.13. $p = 3$, $R(z) = 1 + z + z^2/2 + z^3/6$, $|1 - 10^2h + 10^4h^2/2 - 10^6h^3/6| \leq 1$
не A -устойчив, не L -устойчив.

7.1.16. $p = 4$, $R(z) = \frac{4 + 3z + z^2 + z^3/6}{4 - z}$, $\left| \frac{4 - 75h + 625h^2 - 15625h^3/6}{4 + 25h} \right| \leq 1$, не
 A -устойчив, не L -устойчив.

7.1.19. Указание: характеристическое уравнение имеет вид

$q^3 - \left(1 + \frac{23z}{12}\right)q^2 + \frac{4z}{3}q - \frac{5z}{12} = 0$. При $z = -3$ по теореме Виета корни удовлетворяют $q_1 q_2 q_3 = -5/4 \Rightarrow \exists i : |q_i| > 1$. Можно также воспользоваться теоремой 7.1.3.

7.1.20. Указание: решите квадратное характеристическое уравнение и найдите $z \in C^- : |q_i(z)| > 1$ хотя бы для одного i .

7.2.1. $h \in (0, 1/100]$, $s = 100$.

7.2.2. $h \in (0, 1/240]$, $s = 400$.

7.2.3. $h \in (0, 3/200]$, $s = 400/3$.

7.2.4. $h \in (0, 7/1200]$, $s = 800$.

Литература к разделу 7

1. Хайрер Э., Нёрсетт С.П., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. — М.: Мир, 1990. — 512 с.
2. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. — М.: Мир, 1999. — 685 с.
3. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. — М.: МФТИ, 1994. — 528 с.
4. Холодов А.С., Лобанов А.И., Евдокимов А.В. Разностные схемы для решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве неопределенных коэффициентов. — М.: МФТИ, 1985. — 49 с.
5. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. — М.: Наука, 1968. — 648 с.

8. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (ОДУ). КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

К краевым задачам ОДУ n -го порядка, имеющего вид $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$, где $n \geq 2$, относят задачи, для которых в заданном наборе точек x_k , $k = \overline{1, m}$, $m \geq 2$ поставлены дополнительные условия $G_j(y(x_1), y'(x_1), \dots, y^{(S_1)}(x_1), \dots, y(x_k), y'(x_k), \dots, y^{(S_k)}(x_k)) = 0$, $k \geq 2$, $S_k \leq n - 1$ на искомую функцию и производные от неё до порядка $n - 1$ включительно.

8.1. Линейные краевые задачи. Метод построения общего решения

Вначале остановимся на численных методах решения линейных краевых задач ОДУ второго порядка с переменными коэффициентами и разберём метод, который называется методом построения общего решения. Он допускает замену краевых задач задачами Коши, способы, решения которых были рассмотрены в разделах 6, 7 данного пособия. Пусть поставлена краевая задача ОДУ второго порядка:

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), & x \in [0, X], \\ \mu_0 y(0) + \mu_1 y'(0) = \varphi_0, & \mu_0, \mu_1, \varphi_0 - \text{const}, \\ \nu_0 y(0) + \nu_1 y'(0) = \varphi_1, & \nu_0, \nu_1, \varphi_1 - \text{const}; \end{cases} \quad (8.1.1)$$

Будем искать решение задачи (8.1.1) в виде $y(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + Y(x)$, где $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ — частные линейно независимые решения однородного ОДУ второго порядка, $Y(x)$ — частное решение неоднородного дифференциального уравнения, C_1 , C_2 — постоянные:

1. $\begin{cases} Y_1''(x) + p(x)Y_1'(x) + q(x)Y_1(x) = 0, \\ x \in [0, X], Y_1(0) = 0, Y_1'(0) = 1; \end{cases}$
2. $\begin{cases} Y_2''(x) + p(x)Y_2'(x) + q(x)Y_2(x) = 0, \\ x \in [0, X], Y_2(0) = 1, Y_2'(0) = 0; \end{cases}$

$$3. \quad \begin{cases} Y''(x) + p(x)Y'(x) + q(x)Y(x) = f(x), \\ x \in [0, X], Y(0) = 0, Y'(0) = 0. \end{cases}$$

Введём в области интегрирования сетку $D_h = \{x_l : x_l = hl, l = \overline{0, L}, hl = X\}$ и решим каким-либо из известных разностных методов задачи Коши 1, 2 и 3. В результате определим все значения сеточных функций: $(Y_1)_l, (Y_2)_l, (Y)_l, (Y'_1)_l, (Y'_2)_l, (Y')_l, l = \overline{0, L}$ в узлах сетки и после подстановки в краевые условия (8.1.1) получим два уравнения относительно C_1, C_2 :

$$\begin{cases} \mu_0 [C_1(Y_1)_0 + C_2(Y_2)_0 + C_1(Y)_0] + \mu_1 [C_1(Y'_1)_0 + C_2(Y'_2)_0 + C_1(Y')_0] = \varphi_0, \\ \nu_0 [C_1(Y_1)_L + C_2(Y_2)_L + C_1(Y)_L] + \nu_1 [C_1(Y'_1)_L + C_2(Y'_2)_L + C_1(Y')_L] = \varphi_1, \end{cases}$$

или с учётом начальных условий задач 1, 2 и 3:

$$\begin{cases} \mu_0 C_2 + \mu_1 C_1 = \varphi_0, \\ \nu_0 [C_1(Y_1)_L + C_2(Y_2)_L + C_1(Y)_L] + \nu_1 [C_1(Y'_1)_L + C_2(Y'_2)_L + C_1(Y')_L] = \varphi_1. \end{cases}$$

Решая эту систему из двух уравнений относительно C_1, C_2 , получаем ответ краевой задачи (8.1.1) в конечномерном пространстве на сетке D_h :

$$y_l = C_1(Y_1)_l + C_2(Y_2)_l + (Y)_l, \quad l = \overline{0, L}. \quad (8.1.2)$$

Упражнения

Пример 1

Построить конечномерное приближение к общему решению обыкновенного дифференциального уравнения $y'' + 10xy - 2y = 1, 0 \leq x \leq 2$ на сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, h = 1, l = 0 \div 2\}$.

Решение

Для данного уравнения второго порядка общее решение есть сумма $y(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + Y(x)$ (см. 8.1), где

$$\begin{cases} Y_1''(x) + 10xY_1'(x) - 2Y_1(x) = 0, \\ x \in [0, 2], Y_1(0) = 0, Y_1'(0) = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_2''(x) + 10xY_2'(x) - 2Y_2(x) = 0, \\ x \in [0, 2], Y_2(0) = 1, Y_2'(0) = 0; \\ Y''(x) + 10xY'(x) - 2Y(x) = 1, \\ x \in [0, 2], Y(0) = 0, Y'(0) = 0. \end{cases}$$

Решение неоднозначно и зависит от метода построения численного решения этих задач.

Первый способ. Сведем эти задачи к системам уравнений первого порядка на функции $Y_1(x)$, $Y_1'(x)$, $Y_2(x)$, $Y_2'(x)$, $Y(x)$, $Y'(x)$:

$$\begin{cases} (Y_1(x))' = Y_1'(x), Y_1(0) = 0, x \in [0, 2], \\ (Y_1'(x))' = -10xY_1'(x) + 2Y_1(x), Y_1'(0) = 1; \\ (Y_2(x))' = Y_2'(x), Y_2(0) = 1, x \in [0, 2], \\ (Y_2'(x))' = -10xY_2'(x) + 2Y_2(x), Y_2'(0) = 0; \\ (Y(x))' = Y'(x), Y(0) = 0, x \in [0, 2], \\ (Y'(x))' = -10xY'(x) + 2Y(x) + 1, Y'(0) = 0. \end{cases}$$

Найдем, например, значения сеточных функций $(Y_1)_k$, $(Y_1')_k$, $k = 0, 1, 2$, с помощью явного метода Эйлера. Значения сеточных функций $(Y_1)_0 = 0$, $(Y_1')_0 = 1$ берем из начальных данных. Получаем

$$\begin{aligned} (Y_1)_1 &= (Y_1)_0 + (Y_1')_0 \cdot h = 1, \quad (Y_1')_1 = (Y_1')_0 + (-10 \cdot 0 \cdot (Y_1')_0 + 2(Y_1)_0) \cdot h = 1, \\ (Y_1)_2 &= (Y_1)_1 + (Y_1')_1 \cdot h = 2. \end{aligned}$$

Таким образом, $\vec{Y}_1 = (0, 1, 2)^T$. Аналогично находим $\vec{Y}_2 = (1, 1, 3)^T$, $\vec{Y} = (0, 0, 1)^T$.

Ответ: $\vec{y} = C_1(0, 1, 2)^T + C_2(1, 1, 3)^T + (0, 0, 1)^T$.

Второй способ. Вместо того, чтобы решать каждую из трех дифференциальных задач одним из методов Рунге–Кутты, приблизим первые и вторые производные конечными разностями и решим полученную систе-

му линейных уравнений. Это решение тоже неоднозначно. Например, на сеточную функцию $(Y_1)_l$ получаем следующие соотношения:

$$\frac{(Y_1)_3 - 2(Y_1)_2 + (Y_1)_1}{1^2} + 10 \cdot 1 \frac{(Y_1)_3 - (Y_1)_1}{2 \cdot 1} - 2(Y_1)_2 = 0,$$

$$(Y_1)_1 = 0, \quad \frac{(Y_1)_2 - (Y_1)_1}{1} = 1.$$

Отсюда $\vec{Y}_1 = (0, 1, 2/3)^T$. Аналогично находим $\vec{Y}_2 = (1, 1, 4/3)^T$, $\vec{Y} = (0, 0, 1/6)^T$.

Ответ: $\vec{y} = C_1(0, 1, 2/3)^T + C_2(1, 1, 4/3)^T + (0, 0, 1/6)^T$.

Задачи

8.1.1. Построить конечномерное приближение к общему решению обыкновенного дифференциального уравнения $y''(x) + xy(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$ на сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, hL = 1, l = 0 \div L, L = 2\}$. Определить константы, при которых решение удовлетворяет краевым условиям $y(0) = 1$, $y(1) = 1$.

8.1.2. Построить конечномерное приближение к общему решению обыкновенного дифференциального уравнения $y''(x) - \frac{x}{2}y'(x) + y(x) = 2$,

$0 \leq x \leq 1$ на сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, hL = 1, l = 0 \div L, L = 2\}$. Определить константы, при которых решение удовлетворяет краевым условиям $y(0) = 1$, $y(1) = -1$.

8.1.3. Построить конечномерное приближение к общему решению обыкновенного дифференциального уравнения $y''(x) + \frac{3x}{5}y'(x) - 2y(x) = 1$,

$0 \leq x \leq 1$ на сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, hL = 1, l = 0 \div L, L = 2\}$. Определить константы, при которых решение удовлетворяет краевым условиям $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

8.1.4. Построить конечномерное приближение к общему решению обыкновенного дифференциального уравнения $y''(x) - \frac{1}{2}y'(x) - 3y(x) = 2x^2$,

$0 \leq x \leq 1$ на сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, hL = 1, l = 0 \div L, L = 2\}$. Определить кон-

станты, при которых решение удовлетворяет краевым условиям $y(0) = 1$, $y(1) = -1$.

8.1.5. Построить конечномерное приближение к общему решению обыкновенного дифференциального уравнения $y''(x) + y(x) = -x$, $0 \leq x \leq 1$ на сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, hL = 1, l = 0 \div L, L = 2\}$.

8.1.6. Построить конечномерное приближение к общему решению обыкновенного дифференциального уравнения $y''(x) + \sin(x)y(x) = \cos(x)$, $0 \leq x \leq \pi/2$ на сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, hL = \pi/2, l = 0 \div L, L = 2\}$.

8.1.7. Построить конечномерное приближение к общему решению обыкновенного дифференциального уравнения $y''(x) + xy'(x) + y(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$ на сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, hL = 1, l = 0 \div L, L = 2\}$.

8.1.8. Построить конечномерное приближение к общему решению обыкновенного дифференциального уравнения $y''(x) - xy'(x) = 1$, $0 \leq x \leq 1$ на сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, hL = 1, l = 0 \div L, L = 2\}$.

8.1.9. Построить конечномерное приближение к общему решению обыкновенного дифференциального уравнения $y''(x) - x^2 y(x) = 1$, $0 \leq x \leq 1$ на сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, hL = 1, l = 0 \div L, L = 2\}$.

8.1.10. Построить конечномерное приближение к общему решению обыкновенного дифференциального уравнения $y''(x) + 6xy'(x) - 6y(x) = 4$, $0 \leq x \leq 2$ на сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, hL = 1, l = 0 \div L, L = 2\}$.

8.1.11. Построить конечномерное приближение к общему решению обыкновенного дифференциального уравнения $y''(x) + 2xy'(x) + y(x) = 1$, $0 \leq x \leq 2$ на сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, hL = 1, l = 0 \div L, L = 2\}$.

8.2. Линейные краевые задачи. Метод прогонки

Другой способ решения краевых задач ОДУ, аналогичных (8.1.1), носит название метода прогонки. В нём сразу вводится разностная сетка $D_h = \{x_l : x_l = hl, l = \overline{0, L}, hl = X\}$ и в узловых точках производные заменяются конечно-разностными отношениями по формулам численного дифференцирования:

$$\begin{cases} \mu_0 y_0 + \mu_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = \varphi_0, \\ \frac{y_{l+1} - 2y_l + y_{l-1}}{h^2} + p_l \frac{y_{l+1} - y_{l-1}}{2h} + q_l y_l = f_l, \quad l = \overline{1, L-1}, \\ \nu_0 y_L + \nu_1 \frac{y_L - y_{L-1}}{h} = \varphi_1. \end{cases} \quad (8.2.1)$$

Разностная задача (8.2.1) представляет собой систему линейных уравнений порядка $L+1$ относительно неизвестных значений сеточной функции y_l , $l = \overline{0, L}$. Тожественными преобразованиями приведём подобные члены в (8.2.1) и переобозначим коэффициенты при неизвестных:

$$\begin{aligned} a_0 &= \mu_1, \quad b_0 = \mu_0 h - \mu_1, \quad c_0 = 0, \quad d_0 = \varphi_0 h; \\ a_l &= 2 + p_l h, \quad b_l = -4 + 2q_l h^2, \quad c_l = 2 - p_l h, \quad d_l = 2f_l h^2, \quad l = \overline{1, L-1}; \\ a_L &= 0, \quad b_L = \nu_0 h + \nu_1, \quad c_L = -\nu_1, \quad d_L = \varphi_1 h. \end{aligned}$$

С учётом новых обозначений разностная задача (8.2.1) примет стандартный вид:

$$\begin{cases} a_0 y_1 + b_0 y_0 = d_0, \\ a_l y_{l+1} + b_l y_l + c_l y_{l-1} = d_l, \quad l = \overline{1, L-1}, \\ b_L y_L + c_L y_{L-1} = d_L. \end{cases} \quad (8.2.2)$$

Для её решения применяется метод, получивший название прогонки и состоящий из двух этапов: прямой и обратной прогонки.

Прямая прогонка. На этом этапе система линейных уравнений (8.2.2) с трёхдиагональной матрицей приводится путём тождественных преобразований к виду с двухдиагональной матрицей путём вычисления прогоночных коэффициентов по рекуррентным формулам. Вначале преобразуем первое уравнение (8.2.2): $y_0 = -a_0 y_1 / b_0 + d_0 / b_0 = \alpha_0 y_1 + \beta_0$, $\alpha_0 = -a_0 / b_0$, $\beta_0 = d_0 / b_0$. Далее воспользуемся методом индукции и предположим, что $l-1$ уравнение системы (8.2.2) может быть записано в виде $y_{l-1} = \alpha_{l-1} y_l + \beta_{l-1}$, где коэффициенты α_{l-1} , β_{l-1} предполагаются известными. Подставим выражение y_{l-1} в l уравнение (8.2.2) $a_l y_{l+1} + b_l y_l + c_l y_{l-1} = d_l$ и разрешим относительно y_l : $y_l = \alpha_l y_{l+1} + \beta_l$, $\alpha_l = -a_l / (b_l + c_l \alpha_{l-1})$, $\beta_l = (d_l - c_l \beta_{l-1}) / (b_l + c_l \alpha_{l-1})$, $l = \overline{1, L-1}$. В итоге становятся известными массивы коэффициентов α_l , β_l , $l = \overline{1, L-1}$. Запишем последние два уравнения системы (8.2.2), учитывая выполненные преобразования:

$$\begin{cases} y_{L-1} = \alpha_{L-1}y_L + \beta_{L-1}, \\ b_L y_L + c_L y_{L-1} = d_L. \end{cases} \quad (8.2.3)$$

Решая (8.2.3), находим $y_L = (d_L - c_L \beta_{L-1}) / (b_L + c_L \alpha_{L-1})$. Этим заканчивается прямой ход прогонки.

Обратная прогонка. Здесь находятся все неизвестные значения сеточной функции по формулам: $y_l = \alpha_l y_{l+1} + \beta_l$, $l = \overline{L-1, 1}$.

В результате система уравнений (8.2.2) решена и найдена неизвестная сеточная функция из (8.2.1). Заметим, что метод прогонки устойчив при диагональном преобладании, т.е. если $|b_l| \geq |a_l| + |c_l|$, $l = \overline{1, L-1}$ и хотя бы для одного l выполняется строгое неравенство.

При аппроксимации более высокого порядка дифференциальной задачи (8.1.1) возникают многоточечные разностные уравнения. Наиболее часто встречаются системы пятиточечных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} c_0 y_0 + b_0 y_1 + a_0 y_2 = f_0, \\ d_1 y_0 + c_1 y_1 + b_1 y_2 + a_1 y_3 = f_1, \\ e_l y_{l-2} + d_l y_{l-1} + c_l y_l + b_l y_{l+1} + a_l y_{l+2} = f_l, \quad l = \overline{2, L-2}, \\ e_{L-1} y_{L-3} + d_{L-1} y_{L-2} + c_{L-1} y_{L-1} + b_{L-1} y_L = f_{L-1}, \\ e_L y_{L-2} + d_L y_{L-1} + c_L y_L = f_L. \end{cases}$$

По аналогии с трехдиагональным случаем можно по индукции доказать справедливость прогоночных соотношений $y_l = \alpha_l y_{l+1} + \beta_l y_{l+2} + \gamma_l$, причем $\alpha_l, \beta_l, \gamma_l$ рекуррентно вычисляются. Получим эти соотношения. Выразим сначала y_0 из первого уравнения:

$$y_0 = -\frac{b_0}{c_0} y_1 - \frac{a_0}{c_0} y_2 + \frac{f_0}{c_0} \equiv \alpha_0 y_1 + \beta_0 y_2 + \gamma_0.$$

Подставив y_0 во второе уравнение, выражаем y_1 :

$$y_1 = -\frac{b_1 + d_1 \beta_0}{c_1 + d_1 \alpha_0} y_2 - \frac{a_1}{c_1 + d_1 \alpha_0} y_3 + \frac{f_1}{c_1 + d_1 \alpha_0} \equiv \alpha_1 y_2 + \beta_1 y_3 + \gamma_1.$$

Далее, получаем формулы для $\alpha_l, \beta_l, \gamma_l$ справедливые при $l = 2, \dots, L-2$:

$$(d_l + e_l \alpha_{l-2}) y_{l-1} + (c_l + e_l \beta_{l-2}) y_l + b_l y_{l+1} + a_l y_{l+2} = f_l - e_l \gamma_{l-2},$$

$$\begin{aligned} y_l = & -\frac{b_l + (d_l + e_l \alpha_{l-2}) \beta_{l-1}}{c_l + e_l \beta_{l-2} + (d_l + e_l \alpha_{l-2}) \alpha_l} y_{l+1} - \frac{a_l}{c_l + e_l \beta_{l-2} + (d_l + e_l \alpha_{l-2}) \alpha_l} y_{l+2} + \\ & + \frac{f_l - e_l \gamma_{l-2}}{c_l + e_l \beta_{l-2} + (d_l + e_l \alpha_{l-2}) \alpha_l} \equiv \alpha_l y_{l+1} + \beta_l y_{l+2} + \gamma_l. \end{aligned}$$

Для описания прямого хода прогонки осталось показать, как найти y_{L-1}, y_L . Их можно получить из прогоночных соотношений для y_{L-3}, y_{L-2} и последних двух уравнений системы:

$$\begin{cases} e_{L-1}y_{L-3} + d_{L-1}y_{L-2} + c_{L-1}y_{L-1} + b_{L-1}y_L = f_{L-1}, \\ e_L y_{L-2} + d_L y_{L-1} + c_L y_L = f_L, \\ (d_{L-1} + e_{L-1}\alpha_{L-3})y_{L-2} + (c_{L-1} + e_{L-1}\beta_{L-3})y_{L-1} + b_{L-1}y_L = f_{L-1} - e_{L-1}\gamma_{L-1}, \\ (d_L + e_L\alpha_{L-2})y_{L-1} + (c_L + e_L\beta_{L-2})y_L = f_L - e_L\gamma_{L-2}, \\ \begin{cases} (c_{L-1} + e_{L-1}\beta_{L-3} + (d_{L-1} + e_{L-1}\alpha_{L-3})\alpha_{L-2})y_{L-1} + (b_{L-1} + (d_{L-1} + e_{L-1}\alpha_{L-3})\beta_{L-2})y_L = \\ = f_{L-1} - e_{L-1}\gamma_{L-1} - (d_{L-1} + e_{L-1}\alpha_{L-3})\gamma_{L-2}, \\ (d_L + e_L\alpha_{L-2})y_{L-1} + (c_L + e_L\beta_{L-2})y_L = f_L - e_L\gamma_{L-2}. \end{cases} \end{cases}$$

Условия корректности метода (отсутствия деления на ноль) можно посмотреть, например, в [2]. Обратный ход состоит в рекуррентном вычислении y_l , используя прогоночные соотношения.

Более подробно о методах решения разностных уравнений и их устойчивости можно познакомиться в [2].

Упражнения

Пример 1

На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, h = 1/L, l = 0 \div L\}$ аппроксимировать системой разностных уравнений краевую задачу $y''(x) + qy(x) = f(x)$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$, $0 \leq x \leq 1$, $q = \text{const}$ с порядками $O(h^2)$ и $O(h^4)$. Как повысить порядок аппроксимации до четырех, имея трехдиагональную матрицу СЛАУ на сеточную функцию?

Решение

Пусть y_l — значение сеточной функции в узле l , $f_l = f(x_l)$. Приближим значение $y''(x_l) \approx \frac{y(x_l + h) - 2y(x_l) + y(x_l - h))}{h^2} + O(h^2)$. Получим систему из $L-1$ линейных уравнений на $L+1$ компоненту сеточной функции y_l : $\frac{y_{l+1} - 2y_l + y_{l-1}}{h^2} + qy_l = f_l$, $l = 1, \dots, L-1$. Для определения решения нужно добавить еще два разностных уравнения, которые аппроксимируют граничные условия. Очевидно, в качестве первого уравнения можно взять $y_0 = 0$, которое является точным и не портит второй порядок

аппроксимации системы. Последним уравнением будет аппроксимация второго граничного условия. Первую производную со вторым порядком аппроксимации можно приблизить, например, дифференцируя соответствующий интерполяционный полином (см. главу 5.1 части I данного пособия):

$$y'(x_L) \approx \frac{y_{L-2} - 4y_{L-1} + 3y_L}{2h} + O(h^2).$$

Матрица полученной СЛАУ уже не будет при этом трехдиагональной. С четвертым порядком точности получаем (см. примеры 1 и 3 главы 5.1 части I данного пособия):

$$\frac{4}{3} \frac{y_{l+1} - 2y_l + y_{l-1}}{h^2} - \frac{1}{12} \frac{y_{l+2} - 2y_l + y_{l-2}}{h^2} + qy_l = f_l + O(h^4), \quad l = 2, \dots, L-2,$$

$$y'(x_L) \approx \frac{y_L - y_{L-1}}{h} + \frac{y_L - 2y_{L-1} + y_{L-2}}{2h} + \frac{y_L - 3y_{L-1} + 3y_{L-2} - y_{L-3}}{3h} + \\ + \frac{y_L - 4y_{L-1} + 6y_{L-2} - 4y_{L-3} + y_{L-4}}{4h} + O(h^4).$$

В этом случае матрица СЛАУ не будет даже пятидиагональной!

Попробуем получить четвертый порядок аппроксимации для всех уравнений по-другому. Для этого будем использовать само дифференциальное уравнение. Уравнение $y_0 = 0$ остается без изменений. Нетрудно приблизить с четвертым порядком аппроксимации вторую производную в точках $l = 1, \dots, L-1$ следующим образом:

$$y''(x_l) \approx \frac{y(x_l + h) - 2y(x_l) + y(x_l - h))}{h^2} - y^{(4)}(x_l) \frac{h^2}{12} + O(h^4) = \\ = \frac{y(x_l + h) - 2y(x_l) + y(x_l - h))}{h^2} - (q^2 y(x_l) - qf(x_l) + f''(x_l)) \frac{h^2}{12} + O(h^4).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $y'''(x) = -qy'(x) + f'(x)$, $y^{(4)}(x) = -qy''(x) + f''(x) = q^2 y(x) - qf(x) + f''(x)$.

В итоге получаем для значений $l = 1, \dots, L-1$:

$$\frac{y_{l+1} - 2y_l + y_{l-1}}{h^2} + qy_l - q^2 y_l \frac{h^2}{12} = f_l + (-qf_l + (f'')_l) \frac{h^2}{12} + O(h^4).$$

Чтобы матрица была трехдиагональной, нужно приблизить правое граничное условия по двум точкам. Для получения второго порядка аппроксимации по двум точкам разложим в ряд Тейлора в окрестности x_L :

$$y(1-h) = y(1) - y'(1)h + y''(1)h^2 / 2 + O(h^3) = \\ = y(1) - y'(1)h + (f(1) - qy(1))h^2 / 2 + O(h^3).$$

Значит, $y'(1) \approx \frac{y_L - y_{L-1}}{h} + (f(1) - qy_L)h/2 + O(h^2)$ и в качестве первого

разностного уравнения можно взять $\frac{y_L - y_{L-1}}{h} - qy_L h/2 = -f_L h/2$. Теперь

понятно, как повысить порядок аппроксимации дальше. Нужно многократно использовать само уравнение или его производные:

$$y(1-h) = y(1) - y'(1)h + y''(1)\frac{h^2}{2} - y'''(1)\frac{h^3}{6} + y^{(4)}(1)\frac{h^4}{24} + O(h^5) = y(1) - y'(1)h + \\ + (f(1) - qy(1))\frac{h^2}{2} - (f'(1) - qy'(1))\frac{h^3}{6} + (q^2 y(1) - qf(1) + f''(1))\frac{h^4}{24} + O(h^5).$$

Теперь за последнее разностное уравнение можно взять

$$\frac{y_L - y_{L-1}}{h} - qy_L \frac{h}{2} + q^2 y_L \frac{h^3}{24} = -f_L \frac{h}{2} + (f'(1) - q)\frac{h^2}{6} - (-qf(1) + f''(1))\frac{h^3}{24} + O(h^4).$$

Матрица полученной СЛАУ имеет трехдиагональный вид.

Задачи

8.2.1. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = kh, h = 1/3, k = 0 \div 3\}$ аппроксимировать системой разностных уравнений краевую задачу $y''(x) - 2y(x) = 2(1 - x^2)$, $y'(0) = 0$, $y'(1) = 2$, $0 \leq x \leq 1$ с порядком $O(h^2)$ и найти её решение.

8.2.2. На сетке $D_h = \{x_k : x_k = kh, h = 1/3, k = 0 \div 3\}$ аппроксимировать системой разностных уравнений краевую задачу $y''(x) - 2y(x) = 2(3 - 2x^2)$, $y(0) = -1$, $2y(1) - y'(1) = -2$, $0 \leq x \leq 1$ с порядком $O(h^2)$ и найти её решение.

8.2.3. На сетке $D_h = \{x_k : x_k = kh, h = 1/3, k = 0 \div 3\}$ аппроксимировать системой разностных уравнений краевую задачу $y''(x) - 2y(x) = 2(1 - 2x^2)$, $y'(0) = 0$, $2y(1) - y'(1) = 2$, $0 \leq x \leq 1$ с порядком $O(h^2)$ и найти её решение.

8.2.4. На сетке $D_h = \{x_k : x_k = kh, h = 1/3, k = 0 \div 3\}$ аппроксимировать системой разностных уравнений краевую задачу $y''(x) - 2y(x) = 4(1 - x^2)$, $y(0) = 0$, $2y(1) - y'(1) = 0$, $0 \leq x \leq 1$ с порядком $O(h^2)$ и найти её решение.

8.2.5. На сетке $D_h = \{x_k : x_k = kh, h = 1/3, k = 0 \div 3\}$ аппроксимировать системой разностных уравнений краевую задачу $y''(x) - 2y(x) = -4x^2$, $y'(0) = 0$, $y(1) - y'(1) = 0$, $0 \leq x \leq 1$ с порядком $O(h^2)$ и найти её решение.

8.2.6. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, hL = 1, l = 0 \div L\}$ построить аппроксимации второго порядка по двум точкам граничных условий краевой задачи:

$$y''(x) + \frac{1+x}{1+x^2} y'(x) + \cos(x)y(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

$$2y'(0) + y(0) = 3, y'(1) = 2, 0 \leq x \leq 1.$$

8.2.7. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, hL = 1, l = 0 \div L\}$ построить аппроксимации второго порядка по двум точкам граничных условий краевой задачи:

$$y''(x) + \frac{1-2x^2}{1+x^2} y'(x) + e^{-x} y(x) = e^{-2x},$$

$$y'(0) + y(0) = 2, y'(1) = 1, 0 \leq x \leq 1.$$

8.2.8. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, hL = 1, l = 0 \div L\}$ построить аппроксимации второго порядка по двум точкам граничных условий краевой задачи:

$$y''(x) + \cos(\pi x / 3) y'(x) + \sin(\pi x / 3) y(x) = \operatorname{tg}(\pi x / 3),$$

$$y'(0) + y(0) = \sqrt{3}, y'(1) = \sqrt{3}, 0 \leq x \leq 1.$$

8.2.9. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = 2 + lh, hL = 1, l = 0 \div L\}$ построить аппроксимации третьего порядка по двум точкам правого краевого условия

$$y'(3) - 5y(3) = 7 \text{ для уравнения } y'(x) - \ln x \cdot y(x) = 4 \text{ при } 2 \leq x \leq 3.$$

8.2.10. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = -1 + lh, hL = 2, l = 0 \div L\}$ построить аппроксимацию третьего порядка по двум точкам левого краевого условия

$$y'(1) + 7y(1) = 3 \text{ для уравнения } y''(x) + (1+x^3)y(x) = \cos x \text{ при } -1 \leq x \leq 1.$$

8.2.11. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, hL = \pi, l = 0 \div L\}$ построить аппроксимацию третьего порядка по двум точкам правого краевого условия

$$3y' - y = 2 \text{ для уравнения } y'' + (1 + \sin x)y = x \text{ при } x \in [0, \pi].$$

8.3. Нелинейные краевые задачи. Метод стрельбы

Пусть требуется решить нелинейную краевую задачу

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), & x \in [0, X], \\ y(0) = Y_0, y(X) = Y_L. \end{cases} \quad (8.3.1)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу Коши:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), & x \in [0, X], \\ y(0) = Y_0, & y'(0) = Z_0, \end{cases} \quad (8.3.2)$$

где Z_0 задаётся произвольно, используя всю предварительно имеющуюся информацию о решении. Введём в области интегрирования сетку $D_h = \{x_l : x_l = hl, l = \overline{0, L}, hl = X\}$ и решим задачу Коши (8.3.2) каким-либо из ранее рассмотренных в разделах 6,7 разностных методов. В результате найдём $y_L = y(Z_0)$ и определим $F(Z_0) = y_L - Y_L$ как функцию, зависящую от параметра Z_0 . Не ограничивая общности, можно положить, что $F(Z_0) > 0$. Выберем другое Z_1 и заменим им Z_0 в задаче (8.3.2). Затем решим задачу тем же разностным методом на той же сетке, что и ранее. Пусть окажется, что $F(Z_1) < 0$. Если это не так, то, анализируя доступную информацию о решении задачи (8.3.1), нужно подобрать Z_1 так, чтобы это неравенство выполнялось.

Далее воспользуемся методом половинного деления для нахождения корня уравнения $F(Z) = 0$. Для этого выберем $Z_2 = (Z_1 + Z_0)/2$, заменим параметр Z_0 значением Z_2 в (8.3.2) и снова решим эту задачу. В дальнейшем будем рассматривать ту половину отрезка $[Z_0, Z_1]$, для которой выполнено условие $F(Z_j)F(Z_2) < 0$, $j = 0, 1$. Положим $Z_3 = (Z_j + Z_2)/2$, $j = 0, 1$ и повторим решение задачи (8.3.2). Так будем поступать до тех пор, пока не будет выполнено условие $|F(Z_k)| \leq \varepsilon$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где ε — требуемая точность решения задачи (8.3.1). Полученное решение разностной задачи будет содержать погрешность, связанную с аппроксимацией дифференциальной задачи. Поэтому для оценки точности нужно произвести контрольный расчёт на более мелкой сетке и оценить погрешность этих решений в норме одного из выбранных конечномерных пространств.

Упражнения

Пример 1

Методом стрельбы решить нелинейную краевую задачу $y'' = 2y^3$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1/2$, $0 \leq x \leq 1$ на заданной сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = \overline{0, L}, Lh = 1, L = 2\}$, удовлетворив краевому условию с погрешностью $\Delta = |y(1) - y_L| \leq 0.1$.

Решение

Первый способ:

Сведем уравнение второго порядка к системе уравнений первого порядка. Пусть $Y_1(x) = y(x)$, $Y_2(x) = y'(x)$, тогда

$$\begin{cases} Y_1'(x) = Y_2(x), \\ Y_2'(x) = 2(Y_1(x))^3; \end{cases} \begin{cases} Y_1(0) = 1, \\ Y_2(0) = \alpha. \end{cases}$$

Решение неоднозначно и зависит от метода построения численного решения этой задачи. Применим, например, явный метод Эйлера для построения численного решения $(Y_1)_k, (Y_2)_k$, $k = 0, 1, 2$, $(Y_1)_0 = 1$, $(Y_2)_0 = \alpha$, и подберем параметр α , чтобы удовлетворить правому граничному условию. Получаем

$$\begin{cases} (Y_1)_1 = (Y_1)_0 + (Y_2)_0 \cdot h = 1 + \alpha / 2, \\ (Y_2)_1 = (Y_2)_0 + 2(Y_1)_0^3 \cdot h = \alpha + 2 \cdot h = \alpha + 1; \\ (Y_1)_2 = (Y_1)_1 + (Y_2)_1 \cdot h = 1 + \alpha / 2 + (\alpha + 1) / 2 = \alpha + 3 / 2, \\ (Y_2)_2 = (Y_2)_1 + 2(Y_1)_1^3 \cdot h = \alpha + 1 + (1 + \alpha / 2)^3. \end{cases}$$

Теперь находим α из условия $(Y_1)_2 = \alpha + 3 / 2 = 1 / 2$, $\alpha = -1$. Значит, $\vec{Y} = (1, 1 / 2, 1 / 2)^T$. В этом простом случае получилось удовлетворить правому краевому условию точно. При увеличении числа узлов сетки уравнение на α стало бы нелинейным.

Второй способ:

Запишем вспомогательную задачу Коши (8.3.2):

$$\begin{cases} y'' = 2y^3, \quad x \in [0, 1], \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = \alpha. \end{cases}$$

Приближим вторую производную в дифференциальном уравнении и первую производную в начальном условии конечными разностями (это тоже можно сделать по-разному). На заданной сетке получим систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ \frac{y_1 - y_0}{1/2} = \alpha, \\ \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{1/4} = 2y_1^3. \end{cases}$$

Отсюда легко находим: $y_2(\alpha) = 1 + \alpha + (2 + \alpha)^3 / 16$. Нужно подобрать $\alpha : |y_2(\alpha) - 1/2| \leq 0.1$. Применим метод половинного деления. Возьмем, например, $\alpha_0 = -1 : y_2(-1) = 1/16 < 1/2$. При $\alpha_1 = -1/2$ имеем: $y_2(-1/2) = 1/2 + 27/128 > 1/2$. Следующее значение выберем $\alpha_2 = -3/4$: $y_2(-3/4) = 1/4 + 125/1024 < 1/2$. Наконец, при $\alpha_3 = -5/8$ имеем $y_2(-5/8) = 0.537476$, что удовлетворяет требованию для погрешности.

Задачи

8.3.1. Методом стрельбы решить краевую задачу $y'' - y^2 = 1$, $y(0) = 2$, $y(1) = 6.25$, $0 \leq x \leq 1$ на сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div L, Lh = 1, L = 2\}$, удовлетворив краевому условию с погрешностью $\Delta = |y(1) - y_L| \leq 0.2$.

8.3.2. Методом стрельбы решить нелинейную краевую задачу $y'' = y^3/2$, $y(0) = 1$, $y(2) = 1/2$, $0 \leq x \leq 2$ на заданной сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div L, Lh = 2\}$, удовлетворив краевому условию с погрешностью $\Delta = |y(2) - y_L| \leq 0.2$.

8.3.3. Методом стрельбы решить нелинейную краевую задачу $y'' = y^3/8$, $y(0) = 2$, $y(2) = 1$, $0 \leq x \leq 2$ на заданной сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div L, Lh = 2\}$, удовлетворив краевому условию с погрешностью $\Delta = |y(2) - y_L| \leq 0.3$.

8.3.4. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = 1 + lh, l = 0 \div L, Lh = 2\}$ методом стрельбы решить краевую задачу $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = -\frac{2}{x^3}$, $y(1) = 0$, $y(3) = \ln 3/3$, $1 \leq x \leq 3$, удовлетворив краевому условию с погрешностью $\Delta = |y(3) - y_L| \leq 0.2$.

8.3.5. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div L, Lh = 1, L = 2\}$ методом стрельбы решить краевую задачу $y'' = y^2$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1.5$, $0 \leq x \leq 1$, удовлетворив краевому условию с погрешностью $\Delta = |y(1) - y_L| \leq 0.1$.

8.3.6. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div L, Lh = \pi/3, L = 2\}$ методом стрельбы решить краевую задачу $y'' = -\sin y$, $y(0) = \pi/2$, $y(\pi/3) = \pi/3$,

$0 \leq x \leq \pi/3$, удовлетворив краевому условию с погрешностью $\Delta = |y(\pi/3) - y_L| \leq 0.1$.

8.3.7. Методом стрельбы решить краевую задачу $y'' + xy = x$, $y(0) = 1$, $y(1) = 2$, $0 \leq x \leq 1$ на сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div L, Lh = 1, L = 2\}$, удовлетворив краевому условию с погрешностью $\Delta = |y(1) - y_L| \leq 0.2$.

8.3.8. Методом стрельбы решить краевую задачу $y'' + y^4 = 1$, $y(0) = 2$, $y(1) = 0$, $0 \leq x \leq 1$ на сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div L, Lh = 1, L = 2\}$, удовлетворив краевому условию с погрешностью $\Delta = |y(1) - y_L| \leq 0.2$.

8.4. Нелинейные краевые задачи. Метод квазилинеаризации

Существует метод решения краевых задач нелинейных ОДУ, сводящий интегрирование нелинейной краевой задачи к последовательному решению ряда линейных краевых задач и носящий название метода квазилинеаризации [1]. Остановимся подробнее на основных положениях этого подхода, выбрав в качестве примера задачу

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), & x \in [0, X], \\ y(0) = Y_0, & y(X) = Y_L. \end{cases} \quad (8.4.1)$$

Будем искать решение (8.4.1) в виде $y(x) = y_0(x) + w(x)$, где $y_0(x)$ удовлетворяет граничным условиям $y_0(0) = Y_0$, $y_0(X) = Y_L$ и принадлежит тому же классу функций, что и $y(x)$. Заметим, что $y''(x) = y_0''(x) + w''(x)$, и линеаризуем правую часть дифференциального уравнения в (8.4.1) относительно $y_0(x)$:

$$\begin{aligned} f(x, y_0 + w, y_0' + w') &= f(x, y_0, y_0') + \frac{\partial f(x, y_0, y_0')}{\partial y} w + \\ &+ \frac{\partial f(x, y_0, y_0')}{\partial y'} w' + O(w^2 + (w')^2). \end{aligned} \quad (8.4.2)$$

Оставим в (8.4.2) только линейные члены и подставим полученные выражения в (8.4.1):

$$\begin{cases} w''(x) = p(x)w'(x) + q(x)w(x) + \varphi(x), \\ w(0) = w(1) = 0, x \in [0, X]; \end{cases} \quad p(x) = \frac{\partial f(x, y_0, y_0')}{\partial y_0'}, \quad (8.4.3)$$

$$q(x) = \frac{\partial f(x, y_0, y_0')}{\partial y_0}, \quad \varphi(x) = f(x, y_0, y_0') - y_0''(x).$$

Решив линейную краевую задачу (8.4.3), в качестве следующего приближения берут $y(x) = y_1(x) + w_1(x)$, $y_1(x) = y_0(x) + w(x)$ и т.д.

Задачи

8.4.1. Свести нелинейную краевую задачу $y'' = y^2 / (1 + y')$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ методом квазилинеаризации к линейной краевой задаче, приняв за начальное приближение $y_0(x) = x$.

8.4.2. Свести нелинейную краевую задачу $y'' = y^2 \sin \pi y'$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ методом квазилинеаризации к линейной краевой задаче, приняв за начальное приближение $y_0(x) = x$.

8.5. Вариационные методы решения краевых задач ОДУ.

Метод Рунца

Вначале напомним несколько определений, важных для последующего изложения материала.

Определение 8.5.1 (линейного множества, линейного пространства). Множество M элементов x, y, z, \dots называется линейным (линейным пространством), если оно удовлетворяет следующим условиям:

I. Для любых двух элементов $x, y \in M$ однозначно определён третий элемент $z = x + y \in M$, называемый их суммой, причём

- 1) $x + y = y + x$ (коммутативность),
- 2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность),
- 3) в M существует такой элемент 0 , что $x + 0 = x$ для $\forall x \in M$,
- 4) для $\forall x \in M$ существует такой элемент $-x$, что $x + (-x) = 0$.

II. Для $\forall \alpha$, α – число и $\forall x \in M$ определён элемент $\alpha x \in M$, причём

- 1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
- 2) $1 \cdot x = x$,
- 3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
- 4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Определение 8.5.2 (линейный оператор). Линейный оператор A – это линейное отображение одного линейного множества $x \in X$ на другое $\rightarrow y = A(x) \in Y$: $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2)$, где $x_1, x_2 \in X$, α, β — числа.

Множество значений $x \in X$, где оператор определен, называется областью определения D_A оператора A . Множество элементов $A(x) \in Y$ при

$x \in D_A$ называется областью значений оператора A . Если $Y = \mathbb{R}$ или $Y = \mathbb{C}$, то такое отображение называют *линейным функционалом*.

Пусть X, Y — линейные нормированные пространства с нормами $\| \cdot \|_X, \| \cdot \|_Y$.

Определение 8.5.3 Будем называть нормой оператора $\|A\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y$. Линейный оператор с конечной нормой называется ограниченным.

Определение 8.5.4 (плотного множества). Множество $M \subset X$ — метрического пространства (см. часть I, определение 3.2.1) называется всюду плотным в X , если для любого элемента $u \in X$ существует последовательность $\{u_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ элементов из M , сходящаяся к u .

Определение 8.5.5 (самосопряжённость). Ограниченный линейный оператор L , заданный на всюду плотном множестве гильбертова пространства H (см. часть I, определение 4.2.2), называется самосопряжённым, если для любых двух функций из области определения выполняется соотношение

$$(Lu, v) = (u, Lv).$$

Определение 8.5.6 (положительная определённость). Линейный оператор L называется положительно определённым, если для любой функции u из области определения выполняется неравенство

$$(Lu, u) \geq 0 \text{ и } (Lu, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Введём скалярное произведение $(u, v) = \int_0^1 uv dx$ и рассмотрим краевую задачу ОДУ:

$$\begin{cases} -(k(x)u'(x))' + p(x)u(x) = f(x), \\ u(0) = 0, u(1) = 0, x \in [0, 1], \\ 0 \leq c_1 \leq k(x) \leq c_2, 0 < p(x) \leq c_3 \end{cases} \quad (8.5.1)$$

или перепишем (8.5.1) в операторной форме:

$$\begin{aligned} Lu &= -\frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du}{dx} \right] + p(x)u, \quad f = f(x), \\ Lu &= f, \quad u(0) = 0 = u(1). \end{aligned} \quad (8.5.2)$$

Пусть дано множество функций $u(x) \in H_A$.

Теорема 8.5.1 (единственность). Пусть линейный самосопряжённый положительно определённый оператор L задан на всюду плотном

множестве H_A гильбертова пространства. Тогда если решение краевой задачи (8.5.2) существует, то оно единственное.

Теорема 8.5.2 (тождественность). Пусть линейный самосопряжённый положительно определённый оператор L задан на множестве H_A всюду плотно в гильбертовом пространстве H , а $F(u)$ — функционал вида $F(u) = (Lu, u) - 2(f, u)$. Если краевая задача (8.5.2) имеет решение u_0 , то оно даёт функционалу минимальное значение. Обратно, если существует элемент $u_0 \in H_A$, который даёт минимум функционалу, то он будет решением задачи (8.5.2).

Введём последовательность конечномерных пространств U_h , определённых на сетках $D_h = \{x_l : x_l = hl, l = \overline{0, L}, hl = 1\}$ с базисом из линейно независимых функций $\{\varphi_l^{(L)}\}_{l=1}^{L-1}$:

$$\varphi_l^{(L)} = \begin{cases} 0, & x \leq x_{l-1}, \\ \frac{x - x_{l-1}}{h}, & x_{l-1} \leq x \leq x_l, \\ \frac{x_{l+1} - x}{h}, & x_l \leq x \leq x_{l+1}, \\ 0, & x_{l+1} \leq x; \end{cases} \quad \frac{d\varphi_l^{(L)}}{dx} = \begin{cases} 0, & x < x_{l-1}, \\ \frac{1}{h}, & x_{l-1} < x < x_l, \\ -\frac{1}{h}, & x_l < x < x_{l+1}, \\ 0, & x_{l+1} < x. \end{cases} \quad (8.5.3)$$

Метод Ритца состоит в нахождении элемента $u_L \in U_h$, минимизирующего функционал $F(u)$. Будем искать u_L в виде $u_L = \sum_{l=1}^{L-1} C_l \varphi_l^{(L)}$. Тогда

$$\begin{aligned} F(u_L) &= - \int_0^1 \left\{ \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du_L}{dx} \right] - p(x) u_L \right\} u_L dx - 2 \int_0^1 f(x) u_L dx = \\ &= \sum_{l=1}^{L-1} C_l \cdot \sum_{j=1}^{L-1} C_j \int_0^1 \left[k(x) \frac{d\varphi_l^{(L)}}{dx} \frac{d\varphi_j^{(L)}}{dx} + p(x) \varphi_l^{(L)} \varphi_j^{(L)} \right] dx - 2 \sum_{l=1}^{L-1} C_l \int_0^1 f(x) \varphi_l^{(L)} dx. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы выполнялось $\frac{\partial F(u_L)}{\partial C_l} = 0$, $l = \overline{1, L-1}$. В итоге имеем

$$\sum_{j=1}^{L-1} C_j \int_0^1 \left[k(x) \frac{d\varphi_l^{(L)}}{dx} \frac{d\varphi_j^{(L)}}{dx} + p(x) \varphi_l^{(L)} \varphi_j^{(L)} \right] dx - \int_0^1 f(x) \varphi_l^{(L)} dx = 0, \quad l = \overline{1, L-1}.$$

Вводя обозначения $\alpha_{l,j} = \int_0^1 \left[k(x) \frac{d\varphi_l^{(L)}}{dx} \frac{d\varphi_j^{(L)}}{dx} + p(x) \varphi_l^{(L)} \varphi_j^{(L)} \right] dx = \alpha_{j,l}$,

$d_l = \int_0^1 f(x) \varphi_l^{(L)} dx$, $a_l = \alpha_{l,l+1}$, $b_l = \alpha_{l,l}$, $e_l = \alpha_{l,l-1}$ и учитывая (8.5.3), приходим к системе линейных уравнений $L-1$ порядка относительно искомым коэффициентов C_l , $l = \overline{1, L-1}$:

$$\begin{cases} a_1 C_2 + b_1 C_1 = d_1, \\ a_l C_{l+1} + b_l C_l + e_l C_{l-1} = d_l, \quad l = \overline{2, L-2}, \\ b_{L-1} C_{L-1} + e_{L-1} C_{L-2} = d_{L-1}. \end{cases} \quad (8.5.4)$$

Решая (8.5.4), например, методом прогонки, находим u_L и, тем самым, получаем приближённое решение задачи (8.5.2) в конечномерном пространстве U_h .

Упражнения

Пример 1

Дана дифференциальная задача: $y'' + cy = f(x)$, $x \in [0, 1]$, $y(0) = y(1) = 0$. При каких c для решения этой задачи применим метод Рунге?

Решение

Перепишем уравнение в виде $-y'' - cy = -f(x) \equiv f$. Введем дифференциальный оператор $L = -\frac{d^2}{dx^2} - c$ и скалярное произведение $(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)dx$. По теореме 8.5.2, чтобы решение краевой задачи доставляло минимум функционалу $F(u) = (Lu, u) - 2(f, u)$, линейный оператор L должен быть самосопряженный и положительно определенный (здесь на множестве дважды дифференцируемых функций с интегрируемым квадратом и интегрируемым квадратом их первой производной, удовлетворяющим граничному условию). Проверим симметричность L :

$$\begin{aligned} (Lu, v) &= -\int_0^1 (u''(x) + cu(x))v(x)dx = -u'(x)v(x)\Big|_0^1 + \\ &+ \int_0^1 (u'(x)v'(x) - cu(x)v(x))dx = -u'(x)v(x)\Big|_0^1 + u(x)v'(x)\Big|_0^1 - \\ &- \int_0^1 u(x)(v''(x) + cv(x))dx = -\int_0^1 u(x)(v''(x) + cv(x))dx = (u, Lv). \end{aligned}$$

Теперь проверим положительность L : $(Lu, u) \geq 0$, $\forall u(x)$, $u(0) = u(1) = 0$.

$$(Lu, u) = - \int_0^1 (u''(x) + cu(x))u(x)dx = \int_0^1 ((u'(x))^2 - c(u(x))^2)dx.$$

Для положительности L достаточно, чтобы $c \leq 0$.

Задачи

8.5.1. Проверить самосопряжённость и положительность оператора, определённого на множестве $K(w) = \{w, w \in C^2(G)\}$,

$G = \{(x, y) : x^2 + y^2/4 \leq 1\}$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \iint_G uv dx dy; \quad u, v \in K : \quad Lu = -\frac{\partial}{\partial x}[(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1)\frac{\partial u}{\partial x}] - \frac{\partial}{\partial y}[(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1)\frac{\partial u}{\partial y}].$$

8.5.2. Проверить самосопряжённость и положительность оператора, определённого на множестве $K(w) = \{w, w \in C^2(G)\}$,

$G = \{(x, y) : x^2/5 + y^2/6 \leq 1\}$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \iint_G uv dx dy; \quad u, v \in K :$$

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x}[(\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{6} - 1)\frac{\partial u}{\partial x}] - \frac{\partial}{\partial y}[(\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{6} - 1)\frac{\partial u}{\partial y}].$$

8.5.3. Проверить самосопряжённость и положительность оператора, определённого на множестве $K(w) = \{w, w \in C^2(G)\}$, $G = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$

со скалярным произведением $(u, v) = \iint_G uv dx dy; \quad u, v \in K :$

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x}[xy(1-x-y+xy)\frac{\partial u}{\partial x}] - \frac{\partial}{\partial y}[xy(1-x-y+xy)\frac{\partial u}{\partial y}].$$

8.5.4. Проверить самосопряжённость и положительность оператора, определённого на множестве $K(w) = \{w, w \in C^2(G)\}$, $G = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$

со скалярным произведением $(u, v) = \iint_G uv dx dy; \quad u, v \in K :$

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x}[(\cos 11\pi x - \cos 3\pi x)\frac{\partial u}{\partial x}] - \frac{\partial}{\partial y}[(\cos 11\pi x - \cos 3\pi x)\frac{\partial u}{\partial y}].$$

8.5.5. Проверить самосопряжённость $(Lu, v) = (u, Lv)$ и положительность $(Lu, u) \geq 0$ следующего оператора:

$Lu = -\partial/\partial x[(x^2 + y^2/2 - 1/2)\partial u/\partial x] - \partial/\partial y[(x^2 + y^2/2 - 1/2)\partial u/\partial y]$, определённого на множестве $K(u) = \{u, u \in C^2(G)\}$, $G = \{(x, y) : x^2 + y^2/2 \leq 1/2\}$ со скалярным произведением $(u, v) = \iint_G uv dx dy$, и при $u|_\Gamma = 0$.

8.5.6. Проверить самосопряжённость $(Lu, v) = (u, Lv)$ и положительность $(Lu, u) \geq 0$ следующего оператора:

$Lu = -\partial/\partial x[(x^2/9 + y^2/4 - 1)^2 \partial u/\partial x] - \partial/\partial y[(x^2/9 + y^2/4 - 1)^2 \partial u/\partial y]$, определённого на заданном множестве $K(u) = \{u, u \in C^2(G)\}$, $G = \{(x, y) : x^2/9 + y^2/4 \leq 1\}$ со скалярным произведением $(u, v) = \iint_G uv dx dy$ и при $u|_\Gamma = 0$.

8.5.7. Проверить применимость метода Ритца для решения краевой задачи

$\frac{d}{dx}[(x^2 + 1)dy/dx] = f(x)$, $x \in [0, 1]$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ со скалярным произведением $(u, v) = \int_0^1 uv dx$.

8.5.8. Проверить применимость метода Ритца для решения краевой задачи

$\frac{d}{dx}[(x^2 - 1)du/dx] = f(x)$, $x \in [0, 1]$, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$ со скалярным произведением $(u, v) = \int_0^1 uv dx$.

8.5.9. Проверить применимость метода Ритца для приближённого решения на сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 2, h = 1\}$ краевой задачи

$y'' - \frac{35}{16}x^2 y = -4$, $x \in [0, 2]$, $y(0) = y(2) = 0$, определённой на множестве

$K(v) = \{v : v \in C^2[0, 2], v|_0 = 0, v|_2 = 0\}$ гильбертова пространства со ска-

лярным произведением $(u, v) = \int_0^2 uv dx$, $u, v \in K$. Если возможно, получить

решение, используя базисную функцию $\varphi_1(x) = 2x - x^2$.

8.5.10. Проверить применимость метода Ритца для приближённого решения на сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 2, h = 1\}$ краевой задачи

$y'' - \frac{35}{32}x^2y = -3$, $x \in [0, 2]$, $y(0) = y(2) = 0$, определённой на множестве

$K(v) = \{v : v \in C^2[0, 2], v|_0 = 0, v|_2 = 0\}$ гильбертова пространства со ска-

лярным произведением $(u, v) = \int_0^2 uv dx$, $u, v \in K$. Если возможно, получить

решение, используя базисную функцию $\varphi_1(x) = 2x - x^2$.

8.5.11. Проверить применимость метода Ритца для приближённого решения на сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 2, h = 1\}$ краевой задачи

$y'' - \frac{35}{64}x^2y = -5$, $x \in [0, 2]$, $y(0) = y(2) = 0$, определённой на множестве

$K(v) = \{v : v \in C^2[0, 2], v|_0 = 0, v|_2 = 0\}$ гильбертова пространства со ска-

лярным произведением $(u, v) = \int_0^2 uv dx$, $u, v \in K$. Если возможно, получить

решение, используя базисную функцию $\varphi_1(x) = 2x - x^2$.

8.6. Вариационные методы решения краевых задач ОДУ. Метод Бубнова–Галёркина

Метод Бубнова–Галёркина основывается на следующей теореме:

Теорема 8.6.1 (ортогональность элемента линейного многообразия). Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная система функций с ненулевой нормой, ортогональных на отрезке $[a, b]$. Если непрерывная функция $g(x)$ ортогональна на отрезке $[a, b]$ ко всем функциям $\varphi_n(x)$, т.е.

$$\int_a^b g(x)\varphi_n(x)dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8.6.1)$$

то $g(x) = 0$ при $a \leq x \leq b$.

Рассмотрим краевую задачу ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du}{dx} \right] + p(x) \frac{du}{dx} + q(x)u = f(x), \quad x \in [a, b], \\ \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = A, \\ \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = B; \end{cases} \quad (8.6.2)$$

определим скалярное произведение $(u, v) = \int_a^b u v dx$ и введём в области интегрирования сетку $D_h = \{x_l : x_l = a + lh, l = \overline{0, L}, hL = b - a\}$.

Будем искать решение задачи (8.6.2) в виде

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{l=1}^{L-1} C_l \varphi_l(x), \quad (8.6.3)$$

где $u_0(x)$ — известная функция, удовлетворяющая граничным условиям:

$$\begin{cases} \alpha_0 u_0(a) + \alpha_1 u_0'(a) = A, \\ \beta_0 u_0(b) + \beta_1 u_0'(b) = B; \end{cases}$$

а функции $\varphi_l(x)$, $l = \overline{1, L-1}$ линейно независимы и образуют базис в конечномерном пространстве U_h , состоящем из функций, определённых на сетке D_h и обращающихся в ноль на границе:

$$\varphi_l^{(L)} = \begin{cases} 0, & x \leq x_{l-1}, \\ \frac{x - x_{l-1}}{h}, & x_{l-1} \leq x \leq x_l, \\ \frac{x_{l+1} - x}{h}, & x_l \leq x \leq x_{l+1}, \\ 0, & x_{l+1} \leq x; \end{cases} \quad \frac{d\varphi_l^{(L)}}{dx} = \begin{cases} 0, & x < x_{l-1}, \\ \frac{1}{h}, & x_{l-1} < x < x_l, \\ -\frac{1}{h}, & x_l < x < x_{l+1}, \\ 0, & x_{l+1} < x. \end{cases} \quad (8.6.4)$$

Определим $g(x) = \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du}{dx} \right] + p(x) \frac{du}{dx} + q(x)u - f(x)$ как невязку, заменим в ней $u(x)$ согласно равенству (8.6.3) и подставим в (8.6.1):

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{L-1} C_l \int_a^b \left(-k(x) \frac{d\varphi_l}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} + p(x) \frac{d\varphi_l}{dx} \varphi_j + q(x) \varphi_l \varphi_j \right) dx + \\ & + \int_a^b \left\{ \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du_0}{dx} \right] + p(x) \frac{du_0}{dx} + q(x)u_0 - f(x) \right\} \varphi_j dx = 0, \quad j = \overline{1, L-1}. \end{aligned}$$

Обозначим $\alpha_{l,j} = \int_a^b \left[\left(-k(x) \frac{d\varphi_l}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} + p(x) \frac{d\varphi_l}{dx} \varphi_j + q(x) \varphi_l \varphi_j \right) \right] dx,$

$$d_l = \int_a^b \left\{ \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du_0}{dx} \right] + p(x) \frac{du_0}{dx} + q(x)u_0 - f(x) \right\} \varphi_j dx, \quad a_j = \alpha_{j+1,j}, \quad b_j = \alpha_{j,j},$$

$e_j = \alpha_{j-1,j}$ и, учитывая (8.6.4), получаем систему линейных уравнений $L-1$ порядка относительно искоемых коэффициентов C_l , $l = \overline{1, L-1}$:

$$\begin{cases} a_1 C_2 + b_1 C_1 = d_1, \\ a_l C_{l+1} + b_l C_l + e_l C_{l-1} = d_l, \quad l = \overline{2, L-2}, \\ b_{L-1} C_{L-1} + e_{L-1} C_{L-2} = d_{L-1}. \end{cases} \quad (8.6.5)$$

Для решения (8.6.5) можно применить один из известных методов (см. раздел 2 часть I данного пособия), например метод прогонки, и, определив все коэффициенты C_l , $l = \overline{1, L-1}$, найти C_L , $u(x)$ как приближённое решение задачи (8.6.2) в конечномерном пространстве C_L , U_h .

Упражнения

Пример 1

На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 3, h = 1\}$ методом Бубнова–Галёркина построить приближённое решение краевой задачи (1) с помощью базисных функций (2):

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 5, \\ y(0) = 1, y(3) = 4, x \in [0, 3]; \end{cases} \quad (1)$$

$$\varphi_l(x) = \begin{cases} 0, & |x - x_l| \geq h, \\ (x - x_{l-1}) / h, & x_{l-1} \leq x \leq x_l, \\ (x_{l+1} - x) / h, & x_l \leq x \leq x_{l+1}, \quad l = 1, 2. \end{cases} \quad (2)$$

Решение

Сначала подберем замену $y(x) = v(x) + ax + b$ так, чтобы $v(0) = 0 = v(3)$. Получаем систему уравнений на a, b : $b = 1$ и $3a + b = 4$. Значит, $a = b = 1$. При этом $v(x)$ удовлетворяет

$$\begin{cases} v''(x) + 2v'(x) + v(x) = 2 - x, \\ v(0) = 0; v(3) = 0; x \in [0, 3]. \end{cases}$$

Теперь построим приближенное решение $v(x) \approx C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x)$. Неопределенные коэффициенты определяются из следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \int_0^3 (v''(x) + 2v'(x) + v(x)) \varphi_1(x) dx = \int_0^3 (2 - x) \varphi_1(x) dx = 1, \\ \int_0^3 (v''(x) + 2v'(x) + v(x)) \varphi_2(x) dx = \int_0^3 (2 - x) \varphi_2(x) dx = 0; \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 \cdot \int_0^3 \left(\varphi_1''(x) + 2\varphi_1'(x) + \varphi_1(x) \right) \varphi_1(x) dx + \\ \quad + C_2 \cdot \int_0^3 \left(\varphi_2''(x) + 2\varphi_2'(x) + \varphi_2(x) \right) \varphi_1(x) dx = 1, \\ C_1 \int_0^3 \left(\varphi_1''(x) + 2\varphi_1'(x) + \varphi_1(x) \right) \varphi_2(x) dx + \\ \quad + C_2 \cdot \int_0^3 \left(\varphi_2''(x) + 2\varphi_2'(x) + \varphi_2(x) \right) \varphi_2(x) dx = 0. \end{array} \right.$$

Поскольку функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ дифференцируемы не во всех точках, то нужно определить, как понимать некоторые интегралы.

$$\int_0^3 (\varphi_1(x))^2 dx = \int_0^3 (\varphi_2(x))^2 dx = 2/3, \quad \int_0^3 \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = 1/6. \text{ Следующий интеграл}$$

оказывается не равным нулю (хотя $\varphi_1''(x)$ почти везде равно нулю):

$$\int_0^3 \varphi_1''(x) \varphi_1(x) dx = - \int_0^3 \left(\varphi_1'(x) \right)^2 dx = -2. \text{ Это значение можно также получить,}$$

если считать первый множитель под интегралом как обобщенную функцию (линейный функционал, действующий на классе финитных функций): $\varphi_1'(x) = \theta(x) - 2\theta(x-1) + \theta(x-2)$, $\varphi_1''(x) = \delta(x) - 2\delta(x-1) + \delta(x-2)$.

Аналогично,

$$\int_0^3 \varphi_2''(x) \varphi_2(x) dx = -2, \quad \int_0^3 \varphi_1''(x) \varphi_2(x) dx = 1 = \int_0^3 \varphi_2''(x) \varphi_1(x) dx,$$

$$\int_0^3 \varphi_1'(x) \varphi_1(x) dx = 0 = \int_0^3 \varphi_2'(x) \varphi_2(x) dx, \text{ и}$$

$$\int_0^3 \varphi_1'(x) \varphi_2(x) dx = -1/2 = - \int_0^3 \varphi_2'(x) \varphi_1(x) dx.$$

Окончательная система линейных уравнений

$$\begin{cases} -8C_1/6 + 13C_2/6 = 1, \\ C_1/6 - 8C_2/6 = 0, \end{cases} \quad C_1 = -48/53, \quad C_2 = 6/53.$$

Задачи

8.6.1. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 3, h = 1/3\}$ методом Бубнова–Галёркина построить приближённое решение краевой задачи (1) с помощью базисных функций (2):

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 9y/2 = 1, \\ y(0) = 1, y(1) = 0, x \in [0, 1]; \end{cases} \quad (1)$$

$$\eta_l(x) = \begin{cases} 0, & |x - x_l| \geq h, \\ (x - x_{l-1})/h, & x_{l-1} \leq x \leq x_l, \\ (x_{l+1} - x)/h, & x_l \leq x \leq x_{l+1}, l = 1, 2. \end{cases} \quad (2)$$

Оценить допущенную погрешность в норме конечномерного пространства, задаваемого сеткой.

8.6.2. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = -1 + lh, l = 0 \div 2, h = 1\}$ методом Бубнова–Галёркина построить приближённое решение краевой задачи (1) с помощью базисной функции (2):

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 3, \\ y(-1) = 1, y(1) = 1, x \in [-1, 1]; \end{cases} \quad (1)$$

$$\eta_l(x) = \begin{cases} 0, & |x - x_l| \geq h, \\ (x - x_0)/h, & x_0 \leq x \leq x_1, \\ (x_2 - x)/h, & x_1 \leq x \leq x_2. \end{cases} \quad (2)$$

Оценить допущенную погрешность в норме конечномерного пространства, задаваемого сеткой.

8.6.3. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 2, h = 1\}$ методом Бубнова–Галёркина построить приближённое решение краевой задачи (1) с помощью базисной функции (2):

$$\begin{cases} y'' + 4y' - 5y = 7, \\ y(0) = -1, y(1) = -1, x \in [0, 1]; \end{cases} \quad (1)$$

$$\eta_l(x) = \begin{cases} 0, & |x - x_l| \geq h, \\ (x - x_0)/h, & x_0 \leq x \leq x_1, \\ (x_2 - x)/h, & x_1 \leq x \leq x_2. \end{cases} \quad (2)$$

Оценить допущенную погрешность в норме конечномерного пространства, задаваемого сеткой.

8.6.4. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 2, h = 1/2\}$ методом Бубнова–Галёркина построить конечномерное приближение к решению краевой задачи (1) с помощью базисной функции (2):

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 3y = 5x, \\ y(0) = 1, y(1) = -3, x \in [0, 1]; \end{cases} \quad (1)$$

$$\eta_1(x) = \begin{cases} 0, & |x - x_1| \geq h, \\ \frac{x}{h^3}(x - x_0)(x_2 - x), & |x - x_1| \leq h. \end{cases} \quad (2)$$

8.6.5. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 2, h = 1/2\}$ методом Бубнова–Галёркина построить конечномерное приближение к решению краевой задачи (1) с помощью базисной функции (2):

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = x - 1, \\ y(0) = -1, y(1) = 1, x \in [0, 1]; \end{cases} \quad (1)$$

$$\eta_1(x) = \begin{cases} 0, & |x - x_1| \geq h, \\ \frac{1}{h^2}(x - x_0)(x_2 - x), & |x - x_1| \leq h. \end{cases} \quad (2)$$

8.6.6. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 2, h = 1/2\}$ методом Бубнова–Галёркина построить конечномерное приближение к решению краевой задачи (1) с помощью базисной функции (2):

$$\begin{cases} y'' - 3y' - y = x - 3, \\ y(0) = 0, y(1) = 3, x \in [0, 1]; \end{cases} \quad (1)$$

$$\eta_1(x) = \begin{cases} 0, & |x - x_1| \geq h, \\ \sin\left(\frac{\pi(x - x_1)}{h}\right), & |x - x_1| \leq h. \end{cases} \quad (2)$$

8.6.7. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 2, h = \pi/2\}$ методом Бубнова–Галёркина построить конечномерное приближение к решению краевой задачи (1) с помощью базисной функции (2):

$$\begin{cases} y'' + \cos x \cdot y' + \frac{2 \cos x}{\pi} y = 1 - \frac{4x \cos x}{\pi^2}, \\ y(0) = 1, y(\pi) = -1, x \in [0, \pi]; \end{cases} \quad (1)$$

$$\eta_1(x) = \begin{cases} 0, & |x - \pi/2| \geq \pi/2, \\ \sin x, & |x - \pi/2| \leq \pi/2. \end{cases} \quad (2)$$

8.6.8. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 2, h = \pi/2\}$ методом Бубнова–Галёркина построить приближённое решение краевой задачи (1) с помощью базисной функции (2):

$$\begin{cases} y'' + \sin x \cdot y' + \cos x \cdot y = 1 + \pi \sin x + (\pi x - 1) \cos x, \\ y(-\pi/2) = -1 - \pi^2/2, y(\pi/2) = -1 + \pi^2/2, x \in [-\pi/2, \pi/2]; \end{cases} \quad (1)$$

$$\eta_1(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq \pi/2, \\ \cos x, & |x| \leq \pi/2. \end{cases} \quad (2)$$

8.6.9. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 2, h = \pi/2\}$ методом Бубнова–Галёркина построить приближённое решение краевой задачи (1) с помощью базисной функции (2):

$$\begin{cases} e^x y'' + x^2 y' + (e^x + 1)y = 1 - 2x^2/\pi - 2x(e^x + 1)/\pi, \\ y(-\pi/2) = 1, y(\pi/2) = -1, x \in [-\pi/2, \pi/2]; \end{cases} \quad (1)$$

$$\eta_1(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq \pi/2, \\ \cos x, & |x| \leq \pi/2. \end{cases} \quad (2)$$

8.6.10. Методом Бубнова–Галёркина на заданной сетке

$D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 2, h = 1\}$ построить приближённое решение краевой задачи $y'' + 4xy' + 2y = -2$, $x \in [0, 2]$, $y(0) = y(2) = 1$. Для построения разностной схемы использовать базисную функцию $\varphi_1(x) = 2x - x^2$ и скаляр-

ное произведение $(u, v) = \int_0^2 uv dx$.

8.6.11. Методом Бубнова–Галёркина на заданной сетке

$D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 2, h = 1\}$ построить приближённое решение краевой задачи $y'' + 2xy' + y = -1$, $x \in [0, 2]$, $y(0) = y(2) = 1$. Для построения разностной схемы использовать базисную функцию $\varphi_1(x) = 2x - x^2$ и скаляр-

ное произведение $(u, v) = \int_0^2 uv dx$.

8.6.12. Методом Бубнова–Галёркина на заданной сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 2, h = 1\}$ построить приближённое решение краевой задачи $y'' - 4xy' - 2y = -4$, $x \in [0, 2]$, $y(0) = y(2) = 1$. Для построения раз-

ностной схемы использовать базисную функцию $\varphi_1(x) = 2x - x^2$ и скалярное произведение $(u, v) = \int_0^2 uv dx$.

Ответы к задачам раздела 8

$$8.2.6. \quad y_1 = (1 - h/2 - 3h^2/4)y_0 + 3h/2 + 5h^2/4,$$

$$y_{L-1} = (1 - \cos(1)h^2/2)y_L - 2h + 5h^2/4.$$

$$8.2.7. \quad y_1 = (1 - h/2 - 3h^2/4)y_0 + 3h/2 + 5h^2/4,$$

$$y_{L-1} = (1 - h^2 \cos(1)/2)y_L - 2h + 5h^2/4.$$

$$8.2.8. \quad y_1 = (1 - h + h^2/2)y_0 + \sqrt{3}h - \sqrt{3}h^2/2,$$

$$y_{L-1} = (1 - \sqrt{3}h^2/4)y_L - \sqrt{3}h + \sqrt{3}h^2/4.$$

$$8.2.9. \quad y_{L-1} = \left(1 - 5h + \left(5 \ln 3 + \frac{1}{3}\right) \frac{h^2}{2} - \left(\left(5 \ln 3 + \frac{1}{3}\right) \ln 3 + \frac{29}{9}\right) \frac{h^3}{6}\right) y_L -$$

$$-7h + 7 \ln 3 \frac{h^2}{2} - \left(7 \ln^2 3 + \frac{14}{3}\right) \frac{h^3}{6}.$$

$$8.2.10. \quad y_1 = (1 - 7h - h^3/2)y_0 + 3h + \cos(1)h^2/2 + \sin(1)h^3/6.$$

$$8.2.11. \quad y_{L-1} = (1 - h/3 - h^2/2 - h^3/9)y_L - 2h/3 + \pi h^2/2 - h^3/18.$$

$$8.4.2. \quad y(x) = x + w(x), \quad w'' = -\pi x^2 w', \quad w(0) = w(1) = 0.$$

8.5.1. Самосопряженный, не положительный. Указание: использовать

формулу Грина $\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$.

8.5.2. Самосопряженный, не положительный.

8.5.3. Самосопряженный, положительный.

8.5.4. Самосопряженный, не положительный.

8.5.5. Самосопряженный, не положительный.

8.5.6. Самосопряженный, положительный.

$$8.5.9. \quad y(x) \approx \frac{1}{2} \varphi_1(x).$$

$$8.5.10. \quad y(x) \approx \frac{1}{2} \varphi_1(x).$$

$$8.5.11. \quad y(x) \approx \varphi_1(x).$$

- 8.6.2. $y(x) \approx -\frac{3}{2}\eta_1(x) + 1.$
- 8.6.3. $y(x) \approx -\frac{3}{8}\eta_1(x) - 1.$
- 8.6.4. $y(x) \approx -\frac{7}{136}\eta_1(x) - 4x + 1.$
- 8.6.5. $y(x) \approx -\frac{55}{64}\eta_1(x) + 2x - 1.$
- 8.6.6. $y(x) \approx \frac{-4}{4\pi(\pi^2 + 1)}\eta_1(x) + 3x.$
- 8.6.7. $y(x) \approx \frac{-12}{3\pi - 4}\eta_1(x) - \frac{2}{\pi}x + 1.$
- 8.6.8. $y(x) \approx \frac{-12}{3\pi - 4}\eta_1(x) + \pi x - 1.$
- 8.6.9. $y(x) \approx \frac{4}{\pi}\eta_1(x) - \frac{2}{\pi}x.$
- 8.6.10. $y(x) \approx \frac{1}{2}\varphi_1(x) + 1.$
- 8.6.11. $y(x) \approx \varphi_1(x) + 1.$
- 8.6.12. $y(x) \approx \varphi_1(x) + 1.$

Литература к разделу 8

1. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: Физматгиз, 1963. – 400 с.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решений сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
3. Дробышев В.И., Дымников В.П., Ривин Г.С. Задачи по вычислительной математике. – М.: Наука, 1980. – 144 с.
4. Демченко В.В. Вычислительный практикум по прикладной математике. – М.: МФТИ, 2007. – 196 с.
5. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике: учебное пособие. — М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. — 523 с.
6. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: Высшая школа, 2000. – 190 с.
7. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – 7-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 636 с.

9. ЗАДАЧА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ. ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

В ряде задач физики, механики и техники, связанных с устойчивостью конструкций и аппаратов, с колебаниями и т.п., возникает необходимость решения однородных краевых задач для однородных дифференциальных уравнений с параметром. В них, как правило, требуется определить те значения параметра, при которых существуют нетривиальные решения задач, а также найти сами эти функции. Их принято называть задачами Штурма–Лиувилля. В качестве примера, на котором будет рассмотрен один из возможных способов решения подобного рода проблем, выберем третью краевую задачу для линейного однородного ОДУ второго порядка:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{dy}{dx} \right] + [p(x) + \lambda \rho(x)] y = 0, & x \in [0, X_L], \\ \mu_0 y(0) + \mu_1 y'(0) = 0, \\ \nu_0 y(X_L) + \nu_1 y'(X_L) = 0. \end{cases} \quad (9.1)$$

Значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные (ненулевые) решения (9.1), называются собственными значениями, или собственными числами задачи Штурма–Лиувилля, а соответствующие им нетривиальные функции – собственными функциями.

Введём в области интегрирования разностную сетку $D_h = \{x_l : x_l = hl, l = \overline{0, L}, hl = X\}$ и заменим в (9.1) производные в узлах сетки конечно-разностными отношениями по формулам численного дифференцирования:

$$\begin{cases} \mu_0 y_0 + \mu_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = 0, \\ \frac{k_{l+1/2}(y_{l+1} - y_l) - k_{l-1/2}(y_l - y_{l-1})}{h} + (p_l + \lambda \rho_l) y_l = 0, & l = \overline{1, L-1}, \\ \nu_0 y_L + \nu_1 \frac{y_L - y_{L-1}}{h} = 0. \end{cases} \quad (9.2)$$

Преобразуем систему уравнений (9.2), умножив на знаменатели дробных членов уравнений, приведя подобные члены, и переобозначим коэффициенты при неизвестных:

$$\begin{aligned} a_0 &= \mu_1, \quad b_0 = \mu_0 h - \mu_1, \quad c_0 = 0, \\ a_l &= k_{l+1/2}, \quad b_l = -(k_{l+1/2} + k_{l-1/2}) + (p_l + \lambda \rho_l) h^2, \quad c_l = k_{l-1/2}, \quad l = \overline{1, L-1}, \\ a_L &= 0, \quad b_L = \nu_0 h + \nu_1, \quad c_L = -\nu_1. \end{aligned}$$

Тогда система линейных однородных уравнений (9.2) примет стандартный вид:

$$\begin{cases} a_0 y_1 + b_0 y_0 = 0, \\ a_l y_{l+1} + b_l y_l + c_l y_{l-1} = 0, \quad l = \overline{1, L-1}, \\ b_L y_L + c_L y_{L-1} = 0. \end{cases} \quad (9.3)$$

Для существования нетривиальных решений системы (9.3) необходимо, чтобы её определитель равнялся нулю. Формальное приравнение нулю определителя системы (9.3) приводит к необходимости находить корни алгебраического уравнения степени $L-1$, т.к. коэффициенты b_l , $l = \overline{1, L-1}$ содержат неизвестный параметр λ . Методы решения такого рода задач, хотя и известны (см. раздел 3 данного пособия), но требуют выполнения большого объёма предварительных вычислений, например, локализации корней. Остановимся более подробно на одном из способов нахождения значений λ , который допускает численное решение этой проблемы.

Метод прямой прогонки. Зададим значение λ_0 произвольно из области локализации корня, принимая во внимание всю имеющуюся дополнительную информацию о задаче (9.1). В этом случае все коэффициенты системы уравнений (9.3) будут определены, матрица системы линейных уравнений имеет трёхдиагональную структуру, и, следовательно, можно достаточно эффективно вычислить значение определителя, воспользовавшись прямым ходом метода прогонки (см. главу 2.2 данного пособия).

Пусть значение определителя системы (9.3) при выбранном значении λ_0 оказалось больше нуля, т.е. $\Delta(\lambda_0) > 0$. Подберём значение λ_1 так, чтобы было выполнено условие $\Delta(\lambda_1) < 0$.

После этого применим метод половинного деления для нахождения корня уравнения $\Delta(\lambda) = 0$. Положим $\lambda_2 = (\lambda_1 + \lambda_0) / 2$ и оставим для дальнейшего рассмотрения ту часть отрезка $[\lambda_1, \lambda_0]$, для которой выполняется условие $\Delta(\lambda_j) \Delta(\lambda_2) < 0$, $j = 0, 1$. Этот процесс будем продолжать до тех

пор, пока не окажется, что $|\lambda_{n+1} - \lambda_n| \leq \varepsilon$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где ε — погрешность, с какой необходимо найти λ .

То, что при приведении матрицы системы линейных уравнений (9.3) к верхней треугольной форме с помощью прямой прогонки её определитель оказывается равным нулю, означает наличие на главной диагонали нулевых элементов. Разберём подробнее, как это происходит, для чего воспользуемся методом индукции. Первое уравнение системы (9.3) можно записать в виде $y_0 = -a_0/b_0$, $y_1 = \alpha_0 y_0$, $\alpha_0 = -a_0/b_0$, где α_0 известно. Предположим, что и $l-1$ уравнение системы (9.3) удалось представить в виде $y_{l-1} = \alpha_{l-1} y_l$, α_{l-1} — известный по предположению метода индукции коэффициент. Подставим это выражение в l уравнение (9.3):

$$a_l y_{l+1} + b_l y_l + c_l y_{l-1} = a_l y_{l+1} + b_l y_l + c_l \alpha_{l-1} y_l = 0, \\ (b_l + c_l \alpha_{l-1}) y_l = -a_l y_{l+1}.$$

Пусть при каком-то значении l коэффициент $b_l + c_l \alpha_{l-1}$ оказался равным нулю, а $a_l \neq 0$. Это возможно только при $y_{l+1} = 0$. Не ограничивая общности, полагаем, что $\alpha_l = 1$. Рассмотрим следующее $l+1$ уравнение (9.3):

$$a_{l+1} y_{l+2} + b_{l+1} y_{l+1} + c_{l+1} y_l = a_{l+1} y_{l+2} + c_{l+1} y_l = 0, \quad y_l = -a_{l+1} y_{l+2} / c_{l+1} = \alpha_{l+1} y_{l+2}.$$

Тогда эта часть матрицы, приведённой к верхней треугольной форме, выглядит так:

$j \backslash i$	$l-1$	l	$l+1$	$l+2$
$l-1$	1	$-\alpha_{l-1}$	0	0
l	0	0	1	0
$l+1$	0	1	0	$-\alpha_{l+1}$
$l+2$	0	0	0	1

В таблице i — номер строки, а j — номер столбца приведённой матрицы. Определитель обращается в нуль только при условии $b_L + c_L \alpha_{L-1} = 0$.

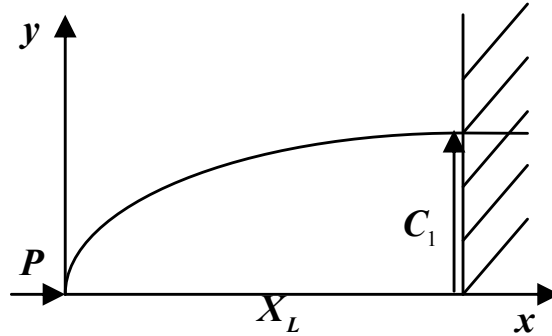
Задавая y_L , исходя из условия нормировки решения и используя ранее вычисленные значения коэффициентов α_l , $l = \overline{0, L-1}$, получаем при обратной прогонке собственную функцию, отвечающую найденному собственному значению.

Упражнения

Разберём задачу на собственные значения о продольном изгибе стержня, зашкреплённого на одном конце, решив её как аналитическими, так и численными методами.

Пример 1

При небольших отклонениях $y(x)$ упругая линия однородного стержня удовлетворяет уравнению $Pu = -EJu''$, где P — сжимающая сила, направленная вдоль оси стержня, E — модуль упругости, J — осевой момент инерции сечения.



Для корректной постановки задачи к дифференциальному уравнению добавим краевые условия, отражающие способ закрепления стержня:

$$\begin{cases} EJy'' + Py = 0, & x \in [0, X_L], \\ y(0) = y'(X_L) = 0. \end{cases} \quad (9.4)$$

Введём обозначение $\lambda = k^2 = P/(EJ)$. Задача состоит в нахождении тех значений P , а следовательно, и λ , при которых существуют нетривиальные решения $y \neq 0$, и соответствующих им форм изгиба стержня.

Решение

Перепишем (9.4) с учётом введённых обозначений:

$$\begin{cases} y'' + k^2 y = 0, & x \in [0, X_L], \\ y(0) = y'(X_L) = 0 \end{cases} \quad (9.5)$$

и проведём анализ общего решения дифференциального уравнения из (9.5) $y(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)$. Нетрудно установить, что $C_2 = 0$, т.к.

$y(0) = 0$. Второе краевое условие даёт $y'(X_L) = kC_1 \cos(kX_L) = 0$. Возможны несколько вариантов, при которых удовлетворяется это уравнение:

1) $k = 0$ означает отсутствие сжимающей силы, т.е. $P = 0$;

2) $C_1 = 0$, т.е. $y(x) = 0$ — не искривленная форма, тривиальное решение;

3) $\cos(kX_L) = 0$, $k_n = \frac{\pi(2n-1)}{2X_L}$, $n = 1, 2, \dots$

В последнем случае каждому n соответствует вполне определённая сжи-

мающая сила $P_n = EJ \frac{\pi^2(2n-1)^2}{4X_L^2}$, $n = 1, 2, \dots$ и определённая форма изгиба

$y(x) = C_1 \sin(k_n x) = C_1 \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2X_L}$, $n = 1, 2, \dots$, где C_1 зависит от начальной длины стержня.

Решим задачу (9.5) численным методом. Для этого в области интегрирования введём сетку $D_h = \{x_l : x_l = hl, l = \overline{0, L}, hl = X_L\}$ и заменим производные в узлах сетки конечно-разностными отношениями по формулам численного дифференцирования:

$$\begin{cases} y_0 = 0, \\ \frac{y_{l+1} - 2y_l + y_{l-1}}{h^2} + \lambda y_l = 0, \quad \overline{l = 1, L-1}, \\ \frac{y_L - y_{L-1}}{h} = 0. \end{cases}$$

Затем приведём подобные члены

$$\begin{cases} y_0 = 0, \\ y_{l+1} - (2 - \lambda h^2)y_l + y_{l-1} = 0, \quad \overline{l = 1, L-1}, \\ y_L = y_{L-1}. \end{cases} \quad (9.6)$$

Система уравнений (9.6) – это система линейных разностных уравнений порядка $L+1$ с постоянными коэффициентами, и её можно решить аналитически (см. главу 6.1 данного пособия). Для этого необходимо сделать подстановку $y_l \Rightarrow q^l$ в основную подсистему уравнений (9.6) и получить характеристическое уравнение $q^2 - (2 - \lambda h^2)q + 1 = 0$. Это квадратное уравнение, и его корни удовлетворяют теореме Виета $q_2 = 1/q_1$, а общее решение (при $q_1 \neq q_2$, т.е. при $q_{1,2} \neq 1, -1$ соответствующие тривиальным решениям) представимо в виде $y_l = C_1 q_1^l + C_2 q_2^l = C_1 q_1^l + C_2 q_1^{-l}$, где C_1, C_2 – постоянные. Из первого краевого условия получаем $C_1 + C_2 = 0$, $C_2 = -C_1$. Тогда выполняется $y_l = C_1 (q_1^l - q_1^{-l})$. Подставим полученное выражение во второе краевое условие $q_1^L - q_1^{-L} = q_1^{L-1} - q_1^{-(L-1)} \Rightarrow q_1^{2L} - 1 = q_1^{2L-1} - q_1 \Rightarrow (q_1^{2L-1} + 1)(q_1 - 1) = 0 \Rightarrow (q_1^{2L-1} + 1) = 0$. Получаем $q_1^{2L-1} = -1 = e^{(2n-1)\pi i} \Rightarrow q_1 = e^{(2n-1)\pi i / (2L-1)}$, $n = 1, \dots, L-1, L+1, \dots, 2L-1$ ($q_1 \neq -1 = e^{(2L-1)\pi i / (2L-1)}$). Для нахождения λ снова воспользуемся теоремой

Виета: $q_1 + q_2 = e^{(2n-1)\pi i / (2L-1)} + e^{-(2n-1)\pi i / (2L-1)} = 2 \cos \frac{(2n-1)\pi}{2L-1} = 2 - \lambda_n h^2$,

$n = \overline{1, L-1}$ ($n = \overline{L+1, 2L-1}$ не дают новых значений, так как

$\cos \frac{(2n-1)\pi}{2L-1} = \cos \frac{(2(2L-n)-1)\pi}{2L-1}$. Получаем различные

$\lambda_n = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{(2n-1)\pi}{2(2L-1)}$, $n=1, \dots, L-1$. Тогда $k_n = \frac{2}{h} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2(2L-1)} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)\pi}{2hL}$,

$n \ll L$, $y_l = C_1 \sin \frac{(2n-1)\pi l}{(2L-1)}$, $l = \overline{1, L-1}$, что совпадает с результатом анализа дифференциальной задачи.

Случай $q_1 = q_2 = 1$ соответствует $\lambda = 0$, решение $y_l = (C_1 + C_2 l)$ удовлетворяет граничным условиям $y_0 = 0$, $y_{L-1} = y_L$ только при $C_1 = C_2 = 0$.

Случай $q_1 = q_2 = -1$ соответствует $\lambda = \frac{4}{h^2}$, решение $y_l = (C_1 + C_2 l) \cdot (-1)^l$ удовлетворяет граничным условиям $y_0 = 0$, $y_{L-1} = y_L$ только при $C_1 = C_2 = 0$.

Пример 2

На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 3, h = 1\}$ оценить наименьшее число λ , при котором существует нетривиальное решение задачи

$$\begin{cases} y'' + (\lambda - x^2)y = 0, \\ y(0) = y(3) = 0, \quad 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Покажите, что λ действительно и неотрицательно.

Решение

Решение неоднозначно. Приближим, например, вторую производную $y''(x)$ в точках x_l , $l = 1, 2$ со вторым порядком аппроксимации:

$(y'')_l \approx \frac{y_{l+1} - 2y_l + y_{l-1}}{h^2}$. Получаем систему из четырех линейных

уравнений $\mathbf{A}\vec{y} = \vec{0}$ на сеточную функцию $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, y_3)^T$. Матрица \mathbf{A} имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 + \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 + \lambda - 2^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda - 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для существования нетривиального решения $\det \mathbf{A} = 0$. Отсюда получаем квадратное уравнение для λ : $\lambda^2 - 9\lambda + 17 = 0$. Наименьший корень

$\lambda_1 = (9 - \sqrt{13}) / 2$ и есть приближенное значение наименьшего λ . Пусть $y(x)$ – точное решение дифференциальной задачи. Если умножить дифференциальное уравнение на комплексно-сопряженное $y^*(x)$ и проинтегрировать по частям, получим: $\lambda = \int_0^3 (|y'|^2 + x^2 |y|^2) dx / \int_0^3 |y|^2 dx$.

Пример 3

Методом Ритца определить первые два собственных значения и первые две собственные функции задачи Штурма–Лиувилля для уравнения

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = y(3) = 0, \quad 0 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

используя в качестве базисных функций

$$\varphi_l(x) = \begin{cases} 0, & |x - x_l| \geq h, \\ (x - x_{l-1}) / h, & x_{l-1} \leq x \leq x_l, \\ (x_{l+1} - x) / h, & x_l \leq x \leq x_{l+1}, \quad x_l = lh, \quad l = 1, 2, \quad h = 1. \end{cases}$$

Решение

Функционал для данного уравнения принимает вид $F(y) = \int_0^3 ((y')^2 - \lambda y^2) dx$, где $y(x) = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x)$. Подставляя, после интегрирования получаем квадратичную форму от C_1, C_2 :

$$\psi(C_1, C_2, \lambda) = C_1^2 \cdot \left(2 - \frac{2}{3} \lambda\right) + C_2^2 \cdot \left(2 - \frac{2}{3} \lambda\right) + 2C_1 C_2 \cdot \left(-1 - \frac{1}{6} \lambda\right).$$

Здесь использованы значения интегралов $\int_0^3 (\varphi_1'(x))^2 dx = \int_0^3 (\varphi_2'(x))^2 dx = 2$,

$$\int_0^3 (\varphi_1(x))^2 dx = \int_0^3 (\varphi_2(x))^2 dx = 2/3, \quad \int_0^3 \varphi_1'(x) \varphi_2'(x) dx = -1,$$

$$\int_0^3 \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = 1/6 \quad (\text{см. пример 1, глава 8.6}).$$

Приравнявая к нулю производные $\frac{\partial \psi}{\partial C_1} = 0$, $\frac{\partial \psi}{\partial C_2} = 0$, получаем систему линейных уравнений на C_1, C_2 :

$$\begin{cases} (4 - 4\lambda/3)C_1 + (-2 - \lambda/3)C_2 = 0, \\ (-2 - \lambda/3)C_1 + (4 - 4\lambda/3)C_2 = 0. \end{cases}$$

Нетривиальные решения получаются, когда детерминант матрицы системы равен нулю, то есть когда $(4 - 4\lambda/3) = \pm(-2 - \lambda/3)$. Отсюда находим приближенные значения для первых двух собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля $\lambda_1 \approx 1.2$, $\lambda_2 \approx 6$ и соответствующих собственных функций $y_l \approx C_1^{(l)}\varphi_1 + C_2^{(l)}\varphi_2$, $l = 1, 2$. Здесь можно выбрать $C_1^{(1)} = C_2^{(1)} = 1$, $C_1^{(2)} = -C_2^{(2)} = 1$. Для сравнения, точные значения $\lambda_1 = \pi^2/9 \approx 1.097$, $\lambda_2 = 4\pi^2/9 \approx 4.386$.

Задачи

9.1. Найти все λ , при которых существует нетривиальное решение разностной задачи $\frac{y_{l+1} - 2y_l + y_{l-1}}{h^2} = -\lambda y_l$, $y_0 = y_1$, $y_L = 0$, $l = 1 \div L-1$, $h = 1/L$.

Какую дифференциальную задачу эта задача аппроксимирует? К чему стремится решение разностной задачи при $L \rightarrow \infty$?

9.2. Найти все λ , при которых существует нетривиальное решение разностной задачи $\frac{y_{l+1} - 2y_l + y_{l-1}}{h^2} = -\lambda y_l$, $y_0 = 0$, $y_L = 0$, $l = 1 \div L-1$, $h = 1/L$.

Какую дифференциальную задачу эта задача аппроксимирует? К чему стремится решение разностной задачи при $L \rightarrow \infty$?

9.3. Найти все λ , при которых существует нетривиальное решение разностной задачи $\frac{y_{l+1} - 2y_l + y_{l-1}}{h^2} = -\lambda y_l$, $y_0 = y_1$, $y_{L-1} = y_L$, $l = 1 \div L-1$,

$h = 1/L$. Какую дифференциальную задачу эта задача аппроксимирует? К чему стремится решение разностной задачи при $L \rightarrow \infty$?

9.4. Найти все λ , при которых существует нетривиальное решение разностной задачи $\frac{y_{l+1} - 2y_l + y_{l-1}}{h^2} = (2 - \lambda)y_l$, $y_0 = 0$, $y_{L-1} = y_L$, $l = 1 \div L-1$,

$h = 1/L$. Какую дифференциальную задачу эта задача аппроксимирует? К чему стремится решение разностной задачи при $L \rightarrow \infty$?

9.5. Найти все λ , при которых существует нетривиальное решение разностной задачи $\frac{y_{l+1} - 2y_l + y_{l-1}}{h^2} = (4 - \lambda)y_l$, $y_0 = y_1$, $y_{L-1} = y_L$, $l = 1 \div L-1$,

$h = 1/L$. Какую дифференциальную задачу эта задача аппроксимирует? К чему стремится решение разностной задачи при $L \rightarrow \infty$?

9.6. Найти все λ , при которых существует нетривиальное решение разностной задачи $\frac{y_{l+1} - 2y_l + y_{l-1}}{h^2} = (2 - \lambda)y_l$, $y_0 = y_1$, $y_L = 0$, $l = 1 \div L - 1$,

$h = 1/L$. Какую дифференциальную задачу эта задача аппроксимирует? К чему стремится решение разностной задачи при $L \rightarrow \infty$?

9.7. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 3, h = 1\}$ оценить наименьшее число λ , при котором существует нетривиальное решение задачи

$$\begin{cases} [(1+x)y']' + \lambda y = 0, \\ y'(0) = y(3) = 0, \quad 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Покажите, что λ действительно и неотрицательно.

9.8. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 3, h = 1\}$ оценить наименьшее число λ , при котором существует нетривиальное решение задачи

$$\begin{cases} y'' + \lambda(1+x)y = 0, \\ y'(0) = y(3) = 0, \quad 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Покажите, что λ действительно и неотрицательно.

9.9. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 3, h = 1\}$ оценить наименьшее число λ , при котором существует нетривиальное решение задачи

$$\begin{cases} (xy')' + \lambda y = 0, \\ y'(0) = y(3) = 0, \quad 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Покажите, что λ действительно и неотрицательно.

9.10. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 3, h = 1\}$ оценить наименьшее число λ , при котором существует нетривиальное решение задачи

$$\begin{cases} y'' + \lambda xy = 0, \\ y'(0) = y(3) = 0, \quad 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Покажите, что λ действительно и неотрицательно.

9.11. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 3, h = 1/3\}$ оценить наименьшее число λ , при котором существует нетривиальное решение задачи

$$\begin{cases} y'' + (\lambda - x)y = 0, \\ y(0) = y'(1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Покажите, что λ действительно и неотрицательно.

9.12. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 3, h = 1\}$ оценить наименьшее число λ , при котором существует нетривиальное решение задачи

$$\begin{cases} y'' + 2\lambda xy = 0, \\ y(0) = y'(3) = 0, \quad 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Покажите, что λ действительно и неотрицательно.

9.13. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 3, h = 1\}$ оценить наименьшее число λ , при котором существует нетривиальное решение задачи

$$\begin{cases} [(3-x)y']' + \lambda y = 0, \\ y(0) = y'(3) = 0, \quad 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Покажите, что λ действительно и неотрицательно.

9.14. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 3, h = 1\}$ оценить наименьшее число λ , при котором существует нетривиальное решение задачи

$$\begin{cases} (xy')' + 2\lambda y = 0, \\ y(0) = y'(3) = 0, \quad 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Покажите, что λ действительно и неотрицательно.

9.15. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 3, h = 1\}$ оценить наименьшее число λ , при котором существует нетривиальное решение задачи

$$\begin{cases} y'' + \lambda(3-x)y = 0, \\ y(0) = y'(3) = 0, \quad 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Покажите, что λ действительно и неотрицательно.

9.16. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 3, h = 1/3\}$ оценить наименьшее число λ , при котором существует нетривиальное решение задачи

$$\begin{cases} -y'' + [1 - \sin^2(\pi x)]y = \lambda y, \\ y'(0) = y'(1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Покажите, что λ действительно и неотрицательно.

9.17. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 3, h = 1\}$ оценить наименьшее число λ , при котором существует нетривиальное решение задачи

$$\begin{cases} y'' + xy' / 2 + \lambda y = 0, \\ y(0) = y'(3) = 0, \quad 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Покажите, что λ действительно и неотрицательно.

9.18. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 3, h = 1\}$ оценить наименьшее число λ , при котором существует нетривиальное решение задачи

$$\begin{cases} y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \\ y(0) = y'(3) = 0, \quad 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Покажите, что λ действительно и неотрицательно.

9.19. На сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, l = 0 \div 3, h = 1\}$ оценить наименьшее число λ , при котором существует нетривиальное решение задачи

$$\begin{cases} y'' - xy' + \lambda y = 0, \\ y(0) = y'(3) = 0, \quad 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Покажите, что λ действительно и неотрицательно.

Ответы к задачам раздела 9

$$9.1. \quad \lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{\pi k}{2(L-1)} \right) \rightarrow \pi^2 k^2,$$

$$y_l^{(k)} = C \cos \left(\frac{\pi kl}{(L-1)} \right) \rightarrow C \cos(\pi k x_l), \quad k = 0, \dots, L-1.$$

$$9.2. \quad \lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{\pi k}{2L} \right) \rightarrow \pi^2 k^2, \quad y_l^{(k)} = C \sin \left(\frac{\pi kl}{L} \right) = C \sin(\pi k x_l), \\ k = 1, \dots, L-1.$$

$$9.3. \quad \lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{\pi(k+1/2)}{2L} \right) \rightarrow \left(\pi k + \frac{\pi}{2} \right)^2.$$

$$y_l^{(k)} = C \cos \left(\frac{\pi(2k+1)l}{2L-1} \right) = C \cos \left(\pi \left(k + \frac{1}{2} \right) x_l \right), \quad k = 0, \dots, L-2.$$

$$9.17. \lambda = \int_0^3 e^{x^2/4} |y'|^2 dx / \int_0^3 e^{x^2/4} |y|^2 dx .$$

$$9.18. \lambda = \int_0^3 e^{-x^2} |y'|^2 dx / \int_0^3 e^{-x^2} |y|^2 dx .$$

Литература к разделу 9

1. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968. — 504 с.
2. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. – М.: Изд-во МФТИ, 1994. – 528 с.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — 7-е изд. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 636 с.
4. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М. : Физматгиз, 1963. – 400 с.

10. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Начнём знакомство с численными методами решения уравнений с частными производными со смешанной задачи для уравнения переноса:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} &= f(x, t); a = \text{const} > 0, \\ u(t, 0) &= \psi(t); 0 < t < 1, \\ u(0, x) &= \varphi(x); 0 < x < 1; \end{aligned} \right\}; \quad Lu = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x}, \\ u(t, 0), \\ u(0, x); \end{cases} \quad \bar{f} = \begin{cases} f(x, t), \\ \psi(t), \\ \varphi(x), \end{cases}$$

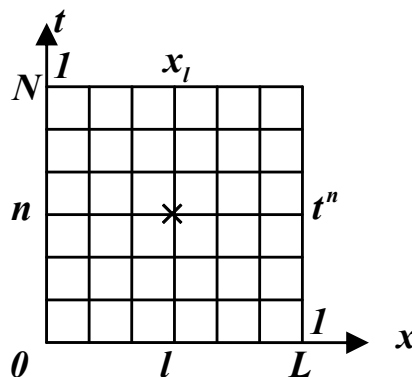
$$Lu = \bar{f} \quad (10.1)$$

и рассмотрим несколько способов перехода от дифференциальных задач к конечно-разностным схемам.

10.1. Методы построения разностных схем

Создание разностной схемы начинается с определения последовательности сеток, на которых предполагается решать разностные задачи и которые принадлежат области интегрирования дифференциальной задачи. Тот факт, что требуется целый ряд разностных сеток, объясняется приближённостью вычисляемых решений и необходимостью оценки точности полученных результатов в нормах выбранного конечномерного пространства. Введём в области интегрирования разностную сетку:

$$D_h = \left\{ (t^n, x_l) : t^n = n\tau, n = \overline{0, N}, \tau N = 1, x_l = hl, l = \overline{0, L}, hL = 1 \right\}. \quad (10.1.1)$$



Меняя в (10.1.1) значения N, L , получим целый набор сеток, на которых в дальнейшем ставятся разностные задачи и которые составляют разностную схему. Как правило, каждый раз производят кратное увеличение сет-

ки, например, в два раза. Это позволяет упростить процедуру отображения полученного решения на выбранное для сравнения конечномерное пространство.

10.1.1. Метод замены производных конечно-разностными отношениями

Заменяем частные производные в узлах сетки конечно-разностными отношениями, например, такими:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_l^n \approx \frac{u_l^{n+1} - u_l^n}{\tau}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_l^n \approx \frac{u_l^n - u_{l-1}^n}{h},$$

затем подставим в (10.1):

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_l^{n+1} - u_l^n}{\tau} + a \frac{u_l^n - u_{l-1}^n}{h} &= f_l^n; \\ n = \overline{0, N-1}, l = \overline{1, L}; \\ u_0^n &= \psi^n, n = \overline{1, N}; \\ u_l^0 &= \varphi_l; l = \overline{0, L} \end{aligned} \right\}$$

и запишем разностную задачу в операторной форме:

$$L_h u^{(h)} = \begin{cases} \frac{u_l^{n+1} - u_l^n}{\tau} + a \frac{u_l^n - u_{l-1}^n}{h}, \\ n = \overline{0, N-1}, l = \overline{1, L}; \\ u_0^n, n = \overline{1, N}; \\ u_l^0, l = \overline{0, L}; \end{cases} \quad f^{(h)} = \begin{cases} f_l^n, n = \overline{0, N-1}, l = \overline{1, L}; \\ \psi^n, n = \overline{1, N}; \\ \varphi_l; l = \overline{0, L}; \end{cases}$$

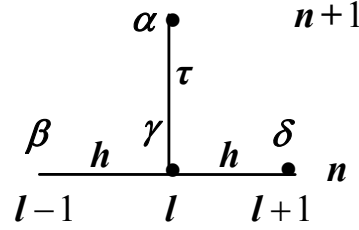
$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}. \quad (10.1.2)$$

При фиксированных значениях N, L разностная задача (10.1.2) состоит из $N \times L + L + 1 + N = (N+1)(L+1)$ линейных уравнений. Она содержит столько же неизвестных значений искомой сеточной функции, сколько узлов составляют разностную сетку $(N+1)(L+1)$. Если определитель этой системы линейных уравнений отличен от нуля, то задача (10.1.2) имеет единственное решение.

10.1.2. Метод неопределённых коэффициентов

Разностная схема, построенная по линейной дифференциальной задаче и использующая подобную аппроксимацию производных в узлах сетки,

за исключением начальных и граничных условий, может рассматриваться как система линейных уравнений с неопределёнными коэффициентами при искомым неизвестных. Часто на сетке задаются определённым шаблоном: *шаблоном называется упорядоченная совокупность узлов разностной сетки, значения сеточной функции в которых объединены одним разностным уравнением*, а коэффициенты подбирают из дополнительных условий, например требований аппроксимации и устойчивости. Обратимся снова к задаче (10.1), зададимся шаблоном



и попробуем построить на нём разностную схему второго порядка аппроксимации по τ и h . Запишем разностное линейное уравнение для узла (n, l) в наиболее общей форме с неопределёнными коэффициентами:

$$\alpha u_l^{n+1} + \beta u_{l-1}^n + \gamma u_l^n + \delta u_{l+1}^n = f_l^n. \quad (10.1.3)$$

Заменим в (10.1.3) значения сеточной функции в узлах сетки на соответствующие значения следа и воспользуемся их разложениями в ряд Тейлора относительно узла (n, l) :

$$\begin{aligned} [u]_l^{n+1} &= [u]_l^n + [\dot{u}_t]_l^n \tau + [\ddot{u}_t]_l^n \frac{\tau^2}{2} + \underline{O}(\tau^3), \\ [u]_{l\pm 1}^n &= [u]_l^n \pm [u'_x]_l^n h + [u''_{xx}]_l^n \frac{h^2}{2} \pm [u'''_{xxx}]_l^n \frac{h^3}{6} + \underline{O}(h^4). \end{aligned} \quad (10.1.4)$$

Для получения разностной схемы второго порядка аппроксимации необходимо, чтобы норма невязки стремилась к нулю при стремлении к нулю h, τ с порядком, не меньшим, чем второй. Подставим в невязку разложения (10.1.4) и сгруппируем подобные члены:

$$\delta f^{(h)} = \begin{cases} (\alpha + \beta + \gamma + \delta)[u]_l^n + \alpha \tau [\dot{u}_t]_l^n + (\delta - \beta)h[u'_x]_l^n + \alpha \frac{\tau^2}{2} [\ddot{u}_t]_l^n, \\ + (\delta + \beta) \frac{h^2}{2} [u''_{xx}]_l^n + \underline{O}(\tau^3 + h^3) - f_l^n, & n = \overline{0, N-1}, l = \overline{1, L}, \\ [u]_0^n - \psi^n, & n = \overline{1, N}, \\ [u]_l^0 - \varphi_l, & l = \overline{0, L}; \end{cases} \quad (10.1.5)$$

Из условия, что след в узле (n, l) как внутренней точке области интегрирования должен удовлетворять дифференциальному уравнению из (10.1) за счёт правильного выбора неопределённых коэффициентов, следует

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + \delta &= 0 \\ \alpha\tau &= 1 \\ (\delta - \beta)h &= a \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\parallel [u]_l^n \\ &\parallel [\dot{u}_t]_l^n \\ &\parallel [u'_x]_l^n \end{aligned} \quad (10.1.6)$$

Для получения второго порядка аппроксимации по τ нужно обнулить коэффициент при второй производной по времени, но $\alpha = 1/\tau$ из второго уравнения (10.1.6). Кажется, что осуществить это невозможно. С другой стороны, четыре произвольных коэффициента и только три условия (10.1.6) для них. Продифференцируем первое уравнение из (10.1) один раз по времени, второй раз – по пространственной переменной и исключим смешанную производную:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} &= \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial t} - a \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (10.1.7)$$

Заменим вторую производную по времени в (10.1.5) через вторую производную по пространству из (10.1.7). В результате получаем четвертое условие для коэффициентов:

$$\alpha a^2 \frac{\tau^2}{2} + (\delta + \beta) \frac{h^2}{2} = 0 \parallel [u''_{xx}]_l^n. \quad (10.1.8)$$

Решая систему уравнений (10.1.6), (10.1.8), находим

$$\alpha = \frac{1}{\tau}; \beta = \frac{-a}{2h} - \frac{a^2 \tau}{2h^2}; \gamma = \frac{a^2 \tau}{h^2} - \frac{1}{\tau}; \delta = \frac{a}{2h} - \frac{a^2 \tau}{2h^2}. \quad (10.1.9)$$

Подставляя (10.1.9) в (10.1.3), приходим к разностной схеме второго порядка аппроксимации по τ и h :

$$\left. \begin{aligned} &\frac{u_l^{n+1} - u_l^n}{\tau} + a \frac{u_{l+1}^n - u_{l-1}^n}{2h} - a^2 \tau \frac{u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_{l-1}^n}{2h^2} = \\ &= f_l^n + \frac{\tau}{2} \left[\left(\dot{f}_t \right)_l^n - a \left(f'_x \right)_l^n \right], n = \overline{0, N-1}, l = \overline{1, L}; \\ &u_0^n = \psi^n, n = \overline{1, N}; \\ &u_l^0 = \varphi_l, l = \overline{0, L}; \end{aligned} \right\} \text{или в операторной форме} \quad (10.1.10)$$

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}.$$

10.1.3. Интерполяционно-характеристический метод

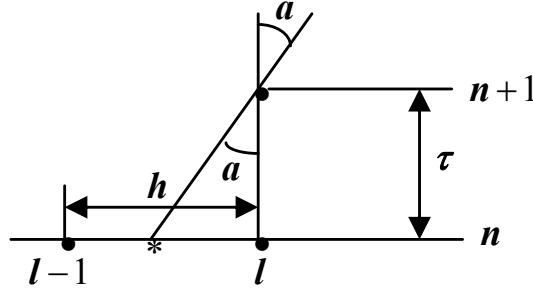
Выберем в качестве примера задачу (10.1) и преобразуем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dt} = f(x, t), \quad (10.1.11)$$

полагая, что $\frac{dx}{dt} = a$, $x = at + C$ – интегральная прямая в плоскости (t, x) , $a > 0, C = \text{const}$. Тогда уравнение с частными производными (10.1.11) вдоль этой прямой превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{du(t)}{dt} = f(x(t), t). \quad (10.1.12)$$

Изобразим фрагмент разностной сетки вместе с интегральной прямой (характеристикой), проходящей через узел (t^{n+1}, x_l)



Применим явный метод Эйлера первого порядка точности при интегрировании уравнения (10.1.12) на отрезке от точки пересечения интегральной прямой с n -временным слоем до её прохождения через узел сетки (t^{n+1}, x_l) :

$$u_l^{n+1} = u^* + \tau f(t^n, x_*) . \quad (10.1.13)$$

Определим значение u^* , используя линейный интерполяционный многочлен, построенный по значениям сеточной функции в узлах (t^n, x_{l-1}) и (t^n, x_l) :

$$\begin{aligned} u^* &= u_l^n + (u_l^n - u_{l-1}^n)(x_* - x_l)/h = u_l^n + (u_l^n - u_{l-1}^n)(\cancel{x_l} - a\tau - \cancel{x_l})/h = \\ &= u_l^n - a\tau(u_l^n - u_{l-1}^n)/h. \end{aligned} \quad (10.1.14)$$

Подставим (10.1.14) в (10.1.13): $\frac{u_l^{n+1} - u_l^n}{\tau} + a \frac{u_l^n - u_{l-1}^n}{h} = f(t^n, x_l - a\tau)$ или,

считая $x_l \gg a\tau$, $\frac{u_l^{n+1} - u_l^n}{\tau} + a \frac{u_l^n - u_{l-1}^n}{h} = f(t^n, x_l)$, что полностью совпадает с (10.1.2).

Упражнения

Пример 1

Предложить разностную схему для решения смешанной задачи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} &= b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(t, x, y); \quad a, b = \text{const} > 0; \\ u(0, x, y) &= \varphi(x, y); u(t, 0, y) = \psi(t, y); 0 \leq t, x, y \leq 1; \\ u(t, x, 0) &= \chi_1(t, x); \quad u(t, x, 1) = \chi_2(t, x) \end{aligned} \right\} \quad (10.1.15)$$

на сетках $D_h = \{(t^n, x_l, y_m) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh_x, h_x L = 1,$

$l = 0 \div L; y_m = mh_y, h_y M = 1, m = 0 \div M\}$ и исследовать её на аппроксимацию.

Решение

Заменим частные производные во внутренних узлах сетки конечно-разностными отношениями, например,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{l,m}^n &\approx \frac{u_{l,m}^{n+1} - (u_{l+1,m}^n + u_{l-1,m}^n)/2}{\tau}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{l,m}^n \approx \frac{u_{l+1,m}^n - u_{l-1,m}^n}{2h_x}; \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{l,m}^n &\approx \frac{u_{l,m+1}^{n+1} - 2u_{l,m}^{n+1} + u_{l,m-1}^{n+1}}{h_y^2}; \end{aligned}$$

а на границе $x=1, 0 < y < 1$ —

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{L,m}^n \approx \frac{u_{L,m}^{n+1} - u_{L,m}^n}{\tau}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{L,m}^n \approx \frac{u_{L,m}^n - u_{L-1,m}^n}{h_x}; \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{L,m}^n \approx \frac{u_{L,m+1}^{n+1} - 2u_{L,m}^{n+1} + u_{L,m-1}^{n+1}}{h_y^2}$$

и после подстановки в дифференциальное уравнение задачи (10.1.15) получим разностную схему:

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{u_{l,m}^{n+1} - (u_{l+1,m}^n + u_{l-1,m}^n)/2}{\tau} + a \frac{u_{l+1,m}^n - u_{l-1,m}^n}{2h_x} = b \frac{u_{l,m+1}^{n+1} - 2u_{l,m}^{n+1} + u_{l,m-1}^{n+1}}{h_y^2} + f_{l,m}^n; \\
& n = \overline{0, N-1}; l = \overline{1, L-1}; m = \overline{1, M-1}; \\
& u_{l,m}^0 = \varphi_{l,m}; l = \overline{0, L}; m = \overline{0, M}; \\
& u_{0,m}^n = \psi_m^n; n = \overline{1, N}; m = \overline{0, M}; \\
& u_{L,0}^n = (\chi_1)_L^n; n = \overline{1, N}; \\
& \frac{u_{L,m}^{n+1} - u_{L,m}^n}{\tau} + a \frac{u_{L,m}^n - u_{L-1,m}^n}{h_x} = b \frac{u_{L,m+1}^{n+1} - 2u_{L,m}^{n+1} + u_{L,m-1}^{n+1}}{h_y^2} + f_{L,m}^n; n = \overline{0, N-1}; m = \overline{1, M-1} \\
& u_{L,M}^n = (\chi_2)_L^n; n = \overline{1, N}; \\
& u_{l,0}^n = (\chi_1)_l^n; n = \overline{1, N}; l = \overline{1, L-1}; \\
& u_{l,M}^n = (\chi_2)_l^n; n = \overline{1, N}; l = \overline{1, L-1}.
\end{aligned} \right\} (10.1.16)$$

Для проверки корректности постановки разностных задач (10.1.16) сравним число уравнений $N(L-1)(M-1) + (L+1)(M+1) + N(M+1) + N + N(M-1) + N + N(L-1) + N(L-1) = (N+1)(L+1)(M+1)$ с числом неизвестных значений сеточных функций $(N+1)(L+1)(M+1)$. Эти числа равны, и если уравнения системы (10.1.16) линейно независимы, то существует единственное решение разностной задачи. Определим невязку, заменив значения сеточной функции в (10.1.16) на соответствующие значения следа и вычтя из левых частей разностных уравнений правые части:

$$\delta f^{(h)} = \begin{cases} \frac{[u]_{l,m}^{n+1} - ([u]_{l+1,m}^n + [u]_{l-1,m}^n)/2}{\tau} + a \frac{[u]_{l+1,m}^n - [u]_{l-1,m}^n}{2h_x} - \\ - b \frac{[u]_{l,m+1}^{n+1} - 2[u]_{l,m}^{n+1} + [u]_{l,m-1}^{n+1}}{h_y^2} - f_{l,m}^n; n=\overline{0, N-1}; l=\overline{1, L-1}; m=\overline{1, M-1}; \\ [u]_{l,m}^0 - \varphi_{l,m}; l=\overline{0, L}; m=\overline{0, M}; \\ [u]_{0,m}^n - \psi_m^n; n=\overline{1, N}; m=\overline{0, M}; \\ [u]_{L,0}^n - (\chi_1)_L^n; n=\overline{1, N}; \\ \frac{[u]_{L,m}^{n+1} - [u]_{L,m}^n}{\tau} + a \frac{[u]_{L,m}^n - [u]_{L-1,m}^n}{h_x} - b \frac{[u]_{L,m+1}^{n+1} - 2[u]_{L,m}^{n+1} + [u]_{L,m-1}^{n+1}}{h_y^2} - f_{L,m}^n \\ n=\overline{0, N-1}; m=\overline{1, M-1}; \\ [u]_{L,M}^n - (\chi_2)_L^n; n=\overline{1, N}; \\ [u]_{l,0}^n - (\chi_1)_l^n; n=\overline{1, N}; l=\overline{1, L-1}; \\ [u]_{l,M}^n - (\chi_2)_l^n; n=\overline{1, N}; l=\overline{1, L-1}. \end{cases} \quad (10.1.17)$$

Воспользуемся разложениями значений следа в ряды Тейлора относительно узлов (n, l, m) и (n, L, m) :

$$[u]_{l,m}^{n+1} = [u]_{l,m}^n + [\dot{u}_t]_{l,m}^n \tau + [\ddot{u}_{tt}]_{l,m}^n \frac{\tau^2}{2} + \underline{\underline{O}}(\tau^3),$$

$$[u]_{l\pm 1,m}^n = [u]_{l,m}^n \pm [u'_x]_{l,m}^n h_x + [u''_{xx}]_{l,m}^n \frac{h_x^2}{2} \pm [u'''_{xxx}]_{l,m}^n \frac{h_x^3}{6} + \underline{\underline{O}}(h_x^4),$$

$$[u]_{l,m\pm 1}^{n+1} = [u]_{l,m}^n + [\dot{u}_t]_{l,m}^n \tau \pm [u'_y]_{l,m}^n h_y + [\ddot{u}_{tt}]_{l,m}^n \frac{\tau^2}{2} + [u''_{yy}]_{l,m}^n \frac{h_y^2}{2} \pm [u'''_{yyy}]_{l,m}^n \frac{h_y^3}{6} + \\ + \underline{\underline{O}}(\tau^3 + h_y^4),$$

$$[u]_{L,m}^{n+1} = [u]_{L,m}^n + [\dot{u}_t]_{L,m}^n \tau + [\ddot{u}_{tt}]_{L,m}^n \frac{\tau^2}{2} + \underline{\underline{O}}(\tau^3),$$

$$[u]_{L-1,m}^n = [u]_{L,m}^n - [u'_x]_{L,m}^n h_x + [u''_{xx}]_{L,m}^n \frac{h_x^2}{2} + \underline{\underline{O}}(h_x^3),$$

$$[u]_{L,m\pm 1}^{n+1} = [u]_{L,m}^n + [\dot{u}_t]_{L,m}^n \tau \pm [u'_y]_{L,m}^n h_y + [\ddot{u}_{tt}]_{L,m}^n \frac{\tau^2}{2} + [u''_{yy}]_{L,m}^n \frac{h_y^2}{2} \pm [u'''_{yyy}]_{L,m}^n \frac{h_y^3}{6} + \\ + \underline{\underline{O}}(\tau^3 + h_y^4)$$

и подставим их в (10.1.17), приведя подобные члены и учитывая, что след удовлетворяет дифференциальному уравнению (10.1.15):

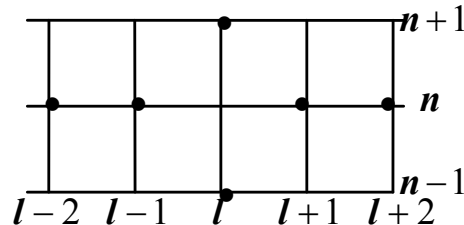
$$\delta f^{(h)} = \begin{cases} C_{l,m}^n \frac{h^2}{\tau} + D_{l,m}^n \tau + E_{l,m}^n h^2; n = \overline{0, N-1}; l = \overline{1, L-1}; m = \overline{1, M-1}; \\ 0; l = \overline{0, L}; m = \overline{0, M}; \\ 0; n = \overline{1, N}; m = \overline{0, M}; \\ 0; n = \overline{1, N}; \\ C_{L,m}^n \tau + D_{L,m}^n h; n = \overline{0, N-1}; m = \overline{1, M-1}; \\ 0; n = \overline{1, N}; \\ 0; n = \overline{1, N}; l = \overline{1, L-1}; \\ 0; n = \overline{1, N}; l = \overline{1, L-1}. \end{cases}$$

Следовательно, $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq C_\tau \tau + C_h h + C \frac{h^2}{\tau}$ и разностная схема аппроксимирует на решении u дифференциальную задачу с порядком $\underline{O}\left(\tau + h + \frac{h^2}{\tau}\right)$.

Пример 2

На сетках $D_h = \{(t^n, x_l): t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh, h = \text{const}, l = 0; \pm 1; \dots \pm L, 1 < L\}$ методом неопределённых коэффициентов построить разностную схему, аппроксимирующую с порядком $\underline{O}(\tau^2 + h^2 + \frac{h^4}{\tau^2})$ в точке (n, l) задачу

Коши для уравнения
$$\left. \begin{aligned} \partial^2 u / \partial t^2 - \partial^3 u / \partial x^3 &= 0; u(0, x) = \psi(x); \\ \partial u(0, x) / \partial t &= \psi_1(x); 0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty; \end{aligned} \right\},$$
 используя шаблон



Решение

Запишем разностное линейное уравнение для узла (n, l) с неопределёнными коэффициентами $\alpha u_{l-2}^n + \beta u_{l-1}^n + \gamma u_l^{n+1} + \delta u_l^{n-1} + \varepsilon u_{l+1}^n + \nu u_{l+2}^n = 0$, за-

меним значения сеточной функции во внутренних узлах сетки на соответствующие значения следа, а затем разложим их в ряды Тейлора относительно узла (n, l) :

$$[u]_l^{n\pm 1} = [u]_l^n \pm [\dot{u}_t]_l^n \tau + [\ddot{u}_{tt}]_l^n \frac{\tau^2}{2} \pm [\ddot{u}_{ttt}]_l^n \frac{\tau^3}{6} + [\ddot{u}_{ttt}]_l^n \frac{\tau^4}{24} + \underline{\underline{O}}(\tau^5),$$

$$[u]_{l\pm 1}^n = [u]_l^n \pm [u'_x]_l^n h + [u''_{xx}]_l^n \frac{h^2}{2} \pm [u'''_{xxx}]_l^n \frac{h^3}{6} + [u^{IV}_{xxxx}]_l^n \frac{h^4}{24} + \underline{\underline{O}}(h^5),$$

$$[u]_{l\pm 2}^n = [u]_l^n \pm [u'_x]_l^n 2h + [u''_{xx}]_l^n 2h^2 \pm [u'''_{xxx}]_l^n \frac{4h^3}{3} + [u^{IV}_{xxxx}]_l^n \frac{2h^4}{3} + \underline{\underline{O}}(h^5).$$

Выбирая неопределённые коэффициенты из условий, что в невязке при подстановке разложений значений следа в узле (n, l) как внутренней точке области интегрирования должно удовлетворяться исходное дифференциальное уравнение, а погрешность быть минимальной, получаем систему из шести линейных уравнений относительно шести неопределённых коэффициентов:

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \nu &= 0, & || [u]_l^n, \\ \gamma - \delta &= 0, & || [\dot{u}_t]_l^n, \\ (\varepsilon - \beta) + 2(\nu - \alpha) &= 0, & || [u'_x]_l^n, \\ \gamma + \delta &= 2/\tau^2, & || [\ddot{u}_{tt}]_l^n, \\ \varepsilon + \beta + 4(\nu + \alpha) &= 0, & || [u''_{xx}]_l^n, \\ (\varepsilon - \beta) + 8(\nu - \alpha) &= -6/h^3, & || [u'''_{xxx}]_l^n. \end{aligned} \right\}$$

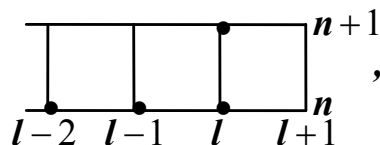
Решая эту систему уравнений, находим неизвестные коэффициенты $\alpha = 1/3\tau^2 + 1/2h^3$; $\beta = -4/3\tau^2 - 1/h^3$; $\gamma = \delta = 1/\tau^2$; $\varepsilon = -4/3\tau^2 + 1/h^3$; $\nu = 1/3\tau^2 - 1/2h^3$. Подставим эти выражения в общее уравнение с неопределёнными коэффициентами и сгруппируем члены с подобными коэффициентами. В результате приходим к разностной схеме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_l^{n+1} - [4(u_{l+1}^n + u_{l-1}^n) - (u_{l+2}^n + u_{l-2}^n)]/3 + u_l^{n-1}}{\tau^2} - \frac{u_{l+2}^n - 2u_{l+1}^n + 2u_{l-1}^n - u_{l-2}^n}{2h^3} &= 0, \\ n = \overline{1, N-1}, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm L; \\ u_l^0 &= \psi_l, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm L; \\ \frac{-3u_l^0 + 4u_l^1 - u_l^2}{2\tau} &= (\psi_1)_l, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm L. \end{aligned} \right\}$$

Исследование аппроксимации даёт $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq C_\tau \tau^2 + C_h h^2 + C \frac{h^4}{\tau^2}$.

Пример 3

На сетках $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0, \pm 1, \dots, \pm L\}$, используя шаблон



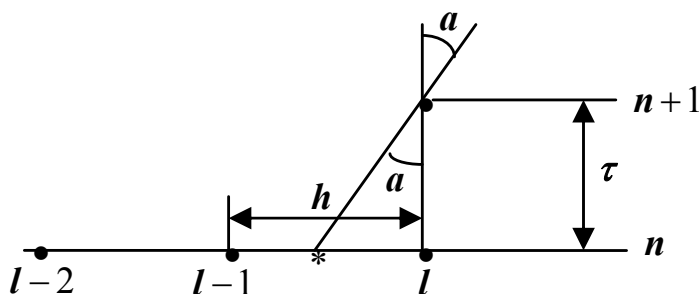
предложить с помощью интерполяционно-характеристического метода разностную схему для решения задачи Коши

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} &= f(t, x); \quad a = \text{const} > 0; \\ u(0, x) &= \varphi(x); \quad 0 < t < 1; -\infty < x < +\infty \end{aligned} \right\}$$

и исследовать её на аппроксимацию.

Решение

Рассмотрим фрагмент разностной сетки вместе с интегральной прямой (характеристикой), проходящей через узел (t^{n+1}, x_l) :



Вдоль характеристики, проходящей через узел сетки (t^{n+1}, x_l) , уравнение с частными производными превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение (10.1.12) (см. (10.1.11), (10.1.12)). Для его интегрирования вдоль этой характеристики, начиная от точки x_* на n временном слое, применим разностный метод:

$$u_l^{n+1} = u^* + \tau[f(t^n, x_*) + f(t^{n+1}, x_l)]/2.$$

Определим значение u^* , используя квадратичный интерполяционный многочлен, построенный по значениям сеточной функции в узлах (t^n, x_{l-2}) , (t^n, x_{l-1}) и (t^n, x_l) , и то, что $x_* = x_l - a\tau$:

$$\begin{aligned}
u^* &= u_l^n + (u_l^n - u_{l-1}^n)(x_* - x_l)/h + (u_l^n - 2u_{l-1}^n + u_{l-2}^n)(x_* - x_l)(x_* - x_{l-1})/(2h^2) = \\
&= u_l^n + \frac{(u_l^n - u_{l-1}^n)(x_l' - a\tau - x_l')}{h} + \frac{(u_l^n - 2u_{l-1}^n + u_{l-2}^n)(x_l' - a\tau - x_l')(-a\tau + h)}{2h^2} = \\
&= u_l^n - a\tau(3u_l^n - 4u_{l-1}^n + u_{l-2}^n)/(2h) + a^2(u_l^n - 2u_{l-1}^n + u_{l-2}^n)\tau^2/(2h^2).
\end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в предыдущую формулу для u_l^{n+1} , приходим к разностной схеме:

$$\left. \begin{aligned}
&\frac{u_l^{n+1} - u_l^n}{\tau} + a \frac{u_{l-2}^n - 4u_{l-1}^n + 3u_l^n}{2h} - a^2 \frac{u_{l-2}^n - 2u_{l-1}^n + u_l^n}{2h^2} \tau = \frac{f(t^n, x_l - a\tau) + f(t^{n+1}, x_l)}{2}; \\
&n = \overline{0, N-1}; \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm L; \\
&u_l^0 = \varphi_l, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm L.
\end{aligned} \right\}$$

Для определения невязки и порядка аппроксимации необходимо в разностную схему вместо значений сеточной функции подставить их разложения в ряд Тейлора относительно узла (t^n, x_l) соответствующих значений следа и перенести правую часть разностных уравнений влево. После приведения подобных членов и, учитывая, что след тождественно удовлетворяет дифференциальному уравнению в узлах сетки, окончательно получаем $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq C_\tau \tau^2 + C_h h^2 + C_{h\tau} h\tau$.

Задачи

10.1.1. Для решения задачи Коши уравнения $\partial^2 u / \partial t^2 + a \partial^2 u / (\partial t \partial x) = f(t, x); u(0, x) = \varphi(x); \partial u(0, x) / \partial t = \psi(x); a = \text{const}; 0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty$ на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\}$ предложена разностная схема: $(u_l^{n+1} - 2u_l^n + u_l^{n-1}) / \tau^2 + a(u_{l+1}^{n+1} - u_{l-1}^{n+1} - u_{l+1}^{n-1} + u_{l-1}^{n-1}) / (4\tau h) = f_l^n; n = \overline{1, N-1}; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1; u_l^0 = \varphi_l; -3u_l^0 + 4u_l^1 - u_l^2 = 2\tau\psi_l; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1$. Исследовать её на аппроксимацию.

10.1.2. Построить методом неопределённых коэффициентов на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = \overline{0, N}; x_l = lh, h > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1\}$ разностную схему, аппроксимирующую с наивысшим порядком в точке

$(n+1/2, l)$ задачу Коши для уравнения

$$\left. \begin{aligned} \partial u / \partial t + \partial u / \partial x + \partial^2 u / (\partial t \partial x) - \partial^2 u / \partial x^2 &= 0 \\ u(0, x) &= \psi(x); 0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty \end{aligned} \right\}, \text{ используя шаблон}$$

$$\bullet \dots \bullet \dots \bullet n+1$$

$$\bullet \dots \bullet n$$

$$l-1 \quad l \quad l+1$$

10.1.3. Для решения задачи Коши уравнения

$$\partial^2 u / \partial t^2 + a \partial^2 u / (\partial t \partial x) = f(t, x); u(0, x) = \varphi(x); \partial u(0, x) / \partial t = \psi(x); a = \text{const};$$

$0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty$ на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N;$

$x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\}$ предложена разностная схема:

$$(u_l^{n+1} - 2u_l^n + u_l^{n-1}) / \tau^2 + a(u_l^{n+1} - u_{l-1}^{n+1} - u_l^{n-1} + u_{l-1}^{n-1}) / (2\tau h) = f_l^n; n = \overline{1, N-1};$$

$l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1; u_l^0 = \varphi_l; -3u_l^0 + 4u_l^1 - u_l^2 = 2\tau\psi_l; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1$. Исследовать её на аппроксимацию.

10.1.4. Для решения задачи Коши уравнения

$$\partial^2 u / \partial t^2 + a \partial^2 u / (\partial t \partial x) = f(t, x); u(0, x) = \varphi(x); \partial u(0, x) / \partial t = \psi(x); a = \text{const};$$

$0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty$ на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N;$

$x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\}$ предложена разностная схема:

$$(u_l^{n+1} - 2u_l^n + u_l^{n-1}) / \tau^2 + a(u_l^{n+1} - u_{l-1}^{n+1} - u_l^n + u_{l-1}^n) / (\tau h) = f_l^n; n = \overline{1, N-1};$$

$l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1; u_l^0 = \varphi_l; -3u_l^0 + 4u_l^1 - u_l^2 = 2\tau\psi_l; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1$. Исследовать её на аппроксимацию.

10.1.5. Для решения задачи Коши уравнения

$$\partial^2 u / \partial t^2 + a \partial^2 u / (\partial t \partial x) = f(t, x); u(0, x) = \varphi(x); \partial u(0, x) / \partial t = \psi(x); a = \text{const};$$

$0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty$ на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N;$

$x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\}$ предложена разностная схема:

$$(u_l^{n+1} - 2u_l^n + u_l^{n-1}) / \tau^2 + a(u_l^n - u_{l-1}^n - u_l^{n-1} + u_{l-1}^{n-1}) / (\tau h) = f_l^n; n = \overline{1, N-1};$$

$l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1; u_l^0 = \varphi_l; -3u_l^0 + 4u_l^1 - u_l^2 = 2\tau\psi_l; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1$. Исследовать её на аппроксимацию.

10.1.6. Для решения задачи Коши уравнения

$$\partial^2 u / \partial t^2 + a \partial^2 u / (\partial t \partial x) = f(t, x); u(0, x) = \varphi(x); \partial u(0, x) / \partial t = \psi(x); a = \text{const};$$

$0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty$ на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N;$

$x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\}$ предложена разностная схема:

$$(u_l^{n+1} - 2u_l^n + u_l^{n-1}) / \tau^2 + a(u_{l+1}^{n+1} - u_{l-1}^{n+1} - u_{l+1}^n + u_{l-1}^n) / (2\tau h) = f_l^n; n = \overline{1, N-1};$$

$l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1; u_l^0 = \varphi_l; -3u_l^0 + 4u_l^1 - u_l^2 = 2\tau\psi_l; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1$. Исследовать её на аппроксимацию.

10.1.7. Для решения задачи Коши уравнения

$$\partial^2 u / \partial t^2 + a \partial^2 u / (\partial t \partial x) = f(t, x); u(0, x) = \varphi(x); \partial u(0, x) / \partial t = \psi(x); a = \text{const};$$

$0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty$ на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N;$

$x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\}$ предложена разностная схема:

$$(u_l^{n+1} - 2u_l^n + u_l^{n-1}) / \tau^2 + a(u_{l+1}^{n+1} - u_{l-1}^{n+1} - u_{l+1}^n + u_{l-1}^n) / (2\tau h) = f_l^n; n = \overline{1, N-1};$$

$l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1; u_l^0 = \varphi_l; -3u_l^0 + 4u_l^1 - u_l^2 = 2\tau\psi_l; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1$. Исследовать её на аппроксимацию.

10.1.8. Для решения задачи Коши уравнения

$$\partial^2 u / \partial t^2 + a \partial^2 u / (\partial t \partial x) = f(t, x); u(0, x) = \varphi(x); \partial u(0, x) / \partial t = \psi(x); a = \text{const};$$

$0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty$ на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N;$

$x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\}$ предложена разностная схема:

$$(u_l^{n+1} - 2u_l^n + u_l^{n-1}) / \tau^2 + a(u_{l+1}^{n+1} - u_{l-1}^{n+1} - u_{l+1}^n + u_{l-1}^n) / (\tau h) = f_l^n; n = \overline{1, N-1};$$

$l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1; u_l^0 = \varphi_l; -3u_l^0 + 4u_l^1 - u_l^2 = 2\tau\psi_l; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1$. Исследовать её на аппроксимацию.

10.1.9. Для решения задачи Коши уравнения

$$\partial^2 u / \partial t^2 + a \partial^2 u / (\partial t \partial x) = f(t, x); u(0, x) = \varphi(x); \partial u(0, x) / \partial t = \psi(x); a = \text{const};$$

$0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty$ на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N;$

$x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\}$ предложена разностная схема:

$$(u_l^{n+1} - 2u_l^n + u_l^{n-1}) / \tau^2 + a(u_{l+1}^n - u_{l-1}^n - u_{l+1}^{n-1} + u_{l-1}^{n-1}) / (\tau h) = f_l^n; n = \overline{1, N-1};$$

$l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1; u_l^0 = \varphi_l; -3u_l^0 + 4u_l^1 - u_l^2 = 2\tau\psi_l; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1$.

Исследовать её на аппроксимацию.

10.1.10. Для решения задачи Коши уравнения

$$\partial^2 u / \partial t^2 + a \partial^2 u / (\partial t \partial x) = f(t, x); u(0, x) = \varphi(x); \partial u(0, x) / \partial t = \psi(x); a = \text{const};$$

$0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty$ на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N;$

$x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\}$ предложена разностная схема:

$$(u_l^{n+1} - 2u_l^n + u_l^{n-1}) / \tau^2 + a(u_{l+1}^n - u_{l-1}^n - u_{l+1}^{n-1} + u_{l-1}^{n-1}) / (2\tau h) = f_l^n; n = \overline{1, N-1};$$

$l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1; u_l^0 = \varphi_l; -3u_l^0 + 4u_l^1 - u_l^2 = 2\tau\psi_l; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1$. Исследовать её на аппроксимацию.

10.1.11. Для решения смешанной задачи уравнения

$$\partial u / \partial t - a \partial^2 u / \partial x^2 - b \partial u / \partial y = f(t, x, y); u(0, x, y) = \varphi(x, y); u(t, 0, y) = \psi_0(t, y);$$

$$u(t, 1, y) = \psi_1(t, y); u(t, x, 1) = \chi(t, x); a, b = \text{const} > 0; 0 \leq t, x, y \leq 1 \text{ на сетке}$$

$$D_h = \{(t^n, x_l, y_m) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh_x, h_x L = 1, l = 0 \div L;$$

$$y_m = mh_y, h_y M = 1, m = 0 \div M\} \text{ предложена разностная схема:}$$

$$(u_{l,m}^{n+1} - u_{l,m}^n) / \tau - a(u_{l+1,m}^n - 2u_{l,m}^n + u_{l-1,m}^n) / h_x^2 - b(u_{l,m+1}^{n+1} - u_{l,m}^{n+1}) / h_y = f_{l,m}^n;$$

$$n = 0 \div N - 1; l = 1 \div L - 1; m = 1 \div M - 1; u_{l,m}^0 = \varphi_{l,m}; l = 0 \div L;$$

$$m = 0 \div M; u_{0,m}^n = (\psi_0)_m^n; n = \overline{1, N}; m = \overline{0, M}; u_{L,m}^n = (\psi_1)_m^n; n = \overline{1, N}; m = \overline{0, M};$$

$$u_{l,M}^n = (\chi)_l^n; n = \overline{1, N}; l = \overline{1, L-1}. \text{ Исследовать её на аппроксимацию.}$$

10.1.12. Для решения смешанной задачи уравнения

$$\partial u / \partial t - a \partial u / \partial x - b \partial^2 u / \partial y^2 = f(t, x, y); u(0, x, y) = \varphi(x, y); u(t, 1, y) = \psi(t, y);$$

$$u(t, x, 0) = \chi_1(t, x); u(t, x, 1) = \chi_2(t, x); a, b = \text{const} > 0; 0 \leq t, x, y \leq 1 \text{ на сетке}$$

$$D_h = \{(t^n, x_l, y_m) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh_x, h_x L = 1, l = 0 \div L;$$

$$y_m = mh_y, h_y M = 1, m = 0 \div M\} \text{ предложена разностная схема}$$

$$(u_{l,m}^{n+1} - u_{l,m}^n) / \tau - a(u_{l+1,m}^n - u_{l-1,m}^n) / 2h_x - b(u_{l,m+1}^n - 2u_{l,m}^n + u_{l,m-1}^n) / h_y^2 = f_{l,m}^{n+1/2};$$

$$n = 0 \div N - 1; l = 1 \div L - 1; m = 1 \div M - 1; u_{l,m}^0 = \varphi_{l,m}; l = 0 \div L; m = 0 \div M;$$

$$u_{0,m}^n = (\psi_1)_m^n; n = 1 \div N; u_{L,m}^n = \psi_m^n; n = \overline{1, N}; m = \overline{0, M}; u_{l,0}^n = (\chi_1)_l^n; n = \overline{1, N};$$

$$l = \overline{1, L-1}; u_{l,M}^n = (\chi_2)_l^n; n = \overline{1, N}; l = \overline{1, L-1}. \text{ Исследовать её на аппроксимацию.}$$

10.1.13. Для решения смешанной задачи уравнения

$$\partial u / \partial t + a \partial u / \partial x - b \partial^2 u / \partial y^2 = f(t, x, y); u(0, x, y) = \varphi(x, y); u(t, 0, y) = \psi(t, y);$$

$$u(t, x, 0) = \chi_1(t, x); u(t, x, 1) = \chi_2(t, x); a, b = \text{const} > 0; 0 \leq t, x, y \leq 1 \text{ на сетке}$$

$$D_h = \{(t^n, x_l, y_m) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh_x, h_x L = 1, l = 0 \div L;$$

$$y_m = mh_y, h_y M = 1, m = 0 \div M\} \text{ предложена разностная схема}$$

$$(u_{l,m}^{n+1} - u_{l,m}^n) / \tau + a(u_{l+1,m}^{n+1} + u_{l+1,m}^n - u_{l-1,m}^{n+1} - u_{l-1,m}^n) / 4h_x -$$

$-b(u_{l,m+1}^{n+1} - 2u_{l,m}^{n+1} + u_{l,m-1}^{n+1})/h_y^2 = f_{l,m}^{n+1/2}; n = 0 \div N-1; l = 1 \div L-1; m = 1 \div M-1;$
 $u_{l,m}^0 = \varphi_{l,m}; l = 0 \div L; m = 0 \div M; u_{0,m}^n = \psi_m^n; n = 1 \div N; m = \overline{0,M}; u_{L,m}^n = (\psi_l)_m^n;$
 $n = \overline{1,N}; m = \overline{0,M}; u_{l,0}^n = (\chi_l)_l^n; n = \overline{1,N}; l = \overline{1,L-1}; u_{l,M}^n = (\chi_2)_l^n; n = \overline{1,N}; l = \overline{1,L-1}.$ Исследовать её на аппроксимацию.

10.1.14. Для решения смешанной задачи уравнения

$\partial u / \partial t - a \partial^2 u / \partial x^2 + b \partial u / \partial y = f(t, x, y); u(0, x, y) = \varphi(x, y); u(t, 0, y) = \psi_0(t, y);$
 $u(t, 1, y) = \psi_l(t, y); u(t, x, 0) = \chi(t, x); a, b = \text{const} > 0; 0 \leq t, x, y \leq 1$ на сетке

$D_h = \{(t^n, x_l, y_m) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh_x, h_x L = 1, l = 0 \div L;$

$y_m = mh_y, h_y M = 1, m = 0 \div M\}$ предложена разностная схема:

$(u_{l,m}^{n+1} - u_{l,m}^n) / \tau - a(u_{l+1,m}^{n+1} - 2u_{l,m}^{n+1} + u_{l-1,m}^{n+1}) / h_x^2 + b(u_{l,m+1}^n - u_{l,m-1}^n) / 2h_y = f_{l,m}^{n+1};$

$n = 0 \div N-1; l = 1 \div L-1; m = 1 \div M-1; u_{l,m}^0 = \varphi_{l,m}; l = 0 \div L;$

$m = 0 \div M; u_{0,m}^n = (\psi_0)_m^n; n = \overline{1,N}; m = \overline{0,M}; u_{L,m}^n = (\psi_l)_m^n; n = \overline{1,N}; m = \overline{0,M};$

$u_{l,0}^n = \chi_l^n; n = \overline{1,N}; l = \overline{1,L-1}; u_{l,M}^n = (\chi_l)_l^n; n = \overline{1,N}; l = \overline{1,L-1}.$ Исследовать её на аппроксимацию.

10.1.15. Построить методом неопределённых коэффициентов на сетке

$D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh, h = \text{const}, l = 0; \pm 1; \dots \pm L \gg 1\}$

разностную схему, аппроксимирующую с порядком $\underline{\underline{O}}(\tau^2 + h)$ в узле (n, l)

задачу Коши для уравнения

$$\left. \begin{aligned} \partial^2 u / \partial t^2 - \partial^3 u / \partial x^3 &= 0; u(0, x) = \psi(x); \\ \partial u(0, x) / \partial t &= \psi_1(x); 0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty \end{aligned} \right\},$$

.....●..... $n+1$

\vdots \vdots \vdots \vdots

используя шаблон ●.....● l●.....●..... n .

\vdots \vdots \vdots \vdots

$l-1 \dots \bullet \dots \bullet l+1 \dots l+2 \dots n-1$

10.1.16. Построить методом неопределённых коэффициентов на сетке

$D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh, h = \text{const}, l = 0; \pm 1; \dots \pm L \gg 1\}$

разностную схему, аппроксимирующую с порядком $\underline{\underline{O}}(\tau^2 + h)$ в узле (n, l)

задачу Коши для уравнения
$$\left. \begin{aligned} \partial^2 u / \partial t^2 - \partial^3 u / \partial x^3 = 0; u(0, x) = \psi(x); \\ \partial u(0, x) / \partial t = \psi_1(x); 0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty \end{aligned} \right\},$$

• $n + 1$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

используя шаблон • • • • n .

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

• $l + 1 \dots l + 2 \dots l + 3 \dots n - 1$

10.1.17. Построить методом неопределённых коэффициентов на сетке

$$D_h = \left\{ (t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh, h = \text{const}, l = 0; \pm 1; \dots \pm L \gg 1 \right\}$$

разностную схему, аппроксимирующую с порядком $\underline{\underline{O}}(\tau^2 + h^2)$ в узле

(n, l) задачу Коши для уравнения
$$\left. \begin{aligned} \partial u / \partial t - \partial^3 u / \partial x^3 = 0; u(0, x) = \psi(x); \\ 0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty \end{aligned} \right\},$$

..... • $n + 1$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

используя шаблон • • l • • n .

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

$l - 2 \quad l - 1 \quad \bullet \quad l + 1 \quad l + 2 \dots n - 1$

10.1.18. Построить методом неопределённых коэффициентов на сетке

$$D_h = \left\{ (t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh, h = \text{const}, l = 0; \pm 1; \dots \pm L \gg 1 \right\}$$

разностную схему, аппроксимирующую с порядком $\underline{\underline{O}}(\tau^2 + h)$ в узле (n, l)

задачу Коши для уравнения
$$\left. \begin{aligned} \partial u / \partial t - \partial^3 u / \partial x^3 = 0; u(0, x) = \psi(x); \\ 0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty \end{aligned} \right\}, \text{ использ-}$$

..... • $n + 1$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

зую шаблон • • l • • n .

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

$l - 1 \dots \bullet \dots l + 1 \dots l + 2 \dots n - 1$

10.1.19. Построить методом неопределённых коэффициентов на сетке

$$D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh, h = \text{const}, l = 0; \pm 1; \dots \pm L \gg 1\}$$

разностную схему, аппроксимирующую с наивысшим порядком в узле $(n+1/2, l)$ задачу Коши для уравнения

$$\left. \begin{aligned} \partial u / \partial t + \partial u / \partial x - \partial^2 u / \partial x^2 &= 0; \\ u(0, x) &= \psi(x); 0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty \end{aligned} \right\}, \text{ используя шаблон}$$

$$\bullet \dots \bullet \dots \bullet \dots n+1$$

$$\bullet \dots \dots \dots \bullet \dots n \quad .$$

$$l-1 \dots l \dots \dots l+1$$

10.1.20. Построить методом неопределённых коэффициентов на сетке

$$D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh, h = \text{const}, l = 0; \pm 1; \dots \pm L \gg 1\}$$

разностную схему, аппроксимирующую с наивысшим порядком в узле $(n+1/2, l)$ задачу Коши для уравнения

$$\left. \begin{aligned} \partial u / \partial t + \partial u / \partial x - \partial^2 u / \partial x \partial t &= 0; \\ u(0, x) &= \psi(x); 0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty \end{aligned} \right\}, \text{ используя шаблон}$$

$$\bullet \dots \dots \dots \bullet \dots n+1$$

$$\bullet \dots \dots \dots \bullet \dots n \quad .$$

$$l-1 \dots \dots l \dots \dots l+1$$

10.2. Спектральный признак устойчивости

Рассмотрим разностную задачу (10.1.10) и допустим, что полученное решение содержит погрешность, связанную с неточностью самих вычислений и округлениями. Представим решение в виде $u^{(h)} = (u)^{(h)} + \Delta^{(h)}$, где $(u)^{(h)}$ – точное решение разностной задачи, $\Delta^{(h)}$ – погрешность, и подставим его в (10.1.10). В результате имеем

$$L_h \Delta^{(h)} = 0. \quad (10.2.1)$$

Отобразим отрезок $x \in [0, hL]$ на отрезок $y \in [0, 2\pi L / (L+1)]$. Точки x_l и y_l связаны соотношением $y_l = 2\pi x_l / [h(L+1)]$, $y_l = 2\pi l / (L+1)$, $x_l = hl, l = \overline{0, L}$. Введём на сетке $D_y = \{y_l : y_l = 2\pi l / (L+1), l = \overline{0, L}\}$ скалярное произведение сеточных функций $u^{(h)}, v^{(h)}$, определённых на ней как

$(u^{(h)}, v^{(h)}) = \frac{1}{L+1} \sum_{l=0}^L u_l \bar{v}_l$, и покажем, что функции

$\psi_l^{(k)} = \exp\{i2\pi kl/[L+1]\}, l = \overline{0, L}, k = \overline{-m, m}, 2m = L$ образуют ортонормиро-

ванный базис $(\psi^{(k)}, \psi^{(p)}) = \frac{\sum_{l=0}^L \exp\{i2\pi(k-p)l/[L+1]\}}{L+1} =$
 $= \frac{1 - e^{i2\pi(k-p)}}{1 - e^{i2\pi(k-p)/(L+1)}} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = p \\ 0, & \text{если } k \neq p \end{cases}$. Обозначим через $\Delta^{(n)}$ сеточную функ-

цию, определённую на сетке D_y и совпадающую с ней $\Delta^{(h)}$ на n - времен-
ном слое. Представим $\Delta^{(n)}$ в виде разложения по ортонормированному
базису

$$\Delta_l^n = \sum_{k=-m}^m \lambda_k^n \exp\{i2\pi kl/[L+1]\}, l = \overline{0, L}, \lambda_k^n = \frac{\sum_{l=0}^L \Delta_l^n \exp\{i2\pi kl/[L+1]\}}{L+1}.$$

Следовательно, справедливо $\Delta_l^{n+1} = \sum_{k=-m}^m \lambda_k^{n+1} \exp\{i2\pi kl/[L+1]\}, l = \overline{0, L}$.

Подставим эти выражения в (10.2.1):

$$\sum_{k=-m}^m \left[\frac{\lambda_k^{n+1}/\lambda_k^n - 1}{\tau} + a \frac{i \cdot \sin \frac{2\pi k}{L+1}}{h} + a^2 \frac{2\tau \cdot \sin^2 \frac{\pi k}{L+1}}{h^2} \right] \cdot \lambda_k^n e^{\frac{i2\pi kl}{L+1}} = 0. \quad (10.2.2)$$

Сделаем замены $\lambda_k = \lambda_k^{n+1}/\lambda_k^n$; $\alpha_k = 2\pi k/[L+1]$ и скалярно умножим (10.2.2)
на базисную функцию $\psi^{(p)} = \exp\{i2\pi pl/[L+1]\}, l = \overline{0, L}, p = \overline{-m, m}$. В ре-
зультате ортонормированности базисных функций получаем

$$\left[\frac{\lambda_p - 1}{\tau} + a \frac{i \sin \alpha_p}{h} + a^2 \frac{2\tau \sin^2(\alpha_p/2)}{h^2} \right] = 0, p = \overline{-m, m} \text{ или, разрешая относи-}$$

тельно λ_p , имеем

$$\lambda_p = 1 - a \frac{i\tau \sin \alpha_p}{h} - a^2 \frac{2\tau^2 \sin^2(\alpha_p/2)}{h^2}, p = \overline{-m, m}. \quad (10.2.3)$$

Для получения любой сколь угодно малой погрешности необходимо
устремлять $L \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$, а следовательно, и $m \rightarrow \infty$. Поэтому заменим

$\alpha_p, p = \overline{-m, m} \Rightarrow \alpha, -\infty < \alpha < \infty$; $\lambda_p \Rightarrow \lambda_\alpha$ и подставим в (10.2.3):

$$\lambda_\alpha = 1 - a \frac{i\tau \sin \alpha}{h} - a^2 \frac{2\tau^2 \sin^2(\alpha/2)}{h^2}, -\infty < \alpha < +\infty. \quad (10.2.4)$$

Для того чтобы не происходило неограниченного роста погрешности при $N \rightarrow \infty$, нужно потребовать $|\lambda_\alpha| \leq 1$, $-\infty < \alpha < +\infty$. Условие $|\lambda_\alpha| \leq 1$ эквивалентно $|\lambda_\alpha|^2 = \lambda_\alpha \bar{\lambda}_\alpha \leq 1$, $-\infty < \alpha < +\infty$ или с учётом (10.2.4)

$$|\lambda_\alpha|^2 = \left[1 - a \frac{i\tau \sin \alpha}{h} - a^2 \frac{2\tau^2 \sin^2(\alpha/2)}{h^2} \right] \left[1 + a \frac{i\tau \sin \alpha}{h} - a^2 \frac{2\tau^2 \sin^2(\alpha/2)}{h^2} \right] =$$

$$= 1 - a^2 \frac{4\tau^2 \sin^2(\alpha/2)}{h^2} + a^4 \frac{4\tau^4 \sin^4(\alpha/2)}{h^4} + a^2 \frac{4\tau^2 \sin^2(\alpha/2) \cos^2(\alpha/2)}{h^2} \leq 1.$$

Решая это неравенство и принимая во внимание $-\infty < \alpha < +\infty$, находим

$$-1 + a^2 \frac{\tau^2}{h^2} \leq 0 \Rightarrow \tau \leq \frac{h}{a}. \quad (10.2.5)$$

Следовательно, спектральным условием устойчивости для разностной схемы (10.1.10) является неравенство (10.2.5).

Спектральный признак устойчивости

Модуль отношения амплитуд одной и той же гармоники при переходе с одного вычислительного слоя на другой не должен быть больше единицы $|\lambda_\alpha| \leq 1$ для всех возможных номеров гармоник разложения сеточной функции ошибки в конечный ряд Фурье.

Упражнения

Пример 1

В примере 1 главы 10.1 была предложена разностная схема

$$\left. \begin{aligned} & \frac{u_{l,m}^{n+1} - (u_{l+1,m}^n + u_{l-1,m}^n)/2}{\tau} + a \frac{u_{l+1,m}^n - u_{l-1,m}^n}{2h_x} = b \frac{u_{l,m+1}^{n+1} - 2u_{l,m}^{n+1} + u_{l,m-1}^{n+1}}{h_y^2} + f_{l,m}^n; \\ & n = \overline{0, N-1}; l = \overline{1, L-1}; m = \overline{1, M-1}; \\ & u_{l,m}^0 = \varphi_{l,m}; l = \overline{0, L}; m = \overline{0, M}; u_{0,m}^n = \psi_m^n; n = \overline{1, N}; m = \overline{0, M}; u_{L,0}^n = (\chi_1)_L^n; n = \overline{1, N}; \\ & \frac{u_{L,m}^{n+1} - u_{L,m}^n}{\tau} + a \frac{u_{L,m}^n - u_{L-1,m}^n}{h_x} = b \frac{u_{L,m+1}^{n+1} - 2u_{L,m}^{n+1} + u_{L,m-1}^{n+1}}{h_y^2} + f_{L,m}^n; n = \overline{0, N-1}; m = \overline{1, M-1}; \\ & u_{L,M}^n = (\chi_2)_L^n; n = \overline{1, N}; u_{l,0}^n = (\chi_1)_l^n; n = \overline{1, N}; l = \overline{1, L-1}; u_{l,M}^n = (\chi_2)_l^n; n = \overline{1, N}; l = \overline{1, L-1} \end{aligned} \right\}$$

для решения смешанной задачи

$$\left. \begin{aligned} \partial u / \partial t + a \partial u / \partial x &= b \partial^2 u / \partial y^2 + f(t, x, y); \quad a, b = \text{const} > 0; \\ u(0, x, y) &= \varphi(x, y); u(t, 0, y) = \psi(t, y); 0 \leq t, x, y \leq 1; \\ u(t, x, 0) &= \chi_1(t, x); \quad u(t, x, 1) = \chi_2(t, x) \end{aligned} \right\}$$

на сетках $D_h = \{(t^n, x_l, y_m) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh_x, l = 0 \div L;$

$h_x L = 1, y_m = mh_y, h_y M = 1, m = 0 \div M\}$. Исследовать её на спектральную устойчивость.

Решение

При выполнении практических исследований на спектральную устойчивость, имея в виду ранее приведённые рассуждения о преобразованиях области интегрирования и конечных рядах Фурье для погрешностей, поступают следующим образом. Заменяют в основной однородной подсистеме уравнений разностной схемы, у которой правая часть равняется нулю, например, в данном случае

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_{l,m}^{n+1} - (u_{l+1,m}^n + u_{l-1,m}^n)/2}{\tau} + a \frac{u_{l+1,m}^n - u_{l-1,m}^n}{2h_x} - b \frac{u_{l,m+1}^{n+1} - 2u_{l,m}^{n+1} + u_{l,m-1}^{n+1}}{h_y^2} &= 0; \\ n = \overline{0, N-1}; l = \overline{1, L-1}; m = \overline{1, M-1}, \end{aligned} \right\}$$

значения $u_{l,m}^n$ на величины $\lambda_{\alpha,\beta}^n e^{i(\alpha l + \beta m)}$, $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$ и требуют, чтобы выполнялось спектральное условие устойчивости $|\lambda_{\alpha,\beta} = \lambda_{\alpha,\beta}^{n+1} / \lambda_{\alpha,\beta}^n| \leq 1, -\infty < \alpha, \beta < +\infty$. Тогда после преобразований получаем

$$\frac{\lambda_{\alpha,\beta} - \cos \alpha}{\tau} + a \frac{i \sin \alpha}{h_x} + \frac{i 4 b \lambda_{\alpha,\beta} \sin^2(\beta/2)}{h_y^2} = 0, \quad -\infty < \alpha, \beta < +\infty \quad \text{или, разрешая}$$

$$\text{относительно} \quad \lambda_{\alpha,\beta} = \frac{\cos \alpha - a \frac{i \tau \sin \alpha}{h_x}}{1 + \frac{i 4 b \tau \sin^2(\beta/2)}{h_y^2}}, \quad -\infty < \alpha, \beta < +\infty. \quad \text{Пользуясь тем,}$$

что условие $|\lambda_{\alpha,\beta}| \leq 1$ эквивалентно $|\lambda_{\alpha,\beta}|^2 = \lambda_{\alpha,\beta} \bar{\lambda}_{\alpha,\beta} \leq 1, -\infty < \alpha, \beta < +\infty$, умножая на комплексно-сопряжённое значение к величине $\lambda_{\alpha,\beta}$, получаем

$$\cos^2 \alpha + a^2 \frac{\tau^2 \sin^2 \alpha}{h_x^2} \leq 1 + \frac{16b^2 \tau^2 \sin^4(\beta/2)}{h_y^4}, \quad -\infty < \alpha, \beta < +\infty \text{ или окончательно}$$

$$-\sin^2 \alpha \left(1 - a^2 \frac{\tau^2}{h_x^2} \right) \leq \frac{16b^2 \tau^2 \sin^4(\beta/2)}{h_y^4}, \quad -\infty < \alpha, \beta < +\infty.$$

Это неравенство выполняется при любых $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$, если справедливо соотношение $\tau \leq \frac{h_x}{a}$, которое и будет спектральным условием устойчивости для рассматриваемой задачи.

Пример 2

На сетках $D_h = \{(t^n, x_l): t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh, h = \text{const}, l = 0; \pm 1; \dots \pm L, 1 < L\}$ для решения задачи Коши уравнения

$$\left. \begin{aligned} \partial u / \partial t - a \partial^3 u / \partial x^3 &= 0; a = \text{const} > 0, \\ u(0, x) &= \psi(x); 0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty \end{aligned} \right\} \text{предложена разностная схема}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_l^{n+1} - u_l^{n-1}}{2\tau} - a \frac{u_{l+3}^n - 3u_{l+1}^n + 3u_{l-1}^n - u_{l-3}^n}{8h^3} &= 0, n = \overline{1, N-1}, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm L; \\ u_l^0 &= \psi_l, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm L; u_l^1 = \psi_l + \left(a \frac{d^3 \psi}{dx^3} \right)_l \tau, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm L. \end{aligned} \right\}$$

Исследовать её на спектральную устойчивость.

Решение

Аналогично предыдущему примеру 1 сделаем подстановку $u_{l,m}^n \Rightarrow \lambda_\alpha^n e^{i\alpha l}$, $-\infty < \alpha < +\infty$ в основную подсистему однородных уравнений рассматриваемой разностной схемы

$$\frac{u_l^{n+1} - u_l^{n-1}}{2\tau} - a \frac{u_{l+3}^n - 3u_{l+1}^n + 3u_{l-1}^n - u_{l-3}^n}{8h^3} = 0, n = \overline{1, N-1}, l = 0, \pm 1, \dots, \pm L.$$

После деления на величину $\lambda_\alpha^n e^{i\alpha l}$, $-\infty < \alpha < +\infty$, тождественных преобразований и введения обозначения $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha^{n+1} / \lambda_\alpha^n$ приходим к квадратному уравнению относительно величины λ_α

$$\lambda_\alpha^2 - \frac{i a \tau \lambda_\alpha}{2h^3} (\sin 3\alpha - 3\sin \alpha) - 1 = 0 \text{ или с учётом}$$

того, что $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$, $\lambda_\alpha^2 - 2 \frac{i a \tau \lambda_\alpha}{h^3} \sin^3 \alpha - 1 = 0$.

В соответствии со спектральным признаком устойчивости корни этого квадратного уравнения по модулю должны быть меньше единицы для всех значений $-\infty < \alpha < +\infty$. С одной стороны, из решения уравнения

получаем, что $(\lambda_\alpha)_{1,2} = \frac{ia\tau}{h^3} \sin^3 \alpha \pm \sqrt{1 - \frac{a^2 \tau^2}{h^6} \sin^6 \alpha}$, а с другой – согласно

теореме Виета произведение корней должно равняться минус единице. Для чисто мнимых корней спектральное условие не будет выполняться, т.к. параметр $-\infty < \alpha < +\infty$. Следовательно, корни должны быть комплексными числами. Тогда их произведение будет равняться квадрату модуля с противоположным знаком и, поскольку он равняется единице, спектральное условие будет выполнено. Отсюда следует, что должно выполняться требование $1 - \frac{a^2 \tau^2}{h^6} \sin^6 \alpha \geq 0$, $-\infty < \alpha < +\infty$ или $\tau \leq \frac{h^3}{a}$. Это условие и будет спектральным условием устойчивости.

Пример 3

В примере 3 главы 10.1 была предложена разностная схема

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_l^{n+1} - u_l^n}{\tau} + a \frac{u_{l-2}^n - 4u_{l-1}^n + 3u_l^n}{2h} - a^2 \frac{u_{l-2}^n - 2u_{l-1}^n + u_l^n}{2h^2} \tau &= [f(t^n, x_l - a\tau) + f(t^{n+1}, x_l)]/2 \\ n &= \overline{0, N-1}; \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm L; \\ u_l^0 &= \varphi_l, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm L \end{aligned} \right\}$$

для решения задачи Коши

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} &= f(t, x); \quad a = \text{const} > 0; \\ u(0, x) &= \varphi(x); \quad 0 < t < 1; -\infty < x < +\infty \end{aligned} \right\}$$

на сетках $D_h = \{(t^n, x_l): t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0, \pm 1, \dots, \pm L\}$. Исследовать её на спектральную устойчивость.

Решение

Для исследования спектральной устойчивости сделаем замену $u_{l,m}^n = \lambda_\alpha^n e^{ial}$, $-\infty < \alpha < +\infty$ в однородных разностных уравнениях рассматриваемой задачи. В результате приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\lambda_\alpha^{n+1} - \lambda_\alpha^n}{\tau} e^{ial} + a \lambda_\alpha^n e^{ial} \frac{3 - 4e^{-i\alpha} + e^{-i2\alpha l}}{2h} - a^2 \lambda_\alpha^n e^{ial} \frac{1 - 2e^{-i\alpha} + e^{-i2\alpha l}}{h^2} \tau = 0.$$

После сокращения на множитель $\lambda_\alpha^n e^{i\alpha l}$ и введения обозначения

$$\lambda_\alpha = \lambda_\alpha^{n+1} / \lambda_\alpha^n \quad \text{получаем} \quad \lambda_\alpha = 1 - \frac{a\tau}{2h} (3 - 4e^{-i\alpha} + e^{-i2\alpha}) + \frac{a^2\tau^2}{h^2} (1 - 2e^{-i\alpha} + e^{-i2\alpha}).$$

Для выполнения спектрального признака устойчивости необходимо потребовать, чтобы выполнялось условие $|\lambda_\alpha| \leq 1, -\infty < \alpha < +\infty$. Оно полностью соответствует требованию $|\lambda_\alpha|^2 = \lambda_\alpha \bar{\lambda}_\alpha \leq 1, -\infty < \alpha < +\infty$. Поэтому умножим λ_α на комплексно-сопряжённое к нему выражение $\bar{\lambda}_\alpha$ и приведём подобные члены:

$$\begin{aligned} |\lambda_\alpha|^2 &= 1 - \frac{a\tau}{h} (3 - 4\cos\alpha + \cos 2\alpha) + \left(\frac{a\tau}{2h} \right)^2 (30 - 40\cos\alpha + 10\cos 2\alpha) + \\ &+ 2 \left(\frac{a\tau}{h} \right)^3 (3 - 4\cos\alpha + \cos 2\alpha) + \frac{1}{2} \left(\frac{a\tau}{h} \right)^4 (3 - 4\cos\alpha + \cos 2\alpha). \end{aligned}$$

Используя тригонометрические формулы для удвоенного угла, вводя обозначение $k = a\tau/h$, приходим к следующему выражению:

$$|\lambda_\alpha|^2 = 1 - 2k(1 - \cos\alpha)^2 + 5k^2(1 - \cos\alpha)^2 - 4k^3(1 - \cos\alpha)^2 + k^4(1 - \cos\alpha)^2 \leq 1.$$

Решая неравенство, приводим подобные члены и делим на множитель $k(1 - \cos\alpha)^2$, учитывая, что $k > 0$. В результате выражение упрощается: $-2 + 5k - 4k^2 + k^3 \leq 0$ или $(k - 1)^2(k - 2) \leq 0$. Следовательно, разностная схема спектрально устойчива, если выполнено условие $k \leq 2, \tau \leq 2h/a$.

Задачи

10.2.1. Для решения задачи Коши уравнения $\partial^2 u / \partial t^2 + a \partial^2 u / (\partial t \partial x) = f(t, x); u(0, x) = \varphi(x); \partial u(0, x) / \partial t = \psi(x); a = \text{const}; 0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty$ на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\}$ предложена разностная схема: $(u_l^{n+1} - 2u_l^n + u_l^{n-1}) / \tau^2 + a(u_{l+1}^n - u_{l-1}^n - u_{l+1}^{n-1} + u_{l-1}^{n-1}) / (2\tau h) = f_l^n; n = \overline{1, N-1}; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1; u_l^0 = \varphi_l; -3u_l^0 + 4u_l^1 - u_l^2 = 2\tau\psi_l; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1$. Исследовать её на спектральную устойчивость и указать шаблон разностной схемы.

10.2.2. Для решения задачи Коши уравнения

$$\partial^2 u / \partial t^2 + a \partial^2 u / (\partial t \partial x) = f(t, x); u(0, x) = \varphi(x); \partial u(0, x) / \partial t = \psi(x); a = \text{const} > 0; 0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty \text{ на сетке } D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N;$$

$x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\}$ предложена разностная схема:

$$(u_l^{n+1} - 2u_l^n + u_l^{n-1}) / \tau^2 + a(u_{l+1}^n - u_l^n - u_{l+1}^{n-1} + u_l^{n-1}) / (\tau h) = f_l^n; n = \overline{1, N-1};$$

$l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1; u_l^0 = \varphi_l; -3u_l^0 + 4u_l^1 - u_l^2 = 2\tau\psi_l; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1$. Исследовать её на спектральную устойчивость и указать шаблон разностной схемы.

10.2.3. Для решения задачи Коши уравнения

$$\partial^2 u / \partial t^2 + a \partial^2 u / (\partial t \partial x) = f(t, x); u(0, x) = \varphi(x); \partial u(0, x) / \partial t = \psi(x); a = \text{const} < 0;$$

$0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty$ на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N;$

$x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\}$ предложена разностная схема:

$$(u_l^{n+1} - 2u_l^n + u_l^{n-1}) / \tau^2 + a(u_{l+1}^{n+1} - u_l^{n+1} - u_{l+1}^n + u_l^n) / (\tau h) = f_l^n; n = \overline{1, N-1};$$

$l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1; u_l^0 = \varphi_l; -3u_l^0 + 4u_l^1 - u_l^2 = 2\tau\psi_l; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1$. Исследовать её на спектральную устойчивость и указать шаблон разностной схемы.

10.2.4. Для решения задачи Коши уравнения

$$\partial^2 u / \partial t^2 + a \partial^2 u / (\partial t \partial x) = f(t, x); u(0, x) = \varphi(x); \partial u(0, x) / \partial t = \psi(x); a = \text{const} < 0;$$

$0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty$ на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N;$

$x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\}$ предложена разностная схема:

$$(u_l^{n+1} - 2u_l^n + u_l^{n-1}) / \tau^2 + a(u_{l+1}^{n+1} - u_l^{n+1} - u_{l+1}^{n-1} + u_l^{n-1}) / (2\tau h) = f_l^n; n = \overline{1, N-1};$$

$l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1; u_l^0 = \varphi_l; -3u_l^0 + 4u_l^1 - u_l^2 = 2\tau\psi_l; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1$. Исследовать её на спектральную устойчивость и указать шаблон разностной схемы.

10.2.5. Для решения задачи Коши уравнения

$$\partial^2 u / \partial t^2 + a \partial^2 u / (\partial t \partial x) = f(t, x); u(0, x) = \varphi(x); \partial u(0, x) / \partial t = \psi(x); a = \text{const} < 0;$$

$0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty$ на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N;$

$x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\}$ предложена разностная схема:

$$(u_l^{n+1} - 2u_l^n + u_l^{n-1}) / \tau^2 + a(u_{l+1}^{n+1} - u_{l-1}^{n+1} - u_{l+1}^{n-1} + u_{l-1}^{n-1}) / (4\tau h) = f_l^n; n = \overline{1, N-1};$$

$l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1; u_l^0 = \varphi_l; -3u_l^0 + 4u_l^1 - u_l^2 = 2\tau\psi_l; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1$. Исследовать её на спектральную устойчивость и указать шаблон разностной схемы.

10.2.6. Для решения задачи Коши уравнения

$$\partial^2 u / \partial t^2 + a \partial^2 u / (\partial t \partial x) = f(t, x); u(0, x) = \varphi(x); \partial u(0, x) / \partial t = \psi(x); a = \text{const};$$

$0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty$ на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\}$ предложена разностная схема:
 $(u_l^{n+1} - 2u_l^n + u_l^{n-1}) / \tau^2 + a(u_{l+1}^{n+1} - u_{l-1}^{n+1} - u_{l+1}^n + u_{l-1}^n) / (2\tau h) = f_l^n; n = \overline{1, N-1};$
 $l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1; u_l^0 = \varphi_l; -3u_l^0 + 4u_l^1 - u_l^2 = 2\tau\psi_l; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1$. Исследовать её на спектральную устойчивость и указать шаблон разностной схемы.

10.2.7. Для решения задачи Коши уравнения

$$\partial^2 u / \partial t^2 + a \partial^2 u / (\partial t \partial x) = f(t, x); u(0, x) = \varphi(x); \partial u(0, x) / \partial t = \psi(x); a = \text{const} > 0;$$

$0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty$ на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N;$

$x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\}$ предложена разностная схема:

$$(u_l^{n+1} - 2u_l^n + u_l^{n-1}) / \tau^2 + a(u_l^n - u_{l-1}^n - u_l^{n-1} + u_{l-1}^{n-1}) / (\tau h) = f_l^n; n = \overline{1, N-1};$$

$l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1; u_l^0 = \varphi_l; -3u_l^0 + 4u_l^1 - u_l^2 = 2\tau\psi_l; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1$. Исследовать её на спектральную устойчивость и указать шаблон разностной схемы.

10.2.8. Для решения задачи Коши уравнения

$$\partial^2 u / \partial t^2 + a \partial^2 u / (\partial t \partial x) = f(t, x); u(0, x) = \varphi(x); \partial u(0, x) / \partial t = \psi(x); a = \text{const} < 0;$$

$0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty$ на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N;$

$x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\}$ предложена разностная схема:

$$(u_l^{n+1} - 2u_l^n + u_l^{n-1}) / \tau^2 + a(u_l^{n+1} - u_{l-1}^{n+1} - u_l^n + u_{l-1}^n) / (\tau h) = f_l^n; n = \overline{1, N-1};$$

$l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1; u_l^0 = \varphi_l; -3u_l^0 + 4u_l^1 - u_l^2 = 2\tau\psi_l; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1$. Исследовать её на спектральную устойчивость и указать шаблон разностной схемы.

10.2.9. Для решения задачи Коши уравнения

$$\partial^2 u / \partial t^2 + a \partial^2 u / (\partial t \partial x) = f(t, x); u(0, x) = \varphi(x); \partial u(0, x) / \partial t = \psi(x); a = \text{const} > 0;$$

$0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty$ на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N;$

$x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\}$ предложена разностная схема:

$$(u_l^{n+1} - 2u_l^n + u_l^{n-1}) / \tau^2 + a(u_l^{n+1} - u_{l-1}^{n+1} - u_l^{n-1} + u_{l-1}^{n-1}) / (2\tau h) = f_l^n; n = \overline{1, N-1};$$

$l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1; u_l^0 = \varphi_l; -3u_l^0 + 4u_l^1 - u_l^2 = 2\tau\psi_l; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1$. Исследовать её на спектральную устойчивость и указать шаблон разностной схемы.

10.2.10. Разностную схему, заданную на сетке

$$D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, \quad n = \overline{0, N}; x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\},$$

исследовать на спектральную устойчивость и указать для неё шаблон:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{u_{l+1}^{n+1} - u_{l+1}^n + u_{l-1}^{n+1} - u_{l-1}^n}{2\tau} - \frac{u_{l+1}^{n+1} - u_{l-1}^{n+1} + u_{l+1}^n - u_{l-1}^n}{4h} - \frac{u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_{l-1}^n}{h^2} = 0 \\ & n = \overline{0, N-1}; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L; u_l^0 = \Psi_l, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \end{aligned} \right\}.$$

10.2.11. Разностную схему, заданную на сетке

$$D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, \quad n = \overline{0, N}; x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\},$$

исследовать на спектральную устойчивость и указать для неё шаблон:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{u_{l+1}^{n+1} - u_{l+1}^n + u_{l-1}^{n+1} - u_{l-1}^n}{2\tau} + \frac{u_{l+1}^{n+1} - u_{l-1}^{n+1} + u_{l+1}^n - u_{l-1}^n}{4h} - \frac{u_{l+1}^{n+1} - u_{l-1}^{n+1} - u_{l+1}^n + u_{l-1}^n}{2\tau h} = 0 \\ & n = \overline{0, N-1}; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L; u_l^0 = \Psi_l, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \end{aligned} \right\}.$$

10.2.12. Разностную схему, заданную на сетке

$$D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, \quad n = \overline{0, N}; x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\},$$

исследовать на спектральную устойчивость и указать для неё шаблон:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{u_{l+1}^{n+1} - u_{l+1}^n + u_{l-1}^{n+1} - u_{l-1}^n}{2\tau} + \frac{u_{l+1}^{n+1} - u_{l-1}^{n+1} + u_{l+1}^n - u_{l-1}^n}{4h} - \frac{u_{l+1}^{n+1} - 2u_l^{n+1} + u_{l-1}^{n+1}}{h^2} = 0 \\ & n = \overline{0, N-1}; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L; u_l^0 = \Psi_l, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \end{aligned} \right\}.$$

10.2.13. Разностную схему, заданную на сетке

$$D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, \quad n = \overline{0, N}; x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\},$$

исследовать на спектральную устойчивость и указать для неё шаблон:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{u_{l+1}^{n+1} - u_{l+1}^n + u_{l-1}^{n+1} - u_{l-1}^n}{2\tau} - \frac{u_{l+1}^{n+1} - u_{l-1}^{n+1} + u_{l+1}^n - u_{l-1}^n}{4h} - \frac{u_{l+1}^{n+1} - 2u_l^{n+1} + u_{l-1}^{n+1}}{h^2} = 0 \\ & n = \overline{0, N-1}; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L; u_l^0 = \Psi_l, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \end{aligned} \right\}.$$

10.2.14. Разностную схему, заданную на сетке

$$D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, \quad n = \overline{0, N}; x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\},$$

исследовать на спектральную устойчивость и указать для неё шаблон:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{u_{l+1}^{n+1} - u_{l+1}^n + u_{l-1}^{n+1} - u_{l-1}^n}{2\tau} - \frac{u_{l+1}^{n+1} - u_{l-1}^{n+1} + u_{l+1}^n - u_{l-1}^n}{4h} + \frac{u_{l+1}^{n+1} - u_{l-1}^{n+1} - u_{l+1}^n + u_{l-1}^n}{2\tau h} = 0 \\ & n = \overline{0, N-1}; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L; u_l^0 = \Psi_l, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \end{aligned} \right\}.$$

10.2.15. Разностную схему, заданную на сетке

$D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = \overline{0, N}; x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\}$, исследовать на спектральную устойчивость и указать для неё шаблон:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{u_{l+1}^{n+1} - u_{l+1}^n + u_{l-1}^{n+1} - u_{l-1}^n}{2\tau} + \frac{u_{l+1}^{n+1} - u_{l-1}^{n+1} + u_{l+1}^n - u_{l-1}^n}{4h} - \frac{u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_{l-1}^n}{h^2} = 0 \\ & n = \overline{0, N-1}; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L; u_l^0 = \Psi_l, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \end{aligned} \right\}.$$

10.2.16. Для решения задачи Коши уравнения $\partial u / \partial t = \partial^3 u / \partial x^3$;

$u(0, x) = \varphi(x); 0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty$ на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1,$

$n = \overline{0, N}; x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\}$ предложена разностная схема:

$(u_l^{n+1} - u_l^n) / \tau = (u_l^{n+1} - 3u_{l-1}^{n+1} + 3u_{l-2}^{n+1} - u_{l-3}^{n+1}) / h^3; n = \overline{0, N-1}; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1;$

$u_l^0 = \varphi_l; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1$. Исследовать её на спектральную устойчивость и указать шаблон разностной схемы.

10.2.17. Для решения задачи Коши уравнения $\partial u / \partial t = \partial^3 u / \partial x^3$;

$u(0, x) = \varphi(x); 0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty$ на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1,$

$n = \overline{0, N}; x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\}$ предложена разностная схема:

$(u_l^{n+1} - u_l^n) / \tau = (u_{l+3}^n - 3u_{l+2}^n + 3u_{l+1}^n - u_l^n) / h^3; n = \overline{0, N-1}; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1;$

$u_l^0 = \varphi_l; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1$. Исследовать её на спектральную устойчивость и указать шаблон разностной схемы.

10.2.18. Для решения задачи Коши уравнения $\partial u / \partial t = \partial^3 u / \partial x^3$;

$u(0, x) = \varphi(x); 0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty$ на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1,$

$n = \overline{0, N}; x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\}$ предложена разностная схема:

$(u_l^{n+1} - u_l^n) / \tau = (u_{l+2}^n - 3u_{l+1}^n + 3u_l^n - u_{l-1}^n) / h^3; n = \overline{0, N-1}; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1;$

$u_l^0 = \varphi_l; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1$. Исследовать её на спектральную устойчивость и указать шаблон разностной схемы.

10.2.19. Для решения задачи Коши уравнения $\partial u / \partial t = \partial^3 u / \partial x^3$;

$u(0, x) = \varphi(x); 0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty$ на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1,$

$n = \overline{0, N}; x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\}$ предложена разностная схема:

$(u_l^{n+1} - u_l^n) / \tau = (u_{l+2}^{n+1} - 3u_{l+1}^{n+1} + 3u_l^{n+1} - u_{l-1}^{n+1}) / h^3; n = \overline{0, N-1}; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1;$

$u_l^0 = \varphi_l; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1$. Исследовать её на спектральную устойчивость и указать шаблон разностной схемы.

10.2.20. Для решения задачи Коши уравнения $\partial u / \partial t = \partial^3 u / \partial x^3$;

$u(0, x) = \varphi(x); 0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty$ на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1,$

$n = \overline{0, N}; x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots; \pm L\}$ предложена разностная схема:

$(u_l^{n+1} - u_l^n) / \tau = (u_{l+1}^{n+1} - 3u_l^{n+1} + 3u_{l-1}^{n+1} - u_{l-2}^{n+1}) / h^3; n = \overline{0, N-1}; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1;$

$u_l^0 = \varphi_l; l = 0; \pm 1; \dots; \pm L \gg 1$. Исследовать её на спектральную устойчивость и указать шаблон разностной схемы.

Ответы к задачам раздела 10

10.1.1. $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq \underline{O}(\tau^2 + h^2).$

10.1.2. $au_{l-1}^n + bu_{l-1}^{n+1} + cu_l^{n+1} + du_{l+1}^{n+1} + eu_{l+1}^n = 0; a = -1/2\tau - 1/4h + 1/4h\tau;$

$b = 1/2\tau - 1/4h - 1/4h\tau - 1/h^2; c = 2/h^2; d = 1/2\tau + 1/4h + 1/4h\tau - 1/h^2;$

$e = -1/2\tau + 1/4h - 1/4h\tau.$

10.1.3. $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq \underline{O}(\tau^2 + h).$

10.1.4. $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq \underline{O}(\tau + h).$

10.1.5. $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq \underline{O}(\tau + h).$

10.1.6. $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq \underline{O}(\tau + h^2).$

10.1.7. $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq \underline{O}(\tau^2 + h).$

10.1.8. $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq \underline{O}(\tau + h).$

10.1.9. $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq \underline{O}(\tau + h).$

10.1.10. $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq \underline{O}(\tau + h^2).$

$$10.1.11. \left\| \delta f^{(h)} \right\|_{F_h} \leq \underline{O}(\tau + h_x^2 + h_y^2) .$$

$$10.1.12. \left\| \delta f^{(h)} \right\|_{F_h} \leq \underline{O}(\tau + h_x^2 + h_y^2) .$$

$$10.1.13. \left\| \delta f^{(h)} \right\|_{F_h} \leq \underline{O}(\tau + h_x^2 + h_y^2) .$$

$$10.1.14. \left\| \delta f^{(h)} \right\|_{F_h} \leq \underline{O}(\tau + h_x^2 + h_y^2) .$$

$$10.1.15. au_l^{n-1} + bu_{l-1}^n + cu_l^n + du_{l+1}^n + eu_{l+2}^n + fu_l^{n+1} = 0; a = f = 1/\tau^2; b = 1/h^3; \\ c = -2/\tau^2 - 3/h^3; d = 3/h^3; e = -1/h^3 .$$

$$10.1.16. au_l^{n-1} + bu_l^n + cu_{l+1}^n + du_{l+2}^n + eu_{l+3}^n + fu_l^{n+1} = 0; a = f = 1/\tau^2; \\ b = -2/\tau^2 + 1/h^3; c = -3/h^3; d = 3/h^3; e = -1/h^3 .$$

$$10.1.17. au_l^{n-1} + bu_{l-2}^n + cu_{l-1}^n + du_{l+1}^n + eu_{l+2}^n + fu_l^{n+1} = 0; -a = f = 1/2\tau; \\ b = 1/2h^3; c = -1/h^3; d = 1/h^3; e = -1/2h^3 .$$

$$10.1.18. au_l^{n-1} + bu_{l-1}^n + cu_l^n + du_{l+1}^n + eu_{l+2}^n + fu_l^{n+1} = 0; -a = f = 1/2\tau; \\ b = 1/h^3; c = -3/h^3; d = 3/h^3; e = -1/h^3$$

$$10.1.19. au_{l-1}^n + bu_{l+1}^n + cu_{l-1}^{n+1} + du_l^{n+1} + eu_{l+1}^{n+1} = 0; a = -1/2\tau - 1/4h; \\ b = -1/2\tau + 1/4h; c = -1/2\tau - 1/4h - 1/h^2; d = 2/h^2; e = 1/2\tau + 1/4h - 1/h^2 .$$

$$10.1.20. au_{l-1}^n + bu_{l+1}^n + cu_{l-1}^{n+1} + du_{l+1}^{n+1} = 0; a = -1/2\tau - 1/4h - 1/2\tau h; \\ b = -1/2\tau + 1/4h + 1/2\tau h; c = 1/2\tau - 1/4h + 1/2\tau h; d = 2/h^2; \\ e = 1/2\tau + 1/4h - 1/2\tau h .$$

$$10.2.1. \begin{array}{c} \dots\dots\dots \bullet \dots\dots\dots n+1 \\ \bullet \dots\dots \bullet \dots\dots \bullet \quad n \\ \bullet \dots\dots \bullet \dots\dots \bullet \quad n-1 \\ l-1 \quad l \quad l+1 \end{array} ; \text{ неустойчива } .$$

- 10.2.2. $\begin{matrix} \bullet \dots \dots \bullet n+1 \\ \bullet \dots \dots \bullet n \\ \bullet \dots \dots \bullet n-1 \end{matrix}$; $a>0$ – неустойчива.
 $l \quad l+1$
- 10.2.3. $\begin{matrix} \bullet \dots \dots \bullet n+1 \\ \bullet \dots \dots \bullet n \\ \bullet \dots \dots \bullet n-1 \end{matrix}$; $a<0$ – безусловно устойчива.
 $l \quad l+1$
- 10.2.4. $\begin{matrix} \bullet \dots \dots \bullet n+1 \\ \bullet \dots \dots \bullet n \\ \bullet \dots \dots \bullet n-1 \end{matrix}$; $a<0$ – безусловно устойчива.
 $l \quad l+1$
- 10.2.5. $\begin{matrix} \bullet \dots \dots \bullet \dots \dots \bullet n+1 \\ \dots \dots \bullet \dots \dots n \\ \bullet \dots \dots \bullet \dots \dots \bullet n-1 \end{matrix}$; безусловно устойчива.
 $l-1 \quad l \quad l+1$
- 10.2.6. $\begin{matrix} \bullet \dots \dots \bullet \dots \dots \bullet n+1 \\ \bullet \dots \dots \bullet \dots \dots \bullet n \\ \dots \dots \bullet \dots \dots n-1 \end{matrix}$; безусловно устойчива.
 $l-1 \quad l \quad l+1$
- 10.2.7. $\begin{matrix} \bullet \dots \dots \bullet n+1 \\ \bullet \dots \dots \bullet n \\ \bullet \dots \dots \bullet n-1 \end{matrix}$; $a>0$ устойчива при $\tau \leq h/a$.
 $l-1 \quad l$

$$\begin{array}{c}
 \bullet \dots \bullet n+1 \\
 \bullet \dots \bullet n \\
 10.2.8. \quad \dots \bullet n-1
 \end{array} ; a < 0 \text{ устойчива при } \tau \geq h/a.$$

$$l-1 \quad l$$

$$\begin{array}{c}
 \bullet \dots \bullet n+1 \\
 \dots \bullet n \\
 10.2.9. \quad \bullet \dots \bullet n-1
 \end{array} ; a > 0 - \text{безусловно устойчива.}$$

$$l-1 \quad l$$

$$\begin{array}{c}
 \bullet \dots \bullet n+1 \\
 \bullet \dots \bullet \dots \bullet n \\
 10.2.10. \quad \dots \bullet n-1 \quad l \quad l+1
 \end{array} ; \tau/h^2 \leq -1/2 - \text{неустойчива.}$$

$$l-1 \quad l \quad l+1$$

$$\begin{array}{c}
 \bullet \dots \bullet n+1 \\
 \bullet \dots \bullet n \\
 10.2.11. \quad \dots \bullet n-1 \quad l \quad l+1
 \end{array} ; \tau \leq 0 - \text{неустойчива.}$$

$$l-1 \quad l \quad l+1$$

$$\begin{array}{c}
 \bullet \dots \bullet \dots \bullet n+1 \\
 \bullet \dots \bullet n \\
 10.2.12. \quad \dots \bullet n-1 \quad l \quad l+1
 \end{array} ; \tau \geq h/2.$$

$$l-1 \quad l \quad l+1$$

$$\begin{array}{c}
 \bullet \dots \bullet \dots \bullet n+1 \\
 \bullet \dots \bullet n \\
 10.2.13. \quad \dots \bullet n-1 \quad l \quad l+1
 \end{array} ; \tau \geq h^2/2 - \text{неустойчива.}$$

$$l-1 \quad l \quad l+1$$

$$\begin{array}{c}
 \bullet \dots \bullet n+1 \\
 \bullet \dots \bullet n \\
 10.2.14. \quad \dots \bullet n-1 \quad l \quad l+1
 \end{array} ; 2\tau \leq 0 - \text{неустойчива.}$$

$$l-1 \quad l \quad l+1$$

$$\begin{array}{c}
 \bullet \dots \bullet n+1 \\
 \bullet \dots \bullet \dots \bullet n \\
 10.2.15. \quad \dots \bullet n-1 \quad l \quad l+1
 \end{array} ; \tau/h^2 \leq -1/2 - \text{неустойчива.}$$

$$l-1 \quad l \quad l+1$$

11. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Будем рассматривать численные методы решения уравнений и систем уравнений с частными производными гиперболического типа на примере уравнений переноса, системы уравнений газодинамики и волнового уравнения. Физические постановки задач, приводящие к этим уравнениям, представляли интерес для научных исследований ещё в недавнем прошлом и не потеряли своей актуальности в настоящее время.

11.1. Уравнения переноса

Пусть искомая неизвестная функция $u = u(t, x)$ зависит от нескольких переменных. Уравнением с частными производными первого порядка называется соотношение, связывающее между собой функции от независимых переменных t, x , искомую функцию $u(t, x)$ и частные производные $\partial u / \partial t$, $\partial u / \partial x$:

$$F(t, x, u, \partial u / \partial t, \partial u / \partial x) = 0. \quad (11.1.1)$$

В случае линейной зависимости функции, её частных производных в уравнении (11.1.1) оно называется линейным с переменными коэффициентами и принимает следующий вид:

$$a(t, x) \partial u / \partial t + b(t, x) \partial u / \partial x + c(t, x) u + d(t, x) = 0. \quad (11.1.2)$$

Если в (11.1.1) линейны только частные производные и их коэффициенты не зависят от функции u , то такое уравнение называется полуплинейным:

$$a(t, x) \partial u / \partial t + b(t, x) \partial u / \partial x + c(t, x, u) = 0. \quad (11.1.3)$$

Зависимость коэффициентов от функции u делает уравнение квазилинейным:

$$a(t, x, u) \partial u / \partial t + b(t, x, u) \partial u / \partial x + c(t, x, u) = 0. \quad (11.1.4)$$

Уравнения вида (11.1.2), (11.1.3), (11.1.4) относят к уравнениям переноса.

Для корректной постановки задач необходимо дополнительно задать либо только начальные, либо начальные и граничные условия. В первом случае это — задача Коши, во втором — смешанная задача. Область интегрирования для задачи Коши пространственно неограниченная и представляет собой полосу в пространстве двух независимых переменных:

$-\infty < x < +\infty$, $0 < t < T$, а при $t = 0$ задаётся начальное условие $u(0, x) = \varphi(x)$. Для смешанной задачи область решения ограничена по пространственной переменной и, как правило, на одной из её границ ставится дополнительное условие: $X_0 < x < X_L$, $0 < t < T$, $u(0, x) = \varphi(x)$, $u(t, X_K) = \psi(t)$, $K = 0$ или L .

Рассмотрим в плоскости независимых переменных t, x кривую, которая удовлетворяет характеристическому уравнению для (11.1.2), (11.1.3), (11.1.4):

$$\frac{dt}{a(t, x)} = \frac{dx}{b(t, x)}. \quad (11.1.5)$$

Вдоль этой кривой, которую называют характеристикой и которая является первым интегралом, уравнение (11.1.2) можно переписать в виде:

$$du/dt = \partial u / \partial t + [b(t, x) / a(t, x)] \partial u / \partial x = -[c(t, x)u + d(t, x)] / a(t, x).$$

Если при всех значениях t, x из области интегрирования функция $b(t, x) / a(t, x)$ принимает вещественные значения, то тип уравнений (11.1.2), (11.1.3), (11.1.4) определяется как гиперболический.

Ещё один первый интеграл (11.1.2) определяется из решения одного из двух уравнений

$$\frac{dt}{a(t, x)} = \frac{du}{-[c(t, x)u + d(t, x)]}; \quad \frac{dx}{b(t, x)} = \frac{du}{-[c(t, x)u + d(t, x)]}. \quad (11.1.6)$$

Зная два первых интеграла (11.1.5), (11.1.6) и удовлетворив начальным, граничным условиям, получаем решение во всей области интегрирования для корректно поставленной задачи (11.1.2).

Подчеркнём важную роль аналитических решений для формулировки модельных задач, на основе которых происходит отладка и апробация различных численных методов решения линейных с переменными коэффициентами, полулинейных, квазилинейных и нелинейных задач.

Задачи

11.1.1. Для решения смешанной задачи для уравнения переноса

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (x+4) \frac{\partial u}{\partial x} = 0; & 0 < t \leq 1, \quad 0 < x \leq 1, \\ u(x, 0) = (x+4)^2; & u(0, t) = 16e^{-2t} \end{cases}$$

на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, N\tau = 1, n = 0 \div N, x_l = hl, hL = 1, l = 0 \div L\}$ предложена разностная схема

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & \begin{cases} u_l^{n+1} = u_l^n - \frac{\tau}{h}(x_l + 4)(u_l^n - u_{l-1}^n), \quad l = 1 \div L, n = 0 \div N, \\ u_l^0 = (x_l + 4)^2, \quad l = 0 \div L; \quad u_0^n = 16e^{-2t^n}, \quad n = 0 \div N; \end{cases} \\
\text{б)} \quad & \begin{cases} u_l^{n+1} = u_l^n + (x_l + 4) \frac{\tau}{2h} (1 - 0.5\tau)(-u_{l-2}^n + 4u_{l-1}^n - 3u_l^n) + \\ + (x_l + 4)^2 \frac{\tau^2}{2h^2} (u_{l-2}^n - 2u_{l-1}^n + u_l^n), \quad l = 2 \div L, n = 0 \div (N-1), \\ u_l^0 = (x_l + 4)^2, \quad l = 0 \div L; u_0^n = 16e^{-2t^n}, \quad n = 1 \div N; \end{cases} \\
\text{в)} \quad & \begin{cases} u_l^{n+1} = u_l^n + \frac{\tau}{6h}(x_l + 4) \left(1 - \frac{\tau}{2} + \frac{\tau^2}{6}\right) (2u_{l-3}^n - 9u_{l-2}^n + 18u_{l-1}^n - 11u_l^n) + \\ + \frac{\tau^2}{2h^2} (x_l + 4)^2 (1 - \tau)(-u_{l-3}^n + 4u_{l-2}^n - 5u_{l-1}^n + 2u_l^n) - \\ - \frac{\tau^3}{6h^3} (x_l + 4)^3 (-u_{l-3}^n + 3u_{l-2}^n - 3u_{l-1}^n + u_l^n), \quad l = 3 \div L, n = 0 \div (N-1); \\ u_l^0 = (x_l + 4)^2, \quad l = 0 \div L; u_0^n = 16e^{-2t^n}, \quad n = 1 \div N. \end{cases}
\end{aligned}$$

Исследовать схему на аппроксимацию, записать с нужной точностью (если требуется) дополнительные граничные условия и указать соотношение между τ и h , обеспечивающее устойчивость.

11.1.2. Для решения смешанной задачи для уравнения переноса

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \cos x; \quad 0 < t \leq 1, \quad 0 < x \leq 1, \\ u(x, 0) = \ln(1 + x^2) + \sin x; \quad u(0, t) = \ln(1 + t^2) \end{cases}$$

на сетке $D_h = \{(t^n, x) : t^n = n\tau, N\tau = 1, n = 0 \div N, x_l = hl, hL = 1, l = 0 \div L\}$

предложена разностная схема

$$\text{a)} \quad \begin{cases} u_l^{n+1} = u_l^n - \frac{\tau}{h}(u_l^n - u_{l-1}^n) + \tau \cos x_l, \quad l = 1 \div L, n = \overline{0, N-1}, \\ u_l^0 = \ln(1 + x_l^2) + \sin x_l, \quad l = 0 \div L; \quad u_0^n = \ln(1 + (t^n)^2), \quad n = 1 \div N; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{б)} \quad & \left\{ \begin{aligned} u_l^{n+1} &= u_l^n + \frac{\tau}{2h}(-u_{l-2}^n + 4u_{l-1}^n - 3u_l^n) + \frac{\tau^2}{2h^2}(u_{l-2}^n - 2u_{l-1}^n + u_l^n) + \\ &+ \tau \cos x_l + \frac{\tau^2}{2} \sin x_l, \quad l = 2 \div L, n = 0 \div (N-1), \\ u_l^0 &= \ln(1+x_l^2) + \sin x_l, \quad l = 0 \div L; u_0^n = \ln(1+(t^n)^2); \end{aligned} \right. \\
\text{в)} \quad & \left\{ \begin{aligned} u_l^{n+1} &= u_l^n + \frac{\tau}{6h}(2u_{l-3}^n - 9u_{l-2}^n + 18u_{l-1}^n - 11u_l^n) + \\ &+ \frac{\tau^2}{2h^2}(-u_{l-3}^n + 4u_{l-2}^n - 5u_{l-1}^n + 2u_l^n) - \\ &- \frac{\tau^3}{6h^3}(-u_{l-3}^n + 3u_{l-2}^n - 3u_{l-1}^n + u_l^n) + \\ &+ \tau \cos x_l + 0.5\tau^2 \sin x_l - \frac{\tau^3}{6} \cos x_l, \quad l = 3 \div L, n = 0 \div (N-1), \\ u_l^0 &= \ln(1+x_l^2) + \sin x_l, \quad l = 0 \div L, \\ u_0^n &= \ln[1+(t^n)^2], \quad n = 1 \div N. \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Исследовать схему на аппроксимацию, записать с нужной точностью (если требуется) дополнительные граничные условия и указать соотношение между τ и h , обеспечивающее устойчивость.

11.1.3. Для решения смешанной задачи для уравнения переноса

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - (2t+3) \frac{\partial u}{\partial x} &= 0; \quad 0 < t \leq 1, \quad 0 \leq x < 1, \\ u(x, 0) &= \ln(1+x^2); \quad u(1, t) = \ln[1+(1+3t+t^2)^2] \end{aligned} \right.$$

на сетке $D_h = \{(t^n, x) : t^n = n\tau, N\tau = 1, n = 0 \div N, x_l = hl, hL = 1, l = 0 \div L\}$

предложена разностная схема

$$\text{а)} \quad \left\{ \begin{aligned} u_l^{n+1} &= u_l^n + \frac{\tau}{h}(2t^n + 3)(u_{l+1}^n - u_l^n), \quad l = 0 \div L-1, n = 0 \div N-1, \\ u_l^0 &= \ln(1+x_l^2), \quad l = 0 \div L, \\ u_L^n &= \ln[1+(1+3t^n+(t^n)^2)^2], \quad n = 1 \div N; \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
\text{б)} \quad & \left\{ \begin{aligned} u_l^{n+1} &= u_l^n - \frac{\tau}{2h} (2t^n + 3 + \tau) (u_{l+2}^n - 4u_{l+1}^n + 3u_l^n) + \frac{\tau^2}{2h^2} \times \\ & \times (2t^n + 3)^2 (u_{l+2}^n - 2u_{l+1}^n + u_l^n), \quad l = 0 \div L-2, n = 0 \div N-1, \\ u_l^0 &= \ln(1 + x_l^2), \quad l = \overline{0, L}, \\ u_L^n &= \ln \left\{ 1 + \left[1 + 3t^n + (t^n)^2 \right]^2 \right\}, \quad n = 1 \div N; \end{aligned} \right. \\
\text{в)} \quad & \left\{ \begin{aligned} u_l^{n+1} &= u_l^n + \frac{\tau}{6h} (2t^n + 3 + \tau) (2u_{l+3}^n - 9u_{l+2}^n + 18u_{l+1}^n - 11u_l^n) + \\ & + \frac{\tau^2}{2h^2} (2t^n + 3) (2t^n + 3 + 2\tau) (-u_{l+3}^n + 4u_{l+2}^n - 5u_{l+1}^n + 2u_l^n) + \\ & + \frac{\tau^3 (2t^n + 3)^3}{6h^3} (u_{l+3}^n - 3u_{l+2}^n + 3u_{l+1}^n - u_l^n), \quad l = 0 \div L-3, n = 0 \div N-1, \\ u_l^0 &= \ln(1 + x_l^2), \quad l = 0 \div L, u_L^n = \ln \left\{ 1 + \left[1 + t^n + (t^n)^2 \right] \right\}, \quad n = 1 \div N. \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Исследовать схему на аппроксимацию, записать с нужной точностью (если требуется) дополнительные граничные условия и указать соотношение между τ и h , обеспечивающее устойчивость.

11.2. Система уравнений газодинамики

Запишем систему уравнений, отражающую три основных закона сохранения: массы, количества движения и энергии, в сплошной среде, дополнив её уравнением состояния идеального газа:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \operatorname{div}(\rho \vec{u}) + (\rho \vec{u} \nabla) \vec{u} &= -\nabla P, \\ \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u} \varepsilon) + P \operatorname{div} \vec{u} &= 0, \\ P &= (\gamma - 1) \rho \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (11.2.1)$$

где ρ — плотность, \vec{u} — скорость, $\rho \varepsilon$ — удельная внутренняя энергия, P — давление. Перепишем (11.2.1) в эйлеровых координатах для пространственно одномерного случая:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} - u^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + 2u \frac{\partial \rho u}{\partial x} + (\gamma - 1) \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} - \gamma u \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial x} + \gamma \varepsilon \frac{\partial \rho u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.2.2)$$

Если ввести вектор-функцию неизвестных $\vec{w} = \{\rho, \rho u, \rho \varepsilon\}^T$ и матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 & 2u & \gamma - 1 \\ -\gamma u \varepsilon & \gamma \varepsilon & u \end{pmatrix},$$

то система уравнений (11.2.2) примет вид

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} = 0. \quad (11.2.3)$$

В дальнейшем потребуются собственные числа матрицы \mathbf{A}^T : $\lambda_1 = u + c$; $\lambda_2 = u$; $\lambda_3 = u - c$ и собственные векторы, соответствующие им: $\vec{\omega}_1 = (-uc, c, \gamma - 1)^T$; $\vec{\omega}_2 = (-c^2, 0, \gamma - 1)^T$; $\vec{\omega}_3 = (uc, -c, \gamma - 1)^T$; $c^2 = \gamma(\gamma - 1)\varepsilon$ — квадрат скорости звука. Составим матрицу, строками которой являются собственные векторы:

$$\mathbf{\Omega}^T = \begin{pmatrix} -uc & c & \gamma - 1 \\ -c^2 & 0 & \gamma - 1 \\ uc & c & \gamma - 1 \end{pmatrix}; \quad (\mathbf{\Omega}^T)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2c^2} & \frac{-2}{2c^2} & \frac{1}{2c^2} \\ \frac{u+c}{2c^2} & \frac{-2u}{2c^2} & \frac{u-c}{2c^2} \\ \frac{1}{2(\gamma-1)} & 0 & \frac{1}{2(\gamma-1)} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} u+c & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u-c \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{\Lambda}| = \begin{pmatrix} |u+c| & 0 & 0 \\ 0 & |u| & 0 \\ 0 & 0 & |u-c| \end{pmatrix}.$$

Приведём систему уравнений (11.2.3) к характеристической форме. Для этого умножим (11.2.3) слева на $\mathbf{\Omega}^T$: $\mathbf{\Omega}^T \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \mathbf{\Omega}^T \mathbf{A} \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} = 0$ и воспользуемся равенствами

$$\mathbf{\Omega}^T \mathbf{A} = (\mathbf{A}^T \mathbf{\Omega})^T = (\mathbf{\Omega} \mathbf{\Lambda})^T = \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Omega}^T = \left(\frac{\mathbf{\Lambda} + |\mathbf{\Lambda}|}{2} \right) \mathbf{\Omega}^T + \left(\frac{\mathbf{\Lambda} - |\mathbf{\Lambda}|}{2} \right) \mathbf{\Omega}^T = \mathbf{\Lambda}^+ \mathbf{\Omega}^T + \mathbf{\Lambda}^- \mathbf{\Omega}^T.$$

В результате получим

$$\mathbf{\Omega}^T \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda}^+ \mathbf{\Omega}^T \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} + \mathbf{\Lambda}^- \mathbf{\Omega}^T \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} = 0. \quad (11.2.4)$$

Пусть область интегрирования задачи представляет собой единичный квадрат $D = \{(t, x) : 0 \leq t \leq 1; 0 \leq x \leq 1\}$. Введём сетку

$D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau; \tau N = 1; n = \overline{0, N}; x_l = lh; hL = 1; l = \overline{0, L}\}$ и аппроксимируем производные, входящие в (11.2.4), конечно-разностными отношениями с учётом направления характеристик:

$$\mathbf{\Omega}^T \frac{\vec{w}_l^{n+1} - \vec{w}_l^n}{\tau} + (\mathbf{\Lambda} + |\mathbf{\Lambda}|) \mathbf{\Omega}^T \frac{\vec{w}_l^n - \vec{w}_{l-1}^n}{2h} + (\mathbf{\Lambda} - |\mathbf{\Lambda}|) \mathbf{\Omega}^T \frac{\vec{w}_{l+1}^n - \vec{w}_l^n}{2h} = 0. \quad (11.2.5)$$

После перегруппировки в уравнении (11.2.5) подобных членов и умножения на матрицу $(\mathbf{\Omega}^T)^{-1}$ получим расчётные формулы для перехода с одного временного слоя на другой:

$$\vec{w}_l^{n+1} = \vec{w}_l^n - \mathbf{A}_l^n \frac{\vec{w}_{l+1}^n - \vec{w}_{l-1}^n}{2h} \tau + \left[(\mathbf{\Omega}^T)^{-1} |\mathbf{\Lambda}| \mathbf{\Omega}^T \right]_l^n \frac{\vec{w}_{l+1}^n - 2\vec{w}_l^n + \vec{w}_{l-1}^n}{2h} \tau. \quad (11.2.6)$$

Разностное уравнение (11.2.6) локально аппроксимирует дифференциальное уравнение (11.2.3) на решении \vec{w} с первым порядком по τ и по h . Оно спектрально устойчиво при выполнении условия $\tau \leq h / \max_i |\lambda_i|$.

Упражнения

Пример 1

Для решения задачи Коши

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{0}, \vec{u}(0, x) = \vec{f}(x), 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}$$

на сетке $D_h = \{(t_n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = T, n = 0 \div N, x_l = lh, l \in \mathbb{Z}\}$ предложена разностная схема

$$\frac{\vec{u}_l^{n+1} - \vec{u}_l^n}{\tau} + \mathbf{A} \frac{\vec{u}_{l+1}^n - \vec{u}_{l-1}^n}{2h} - \tau \mathbf{A}^2 \frac{\vec{u}_{l+1}^n - 2\vec{u}_l^n + \vec{u}_{l-1}^n}{2h^2} = \vec{0}, \vec{u}_l^0 = \vec{f}_l.$$

Исследовать схему на спектральную устойчивость, если а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение

Заметим, что $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$.

Осуществим в разностной схеме замену $\vec{u}_l^n \rightarrow \lambda^n e^{i\alpha l} \vec{\psi}^n$, где $\vec{\psi}^n = \text{const}$, $\|\vec{\psi}^n\| = 1$, и введем обозначение $\lambda = \lambda^{n+1}/\lambda^n$ и $\sigma = \tau/h > 0$, тогда

$$\lambda^n e^{i\alpha l} \left(\frac{\lambda - 1}{\tau} \mathbf{E} + \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2h} \mathbf{A} - \tau \frac{e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}}{2h^2} \mathbf{E} \right) \vec{\psi}^n = \vec{0}.$$

Система имеет решение при условии

$$\det \left((\lambda - 1 - \sigma^2 (\cos \alpha - 1)) \mathbf{E} - i\sigma \sin \alpha \mathbf{A} \right) = 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 1 - \sigma^2 (\cos \alpha - 1) & -i\sigma \sin \alpha \\ -i\sigma \sin \alpha & \lambda - 1 - \sigma^2 (\cos \alpha - 1) \end{pmatrix} = 0,$$

$$(\lambda - 1 - \sigma^2 (\cos \alpha - 1))^2 + \sigma^2 \sin^2 \alpha = 0,$$

$$\lambda = 1 + \sigma^2 (\cos \alpha - 1) \pm i\sigma \sin \alpha,$$

$$|\lambda|^2 = \lambda \bar{\lambda} = (1 + \sigma^2 (\cos \alpha - 1))^2 + \sigma^2 \sin^2 \alpha \leq 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

$$|\lambda|^2 = 1 - 2\sigma^2 (1 - \cos \alpha) + \sigma^4 (1 - \cos \alpha)^2 + \sigma^2 (1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) \leq 1,$$

$$\sigma^2 \leq 1, \tau \leq h.$$

Ответ: предложенная схема устойчива при $\tau \leq h$.

Пример 2

Записать систему в характеристическом виде и предложить для ее решения сходящуюся разностную схему.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial v}{\partial x} = f(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = g(t, x). \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1, -\infty \leq x \leq +\infty,$$

Решение

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{f}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Найдем собственные числа матрицы:}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \lambda^2 - 1 - 3 = 0, \lambda_{1,2} = \pm 2. \text{ Найдем левые собственные векторы.}$$

$$1) \lambda_1 = 2: (\omega_1, \omega_2)(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) = (\omega_1, \omega_2) \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = (0, 0).$$

$$\text{За собственный вектор можно взять } \vec{\omega}_1^T = (1, 1).$$

$$2) \lambda_1 = -2: (\omega_1, \omega_2)(\mathbf{A} + 2\mathbf{E}) = (\omega_1, \omega_2) \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0), \quad \vec{\omega}_2^T = (1, -3).$$

Составим матрицу, строками которой являются левые собственные векторы: $\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Обозначим $\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Тогда спарведливо $\mathbf{A} = \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Omega}$. Приведем исходную систему к характеристическому виду, домножив слева на $\mathbf{\Omega}$:

$$\mathbf{\Omega} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Omega} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \mathbf{\Omega} \vec{f}, \text{ обозначим } \mathbf{\Omega} \vec{u} = \vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + v \\ u - 3v \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \mathbf{\Omega} \vec{f} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{\partial r_1}{\partial t} + 2 \frac{\partial r_1}{\partial x} = f + g, \\ \frac{\partial r_2}{\partial t} - 2 \frac{\partial r_2}{\partial x} = f - 3g. \end{cases}$$

Получили систему относительно инвариантов Римана. Первому уравнению соответствует положительное собственное значение, поэтому раз-

ностную схему для него можно расписать по шаблону

$$\begin{array}{ccc} & \dots\dots\dots \bullet \dots & n+1 \\ & \vdots & \vdots \\ & \dots \bullet \dots\dots & \bullet \dots n \\ l-1 & & l \end{array}$$

. Второму уравнению соответствует отрицательное собственное значение, поэтому разностную схему для него распишем по шаблону

$\dots \bullet \dots\dots\dots n+1$
 $\vdots \quad \quad \vdots$
 $\dots \bullet \dots\dots \bullet \dots n$
 $l \quad \quad l+1$

. В результате получим:

$$\begin{cases} \frac{(r_1)_l^{n+1} - (r_1)_l^n}{\tau} + 2 \frac{(r_1)_l^n - (r_1)_{l-1}^n}{h} = f_l^n + g_l^n, \\ \frac{(r_2)_l^{n+1} - (r_2)_l^n}{\tau} - 2 \frac{(r_2)_{l+1}^n - (r_2)_l^n}{h} = f_l^n - 3g_l^n. \end{cases}$$

Или, в исходных переменных

$$\begin{cases} \frac{u_l^{n+1} + v_l^{n+1} - u_l^n - v_l^n}{\tau} + 2 \frac{u_l^n + v_l^n - u_{l-1}^n - v_{l-1}^n}{h} = f_l^n + g_l^n, \\ \frac{u_l^{n+1} - 3v_l^{n+1} - u_l^n + 3v_l^n}{\tau} - 2 \frac{u_{l+1}^n - 3v_{l+1}^n - u_l^n + 3v_l^n}{h} = f_l^n - 3g_l^n. \end{cases}$$

Задачи

11.2.1. Для решения задачи Коши

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{0}, \vec{u}(0, x) = \vec{f}(x), 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}$$

на сетке $D_h = \{(t_n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = T, n = 0 \div N, x_l = lh, l \in \mathbb{Z}\}$ предложена разностная схема

$$\frac{\vec{u}_l^{n+1} - \vec{u}_l^n}{\tau} + \mathbf{A} \frac{\vec{u}_l^n - \vec{u}_{l-1}^n}{h} = \vec{0}, \vec{u}_l^0 = \vec{f}_l.$$

Исследовать схему на аппроксимацию и спектральную устойчивость для случаев:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, в) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

11.2.2. Для решения задачи Коши

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{0}, \vec{u}(0, x) = \vec{f}(x), 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}$$

на сетке $D_h = \{(t_n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = T, n = 0 \div N, x_l = lh, l \in \mathbb{Z}\}$ предложена разностная схема

$$\frac{\vec{u}_l^{n+1} - \vec{u}_l^n}{\tau} + \mathbf{A} \frac{\vec{u}_{l+1}^n - \vec{u}_{l-1}^n}{2h} - \tau \mathbf{A}^2 \frac{\vec{u}_{l+1}^n - 2\vec{u}_l^n + \vec{u}_{l-1}^n}{2h^2} = \vec{0}, \vec{u}_l^0 = \vec{f}_l.$$

Исследовать схему на аппроксимацию и спектральную устойчивость для случаев:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$, в) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

11.2.3. Для решения задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0, u(0, x, y) = f(x, y), 0 \leq t \leq T, x, y \in \mathbb{R}$$

на сетке

$$D_h = \{(t_n, x_l, y_m) : t^n = n\tau, \tau N = T, n = 0 \div N, x_l = lh_x, y_m = mh_y, l, m \in \mathbb{Z}\}$$

предложена разностная схема

$$\text{a) } \frac{u_{l,m}^{n+1} - u_{l,m}^n}{\tau} + 2 \frac{u_{l+1,m}^{n+1} - u_{l,m}^{n+1}}{h_x} + 3 \frac{u_{l,m+1}^{n+1} - u_{l,m}^{n+1}}{h_y} = \vec{0}, \vec{u}_l^0 = \vec{f}_l;$$

$$\text{б) } \frac{u_{l,m}^{n+1} - u_{l,m}^n}{\tau} + 2 \frac{u_{l+1,m}^n - u_{l-1,m}^n}{2h_x} + 3 \frac{u_{l,m+1}^n - u_{l,m-1}^n}{2h_y} = \vec{0}, \vec{u}_l^0 = \vec{f}_l;$$

$$\text{в) } \frac{u_{l,m}^{n+1} - u_{l,m}^n}{\tau} + 2 \frac{u_{l,m}^n - u_{l-1,m}^n}{h_x} + 3 \frac{u_{l,m}^{n+1} - u_{l,m-1}^{n+1}}{2h_y} = \vec{0}, \vec{u}_l^0 = \vec{f}_l;$$

$$\text{г) } \frac{u_{l,m}^{n+1} - u_{l,m}^n}{\tau} + 2 \frac{u_{l,m}^n - u_{l-1,m}^n}{h_x} + 3 \frac{u_{l,m+1}^n - u_{l,m-1}^n}{2h_y} = \vec{0}, \vec{u}_l^0 = \vec{f}_l.$$

Исследовать схему на аппроксимацию и спектральную устойчивость.

11.2.4. Записать систему в характеристическом виде и предложить для ее решения сходящуюся разностную схему, указать для этой схемы порядок аппроксимации и условие устойчивости:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 6 \frac{\partial u}{\partial x} + 15 \frac{\partial v}{\partial x} = f(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 5 \frac{\partial v}{\partial x} = g(t, x), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1, -\infty \leq x \leq +\infty.$$

11.2.5. Записать систему в характеристическом виде и предложить для ее решения сходящуюся разностную схему, указать для этой схемы порядок аппроксимации и условие устойчивости:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 6 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = f(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - 12 \frac{\partial v}{\partial x} - 5 \frac{\partial u}{\partial x} = g(t, x), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1, -\infty \leq x \leq +\infty.$$

11.2.6. Записать систему в характеристическом виде и предложить для ее решения сходящуюся разностную схему, указать для этой схемы порядок аппроксимации и условие устойчивости:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 3 \frac{\partial v}{\partial x} - 9 \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 5 \frac{\partial v}{\partial x} - 8 \frac{\partial u}{\partial x} = g(t, x), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1, -\infty \leq x \leq +\infty.$$

11.2.7. Записать систему в характеристическом виде и предложить для ее решения сходящуюся разностную схему, указать для этой схемы порядок аппроксимации и условие устойчивости.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 7 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = f(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - 4 \frac{\partial u}{\partial x} + 7 \frac{\partial v}{\partial x} = g(t, x), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1, -\infty \leq x \leq +\infty.$$

11.2.8. Исследовать на спектральную устойчивость и указать шаблон разностной схемы, заданной на сетке

$$D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh, h = \text{const}, l = 0; \pm 1; \dots; \pm\infty\} : \left. \begin{aligned} (u_l^{n+1} - u_l^n) / \tau + (-u_{l+1}^n + 4u_l^n - 3u_{l-1}^n) / (2h) + 3(v_{l+1}^n - v_{l-1}^n) / (2h) &= f_l^n, \\ (v_l^{n+1} - v_l^n) / \tau + 2(u_{l+1}^n - u_{l-1}^n) / (2h) + (-3v_{l+1}^n + 4v_l^n - v_{l-1}^n) / (2h) &= g_l^n, \\ u_l^0 &= \varphi_l, v_l^0 = \psi_l, n = 0 \div N-1; l = 0; \pm 1; \pm 2; \dots, \pm\infty. \end{aligned} \right\}$$

11.2.9. Исследовать на спектральную устойчивость и указать шаблон разностной схемы, заданной на сетке

$$D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh, h = \text{const}, l = 0; \pm 1; \dots; \pm\infty\} : \left. \begin{aligned} (u_l^{n+1} - u_l^n) / \tau + (u_{l+1}^n - u_{l-1}^n) / (2h) - (u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_{l-1}^n) / h + \\ - (v_{l+1}^n - v_{l-1}^n) / h + (v_{l+1}^n - 2v_l^n + v_{l-1}^n) / (2h) &= f_l^n, \\ (v_l^{n+1} - v_l^n) / \tau - (u_{l+1}^n - u_{l-1}^n) / h + (u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_{l-1}^n) / (2h) + \\ + (v_{l+1}^n - v_{l-1}^n) / (2h) - (v_{l+1}^n - 2v_l^n + v_{l-1}^n) / h &= g_l^n, \\ u_l^0 &= \varphi_l, v_l^0 = \psi_l, n = 0 \div N-1; l = 0; \pm 1; \pm 2; \dots, \pm\infty. \end{aligned} \right\}$$

11.2.10. Исследовать на спектральную устойчивость и указать шаблон разностной схемы, заданной на сетке

$$D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh, h = \text{const}, l = 0; \pm 1; \dots; \pm\infty\} : \left. \begin{aligned} (u_l^{n+1} - u_l^n) / \tau + 2(u_{l+1}^n - u_{l-1}^n) / h - 3(u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_{l-1}^n) / h + \\ - (v_{l+1}^n - v_{l-1}^n) / (2h) + (v_{l+1}^n - 2v_l^n + v_{l-1}^n) / (2h) &= f_l^n, \\ (v_l^{n+1} - v_l^n) / \tau - (u_{l+1}^n - u_{l-1}^n) / (2h) + (u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_{l-1}^n) / (2h) + \\ + 2(v_{l+1}^n - v_{l-1}^n) / h - 2(v_{l+1}^n - 2v_l^n + v_{l-1}^n) / h &= g_l^n, \\ u_l^0 &= \varphi_l, v_l^0 = \psi_l, n = 0 \div N-1; l = 0; \pm 1; \pm 2; \dots, \pm\infty. \end{aligned} \right\}$$

11.3. Корректная постановка начальных и граничных условий

Для корректной постановки задачи, при которой существует единственное решение, необходимо дополнить дифференциальное уравнение начальными и граничными условиями. Если с начальными условиями в основном никаких дополнительных сложностей не возникает, то граничные условия требуют дополнительных пояснений: во-первых, на какой границе области интегрирования, левой или правой, их задавать?; во-вторых, какие условия можно ставить, а какие – нельзя? и т.д.

В качестве примера выберем систему двух линейных с постоянными коэффициентами уравнений с частными производными:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} - 3 \frac{\partial v}{\partial x} &= f(t, x); 0 < t < 1; \\ \frac{\partial u}{\partial t} + 5 \frac{\partial u}{\partial x} - 4 \frac{\partial v}{\partial x} &= g(t, x); 0 < x < 1; \\ u(0, x) &= \varphi_0(x); v(0, x) = \varphi_1(x); \\ u(t, ?) &= \psi_0(t); v(t, ?) = \psi_1(t). \end{aligned} \right\} \quad (11.3.1)$$

Запишем её в векторно-матричной форме, введя обозначения

$\vec{w} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; $\vec{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$; $\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} = \vec{f}$, и приведём к характеристическому виду. Для этого найдём собственные числа и собственные векторы матрицы A^T : $\lambda_{1,2} = \pm 1$; $\vec{\omega}_1 = (5, -3)^T$; $\vec{\omega}_2 = (1, -1)^T$. Затем из собственных векторов $\vec{\omega}_{1,2}$ составим матрицу Ω , транспонируем её

$\Omega^T = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ и умножим дифференциальное уравнение слева на Ω^T :

$$\Omega^T \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \Omega^T A \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} = \frac{\partial \begin{pmatrix} 5u - 3v \\ u - v \end{pmatrix}}{\partial t} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial \begin{pmatrix} 5u - 3v \\ u - v \end{pmatrix}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 5f - 3g \\ f - g \end{pmatrix} = \Omega^T \vec{f}.$$

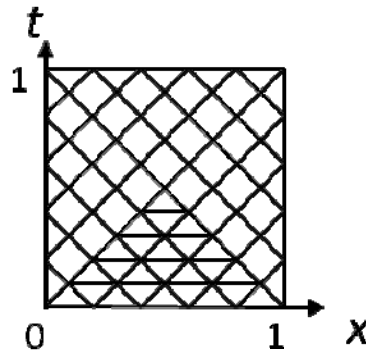
Если определить вектор-функцию, которая состоит из инвариантов:

$\vec{J} = (J^+, J^-)^T$, где компоненты этой вектор-функции:

$J^+ = 5u - 3v$; $J^- = u - v$, то система дифференциальных уравнений из (11.3.1) распадётся на два уравнения переноса:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J^+}{\partial t} + \frac{\partial J^+}{\partial x} &= 5f(t, x) - 3g(t, x); 0 < t < 1; \\ \frac{\partial J^-}{\partial t} - \frac{\partial J^-}{\partial x} &= f(t, x) - g(t, x); 0 < x < 1; \\ u(0, x) &= \varphi_0(x); v(0, x) = \varphi_1(x); \\ u(t, ?) &= \psi_0(t); v(t, ?) = \psi_1(t). \end{aligned} \right\} \quad (11.3.2)$$

Для первого уравнения (11.3.2) характеристиками будут прямые $t = x + C^+$; $C^+ = \text{const}$, а для второго – $t = -x + C^-$; $C^- = \text{const}$. Постоянные C^+ , C^- определяются из условия пересечения характеристик с границами области интегрирования задачи.



Следовательно, в характеристическом треугольнике, ограниченном начальным отрезком $t = 0$, $0 < x < 1$, характеристикой семейства C^+ , проходящей через начало координат $t=0, x=0$, и характеристикой семейства C^- , пересекающей начальный отрезок в точке $t=0, x=1$, решение полностью определяется начальными условиями и никак не зависит от значений функций на границах. Это утверждение подтверждается тем, что уравнения переноса из (11.3.2) для инвариантов J^+ , J^- однозначно разрешаются при заданных начальных условиях в любой точке характеристического треугольника. Поэтому из системы уравнений $J^+ = 5u - 3v$; $J^- = u - v^-$ единственным образом находятся u и v . В треугольнике, примыкающем к правой границе и который образован теми же характеристиками, что и характеристический треугольник, плюс правый граничный отрезок $0 < t < 1, x = 1$, значение инварианта J^+ известно из решения первого уравнения (11.3.2) и начальных условий. Для определения в нём значений инварианта J^- нужно использовать правое граничное условие и учесть тот факт, что инвариант J^+ на правой границе уже найден. Отсюда следует, что в качестве дополнительного условия на правой границе нельзя задавать никакую функцию от инварианта J^+ . Аналогично, на левой границе не-

допустимо использовать функцию от инварианта J^- как дополнительное граничное условие. Также для данной задачи неправильно задавать два граничных условия на одной из границ при $x = 0$ или $x = 1$.

Вывод: для каждого семейства характеристик, пересекающего область интегрирования, значение инварианта, соответствующего данному семейству, задаётся только один раз и в одной точке, как правило, принадлежащей границе, используя дополнительные начальные и граничные условия.

Задачи

11.3.1. Какие из предложенных вариантов начальных и граничных условий соответствуют корректной постановке смешанной задачи для системы уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = f(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - 5 \frac{\partial u}{\partial x} - 4 \frac{\partial v}{\partial x} = g(t, x), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1,$$

а) $u(0, x) = \varphi_0(x), v(0, x) = \varphi_1(x), v(t, 0) = \psi(t),$

б) $u(0, x) = \varphi_0(x), v(0, x) = \varphi_1(x), u(t, 1) = \psi_1(t), v(t, 0) = \psi_2(t),$

в) $u(0, x) = \varphi_0(x), v(0, x) = \varphi_1(x), u(t, 0) = \psi_1(t), v(t, 0) = \psi_2(t),$

г) $u(0, x) = \varphi_0(x), v(0, x) = \varphi_1(x), u(t, 1) = \psi(t)?$

11.3.2. Какие из предложенных вариантов начальных и граничных условий соответствуют корректной постановке смешанной задачи для системы уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - 3 \frac{\partial v}{\partial x} = f(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} - 6 \frac{\partial v}{\partial x} = g(t, x), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1,$$

а) $u(0, x) = \varphi_0(x), v(0, x) = \varphi_1(x), u(t, 0) = \psi(t),$

б) $u(0, x) = \varphi_0(x), v(0, x) = \varphi_1(x), u(t, 1) = \psi(t),$

в) $u(0, x) = \varphi_0(x), v(0, x) = \varphi_1(x), u(t, 1) = \psi_1(t), v(t, 1) = \psi_2(t),$

г) $u(0, x) = \varphi_0(x), v(0, x) = \varphi_1(x), 3u(t, 1) - 4v(t, 1) = \psi(t)?$

11.3.3. Какие из предложенных вариантов начальных и граничных условий соответствуют корректной постановке смешанной задачи для системы уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 5 \frac{\partial u}{\partial x} + 7 \frac{\partial v}{\partial x} = f(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 3 \frac{\partial v}{\partial x} = g(t, x), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1,$$

- а) $u(0, x) = \varphi_0(x), v(0, x) = \varphi_1(x), v(t, 0) = \psi(t),$
 б) $u(0, x) = \varphi_0(x), v(0, x) = \varphi_1(x), v(t, 1) = \psi(t),$
 в) $u(0, x) = \varphi_0(x), v(0, x) = \varphi_1(x), u(t, 0) = \psi_1(t), v(t, 0) = \psi_2(t),$
 г) $u(0, x) = \varphi_0(x), v(0, x) = \varphi_1(x), u(t, 1) = \psi(t), v(t, 0) = \psi(t)?$

11.3.4. Какие из предложенных вариантов начальных и граничных условий соответствуют корректной постановке смешанной задачи для системы уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 8 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} = f(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 12 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial v}{\partial x} = g(t, x). \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1,$$

- а) $u(0, x) = \varphi_0(x), v(0, x) = \varphi_1(x), u(t, 0) = \psi(t),$
 б) $u(0, x) = \varphi_0(x), v(0, x) = \varphi_1(x), u(t, 1) = \psi(t),$
 в) $u(0, x) = \varphi_0(x), v(0, x) = \varphi_1(x), 4u(t, 0) + v(t, 0) = \psi(t),$
 г) $u(0, x) = \varphi_0(x), v(0, x) = \varphi_1(x), 3u(t, 1) + 2v(t, 1) = \psi(t)?$

11.3.5. Какие из предложенных вариантов граничных условий соответствуют корректной постановке смешанной задачи для системы уравнений с частными производными первого порядка

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} = f(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} = g(t, x), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1,$$

- а) $u(0, x) = \varphi_0(x), v(0, x) = \varphi_1(x), u(t, 1) = \psi_1(t), u(t, 1) + v(t, 1) = \psi_2(t),$
 б) $u(0, x) = \varphi_0(x), v(0, x) = \varphi_1(x), u(t, 1) + v(t, 1) = \psi(t),$
 в) $u(0, x) = \varphi_0(x), v(0, x) = \varphi_1(x), u(t, 0) = \psi(t)?$

11.3.6. Какие из предложенных вариантов граничных условий соответствуют корректной постановке смешанной задачи для системы уравнений с частными производными первого порядка

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = f(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} = g(t, x), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1,$$

- а) $u(0, x) = \varphi_0(x), v(0, x) = \varphi_1(x), u(t, 0) + v(t, 0) = \psi_1(t), v(t, 1) = \psi_2(t),$
б) $u(0, x) = \varphi_0(x), v(0, x) = \varphi_1(x), u(t, 0) = \psi_1(t), u(t, 0) - v(t, 0) = \psi_2(t),$
в) $u(0, x) = \varphi_0(x), v(0, x) = \varphi_1(x), u(t, 1) + 3v(t, 1) = \psi_1(t), v(t, 1) = \psi_2(t) ?$

11.3.7. Записать систему в характеристическом виде, сделать рисунок, на котором изобразить семейства характеристик. Объяснить, как корректно задать граничные условия:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 6 \frac{\partial u}{\partial x} + 15 \frac{\partial v}{\partial x} = f(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 5 \frac{\partial v}{\partial x} = g(t, x), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1.$$

11.3.8. Записать систему в характеристическом виде, сделать рисунок, на котором изобразить семейства характеристик. Объяснить, как корректно задать граничные условия:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 6 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = f(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - 12 \frac{\partial v}{\partial x} - 5 \frac{\partial u}{\partial x} = g(t, x), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1.$$

11.3.9. Записать систему в характеристическом виде, сделать рисунок, на котором изобразить семейства характеристик. Объяснить, как корректно задать граничные условия:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 3 \frac{\partial v}{\partial x} - 9 \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 5 \frac{\partial v}{\partial x} - 8 \frac{\partial u}{\partial x} = g(t, x), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1.$$

11.3.10. Записать систему в характеристическом виде, сделать рисунок, на котором изобразить семейства характеристик. Объяснить, как корректно задать граничные условия:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 7 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = f(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - 4 \frac{\partial u}{\partial x} + 7 \frac{\partial v}{\partial x} = g(t, x), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1.$$

11.4. Волновое уравнение

Линейным уравнениям с частными производными гиперболического типа с двумя независимыми переменными называется уравнение

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E \frac{\partial u}{\partial t} + J \frac{\partial u}{\partial x} + Iu = F, \text{ где } u = u(t, x), A, B, C, E, J,$$

I, F — функции, зависящие только от t и x , причём выполнено $B^2 - AC > 0$.

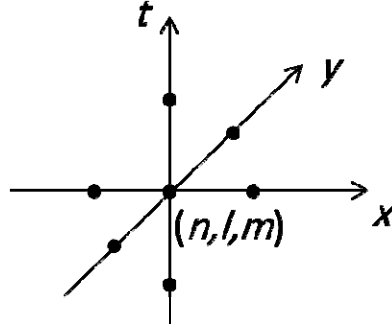
Функции определены в некоторой области D с границей G .

Рассмотрим один из распространённых методов численного решения первой смешанной задачи для волнового уравнения с переменными коэффициентами в единичном кубе пространственно двумерной области декартовой системы координат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2(t, x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2(t, x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(t, x, y); \\ u(0, x, y) &= \varphi_0(x, y); \partial u(0, x, y) / \partial t = \varphi_1(x, y); 0 < t < 1; \\ u(t, 0, y) &= \psi_0(t, y); u(t, 1, y) = \psi_1(t, y); 0 < x < 1; \\ u(t, x, 0) &= \chi_0(t, y); u(t, x, 1) = \chi_1(t, y); 0 < y < 1. \end{aligned} \right\} \quad (11.4.1)$$

Введём в области интегрирования сетку $D_h = \{(t^n, x_l, y_m) : t^n = n\tau, N\tau = 1, n = \overline{0, N}; x_l = lh_x, Lh_x = 1, l = \overline{0, L}; y_m = mh_y, Mh_y = 1, m = \overline{0, M}\}$ и используем семиточечный шаблон для аппроксимации вторых производных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_{l,m}^{n+1} - 2u_{l,m}^n + u_{l,m}^{n-1}}{\tau^2} &= (a_{l,m}^n)^2 \left[\frac{u_{l+1,m}^n - 2u_{l,m}^n + u_{l-1,m}^n}{h_x^2} + \frac{u_{l,m+1}^n - 2u_{l,m}^n + u_{l,m-1}^n}{h_y^2} \right] + \\ &+ f_{l,m}^n; n = \overline{1, N-1}; l = \overline{1, L-1}; m = \overline{1, M-1}; \\ u_{l,m}^0 &= (\varphi_0)_{l,m}; (-u_{l,m}^2 + 4u_{l,m}^1 - 3u_{l,m}^0) / 2\tau = (\varphi_1)_{l,m}; l = \overline{0, L}; m = \overline{0, M}; \\ u_{0,m}^n &= (\psi_0)_m^n; u_{L,m}^n = (\psi_1)_m^n; n = \overline{1, N-1}; m = \overline{0, M}; \\ u_{l,0}^n &= (\chi_0)_l^n; u_{l,M}^n = (\chi_1)_l^n; n = \overline{1, N-1}; l = \overline{1, L-1}. \end{aligned} \right\} \quad (11.4.2)$$



Разностная схема (11.4.2) состоит из $(N+1)(L+1)(M+1) = (N-1)(L-1)(M-1) + 2(L+1)(M+1) + 2(N-1)(M+1) + 2(N-1)(L-1)$ линейного уравнения относительно $(N+1)(L+1)(M+1)$ неизвестного значения искомой сеточной функции. Исследуем её на аппроксимацию:

$$\| \delta f^{(h)} \|_{F_h} = \max_{n,l,m} \left| \begin{aligned} & \frac{[u]_{l,m}^{n+1} - 2[u]_{l,m}^n + [u]_{l,m}^{n-1}}{\tau^2} - (a_{l,m}^n)^2 \left[\frac{[u]_{l+1,m}^n - 2[u]_{l,m}^n + [u]_{l-1,m}^n}{h_x^2} + \right. \\ & + \frac{[u]_{l,m+1}^n - 2[u]_{l,m}^n + [u]_{l,m-1}^n}{h_y^2} - f_{l,m}^n; n = \overline{1, N-1}; l = \overline{1, L-1}; \\ & m = \overline{1, M-1}; \\ & [u]_{l,m}^0 - (\varphi_0)_{l,m}; l = \overline{0, L}; m = \overline{0, M}; \\ & (-[u]_{l,m}^2 + 4[u]_{l,m}^1 - 3[u]_{l,m}^0) / 2\tau - (\varphi_1)_{l,m}; l = \overline{0, L}; m = \overline{0, M}; \\ & [u]_{0,m}^n - (\psi_0)_m^n; n = \overline{1, N-1}; m = \overline{0, M}; \\ & [u]_{L,m}^n - (\psi_1)_m^n; n = \overline{1, N-1}; m = \overline{0, M}; \\ & [u]_{l,0}^n - (\chi_0)_l^n; n = \overline{1, N-1}; l = \overline{1, L-1}; \\ & [u]_{l,M}^n - (\chi_1)_l^n; n = \overline{1, N-1}; l = \overline{1, L-1}; \end{aligned} \right|$$

$\| \delta f^{(h)} \|_{F_h} \leq C_\tau \tau^2 + C_x h_x^2 + C_y h_y^2$. Для исследования разностной схемы (11.4.2) на спектральную устойчивость нужно в однородную разностную задачу сделать подстановку $u_{l,m}^n \Rightarrow \lambda^n e^{i(\alpha l + \beta m)}$ и потребовать, чтобы условие $|\lambda| = |\lambda^{n+1} / \lambda^n| = |\lambda^n / \lambda^{n-1}| \leq 1$ выполнялось для любых значений $\forall \alpha, \beta; -\infty < \alpha, \beta < +\infty$. В результате преобразований получаем, что разностная схема (11.4.2) спектрально устойчива, если выполнено условие

$$\tau \leq \frac{h_x h_y}{\max_{n,l,m} |a_{l,m}^n| \sqrt{h_x^2 + h_y^2}}.$$

Задачи

11.4.1. Методом неопределенных коэффициентов построить разностную схему, аппроксимирующую с наивысшим порядком в заданном узле задачу Коши для волнового уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \sin t, 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, x) = \psi_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi_1(x), u(t, 0) = t, u(t, 1) = \sin t \end{cases}$$

и исследовать ее на аппроксимацию. Использовать шаблон:

а)
$$\begin{array}{ccccccc} & & \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet \\ & & & & n & & \\ & & \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet \\ & & & & n-1 & & \\ l-1 & l & & & l+1 & & \end{array}$$
 в узле $(n+1, l)$;

б) шаблон а) в узле $(n-1, l)$;

в)
$$\begin{array}{ccccccc} & & \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet \\ & & & & n & & \\ & & \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet \\ & & & & n-1 & & \\ l-1 & l & & & l+1 & & \end{array}$$
 в узле (n, l) .

11.4.2. Методом неопределенных коэффициентов построить разностную схему, аппроксимирующую с наивысшим порядком в заданном узле задачу Коши для волнового уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (1+3x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x), \\ u(0, x) = \psi_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi_1(x), 0 \leq t \leq 1, x \in R. \end{cases}$$

Использовать шаблон:

а)
$$\begin{array}{ccccccc} & & \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet \\ & & & & n & & \\ & & \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet \\ & & & & n-1 & & \\ l-1 & l & & & l+1 & & \end{array}$$
 с аппроксимацией в узле $(n+1, l)$;

б) шаблон а) с аппроксимацией в узле $(n-1, l)$;

в)
$$\begin{array}{ccccccc} & & \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet \\ & & & & n & & \\ & & \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet \\ & & & & n-1 & & \\ l-1 & l & & & l+1 & & \end{array}$$
 с аппроксимацией в узле (n, l) .

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ u(0, x) = \psi_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi_1(x), 0 \leq t \leq 1, x \in R, \end{cases}$$
$$\cdot \bullet \dots \bullet \dots \bullet \cdot \quad n+1$$
 $\bullet \dots \bullet \dots \bullet \quad n-1$ $\bullet \dots \bullet \quad n+1$
$$\bullet \bullet \dots \bullet \bullet \quad n-1$$
$$\bullet \dots \bullet \dots \bullet \quad n+1$$
 $\bullet \dots \bullet \dots \bullet \quad n-1$
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1, u(t, 0) = \varphi_0(t), u(t, 1) = \varphi_1(t), \\ u(0, x) = \psi_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi_1(x) \end{cases}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_l^{n+1} - 2u_l^n + u_l^{n-1}}{\tau^2} = \frac{u_{l+1}^{n+1} - 2u_l^{n+1} + u_{l-1}^{n+1}}{2h^2} + \frac{u_{l+1}^{n-1} - 2u_l^{n-1} + u_{l-1}^{n-1}}{2h^2}, \\ n = 1 \div N - 1, l = 1 \div L - 1, \\ u_l^0 = (\psi_0)_l, u_l^1 = (\psi_0)_l + \tau(\psi_1)_l, l = 0 \div L, \\ u_0^n = \varphi_0^n, u_L^n = \varphi_L^n, n = 2 \div N. \end{array} \right.$$

Указать для нее шаблон и исследовать на аппроксимацию и спектральную устойчивость.

11.4.5. Для решения смешанной задачи волнового уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1, u(t, 0) = \varphi_0(t), u(t, 1) = \varphi_1(t), \\ u(0, x) = \psi_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi_1(x) \end{cases}$$

на сетке $D_h = \{(t_n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = T, n = 0 \div N, x_l = lh, l \in Z\}$

предложена разностная схема

$$\begin{cases} \frac{u_{l+1}^{n+1} - 2u_{l+1}^n + u_{l+1}^{n-1}}{\tau^2} + \frac{u_l^{n+1} - 2u_l^n + u_l^{n-1}}{\tau^2} + \frac{u_{l-1}^{n+1} - 2u_{l-1}^n + u_{l-1}^{n-1}}{\tau^2} = \frac{u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_{l-1}^n}{h^2}, \\ n = 1 \div N - 1, l = 1 \div L - 1, \\ u_l^0 = (\psi_0)_l, u_l^1 = (\psi_0)_l + \tau(\psi_1)_l, l = 0 \div L, \\ u_0^n = \varphi_0^n, u_L^n = \varphi_L^n, n = 2 \div N. \end{cases}$$

Указать для нее шаблон и исследовать на аппроксимацию и спектральную устойчивость.

11.4.6 Для решения смешанной задачи волнового уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1, u(t, 0) = \varphi_0(t), u(t, 1) = \varphi_1(t), \\ u(0, x) = \psi_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi_1(x) \end{cases}$$

на сетке $D_h = \{(t_n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = T, n = 0 \div N, x_l = lh, l \in Z\}$

предложена разностная схема

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{u_{l+1}^{n+1} - 2u_{l+1}^n + u_{l+1}^{n-1}}{\tau^2} + \frac{u_{l-1}^{n+1} - 2u_{l-1}^n + u_{l-1}^{n-1}}{\tau^2} = \\ & \quad = \frac{u_{l+1}^{n+1} - 2u_l^{n+1} + u_{l-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{l+1}^{n-1} - 2u_l^{n-1} + u_{l-1}^{n-1}}{h^2}, \\ & n = 1 \div N - 1, l = 1 \div L - 1, \\ & u_l^0 = (\psi_0)_l, u_l^1 = (\psi_0)_l + \tau(\psi_1)_l, l = 0 \div L, \\ & u_0^n = \varphi_0^n, u_L^n = \varphi_L^n, n = 2 \div N. \end{aligned} \right.$$

Указать для нее шаблон и исследовать на аппроксимацию и спектральную устойчивость.

11.4.7. Для решения смешанной задачи волнового уравнения

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1, u(t, 0) = \varphi_0(t), u(t, 1) = \varphi_1(t), \\ & u(0, x) = \psi_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi_1(x) \end{aligned} \right.$$

на сетке $D_h = \{(t_n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = T, n = 0 \div N, x_l = lh, l \in Z\}$

предложена разностная схема

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{u_{l+1}^{n+1} - 2u_{l+1}^n + u_{l+1}^{n-1}}{2\tau^2} + \frac{u_{l-1}^{n+1} - 2u_{l-1}^n + u_{l-1}^{n-1}}{2\tau^2} = \frac{u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_{l-1}^n}{h^2}, \\ & n = 1 \div N - 1, l = 1 \div L - 1, \\ & u_l^0 = (\psi_0)_l, \frac{-u_l^2 + 4u_l^1 - 3u_l^0}{2\tau} = (\psi_1)_l, l = 0 \div L, \\ & u_0^n = \varphi_0^n, u_L^n = \varphi_L^n, n = 2 \div N. \end{aligned} \right.$$

Указать для нее шаблон и исследовать на аппроксимацию и спектральную устойчивость.

Ответы к задачам раздела 11

11.2.1. а, б, в) $O(\tau, h)$; а, в) неустойчива, б) $\tau < \frac{h}{5}$.

$$11.2.4. \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \mathbf{\Omega}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$11.2.5. \lambda_1 = -7, \lambda_2 = -11, \mathbf{\Omega}^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$11.2.6. \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -7, \mathbf{\Omega}^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$11.2.7. \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 9, \mathbf{\Omega}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

11.3.1. а, в, г) нет, б) да.

11.3.2. а, б, г) нет, в) да.

11.3.3. а, б, в) нет, г) да.

11.3.4. б, г) нет, а, в) да.

11.3.5. а, б) нет, в) да.

11.3.6. а, в) нет, б) да.

Литература к разделу 11

1. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. — М.: МФТИ, 1994. — 528 с. 2-е изд. под ред. А.И. Лобанова. — Долгопрудный: Интеллект, 2008. — 504 с.
2. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике: учебное пособие. — М.: Интернет-Университет информационных технологий, 2009. — 528 с.
3. Рябенский В.С. Введение в вычислительную математику. — М.: Наука-Физматлит, 1994. — 335 с.; 3-е изд. — М.: Физматлит, 2008. — 288 с.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — 632 с.
5. Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. — М.: Наука, 1988.
6. Демченко В.В. Уравнения и системы уравнений с частными производными первого порядка: учебное пособие. — М.: МФТИ, 2001. — 116 с.
7. Демченко В.В. Вычислительный практикум по прикладной математике: учебное пособие. — М.: МФТИ, 2007. — 196 с.

12. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

К линейным уравнениям с частными производными *эллиптического типа* с двумя независимыми переменными согласно классификации, принятой в математической физике, относятся уравнения вида

$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + E \frac{\partial u}{\partial x} + J \frac{\partial u}{\partial y} + Iu = F$, где $u = u(x, y)$, A, B, C, E, J, I, F функции только x, y , определённые в некоторой области D с границей G , для которых в D выполняется $B^2 - AC < 0$.

12.1. Постановка задач и основные свойства уравнений

В качестве примеров, на которых изучаются основные подходы к решению задач с частными производными эллиптического типа, часто используются уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad - \text{Лапласа,}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad - \text{Пуассона,}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0 \quad - \text{однородное уравнение Гельмгольца,}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = f(x, y) \quad - \text{неоднородное уравнение Гельмгольца.}$$

Для них могут быть поставлены краевые задачи:

Первая краевая задача (задача Дирихле). На границе G области D задана непрерывная функция $\varphi(x, y)$. Требуется найти функцию $u(x, y)$, которая удовлетворяет эллиптическому уравнению в области D и принимает значения $\varphi(x, y)$ на границе G .

Вторая краевая задача (задача Неймана). На границе G области D задана непрерывная функция $\psi(x, y)$. Требуется найти функцию $u(x, y)$, которая удовлетворяет эллиптическому уравнению в области D и для которой $\frac{\partial u(x, y)}{\partial n} = \psi(x, y)$ на границе G . n – внешняя нормаль к границе.

Третья краевая задача (смешанная краевая задача). На границе G области D задана непрерывная функция $\chi(x, y)$. Требуется найти функцию $u(x, y)$, которая удовлетворяет эллиптическому уравнению в области

$$D \text{ и для которой на границе } \alpha u(x, y) + \beta \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} = \chi(x, y), |\alpha| + |\beta| \neq 0.$$

Для некоторых областей, в частности для прямоугольника, может быть поставлена краевая задача с периодическими граничными условиями.

Если область D ограничена, то краевая задача называется *внутренней*. Если область решения не ограничена, то *внешней*.

Значения $\lambda \geq 0$, при которых однородное уравнение Гельмгольца при однородных граничных условиях имеет нетривиальные решения, называются *собственными значениями*, а сами решения — *собственными функциями* соответствующей краевой задачи.

Определение 12.1.1 (гармонической функции). Действительная функция $u(x)$, имеющая непрерывные частные производные первого и второго порядков в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n, n \geq 2$ и удовлетворяющая внутри D уравнению Лапласа, называется *гармонической функцией*.

У эллиптических уравнений есть ряд особенностей, отличающих их от других типов уравнений с частными производными [1–7].

Во-первых, это условие, получившее название *принцип максимума* и сформулированное в виде следующей теоремы.

Теорема 12.1.1 (принцип максимума). Функция, гармоническая и непрерывная на некоторой замкнутой ограниченной области $\bar{D} = D \cup G$, не может принимать внутри этой области значений больших, чем максимум её значений на границе G , и меньших, чем минимум её значений на G .

Во-вторых, задачи Коши для эллиптических уравнений могут оказаться некорректными, что следует из следующего примера Адамара.

Рассмотрим задачу Коши (назовём её невозмущенной):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; -\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq Y, u(x, 0) = 0, u'_y(x, 0) = 0,$$

решение которой $u(x, y) \equiv 0$.

И вариант этой задачи с возмущённым вторым начальным условием

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = 0; -\infty < x < \infty; 0 \leq y \leq Y, \tilde{u}(x, 0) = 0; \tilde{u}'_y(x, 0) = \frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x),$$

имеющую решение $\tilde{u}(x, y) = \frac{1}{\alpha^2} \cos(\alpha x) \operatorname{sh}(\alpha y)$. α – параметр.

В результате получаем, что $\|\tilde{u}(x, y) - u(x, y)\|_{\alpha \rightarrow \infty} \rightarrow \infty$. Из чего следует, что задача поставлена некорректно, поскольку сколь угодно малые возмущения начальных условий приводят к сколь угодно большим изменениям решения (нарушен принцип непрерывной зависимости решения от начальных условий).

Упражнения

Пример 1

Определить тип уравнения Трикоми $y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Решение

Для этого уравнения $A = y, B = 0, C = 1$. Поэтому дискриминант $\delta(x, y) = B^2 - AC = -y$, и как следствие, при $y > 0$ это уравнение эллиптическое, а при $y < 0$ гиперболическое (см. предыдущую главу).

Пример 2

Определить условия существования решения задачи Неймана для уравнения Пуассона $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_G = \psi(x, y)$ в конечной области D с границей G .

Решение

Результат $\int_D f(x, y) dD = \int_G \psi(x, y) dG$ получается непосредственным интегрированием рассматриваемого уравнения по области D с границей G .

Задачи

12.1.1. Определить типы уравнений

а) $y^n \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, б) $x^n \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, в) $y^n \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^n \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

12.1.2. Для функции u , гармонической в конечной области D с границей G , получить значение $\int_G \frac{\partial u}{\partial n} dG$.

12.1.3. Дать оценку решения задач $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $x, y \in \overline{0,1}$,

а) $u|_G = 5$,

б) $u|_{y=0} = x$, $u|_{x=1} = 1 + y$, $u|_{y=1} = 3 - x$, $u|_{x=0} = 6 - 3y$,

в) $u|_{x=0,1} = 0$, $u|_{y=0} = -2$, $u|_{y=1} = 2$

12.1.4. Для решения задачи Дирихле уравнения Лапласа

$\Delta u = 0$, $0 \leq x, y \leq 1$, $u|_\Gamma = x(x - 0.25) - y(y - 0.25)$ на сетке

$$D_h = \{(x_k, y_l) : x_k = kh_x, y_l = lh_y, k = \overline{0, K}, l = \overline{0, L}, h_x = 1/K, h_y = 1/L\}$$

предложена разностная схема Якоби

$$\frac{u_{k-1,l}^n - 2u_{k,l}^{n+1} + u_{k+1,l}^n}{h_x^2} + \frac{u_{k,l-1}^n - 2u_{k,l}^{n+1} + u_{k,l+1}^n}{h_y^2} = 0,$$

$$k = \overline{1, (K-1)}, l = \overline{1, (L-1)}, n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$u_{k,l}^0 = \psi_{k,l}, k = \overline{0, K}, l = \overline{0, L},$$

$$u_{k,l}^n = kh_x(kh_x - \frac{1}{4}) - kh_y(kh_y - \frac{1}{4}), (k = \overline{0, K}, l = \overline{0, L}), (l = \overline{1, (L-1)}), k = \overline{0, K}, \forall n.$$

Дать оценку решения задачи.

12.1.5. Для решения задачи Дирихле уравнения Лапласа

$\Delta u = 0$, $0 \leq x, y \leq 1$, $u|_\Gamma = x(x - 0.25) - y(y - 0.25)$ на сетке

$$D_h = \{(x_k, y_l) : x_k = kh_x, y_l = lh_y, k = \overline{0, K}, l = \overline{0, L}, h_x = 1/K, h_y = 1/L\}$$

предложена разностная схема Зейделя

$$\frac{u_{k-1,l}^{n+1} - 2u_{k,l}^{n+1} + u_{k+1,l}^n}{h_x^2} + \frac{u_{k,l-1}^{n+1} - 2u_{k,l}^{n+1} + u_{k,l+1}^n}{h_y^2} = 0,$$

$$k = \overline{1, (K-1)}, l = \overline{1, (L-1)}, n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$u_{k,l}^0 = \psi_{k,l}, k = \overline{0, K}, l = \overline{0, L},$$

$$u_{k,l}^n = kh_x(kh_x - \frac{1}{4}) - kh_y(kh_y + \frac{1}{4}), (k = \overline{0, K}, l = \overline{0, L}), (l = \overline{1, (L-1)}), k = \overline{0, K}, \forall n.$$

Дать оценку решения задачи.

12.1.6. Какие из граничных условий задачи Дирихле для уравнения Пуассона $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos \pi x \cos \pi y$, решаемого в квадрате $0 \leq x, y \leq 1$ с границей G , корректны?

а) $u|_G = 0$, б) $u|_{y=0} = x$, $u|_{x=1} = 1 + y$, $u|_{y=1} = 3 - x$, $u|_{x=0} = 6 - 3y$,

в) $u|_{x=0,1} = 0$, $u|_{y=0} = -2$, $u|_{y=1} = 2$

12.1.7. Какие из граничных условий задачи Неймана для уравнения Пуассона $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos \pi x \cos \pi y$, решаемого в квадрате $0 \leq x, y \leq 1$ с границей G , корректны?

а) $\frac{\partial u}{\partial n}|_G = 0$, б) $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0,1} = 2$, $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0,1} = 0$, в) $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 2$, $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = -2$, $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0,1} = 0$

12.1.8. Какие из постановок задачи Неймана для уравнения Пуассона, решаемой в квадрате $0 \leq x, y \leq 1$ с границей G , корректны?

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos \pi x \cos \pi y$, $\frac{\partial u}{\partial n}|_G = 0$,

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos \pi x \cos \pi y$, $\frac{\partial u}{\partial n}|_G = 0$, $\int_G u dG = 0$,

в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos \pi x \cos \pi y$, $\frac{\partial u}{\partial n}|_G = 0$, $u(x_*, y_*) = 1$, $x_*, y_* \in G$

г) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos \pi x \cos \pi y$, $\frac{\partial u}{\partial n}|_G = 0$, $u(0.25, 0.25) = 10$.

12.1.9. В квадрате $0 \leq x, y \leq 4$ решается задача Неймана для уравнения

Пуассона $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin \frac{\pi x}{4} \sin \frac{\pi y}{4}$, $\frac{\partial u}{\partial n}|_G = \psi(x, y)$. Какие варианты граничных условий корректны?

а) $\psi(x, y)|_G = 0$, б) $\psi(x, y)|_G = \frac{4}{\pi^2}$, в) $\psi(x, y)|_G = \frac{8}{\pi^2}$,

г) $\psi(x, y)|_{x=0,4} = \frac{16}{\pi^2}$, $\psi(x, y)|_{y=0,4} = 0$,

$$\text{д) } \psi(x, y)|_{y=0} = \frac{32}{\pi^2}, \quad \psi(x, y)|_{y=4} = 0, \quad \psi(x, y)|_{y=0,4} = 0.$$

12.1.10. Задача Неймана для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin \frac{\pi x}{4} \sin \frac{\pi y}{4}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_G = \psi(x, y) \quad \text{решается в квадрате } 0 \leq x, y \leq 4$$

с использованием сетки

$$D_h = \{(x_k, y_l): x_k = kh_x, k = \overline{0, K}, h_x K = 4; y_l = lh_y, l = \overline{0, L}, h_y L = 4, K, L = 4\}.$$

Какие варианты сеточных граничных условий корректны?

$$\text{а) } u_{k,0} = u_{k,1}, u_{k,L} = u_{k,L-1}, k = \overline{1, (K-1)}, u_{0,l} = u_{1,l}, u_{K,l} = u_{K-1,l}, l = \overline{1, (L-1)},$$

$$\text{б) } u_{k,0} = \frac{3+2\sqrt{2}}{24} + u_{k,1}, u_{k,L} = \frac{3+2\sqrt{2}}{24} + u_{k,L-1}, k = \overline{1, (K-1)},$$

$$u_{0,l} = \frac{3+2\sqrt{2}}{24} + u_{1,l}, u_{K,l} = \frac{3+2\sqrt{2}}{24} + u_{K-1,l}, l = \overline{1, (L-1)};$$

$$\text{в) } u_{k,0} = \frac{3+2\sqrt{2}}{12} + u_{k,1}, u_{k,L} = \frac{3+2\sqrt{2}}{12} + u_{k,L-1}, k = \overline{1, (K-1)},$$

$$u_{0,l} = \frac{3+2\sqrt{2}}{12} + u_{1,l}, u_{K,l} = \frac{3+2\sqrt{2}}{12} + u_{K-1,l}, l = \overline{1, (L-1)};$$

$$\text{г) } u_{k,0} = u_{k,1}, u_{k,L} = u_{k,L-1}, k = \overline{1, (K-1)},$$

$$u_{0,l} = \frac{3+2\sqrt{2}}{6} + u_{1,l}, u_{K,l} = \frac{3+2\sqrt{2}}{6} + u_{K-1,l}, l = \overline{1, (L-1)};$$

$$\text{д) } u_{k,0} = \frac{3+2\sqrt{2}}{3} + u_{k,1}, u_{k,L} = u_{k,L-1}, k = \overline{1, (K-1)},$$

$$u_{0,l} = u_{1,l}, u_{K,l} = u_{K-1,l}, l = \overline{1, (L-1)}.$$

12.2. Конечные ряды Фурье

В математике системы функций, обладающие свойством ортогональности при том или ином определении скалярного произведения, могут в ряде случаев существенно упростить решение поставленных задач.

Примером может служить построение приближений функций в конечномерных пространствах (см. часть I раздел 4 настоящего пособия).

Рассмотрим одну из таких систем для пространственно двумерных задач, получившую название конечных рядов Фурье.

Пусть в единичном квадрате $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ введена сетка

$$D_h = \{(x_k, y_l) : x_k = kh_x, k = \overline{0, K}, h_x = 1/K; y_l = lh_y, l = \overline{0, L}, h_y = 1/L\}$$

и на ней определены сеточные функции

$$\psi_{k,l}^{(p,q)} = 2 \sin(p\pi k/K) \sin(q\pi l/L), \quad p = \overline{1, K-1}; q = \overline{1, L-1}.$$

Эти функции линейно независимы и, если ввести обычным образом умножение на число, то функции, определённые на сетке D_h $v^{(h)} = \{v_{k,l}, k = \overline{1, K-1}, l = \overline{1, L-1}, v_{0,l} = v_{K,l} = v_{k,0} = v_{k,L} = 0, k = \overline{0, K}, l = \overline{0, L}\}$, образуют линейное пространство сеточных функций размерностью $(K-1)(L-1)$.

Обозначим через

$$(v^{(h)}, w^{(h)}) = h_x h_y \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{L-1} v_{k,l} w_{k,l}$$

скалярное произведение функций из этого пространства. Можно показать, что функции $\psi_{k,l}^{(p,q)}$ образуют ортонормированный базис в этом гильбертовом пространстве (см., например, [3, 6]), т.е.

$$(\psi^{(p,q)}, \psi^{(s,r)}) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \neq s \text{ или } q \neq r, \\ 1, & \text{если } p = s \text{ и } q = r, \end{cases}$$

и любую функцию из этого пространства можно представить в виде разложения по этому базису

$$v^{(h)} = \sum_{p=1}^{K-1} \sum_{q=1}^{L-1} C_{p,q} \psi_{k,l}^{(p,q)},$$

где

$$C_{p,q} = (v^{(h)}, \psi^{(p,q)}). \quad (12.2.1)$$

Упражнения

Пример 1

Показать, что собственными значениями $\lambda^{(p,q)}$ и собственными функциями $\psi_{k,l}^{(p,q)}$ разностного оператора $(Au)_{k,l} = \begin{cases} (\Delta u)_{k,l}, & k, l \in D, \\ \varphi_{k,l}, & k, l \in G, \end{cases}$ определённого в области D с границей G , являются

$$\lambda^{(p,q)} = \lambda^p + \lambda^q, \quad \psi_{k,l}^{(p,q)} = \psi_k^p \psi_l^q,$$

где λ^p, λ^q – собственные значения, ψ_k^p, ψ_l^q – собственные функции разностных операторов $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_k, \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_l$.

Решение

Пусть $\left(\frac{\partial^2 \psi^p}{\partial x^2}\right)_k = \lambda^p \psi_k^p$, $\left(\frac{\partial^2 \psi^q}{\partial y^2}\right)_l = \lambda^q \psi_l^q$.

Тогда $\psi_l^q \left(\frac{\partial^2 \psi^p}{\partial x^2}\right)_k = \lambda^p \psi_k^p \psi_l^q$, $\psi_k^p \left(\frac{\partial^2 \psi^q}{\partial y^2}\right)_l = \lambda^q \psi_k^p \psi_l^q \rightarrow$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial^2 \psi^p \psi^q}{\partial x^2}\right)_{k,l} = \lambda^p \psi_k^p \psi_l^q, \quad \left(\frac{\partial^2 \psi^p \psi^q}{\partial y^2}\right)_{k,l} = \lambda^q \psi_k^p \psi_l^q \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial^2 \psi^p \psi^q}{\partial x^2}\right)_{k,l} + \left(\frac{\partial^2 \psi^p \psi^q}{\partial y^2}\right)_{k,l} = (\lambda^p + \lambda^q) \psi_k^p \psi_l^q \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial^2 \psi^{(p,q)}}{\partial x^2}\right)_{k,l} + \left(\frac{\partial^2 \psi^{(p,q)}}{\partial y^2}\right)_{k,l} = \lambda^{(p,q)} \psi_{k,l}^{(p,q)}.$$

Пример 2

Сеточную функцию $u_{k,l} = \frac{1}{4} k h_x (3 - k h_x) l h_y (3 - l h_y)$ на сетке

$$D_h = \{(x_k, y_l) : x_k = k h_x, k = \overline{0, K}, h_x K = 3; y_l = l h_y, l = \overline{0, L}, h_y L = 3, K, L = 3\}$$

разложить по собственным функциям $\psi_{k,l}^{(p,q)}$, $p, q = 1, 2$ разностного оператора Лапласа при решении задачи Дирихле.

Решение

Используя ортонормированную на этой сетке систему функций

$$\psi_{k,l}^{(p,q)} = \frac{2}{3} \sin \frac{pk\pi}{3} \sin \frac{ql\pi}{3}, \quad p, q = 1, 2$$

и полагая

$$u(x_k, y_l) = \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 C_{p,q} \psi_{k,l}^{(p,q)}, \quad p, q = 1, 2, \quad k, l = \overline{0, 3},$$

составляем СЛАУ для определения $\mathbf{C} = (C_{p,q})^T = (C_{1,1}, C_{2,1}, C_{1,2}, C_{2,2})^T$:

$$\Psi \mathbf{C} = \vec{u}, \quad \Psi = \psi_{k,l}^{(p,q)} = \begin{pmatrix} \psi_{1,1}^{(1,1)} & \psi_{1,1}^{(2,1)} & \psi_{1,1}^{(1,2)} & \psi_{1,1}^{(2,2)} \\ \psi_{2,1}^{(1,1)} & \psi_{2,1}^{(2,1)} & \psi_{2,1}^{(1,2)} & \psi_{2,1}^{(2,2)} \\ \psi_{1,2}^{(1,1)} & \psi_{1,2}^{(2,1)} & \psi_{1,2}^{(1,2)} & \psi_{1,2}^{(2,2)} \\ \psi_{2,2}^{(1,1)} & \psi_{2,2}^{(2,1)} & \psi_{2,2}^{(1,2)} & \psi_{2,2}^{(2,2)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = (u_{1,1}, u_{2,1}, u_{1,2}, u_{2,2})^T.$$

Используя ортонормированность $\psi_{k,l}^{(p,q)}$, получаем

$$\begin{aligned} \Psi^T \Psi C &= \Psi^T u \rightarrow EC = \Psi^T u \rightarrow C = \Psi^T u \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} C_{1,1} \\ C_{1,2} \\ C_{2,1} \\ C_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Результат: $u(x_k, y_l) = C_{1,1} \psi_{k,l}^{(1,1)} = \frac{4}{3} \sin \frac{k\pi}{3} \sin \frac{l\pi}{3}, \quad k, l = \overline{0, 3}.$

Пример 3

Сеточную функцию

$$u^{(h)} = \{u_{k,l}; k, l = \overline{0, 3}: u_{1,1} = 3, u_{k,l} = 0, k \neq 1 \text{ или } l \neq 1\} \text{ на сетке}$$

$$D_h = \{(x_k, y_l): x_k = kh_x, k = \overline{0, K}, h_x K = 3; y_l = lh_y, l = \overline{0, L}, h_y L = 3, K, L = 3\}$$

разложить по собственным функциям $\psi_{k,l}^{(p,q)}$, $p, q = 1, 2$ разностного оператора Лапласа при решении задачи Дирихле.

Решение

Используя ортонормированную на этой сетке систему функций

$$\psi_{k,l}^{(p,q)} = \frac{2}{3} \sin \frac{pk\pi}{3} \sin \frac{ql\pi}{3}, \quad p, q = 1, 2$$

и полагая

$$u(x_k, y_l) = \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 C_{p,q} \psi_{k,l}^{(p,q)}, \quad p, q = 1, 2, \quad k, l = \overline{0, 3},$$

получаем аналогично предыдущему примеру:

$$\begin{pmatrix} C_{1,1} \\ C_{1,2} \\ C_{2,1} \\ C_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

$$u_{k,l} = \sum_{p,q=1}^2 \psi_{k,l}^{(p,q)} =$$

$$= \sin \frac{k\pi}{3} \sin \frac{l\pi}{3} + \sin \frac{2k\pi}{3} \sin \frac{l\pi}{3} + \sin \frac{k\pi}{3} \sin \frac{2l\pi}{3} + \sin \frac{2k\pi}{3} \sin \frac{2l\pi}{3}, \quad k, l = \overline{0, 3}.$$

Пример 4

На сетке

$$D_h = \{(x_k, y_l): x_k = kh_x, k = \overline{0, K}, h_x K = 4; y_l = lh_y, l = \overline{0, L}, h_y L = 4, K, L = 4\}$$

определить ортонормированные собственные функции $\psi_{k,l}^{(p,q)}$, $p, q = \overline{1, 2, 3}$ разностного оператора Лапласа при решении задачи Неймана.

Решение

Используя собственные значения и собственные функции разностных операторов $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_k, \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_l$ с граничными условиями Неймана и результат примера 1, получаем

$$\lambda^{(p,q)} = \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{(p-1)\pi}{6} + \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{(q-1)\pi}{6}, \quad p, q = \overline{1, 3},$$

$$\psi_{k,l}^{(p,q)} = C \cos \frac{(p-1)(2k-1)\pi}{6} \cos \frac{(q-1)(2l-1)\pi}{6}, \quad p, q = \overline{1, 3}, \quad k, l = \overline{0, 4}.$$

Произведя нормирование $(\psi_{k,l}^{(p,q)}, \psi_{k,l}^{(r,s)}) = E$, получаем

$$C = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(K-1)(L-1)}}, & p = q = 1, \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(K-1)(L-1)}}, & \text{либо } p = 1, \text{ либо } q = 1, \\ \frac{2}{\sqrt{(K-1)(L-1)}}, & p, q \neq 1. \end{cases}$$

Пример 5

$$\text{Сеточную функцию } u_{k,l}, k, l = \overline{0, 4} \quad u_{k,l} = \begin{cases} -1, & k = 0, 1, 3, 4, l = 2, \\ +1, & k = 2, l = 0, 1, 3, 4, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

на сетке

$$D_h = \{(x_k, y_l): x = kh_x, k = \overline{0, K}, h_x K = 4; y_l = lh_y, l = \overline{0, L}, h_y L = 4, K, L = 4\}$$

разложить по собственным функциям $\psi_{k,l}^{(p,q)}$, $p, q = \overline{1, 2, 3}$ разностного оператора Лапласа при решении задачи Неймана.

Решение

Используем ортонормированную систему собственных функций разностного оператора Лапласа с граничными условиями Неймана (см. предыдущий пример).

$$\psi_{k,l}^{(p,q)} = C \cos \frac{(p-1)(2k-1)\pi}{6} \cos \frac{(q-1)(2l-1)\pi}{6}, \quad p, q = \overline{1,3}, \quad k, l = \overline{0,4},$$

$$C = \begin{cases} \frac{1}{3}, & p = q = 1, \\ \frac{\sqrt{2}}{3}, & \text{либо } p = 1, \text{ либо } q = 1, \\ \frac{2}{3}, & p, q \neq 1. \end{cases}$$

Полагая

$$u_{k,l} = \sum_{q=1}^3 \sum_{p=1}^3 C_{p,q} \psi_{k,l}^{(p,q)}, \quad p, q = 1, 2, 3 \quad k, l = \overline{0,4},$$

для вычисления вектора коэффициентов

$$\mathbf{C} = (C_{p,q})^T = (C_{1,1}, C_{2,1}, C_{3,1}, C_{1,2}, C_{2,2}, C_{3,2}, C_{1,3}, C_{2,3}, C_{3,3})^T$$

имеем СЛАУ, решение которой получаем с использованием ортонормированности $\psi_{k,l}^{(p,q)}$:

$$\Psi \mathbf{C} = \mathbf{u} \rightarrow \Psi^T \Psi \mathbf{C} = \Psi^T \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{C} = \Psi^T \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{C} = \Psi^T \mathbf{u}:$$

$$\begin{pmatrix} C_{1,1} \\ C_{2,1} \\ C_{3,1} \\ C_{1,2} \\ C_{2,2} \\ C_{3,2} \\ C_{1,3} \\ C_{2,3} \\ C_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{\sqrt{3}}{9} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{9} & \frac{\sqrt{3}}{9} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{9} & \frac{\sqrt{3}}{9} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{9} & 0 & -\frac{3}{9} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{9} & 0 & \frac{3}{9} \\ \frac{\sqrt{3}}{9} & -\frac{2\sqrt{3}}{9} & \frac{\sqrt{3}}{9} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{9} & \frac{2\sqrt{3}}{9} & -\frac{\sqrt{3}}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{\sqrt{3}}{9} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{9} & -\frac{2\sqrt{3}}{9} & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{9} & \frac{\sqrt{3}}{9} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & 1 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Результат: $u_{k,l} = -\frac{2}{3}\psi_{k,l}^{(3,1)} + \frac{2}{3}\psi_{k,l}^{(1,3)}, \quad k, l = \overline{0,4}.$

Задачи

12.2.1. Сеточные функции

а) $u_{k,l} = kh_x(3 - kh_x)^2 lh_y(3 - lh_y)^2 / 16,$

б) $u_{k,l} = (kh_x)^2(3 - kh_x)(lh_y)^2(3 - lh_y) / 16,$

в) $u_{k,l} = (kh_x)^2(3 - kh_x)^2(lh_y)^2(3 - lh_y)^2 / 16$

на сетке

$$D_h = \{(x_k, y_l): x_k = kh_x, k = \overline{0, L}, h_x K = 3; y_l = lh_y, l = \overline{0, L}, h_y L = 3, K, L = 3\}$$

разложить по собственным функциям $\psi_{k,l}^{(p,q)}$, $p, q = 1, 2$ разностного оператора Лапласа при решении задачи Дирихле.

12.2.2. Сеточные функции

а) $u_{k,l} = \{k, l = \overline{0, 3}, u_{1,2} = 3, u_{k,l} = 0, \text{ иначе}\},$

$$\text{б) } u_{k,l} = \left\{ k, l = \overline{0, 3}, u_{2,1} = 3, u_{k,l} = 0, \text{ иначе} \right\},$$

$$\text{в) } u_{k,l} = \left\{ k, l = \overline{0, 3}, u_{2,2} = 3, u_{k,l} = 0, \text{ иначе} \right\}$$

на сетке

$$D_h = \left\{ (x_k, y_l): x_k = kh_x, k = \overline{0, K}, h_x K = 3; y_l = lh_y, l = \overline{0, L}, h_y L = 3, K, L = 3 \right\}$$

разложить по собственным функциям $\psi_{k,l}^{(p,q)}$, $p, q = 1, 2$ разностного оператора Лапласа для задачи Дирихле.

$$12.2.3. \text{ Сеточную функцию } u_{k,l} = \frac{1}{156} (kh_x)^2 (4 - kh_x)^2 (lh_y)^2 (4 - lh_y)^2$$

на сетке

$$D_h = \left\{ (x_k, y_l): x_k = kh_x, k = \overline{0, K}, h_x K = 4; y_l = lh_y, l = \overline{0, L}, h_y L = 4, K, L = 4 \right\}$$

разложить по собственным функциям $\psi_{k,l}^{(p,q)}$, $p, q = 1, 2, 3$ разностного оператора Лапласа при решении задачи Неймана.

12.2.4. Сеточную функцию

$$u_{k,l} = \left\{ k, l = \overline{0, 4}, u_{1,2} = u_{0,2} = 1, u_{2,2} = 2, u_{k,l} = 0, \text{ иначе} \right\}$$

на сетке

$$D_h = \left\{ (x_k, y_l): x_k = kh_x, k = \overline{0, K}, h_x K = 4; y_l = lh_y, l = \overline{0, L}, h_y L = 4, K, L = 4 \right\}$$

разложить по собственным функциям $\psi_{k,l}^{(p,q)}$, $p, q = 1, 2, 3$ разностного оператора Лапласа при решении задачи Неймана.

12.2.5. На сетке

$$D_h = \left\{ (x_k, y_l): x_k = kh_x, k = \overline{0, K}, h_x K = 1; y_l = lh_y, l = \overline{0, L}, h_y L = 1 \right\} \text{ вычислить}$$

собственные значения $\lambda^{(p,q)}$ и собственные функции $\psi_{k,l}^{(p,q)}$ задачи

$$\frac{u_{k-1,l} - 2u_{k,l} + u_{k+1,l}}{h_x^2} + \frac{u_{k,l-1} - 2u_{k,l} + u_{k,l+1}}{h_y^2} = -\lambda u_{k,l},$$

$$u_{0,l} = u_{1,l}, u_{K-1,l} = u_{K,l}, l = \overline{0, L}, u_{k,0} = u_{k,L} = 0, k = \overline{0, K}.$$

12.2.6. На сетке

$$D_h = \left\{ (x_k, y_l): x_k = kh_x, k = \overline{0, K}, h_x K = 1; y_l = lh_y, l = \overline{0, L}, h_y L = 1 \right\} \text{ вычислить}$$

собственные значения $\lambda^{(p,q)}$ и собственные функции $\psi_{k,l}^{(p,q)}$ задачи

$$\frac{u_{k-1,l} - 2u_{k,l} + u_{k+1,l}}{h_x^2} + \frac{u_{k,l-1} - 2u_{k,l} + u_{k,l+1}}{h_y^2} = -\lambda u_{k,l},$$

$$u_{0,l} = u_{K-1,l}, \quad u_{1,l} = u_{K,l}, \quad l = \overline{0, L}, \quad u_{k,0} = u_{k,L} = 0, \quad k = \overline{0, K}.$$

12.2.7. На сетке

$D_h = \{(x_k, y_l): x_k = kh_x, k = \overline{0, K}, h_x K = 1; y_l = lh_y, l = \overline{0, L}, h_y L = 1\}$ вычислить собственные значения $\lambda^{(p,q)}$ и собственные функции $\psi_{k,l}^{(p,q)}$ задачи

$$\frac{u_{k-1,l} - 2u_{k,l} + u_{k+1,l}}{h_x^2} + \frac{u_{k,l-1} - 2u_{k,l} + u_{k,l+1}}{h_y^2} = -\lambda u_{k,l},$$

$$u_{0,l} = u_{K-1,l}, \quad u_{1,l} = u_{K,l}, \quad l = \overline{0, L}, \quad u_{k,0} = u_{k,1}, \quad u_{k,L-1} = u_{k,L}, \quad k = \overline{0, K}.$$

12.2.8. На сетке

$D_h = \{(x_k, y_l): x_k = kh_x, k = \overline{0, K}, h_x K = 1; y_l = lh_y, l = \overline{0, L}, h_y L = 1\}$ вычислить собственные значения $\lambda^{(p,q)}$ и собственные функции $\psi_{k,l}^{(p,q)}$ задачи

$$\frac{u_{k-1,l} - 2u_{k,l} + u_{k+1,l}}{h_x^2} + \frac{u_{k,l-1} - 2u_{k,l} + u_{k,l+1}}{h_y^2} = -\lambda u_{k,l},$$

$$u_{0,l} = u_{K-1,l}, \quad u_{1,l} = u_{K,l}, \quad l = \overline{0, L}, \quad u_{k,0} = u_{k,L-1}, \quad u_{k,1} = u_{k,L}, \quad k = \overline{0, K}.$$

12.2.9 На сетке

$D_h = \{(x_k, y_l): x_k = kh_x, k = \overline{0, K}, h_x K = 1; y_l = lh_y, l = \overline{0, L}, h_y L = 1\}$ определить ортонормированную систему собственных функций разностных задач

$$\frac{u_{k-1,l} - 2u_{k,l} + u_{k+1,l}}{h_x^2} + \frac{u_{k,l-1} - 2u_{k,l} + u_{k,l+1}}{h_y^2} = -\lambda u_{k,l}.$$

а) $u_{0,l} = u_{1,l}, \quad u_{K-1,l} = u_{K,l}, \quad l = \overline{0, L}, \quad u_{k,0} = u_{k,L} = 0, \quad k = \overline{0, K},$

б) $u_{0,l} = u_{K-1,l}, \quad u_{1,l} = u_{K,l}, \quad l = \overline{0, L}, \quad u_{k,0} = u_{k,L} = 0, \quad k = \overline{0, K},$

в) $u_{0,l} = u_{K-1,l}, \quad u_{1,l} = u_{K,l}, \quad l = \overline{0, L}, \quad u_{k,0} = u_{k,L-1}, \quad u_{k,1} = u_{k,L}, \quad k = \overline{0, K}.$

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_{k,l}^* - u_{k,l}^*}{\tau} &= \frac{u_{k+1,l}^* - 2u_{k,l}^* + u_{k-1,l}^*}{h_x^2} + \frac{u_{k,l+1}^* - 2u_{k,l}^* + u_{k,l-1}^*}{h_y^2} - f_{k,l}, \\ k &= \overline{1, K-1}; l = \overline{1, L-1}; u_{0,l}^* = \varphi_{0,l}; u_{K,l}^* = \varphi_{k,l}; l = \overline{0, L}, \\ u_{k,0}^* &= \varphi_{k,0}; u_{k,L}^* = \varphi_{k,L}; k = \overline{1, K-1}. \end{aligned} \right\} \quad (12.3.4)$$

Вычтем из (12.3.3) уравнения (12.3.4) и рассмотрим сеточную функцию погрешности $\varepsilon_{k,l}^n = u_{k,l}^n - u_{k,l}^*$, для которой справедлива однородная система уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varepsilon_{k,l}^{n+1} - \varepsilon_{k,l}^n}{\tau} - \frac{\varepsilon_{k+1,l}^n - 2\varepsilon_{k,l}^n + \varepsilon_{k-1,l}^n}{h_x^2} - \frac{\varepsilon_{k,l+1}^n - 2\varepsilon_{k,l}^n + \varepsilon_{k,l-1}^n}{h_y^2} &= 0, \\ k &= \overline{1, K-1}; l = \overline{1, L-1}; \varepsilon_{0,l}^n = \varepsilon_{K,l}^n = \varepsilon_{k,0}^n = \varepsilon_{k,L}^n = 0; k = \overline{0, K}, l = \overline{0, L}. \end{aligned} \right\} \quad (12.3.5)$$

Будем искать решение задачи (12.3.5) в виде разложения по ортонормированному базису конечных рядов Фурье из раздела 12.2

$$\varepsilon_{k,l}^n = \sum_{p=1}^{p=K-1} \sum_{q=1}^{q=L-1} C_{p,q}^n \psi_{k,l}^{(p,q)}; \varepsilon_{k,l}^{n+1} = \sum_{p=1}^{p=K-1} \sum_{q=1}^{q=L-1} C_{p,q}^{n+1} \psi_{k,l}^{(p,q)}. \quad (12.3.6)$$

Подставим выражения (12.3.6) в (12.3.5). После преобразований получим соотношения, связывающие значения коэффициентов одной и той же гармоник разложения погрешности в конечные ряды Фурье для последовательных временных слоев:

$$C_{p,q}^{n+1} = \left[1 - \tau \left(\frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{p\pi}{2L} + \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{q\pi}{2M} \right) \right] C_{p,q}^n. \quad (12.3.7)$$

Пусть

$$\mu_{p,q} = 4 \left(\frac{\sin^2 \frac{p\pi}{2K}}{h_x^2} + \frac{\sin^2 \frac{q\pi}{2L}}{h_y^2} \right), \quad (12.3.8)$$

$$\min_{p,q} \mu_{p,q} = 4 \left(\frac{\sin^2 \frac{\pi}{2K}}{h_x^2} + \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2L}}{h_y^2} \right) \approx 2\pi^2,$$

$$\max_{p,q} \mu_{p,q} = 4 \left(\frac{\cos^2 \frac{\pi}{2K}}{h_x^2} + \frac{\cos^2 \frac{\pi}{2L}}{h_y^2} \right) \approx 4(K^2 + L^2).$$

Тогда из (12.3.7) имеем

$$C_{p,q}^{n+1} = (1 - \tau \mu_{p,q}) C_{p,q}^n. \quad (12.3.9)$$

Для того чтобы погрешность убывала при возрастании переменной t , достаточно потребовать выполнения условий

$$-1 < 1 - \tau \mu_{p,q} < 1 \quad \text{или} \quad \tau < \frac{2}{\max_{p,q} \mu_{p,q}} \approx \frac{1}{2(K^2 + L^2)}.$$

Последняя оценка справедлива для больших значений K, L .

Для ускорения убывания погрешности расчёты можно производить с некоторым переменным шагом τ_n , меняя его от одного временного слоя к другому.

Пусть требуется определить набор временных шагов $\tau_n, n = \overline{1, N}$ для цикла из N -итераций, при котором начальная погрешность уменьшалась бы в максимальное число раз. Тогда эта последовательность будет задаваться выражением (чебышёвским набором):

$$\tau_n = \frac{2}{\left(\max_{p,q} \mu_{p,q} + \min_{p,q} \mu_{p,q} \right) + \left(\max_{p,q} \mu_{p,q} - \min_{p,q} \mu_{p,q} \right) \cos \frac{\pi(2n-1)}{2N}}, \quad (12.3.10)$$

$$n = \overline{1, N}.$$

Для придания расчётам устойчивости в этой последовательности временных шагов (12.3.10) необходимо изменить порядок следования отдельных элементов. Это эквивалентно изменению порядка следования элементов последовательности нечётных чисел $\{2n-1\}_{n=1}^{n=N}$, которая в свою очередь определяет последовательность временных шагов $\{\tau_n\}_{n=1}^{n=N}$. Процесс упорядочивания последовательности нечётных чисел разбивается на несколько стадий [6,7].

Сначала определяют число итераций N , составляющих один цикл. Пусть, например, оно равняется $N = 45$. Затем из этого числа строят специальную убывающую последовательность по следующему правилу: из нечетных чисел вычитают единицу, а чётные – делят на два, пока не получится единица. В результате имеем: $N = \{45, 44, 22, 11, 10, 5, 4, 2, 1\}$.

Отметим надчеркиванием в ней чётные числа, стоящие между двумя нечетными числами, или чётное, стоящее перед последним нечётным числом, заканчивающим последовательность из N итераций, $N = \{45, \overline{44}, 22, 11, \overline{10}, 5, 4, 2, 1\}$.

Построение упорядоченной последовательности нечётных чисел, состоящей из N элементов, осуществляется с правого конца полученной

убывающей последовательности, т.е. с единицы $\theta_{N=1} = \{1\}$, последовательно сдвигаясь влево. Далее строят $\theta_{N=2}$.

Существуют два алгоритма перехода от последовательности с m элементами к последовательности с $2m$ элементами. Первый применяется, если в убывающей последовательности чётное число не содержит надчеркивания. Приведём его:

$$\theta_{2m}(2i-1) = \theta_m(i), \quad \theta_{2m}(2i) = 4m - \theta_{2m}(2i-1), \quad i = \overline{1, m}. \quad (12.3.11)$$

В результате находим, что $\theta_{N=2} = \{1, 3\}$; $\theta_{N=4} = \{1, 7, 3, 5\}$.

Затем необходимо определить последовательность из пяти первых нечётных чисел $N = 5$.

Здесь тоже существуют два способа перехода от чётного числа $2N$ к нечётному числу $2N + 1$ в зависимости от того, было ли предыдущее чётное число с надчеркиванием или без него. Приведём вариант без надчеркивания:

$$\theta_{2m+1}(i) = \theta_{2m}(i), \quad i = \overline{1, 2m}, \quad \theta_{2m+1}(2m+1) = 4m + 1. \quad (12.3.12)$$

Итак, имеем $\theta_{N=5} = \{1, 7, 3, 5, 9\}$.

Потом необходим алгоритм удвоения с надчеркиванием:

$$\bar{\theta}_{2m}(2i-1) = \theta_m(i), \quad \bar{\theta}_{2m}(2i) = 4m + 2 - \bar{\theta}_{2m}(2i-1), \quad i = \overline{1, m}. \quad (12.3.13)$$

После вычислений получаем

$$\bar{\theta}_{N=10} = \{1, 21, 7, 15, 3, 19, 5, 17, 9, 13\}.$$

Наконец, переход к нечётному числу после чётного числа с надчеркиванием:

$$\theta_{2m+1}(i) = \bar{\theta}_{2m}(i), \quad i = \overline{1, 2m}, \quad \theta_{2m+1}(2m+1) = 2m + 1. \quad (12.3.14)$$

Упорядоченные последовательности нечётных чисел от 1 до 89 принимают следующий вид:

- 1) $\theta_{N=11} = \{1, 21, 7, 15, 3, 19, 5, 17, 9, 13, 11\}$; 2)
- $\theta_{N=22} = \{1, 43, 21, 23, 7, 37, 15, 29, 3, 41, 19, 25, 5, 39, 17, 27, 9, 35, 13, 31, 11, 33\}$;
- 3) $\bar{\theta}_{N=44} = \{1, 89, 43, 47, 21, 69, 23, 67, 7, 83, 37, 53, 15, 75, 29, 61, 3, 87, 41, 49, 19,$
 $71, 25, 65, 5, 85, 39, 51, 17, 73, 27, 63, 9, 81, 35, 55, 13, 77, 31, 59, 11, 79, 33, 57\}$;
- 4) $\theta_{N=45} = \{1, 89, 43, 47, 21, 69, 23, 67, 7, 83, 37, 53, 15, 75, 29, 61, 3, 87, 41, 49, 19,$
 $71, 25, 65, 5, 85, 39, 51, 17, 73, 27, 63, 9, 81, 35, 55, 13, 77, 31, 59, 11, 79, 33, 57, 45\}.$

Это означает, что последовательность из $N = 45$ итерационных параметров, обеспечивающая устойчивость решения системы уравнений (12.3.3), должна быть такой

$$\tau_n = \{\tau_1, \tau_{45}, \tau_{22}, \tau_{24}, \tau_{11}, \tau_{35}, \tau_{12}, \tau_{34}, \tau_4, \tau_{42}, \tau_{19}, \tau_{27}, \tau_8, \tau_{38}, \tau_{15}, \tau_{31}, \tau_2, \tau_{44}, \tau_{21}, \tau_{25}, \tau_{10}, \tau_{36}, \tau_{13}, \tau_{33}, \tau_3, \tau_{43}, \tau_{20}, \tau_{26}, \tau_9, \tau_{37}, \tau_{14}, \tau_{32}, \tau_5, \tau_{41}, \tau_{18}, \tau_{28}, \tau_7, \tau_{39}, \tau_{16}, \tau_{30}, \tau_6, \tau_{40}, \tau_{17}, \tau_{29}, \tau_{23}\}.$$

Пусть ε показывает, во сколько раз требуется уменьшить первоначальную погрешность. Тогда справедлива следующая оценка для числа итераций, за которое заданная точность достигается:

$$N \geq \ln \frac{2}{\varepsilon} \left/ \ln \frac{\sqrt{\max_{p,q} \mu_{p,q}} + \sqrt{\min_{p,q} \mu_{p,q}}}{\sqrt{\max_{p,q} \mu_{p,q}} - \sqrt{\min_{p,q} \mu_{p,q}}} \right.$$

Упражнения

Пример 1

На сетке

$$D_h = \{(x_k, y_l) : x_k = kh_x, k = \overline{0, K}, h_x K = 3; y_l = lh_y, l = \overline{0, L}, h_y L = 3, K, L = 3\}$$

решить уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}[x(3-x) + y(3-y)], \quad 0 \leq x, y \leq 3, \quad u_G = 0$$

методом установления с начальным приближением $u^{(0)}(x, y) = 0$ и

а) с постоянным итерационным параметром $\tau = 0.5\tau_{\text{опт}}$, ($\tau_{\text{опт}}$ — его оптимальное значение),

б) с $\tau = \tau_{\text{опт}}$,

в) с упорядоченным чебышевским набором итерационных параметров τ_1, τ_2, τ_3 .

Произвести три итерации. По известному точному решению

$$u(x, y) = \frac{1}{4}x(3-x)y(3-y)$$

на каждой итерации оценить ошибку получаемого численного решения.

Решение

Строим разностную схему:

$$\frac{u_{k,l}^{(n+1)} - u_{k,l}^{(n)}}{\tau} =$$

$$= \frac{u_{k-1,l}^{(n)} - 2u_{k,l}^{(n)} + u_{k+1,l}^{(n)}}{h_x^2} + \frac{u_{k,l-1}^{(n)} - 2u_{k,l}^{(n)} + u_{k,l+1}^{(n)}}{h_y^2} + \frac{1}{2} \left[kh_x (3 - kh_x) + lh_y (3 - lh_y) \right],$$

$$k, l = 1, 2, \quad n = 0, 1, 2.$$

С учётом полной симметрии задачи вычисления производим только в одном узле $k, l = 1$:

$$u_{1,1}^{(n+1)} = u_{1,1}^{(n)} + \tau \left(u_{2,1}^{(n)} - 4u_{1,1}^{(n)} + u_{1,2}^{(n)} + 2 \right), \quad n = 0, 1, 2.$$

а) По условиям задачи

$$\tau = 0.5\tau_{\text{опт}} = 0.5 \frac{2}{\left(\lambda_{\min}^{p,q} + \lambda_{\max}^{p,q} \right)} = 0.5 \frac{2}{8 \left(\sin^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{3} \right)} = 0.5 \cdot 0.25 = 0.125.$$

В результате

$$u_{1,1}^{(1)} = 0.25, \quad \delta^{(1)} = \left| \frac{1 - 0.25}{1} \right| \cdot 10^2 = 75\%,$$

$$u_{1,1}^{(2)} = 0.25 + 0.125(-2 \cdot 0.25 + 2) = 0.4325, \quad \delta^{(2)} = \left| \frac{1 - 0.4325}{1} \right| \cdot 10^2 \approx 57\%,$$

$$u_{1,1}^{(3)} = 0.4325 + 0.125(-2 \cdot 0.4325 + 2) \approx 0.5743, \quad \delta^{(3)} = \left| \frac{1 - 0.5743}{1} \right| \cdot 10^2 \approx 43\%.$$

б) Используя выкладки предыдущей задачи, получаем

$$u_{1,1}^{(n+1)} = u_{1,1}^{(n)} + \tau_{\text{опт}} \left(u_{2,1}^{(n)} - 4u_{1,1}^{(n)} + u_{1,2}^{(n)} + 2 \right), \quad \tau_{\text{опт}} = 0.25, \quad n = 0, 1, 2.$$

$$u_{1,1}^{(1)} = 0.25 \cdot 2 = 0.5, \quad \delta^{(1)} = \left| \frac{1 - 0.5}{1} \right| \cdot 10^2 = 50\%,$$

$$u_{1,1}^{(2)} = 0.5 + 0.25(-2 \cdot 0.5 + 2) = 0.75, \quad \delta^{(2)} = \left| \frac{1 - 0.75}{1} \right| \cdot 10^2 \approx 25\%,$$

$$u_{1,1}^{(3)} = 0.75 + 0.25(-2 \cdot 0.75 + 2) \approx 0.875, \quad \delta^{(3)} = \left| \frac{1 - 0.875}{1} \right| \cdot 10^2 \approx 13\%.$$

в) Выполняем вычисления для упорядоченного набора переменных итерационных параметров (см. (12.3.7), (12.3.10)):

$$\tau_1 = \frac{1}{4 + \sqrt{3}}, \quad \tau_3 = \frac{1}{4 - \sqrt{3}}, \quad \tau_2 = \frac{1}{4},$$

$$u_{1,1}^{(n+1)} = u_{1,1}^{(n)} + \tau_{n+1} \left(u_{2,1}^{(n)} - 4u_{1,1}^{(n)} + u_{1,2}^{(n)} + 2 \right), \quad n = 0, 1, 2.$$

$$u_{1,1}^{(1)} = \frac{1}{4 + \sqrt{3}} 2 \approx 0.349, \quad \delta^{(1)} = \left| \frac{1 - 0.349}{1} \right| \cdot 10^2 \approx 65\%,$$

$$u_{1,1}^{(2)} = 0.349 + \frac{1}{4 - \sqrt{3}} (-2 \cdot 0.349 + 2) \approx 0.923, \quad \delta^{(2)} = \left| \frac{1 - 0.923}{1} \right| \cdot 10^2 \approx 8\%,$$

$$u_{1,1}^{(3)} = 0.923 + \frac{1}{4} (-2 \cdot 0.923 + 2) \approx 0.961, \quad \delta^{(3)} = \left| \frac{1 - 0.961}{1} \right| \cdot 10^2 \approx 4\%.$$

Пример 2

Пусть задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{2} [x(3-x) + y(3-y)], \quad 0 \leq x, y \leq 3, \quad u_G = 0$$

решается на сетке

$$D_h = \{(x_k, y_l): x_k = kh_x, k = \overline{0, K}, h_x K = 3; y_l = lh_y, l = \overline{0, L}, h_y L = 3, K, L = 3\}$$

методом установления с постоянным значением итерационного параметра τ и с начальным приближением $u^{(0)}(x, y) = 0$.

В этом случае, как следует из примера 1 раздела 12.2, начальная ошибка решения, равная самому решению, содержит только самую низкочастотную (самую длинноволновую) гармонику, соответствующую минимальному собственному значению:

$$\lambda_{\min} = \left(\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi}{3} + \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi}{3} \right) = 2.$$

Получить точное решение разностной задачи методом простой итерации за одну итерацию.

Решение

Так же, как и в примере 1, с учётом полной симметрии задачи вычисления производим только в одном узле $l, m = 1$:

$$u_{1,1}^{(1)} = u_{1,1}^{(0)} + \tau (u_{2,1}^{(0)} - 4u_{1,1}^{(0)} + u_{1,2}^{(0)} + 2), \quad \tau = \frac{1}{\lambda_{\min}} = \frac{1}{2} \rightarrow u_{1,1}^{(1)} = 1.$$

Пример 3

Пусть задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{2} [x(3-x) + y(3-y)], \quad 0 \leq x, y \leq 3, \quad u_G = 0$$

решается на сетке

$$D_h = \{(x_k, y_l): x_k = kh_x, k = \overline{0, K}, h_x K = 3; y_l = lh_y, l = \overline{0, L}, h_y L = 3, K, L = 3\}$$

методом установления (методом простой итерации) с постоянным значением итерационного параметра τ и с начальным приближением $u^{(0)}(x,y) = U(x,y)$, содержащим все гармоники, допускаемые используемой сеткой.

Предложить упорядоченный набор итерационных параметров, использование которого без учёта эффектов округления приведёт к получению точного решения разностной задачи за конечное число итераций.

Решение

$$\tau_1 = \frac{1}{2\lambda_2} = \frac{1}{6}, \quad \tau_2 = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{1}{4}, \quad \tau_3 = \frac{1}{2\lambda_1} = \frac{1}{2}; \quad \lambda_p = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{p\pi}{6}, \quad p = 1, 2.$$

Первая итерация обнуляет наиболее высокочастотную гармонику ошибки, связанную с $\lambda = (\lambda_2 + \lambda_2)$. Вторая итерация подавляет две равные гармоники с $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)$, $\lambda = (\lambda_2 + \lambda_1)$, уже уменьшенные при первой итерации. Наконец, последняя, третья итерация подавляет самую низкочастотную гармонику с $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_1)$, уже ослабленную первыми двумя итерациями. Возможное увеличение на этой итерации более высокочастотных гармоник исключено, поскольку они были подавлены на первых двух итерациях.

Отметим, однако, что при больших значениях K, L эффекты округлений могут снизить точность окончательного результата.

Подтверждаем предложенный алгоритм вычислениями, взяв начальное приближение суммой всех гармоник с одинаковыми единичными весами. Тогда

$$u_{k,l}^{(0)} = \begin{cases} 3, & k = 1, l = 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$u_{1,1}^{(n+1)} = u_{1,1}^{(n)} + \tau_{n+1} (u_{2,1}^{(n)} - 4u_{1,1}^{(n)} + u_{1,2}^{(n)} + 2),$$

$$u_{1,2}^{(n+1)} = u_{1,2}^{(n)} + \tau_{n+1} (u_{1,1}^{(n)} - 4u_{1,2}^{(n)} + u_{2,2}^{(n)} + 2),$$

$$u_{1,2}^{(n+1)} = u_{1,2}^{(n)} + \tau_{n+1} (u_{1,1}^{(n)} - 4u_{1,2}^{(n)} + u_{2,2}^{(n)} + 2),$$

$$u_{2,2}^{(n+1)} = u_{2,2}^{(n)} + \tau_{n+1} (u_{1,2}^{(n)} - 4u_{2,2}^{(n)} + u_{2,1}^{(n)} + 2), \quad n = 0, 1, 2, \quad \tau_1 = 1/6, \tau_2 = 1/4, \tau_3 = 1/2,$$

$$\vec{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 8/6 \\ 5/6 \\ 5/6 \\ 2/6 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 11/12 \\ 11/12 \\ 11/12 \\ 11/12 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задачи

12.3.1. Для решения первой краевой задачи неоднородного уравнения Гельмгольца $\Delta u + \lambda u = f(x, y), 0 \leq x, y \leq 1, u|_G = 0$

на сетке $D_h = \{(x_k, y_l) : x_k = kh_x, y_l = lh_y, k, l = \overline{0, N}, h_x = h_y = 1/N\}$

предложена разностная схема

$$\frac{u_{k-1,l} - 2u_{k,l} + u_{k+1,l}}{h_x^2} + \frac{u_{k,l-1} - 2u_{k,l} + u_{k,l+1}}{h_y^2} + \\ + \frac{1}{4} \lambda (u_{k-1,l} + u_{k+1,l} + u_{k,l-1} + u_{k,l+1}) = f_{k,l}, \quad k, l = \overline{1, (N-1)}, \\ u_{k,0} = 0, u_{k,N} = 0, \quad k = \overline{0, N}, u_{0,l} = 0, u_{N,l} = 0, \quad l = \overline{0, (N-1)}.$$

Исследовать её на аппроксимацию

12.3.2. Для решения второй краевой задачи неоднородного уравнения

Гельмгольца $\Delta u + \lambda u = f(x, y), 0 \leq x, y \leq 1, \frac{\partial u}{\partial x}|_G = 0$

на сетке $D_h = \{(x_k, y_l) : x_k = kh_x, y_l = lh_y, k, l = \overline{0, N}, h_x = h_y = 1/N\}$

предложена разностная схема

$$\frac{u_{k,l} - 2u_{k+1,l} + u_{k+2,l}}{h_x^2} + \frac{u_{k,l-1} - 2u_{k,l} + u_{k,l+1}}{h_y^2} + \lambda u_{k,l} = f_{k,l}, \quad k, l = \overline{1, (N-1)}, \\ u_{k,0} - u_{k,1} = 0, \quad u_{k,N} - u_{k,N-1} = 0, \quad k = \overline{0, (N-1)}, \\ u_{0,l} - u_{1,l} = 0, \quad u_{N,l} - u_{N-1,l} = 0, \quad l = \overline{0, (N-1)}.$$

Исследовать её на аппроксимацию

12.3.3. Для решения задачи Дирихле уравнения Пуассона

$\Delta u = f(x, y), 0 \leq x, y \leq 1, u|_G = 0$ на сетке

$D_h = \{(x_k, y_l) : x_k = kh_x, y_l = lh_y, k = \overline{0, K}, l = \overline{0, L}, h_x = 1/K, h_y = 1/L\}$

предложена разностная схема

$$\frac{35u_{k,l} - 10u_{k+1,l} + 14u_{k+2,l} - 56u_{k+3,l} + 11u_{k+4,l}}{12h_x^2} + \frac{u_{k,l-1} - 2u_{k,l} + u_{k,l+1}}{h_y^2} = f_{k,l}, \\ k = \overline{1, (K-4)}, \quad l = \overline{1, (L-1)}, \\ u_{k,0} = \varphi_{k,0}, \quad u_{k,L} = \varphi_{k,L}, \quad k = \overline{0, K}, \\ u_{K-3,l} = \varphi_{K-3,l}, \quad u_{K-2,l} = \varphi_{K-2,l}, u_{K-1,l} = \varphi_{K-1,l}, u_{K,l} = \varphi_{K,l}, \quad l = \overline{1, (L-1)}.$$

Исследовать её на аппроксимацию

12.3.4. Для решения задачи Дирихле уравнения Пуассона

$$\Delta u = f(x, y), 0 \leq x, y \leq 1, u|_G = 0 \text{ на сетке}$$

$$D_h = \{(x_k, y_l) : x_k = kh_x, y_l = lh_y, k = \overline{0, K}, l = \overline{0, L}, h_x = 1/K, h_y = 1/L\}$$

предложена разностная схема

$$\frac{u_{k-1,l-1} + u_{k-1,l+1} - 4u_{k,l} + u_{k+1,l-1} + u_{k+1,l+1}}{2h_x^2} + \frac{u_{k-1,l-1} + u_{k-1,l+1} - 4u_{k,l} + u_{k+1,l-1} + u_{k+1,l+1}}{2h_y^2} = f_{k,l},$$

$$k = \overline{1, (K-4)}, l = \overline{1, (L-1)},$$

$$u_{k,0} = 0, u_{k,L} = 0, k = \overline{0, K}, u_{0,l} = 0, u_{K,l} = 0, l = \overline{1, (L-1)}.$$

Исследовать её на аппроксимацию

12.3.5. Для решения смешанной краевой задачи уравнения Пуассона

$$\Delta u = f(x, y), 0 \leq x, y \leq 1, u(x, 0), u(x, 1) = 0, u(0, y) = u(1, y), \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, y)$$

$$\text{на сетке } D_h = \{(x_k, y_l) : x_k = kh_x, y_l = lh_y, k, l = \overline{0, N}, h_x = h_y = 1/N\}$$

предложена разностная схема

$$\frac{u_{k,l} - 2u_{k+1,l} + u_{k+2,l}}{h_x^2} + \frac{u_{k,l-1} - 2u_{k,l} + u_{k,l+1}}{h_y^2} = f_{k,l}, k = \overline{0, (N-2)}, l = \overline{1, (N-1)},$$

$$u_{N-1,l} = u_{0,l}, u_{N,l} = u_{1,l}, l = \overline{1, (N-1)},$$

$$u_{k,0}, u_{k,N} = 0, k = \overline{0, N}.$$

Исследовать её на аппроксимацию.

12.3.6. Для решения смешанной краевой задачи уравнения Пуассона

$$\Delta u = f(x, y), 0 \leq x, y \leq 1, u(0, y), u(1, y) = 0, u(x, 0) = u(x, 1), \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, 1)$$

$$\text{на сетке } D_h = \{(x_k, y_l) : x_k = kh_x, y_l = lh_y, k, l = \overline{0, N}, h_x = h_y = 1/N\}$$

предложена разностная схема

$$\frac{u_{k-1,l} - 2u_{k,l} + u_{k+1,l}}{h_x^2} + \frac{u_{k,l} - 2u_{k,l+1} + u_{k,l+2}}{h_y^2} = f_{k,l}, k = \overline{1, (N-1)}, l = \overline{0, (N-2)},$$

$$u_{k,N-1} = u_{k,0}, u_{k,N} = u_{k,1}, k = \overline{0, N},$$

$$u_{0,l}, u_{N,l} = 0, l = \overline{1, (N-1)}.$$

Исследовать её на аппроксимацию.

12.3.7. Для решения смешанной краевой задачи уравнения Пуассона

$$\Delta u = f(x, y), 0 \leq x, y \leq 1,$$

$$u(0, y) = u(1, y), \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, y); u(x, 0) = u(x, 1), \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, 1)$$

на сетке $D_h = \{(x_k, y_l) : x_k = kh_x, y_l = lh_y, k, l = \overline{0, N}, h_x = h_y = 1/N\}$

предложена разностная схема

$$\frac{u_{k,l} - 2u_{k+1,l} + u_{k+2,l}}{h_x^2} + \frac{u_{k,l} - 2u_{k,l+1} + u_{k,l+2}}{h_y^2} = f_{k,l}, \quad k, l = \overline{0, (N-2)},$$

$$u_{N-1,l} = u_{0,l}, \quad u_{N,l} = u_{1,l}; \quad u_{k,N-1} = u_{k,0}, \quad u_{k,N} = u_{k,1}, \quad k, l = \overline{0, N}.$$

Исследовать её на аппроксимацию

12.3.8. Для решения второй краевой задачи неоднородного уравнения

$$\Delta u + \lambda u = f(x, y), \quad 0 \leq x, y \leq 1, \quad \partial u / \partial n|_{\Gamma} = 0$$

($\partial u / \partial n$ – производная по внешней нормали)

на сетке $D_h = \{(x_k, y_l) : x_k = kh, y_l = lh, k, l = \overline{0, N}, h = 1/N\}$

предложена разностная схема. Исследовать её на аппроксимацию.

а)

$$\frac{u_{k,l} - 2u_{k,l} + u_{k,l}}{h^2} + \frac{u_{k,l} - 2u_{k,l} + u_{k,l}}{h^2} + \lambda u_{k,l} = f_{k,l}, \quad k, l = \overline{1, (N-1)},$$

$$3u_{0,l} - 4u_{1,l} + u_{2,l} = 0, \quad 3u_{N,l} - 4u_{N-1,l} + u_{N-2,l} = 0, \quad l = \overline{0, N},$$

$$u_{k,0} - u_{k,1} = 0, \quad u_{k,N} - u_{k,N-1} = 0, \quad k = \overline{0, N}.$$

б)

$$\frac{u_{k,l} - 2u_{k,l} + u_{k,l}}{h^2} + \frac{u_{k,l} - 2u_{k,l} + u_{k,l}}{h^2} + \lambda u_{k,l} = f_{k,l}, \quad k, l = \overline{1, (N-1)},$$

$$3u_{0,l} - 4u_{1,l} + u_{2,l} = 0, \quad 3u_{N,l} - 4u_{N-1,l} + u_{N-2,l} = 0, \quad l = \overline{0, N},$$

$$3u_{k,0} - 4u_{k,1} + u_{k,2} = 0, \quad 3u_{k,N} - 4u_{k,N-1} + u_{k,N-2} = 0, \quad k = \overline{0, N}.$$

в)

$$\frac{u_{k,l} - 2u_{k,l} + u_{k,l}}{h^2} + \frac{u_{k,l} - 2u_{k,l} + u_{k,l}}{h^2} + \lambda u_{k,l} = f_{k,l}, \quad k, l = \overline{1, 2, (N-1)},$$

$$-3u_{0,l} + 4u_{1,l} - u_{2,l} = 0, \quad 3u_{N,l} - 4u_{N-1,l} + u_{N-2,l} = 0, \quad l = \overline{0, N},$$

$$u_{k,0} - u_{k,1} = 0, \quad u_{k,N} - u_{k,N-1} = 0, \quad k = \overline{0, N}.$$

12.3.9. Для решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = f(x, y), u|_{\Gamma} = \varphi(s), 0 \leq x, y \leq 1 \text{ на сетке}$$

$$D_h = \{(x_k, y_l): x_k = kh_x, k = \overline{0, K}, h_x K = 1; y_l = lh_y, l = \overline{0, L}, h_y L = 1\}$$

предложена разностная схема метода установления. Определить оптимальный набор чебышёвских итерационных параметров τ_n , $n = \overline{1, N}$ для вычислительного цикла, состоящего из N итераций.

а)

$$\frac{u_{k,l}^{(n+1)} - u_{k,l}^{(n)}}{\tau_n} = \frac{u_{k-1,l}^{(n)} - 2u_{k,l}^{(n)} + u_{k+1,l}^{(n)}}{h_x^2} + \frac{u_{k,l-1/2}^{(n)} - 2u_{k,l}^{(n)} + u_{k,l+1/2}^{(n)}}{h_y^2 / 4} - f_{k,l},$$

$$k = \overline{2, (K-2)}, l = \overline{2, (L-2)}, n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$u_{k,l}^{(0)} = \psi_{k,l}, k = \overline{0, K}, l = \overline{0, L};$$

$$u_{0,l}^{(n)} = \varphi_{0,l}, u_{K,l}^{(n)} = \varphi_{K,l}, l = \overline{0, L}, u_{k,0}^{(n)} = \varphi_{k,0}, u_{k,L}^{(n)} = \varphi_{k,L}, k = \overline{0, K}.$$

б)

$$\frac{u_{k,l}^{(n+1)} - u_{k,l}^{(n)}}{\tau_n} = \frac{u_{k-2,l}^{(n)} - 2u_{k,l}^{(n)} + u_{k+2,l}^{(n)}}{4h_x^2} + \frac{u_{k,l-3/2}^{(n)} - 2u_{k,l}^{(n)} + u_{k,l+3/2}^{(n)}}{9h_y^2 / 4} - f_{k,l},$$

$$k = \overline{2, (K-2)}, l = \overline{2, (L-2)}, n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$u_{k,l}^{(0)} = \psi_{k,l}, k = \overline{0, K}, l = \overline{0, L};$$

$$u_{0,l}^{(n)} = \varphi_{0,l}, u_{1,l}^{(n)} = (\varphi_1)_l, u_{K,l}^{(n)} = (\varphi)_l, u_{K-1,l}^{(n)} = (\varphi_1)_l, l = \overline{0, L},$$

$$u_{k,0}^{(n)} = \varphi_{k,0}, u_{k,1}^{(n)} = (\varphi^1)_k, u_{k,L}^{(n)} = \varphi_{k,L}, u_{k,L-1}^{(n)} = (\varphi^{L-1})_k, k = \overline{0, K}.$$

в)

$$\begin{aligned}
& \frac{u_{k,l}^{(n+1)} - u_{k,l}^{(n)}}{\tau_n} = \\
& = \frac{u_{k+3,l}^{(n)} + 2u_{k+2,l}^{(n)} - 4u_{k,l}^{(n)} + u_{k-2,l}^{(n)} + u_{k-3,l}^{(n)}}{13h_x^2} + \frac{u_{k,l-4}^{(n)} - 2u_{k,l}^{(n)} + u_{k,l+4}^{(n)}}{16h_y^2} - f_{k,l}, \\
& k = \overline{3, (K-1)}, l = \overline{4, (L-1)}, n = 0, 1, 2, \dots; \\
& u_{k,l}^{(0)} = \psi_{k,l}, k = \overline{0, K}, l = \overline{0, L}; \\
& u_{0,l}^{(n)} = \varphi_{0,l}, u_{1,l}^{(n)} = (\varphi_1)_l, u_{2,l}^{(n)} = (\varphi_2)_l, \\
& u_{K,l}^{(n)} = \varphi_{k,L}, u_{K-1,l}^{(n)} = (\varphi_1)_l, u_{K-2,l}^{(n)} = (\varphi_2)_l, l = \overline{0, L}, \\
& u_{k,0}^{(n)} = \varphi_{k,0}, u_{k,1}^{(n)} = (\varphi^1)_k, u_{k,2}^{(n)} = (\varphi^2)_k, u_{k,3}^{(n)} = (\varphi^3)_k, \\
& u_{k,L}^{(n)} = \varphi_{k,L}, u_{k,L-1}^{(n)} = (\varphi^{L-1})_k, u_{k,L-2}^{(n)} = (\varphi^{L-2})_k, u_{k,L-3}^{(n)} = (\varphi^{L-3})_k, k = \overline{0, K}.
\end{aligned}$$

12.3.10. Для решения задачи Дирихле уравнения Пуассона

$\Delta u = f(x, y), 0 \leq x, y \leq 1, u|_{\Gamma} = \varphi(s)$ на сетке

$$D_h = \{(x_k, y_l) : x_k = kh_x, y_l = lh_y, k = \overline{0, K}, l = \overline{0, L}, h_x = 1/K, h_y = 1/L\}$$

методом установления предложена разностная схема

$$\begin{aligned}
& \frac{u_{k,l}^{n+1} - u_{k,l}^n}{\tau_n} = \frac{u_{k-1,l}^n - 2u_{k,l}^n + u_{k+1,l}^n}{h_x^2} + \frac{u_{k,l-1}^n - 2u_{k,l}^n + u_{k,l+1}^n}{h_y^2} - f_{k,l}, \\
& k = \overline{1, (K-1)}, l = \overline{1, (L-1)}, \forall n, \\
& u_{k,l}^0 = \psi_{k,l}, k = \overline{0, K}, l = \overline{0, L}, \\
& u_{k,0}^n = (\varphi_0)_k, u_{k,L}^n = (\varphi^L)_k, k = \overline{0, K}, u_{0,l}^n = (\varphi^0)_l, u_{K,l}^n = (\varphi^K)_l, l = \overline{1, (L-1)}, \forall n.
\end{aligned}$$

Определить оптимальный набор чебышёвских итерационных параметров

$\tau_n, n = \overline{1, N}$ для цикла, содержащего N итераций, и упорядочить τ_n для придания вычислительному алгоритму устойчивости.

а) $N = 8$, б) $N = 9$, в) $N = 16$, г) $N = 18$, д) $N = 19$, е) $N = 27$, ж) $N = 30$, з) $N = 32$, и) $N = 41$.

12.3.11. Задача Дирихле для уравнения Пуассона

$\Delta u = f(x, y), f(x, y) = xy(x-1)(y-1), 0 \leq x, y \leq 1, u|_{\Gamma} = 0$ решается на

сетке $D_h = \{(x_k, y_l) : x_k = kh_x, y_l = lh_y, k, l = \overline{0, 3}, h_x = h_y = h = 1/3\}$

методом установления

$$u_{kl}^{n+1} = u_{kl}^n + \tau \left(\frac{u_{kl}^n - 2u_{kl}^n + u_{kl}^n}{h^2} + \frac{u_{kl}^n - 2u_{kl}^n + u_{kl}^n}{h^2} - f_{kl} \right), \quad k, l = 1, 2, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$u_{k0}^n = u_{k3}^n = u_{0l}^n = u_{3l}^n = 0, \quad k, l = \overline{0, 3}, \quad \forall n.$$

а) с оптимальным значением итерационного параметра $\tau = \tau_{opt}$,

б) с $\tau = 0.5\tau_{opt}$,

в) с упорядоченным чебышёвским набором трёх итерационных параметров $\tau_n, n = \overline{1, 3}$.

Для задач а), б) определить τ_{opt} и произвести три итерации, взяв в качестве начального приближения $u_{k,l}^0 = 0, k, l = \overline{0, 3}$.

Для задачи в) определить $\tau_n, n = \overline{1, 3}$, упорядочить их для придания вычислительному алгоритму устойчивости и произвести три итерации, взяв в качестве начального приближения $u_{k,l}^0 = 0, k, l = \overline{0, 3}$.

12.3.12. На сетке

$$D_h = \{(x_k, y_l) : x_k = kh_x, k = \overline{0, K}, h_x K = 3; y_l = lh_y, l = \overline{0, L}, h_y L = 3, K, L = 3\}$$

решить уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \left(\frac{\pi}{3} \right)^2 \sin \left(\frac{\pi x}{3} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{3} \right), \quad 0 \leq x, y \leq 3, \quad u|_G = 0$$

методом стационарирования с начальным приближением $u^0(x, y) = 0$.

Произвести четыре итерации, используя

а) $\tau = \tau_{opt}$, б) упорядоченный оптимальный набор итерационных параметров $\tau_n, n = \overline{1, 4}$.

По известному точному решению

$$u(x, y) = \sin \left(\frac{\pi x}{3} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{3} \right)$$

на каждой итерации оценить ошибку получаемого численного решения.

12.4. Попеременно-треугольный метод (ПТМ)

Рассмотрим ещё один способ решения эллиптических уравнений, называемый попеременно-треугольным методом и относящийся к группе двухслойных итерационных схем [7]. Обсуждение основных положений этого метода осуществим на примере задачи Дирихле для уравнения Пуассона в единичном квадрате двумерной прямоугольной области:

$$\mathbf{A}u = -\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y); u|_G = \varphi(s); 0 \leq x, y \leq 1. \quad (12.4.1)$$

Введём в области интегрирования сетку

$$D_h = \{(x_k, y_l) : x_k = kh_x, k = \overline{0, K}, h_x = 1/K; y_l = lh_y, l = \overline{0, L}, h_y = 1/L\} /$$

Предполагая, что

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^* > 0; \mathbf{A} = \mathbf{A}^* > 0; \gamma_1 \mathbf{B} \leq \mathbf{A} \leq \gamma_2 \mathbf{B}; 0 < \gamma_1,$$

будем искать решение задачи (12.4.1), используя двухслойную итерационную схему

$$\mathbf{B} \frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\tau_{n+1}} + \mathbf{A} \vec{u}^n = \vec{f}. \quad (12.4.2)$$

При этих предположениях набор оптимальных итерационных параметров τ_{n+1} из (12.4.2) полностью соответствует чебышёвскому набору временных шагов для метода установления, приведенных в разделе 12.3.

Применим пятиточечную аппроксимацию для лапласиана из (12.4.1):

$$\mathbf{A} \vec{u}^n = \frac{-u_{k+1,l}^n + 2u_{k,l}^n - u_{k-1,l}^n}{h_x^2} + \frac{-u_{k,l+1}^n + 2u_{k,l}^n - u_{k,l-1}^n}{h_y^2},$$

$$k = \overline{1, K-1}, l = \overline{1, L-1}, \mathbf{A}(K, L) - \text{матрица,}$$

$$\vec{u}^n = (u_{0,0}^n, u_{0,1}^n, \dots, u_{0,L}^n, u_{1,0}^n, u_{1,1}^n, \dots, u_{1,L}^n, \dots, u_{K-1,L}^n, u_{K,0}^n, u_{K,1}^n, \dots, u_{K,L}^n)^T.$$

Исключим уравнения, в которых значения искомой сеточной функции известны из граничных условий, и представим матрицу \mathbf{A} в виде суммы двух матриц $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$, где

$$\mathbf{A}_1 = \begin{cases} a_{ij}, i > j \\ 0, i < j \\ a_{ii}/2, i = j \end{cases}; \quad \mathbf{A}_2 = \begin{cases} 0, i > j \\ a_{ij}, i < j \\ a_{ii}/2, i = j \end{cases} \quad (12.4.3)$$

Определим $\mathbf{A}_1 \vec{u}^n, \mathbf{A}_2 \vec{u}^n$ из (12.4.3):

$$\mathbf{A}_1 \vec{u}^n = \frac{u_{k,l}^n - u_{k-1,l}^n}{h_x^2} + \frac{u_{k,l}^n - u_{k,l-1}^n}{h_y^2} = \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) u_{k,l}^n - \frac{u_{k-1,l}^n}{h_x^2} - \frac{u_{k,l-1}^n}{h_y^2};$$

$$k = \overline{1, K-1}, l = \overline{1, L-1},$$

$$\mathbf{A}_2 \vec{u}^n = \frac{u_{k,l}^n - u_{k+1,l}^n}{h_x^2} + \frac{u_{k,l}^n - u_{k,l+1}^n}{h_y^2} = \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) u_{k,l}^n - \frac{u_{k+1,l}^n}{h_x^2} - \frac{u_{k,l+1}^n}{h_y^2};$$

$$k = \overline{1, K-1}, l = \overline{1, L-1}.$$

Можно показать, что так определённые операторы $\mathbf{A}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ удовлетворяют соотношениям

$$(\mathbf{A}_1 \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \mathbf{A}_2 \vec{v}); (\mathbf{A} \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \mathbf{A} \vec{v}); (\mathbf{A} \vec{u}, \vec{u}) > 0$$

и, следовательно,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^* > 0, \mathbf{A}_1^* = \mathbf{A}_2; \mathbf{A}_1 > 0; \mathbf{A}_2 > 0.$$

Определим оператор \mathbf{B} как

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2; \mathbf{B}_1 = \mathbf{E} + \omega \mathbf{A}_1; \mathbf{B}_2 = \mathbf{E} + \omega \mathbf{A}_2; \omega > 0;$$

\mathbf{E} — единичный оператор, ω — параметр.

Тогда $\mathbf{B} = \mathbf{B}^* > 0$. Подставим полученные выражения в (12.4.2) и решим относительно $B \vec{u}^{n+1}$:

$$\mathbf{B} \vec{u}^{n+1} = \mathbf{B} \vec{u}^n - \tau_{n+1} \mathbf{A} \vec{u}^n + \tau_{n+1} \vec{f}.$$

Введём обозначение

$$\vec{F}^n = \mathbf{B} \vec{u}^n - \tau_{n+1} \mathbf{A} \vec{u}^n + \tau_{n+1} \vec{f}, n = \overline{0, N-1}$$

и заменим $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 = (\mathbf{E} + \omega \mathbf{A}_1)(\mathbf{E} + \omega \mathbf{A}_2)$ в выражении, определяющем $\mathbf{B} \vec{u}^{n+1}$:

$$(\mathbf{E} + \omega \mathbf{A}_1)(\mathbf{E} + \omega \mathbf{A}_2) \vec{u}^{n+1} = \vec{F}^n. \quad (12.4.4)$$

Разбив решение задачи (12.4.4) при переходе с n слоя на $n+1$ на два этапа:

$$1) (\mathbf{E} + \omega \mathbf{A}_1) \tilde{u} = \vec{F}^n, \quad (12.4.5)$$

$$2) (\mathbf{E} + \omega \mathbf{A}_1) \vec{u}^{n+1} = \tilde{u}, \quad (12.4.6)$$

получаем для них расчётные формулы:

$$1) \tilde{u}_{k,l} = \frac{\vec{F}_{k,l}^n + \omega \left(\frac{\tilde{u}_{k-1,l}}{h_x^2} + \frac{\tilde{u}_{k,l-1}}{h_y^2} \right)}{1 + \frac{\omega}{h_x^2} + \frac{\omega}{h_y^2}}; k = \overline{1, K-1}; l = \overline{1, L-1}, \quad (12.4.7)$$

$$2) u_{k,l}^{n+1} = \frac{\tilde{u}_{k,l} + \omega \left(\frac{u_{k+1,l}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{u_{k,l+1}^{n+1}}{h_y^2} \right)}{1 + \frac{\omega}{h_x^2} + \frac{\omega}{h_y^2}}; k = \overline{K-1}; l = \overline{L-1}. \quad (12.4.8)$$

Отметим, что при вычислении $\tilde{u}_{k,l}$ из (12.4.7) значения $\tilde{u}_{k-1,l}$, $\tilde{u}_{k,l-1}$ уже известны либо из граничных условий, либо уже вычислены ранее. Аналогично, при нахождении $u_{k,l}^{n+1}$ из (12.4.8) значения $u_{k+1,l}^{n+1}$, $u_{k,l+1}^{n+1}$ тоже уже известны.

Параметр ω определяется выражением

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{\min_{p,q} \mu_{p,q} \cdot \max_{p,q} \mu_{p,q}}};$$

$$\min_{p,q} \mu_{p,q} = 4 \left(\frac{\sin^2 \frac{\pi}{2K}}{h_x^2} + \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2L}}{h_y^2} \right);$$

$$\max_{p,q} \mu_{p,q} = 4 \left(\frac{\cos^2 \frac{\pi}{2K}}{h_x^2} + \frac{\cos^2 \frac{\pi}{2L}}{h_y^2} \right); p = \overline{1, K-1}; q = \overline{1, L-1}.$$

Пусть ε показывает, во сколько раз необходимо уменьшить первоначальную погрешность. И пусть $K=L=M$.

Тогда справедлива следующая оценка для числа итераций, за которое заданная точность достигается: $N \geq 0,28\sqrt{M} \ln \frac{2}{\varepsilon}$.

Упражнения

Пример 1

На сетке

$$D_h = \{(x_k, y_l): x_k = kh_x, k = \overline{0, K}, h_x K = 3; y_l = lh_y, l = \overline{0, L}, h_y L = 3, K, L = 3\}$$

решить уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}[x(3-x) + y(3-y)], 0 \leq x, y \leq 3, u_G = 0$$

попеременно-треугольным методом с начальным приближением $u^{(0)}(x, y) = 0$.

Произвести три итерации. На каждой итерации вычислять невязку получаемого численного решения.

Решение

Для решаемой задачи расчётные выражения (12.4.7), (12.4.8) принимают вид

$$\tilde{u}_{k,l} = \frac{F_{k,l}^n + \omega(\tilde{u}_{k-1,l} + \tilde{u}_{k,l-1})}{1 + 2\omega}, k, l = 1, 2;$$

$$u_{k,l}^{n+1} = \frac{\tilde{u}_{k,l} + \omega(u_{k+1,l}^{n+1} + u_{k,l+1}^{n+1})}{1 + 2\omega}, k, l = 2, 1, n = 0, 1, 2,$$

$$\begin{aligned}\bar{F}_{k,l}^n &= \left((1+2\omega)^2 + 2\omega^2 \right) u_{k,l}^n - \\ &- \omega(1+2\omega) \left(u_{k,l-1}^n + u_{k-1,l}^n + u_{k,l+1}^n + u_{k+1,l}^n \right) + \omega^2 \left(u_{k+1,l-1}^n + u_{k-1,l+1}^n \right) + \\ &+ \tau_{n+1} \left(u_{k,l-1}^n + u_{k-1,l}^n - 4u_{k,l}^n + u_{k,l+1}^n + u_{k+1,l}^n + f_{k,l}^n \right),\end{aligned}$$

$$\omega = \frac{1}{4 \sin \frac{p}{6} \sin \frac{p}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\tau_1 = \frac{1}{4 + \sqrt{3}}, \quad \tau_2 = \frac{1}{4 - \sqrt{3}}, \quad \tau_3 = \frac{1}{4}.$$

Первая итерация:

$$F_{k,l}^0 = \begin{pmatrix} 0.179 & 0.179 \\ 0.179 & 0.179 \end{pmatrix}, \quad \tilde{u}_{k,l} = \begin{pmatrix} 0.105 & 0.139 \\ 0.083 & 0.105 \end{pmatrix}, \quad u_{k,l}^1 = \begin{pmatrix} 0.066 & 0.064 \\ 0.074 & 0.066 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Невязка } \delta_{k,l}^1 = \Delta u_{k,l}^1 + f_{k,l} = \begin{pmatrix} 0.874 & 0.876 \\ 0.837 & 0.874 \end{pmatrix}.$$

Вторая итерация:

$$F_{k,l}^1 = \begin{pmatrix} 0.585 & 0.562 \\ 0.596 & 0.585 \end{pmatrix}, \quad \tilde{u}_{k,l} = \begin{pmatrix} 0.345 & 0.446 \\ 0.276 & 0.345 \end{pmatrix}, \quad u_{k,l}^2 = \begin{pmatrix} 0.215 & 0.206 \\ 0.243 & 0.315 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Невязка } \delta_{k,l}^2 = \Delta u_{k,l}^2 + f_{k,l} = \begin{pmatrix} 0.589 & 0.606 \\ 0.458 & 0.589 \end{pmatrix}.$$

Третья итерация:

$$F_{k,l}^2 = \begin{pmatrix} 0.802 & 0.710 \\ 0.870 & 0.802 \end{pmatrix}, \quad \tilde{u}_{k,l} = \begin{pmatrix} 0.480 & 0.487 \\ 0.404 & 0.480 \end{pmatrix}, \quad u_{k,l}^3 = \begin{pmatrix} 0.296 & 0.272 \\ 0.346 & 0.296 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Невязка } \delta_{k,l}^3 = \Delta u_{k,l}^3 + f_{k,l} = \begin{pmatrix} 0.434 & 0.510 \\ 0.215 & 0.434 \end{pmatrix}.$$

Задачи

12.4.1. На сетке

$$D_h = \left\{ (x_k, y_l) : x_k = kh_x, k = \overline{0, K}, h_x K = 3; y_l = lh_y, l = \overline{0, L}, h_y L = 3, K, L = 3 \right\}$$

решить уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \left(\frac{\pi}{3} \right)^2 \sin \left(\frac{\pi x}{3} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{3} \right), \quad 0 \leq x, y \leq 3, \quad u|_G = 0$$

попеременно-треугольным методом с начальным приближением $u^0(x, y) = 0$.

Произвести четыре итерации. На каждой итерации вычислять невязку получаемого численного решения.

Попеременно-треугольная последовательность проведения итераций:

а) все четыре итерации одинаково $k, l: (1, 1 \Rightarrow 2, 2), (2, 2 \Rightarrow 1, 1)$,

б) каждый раз меняя направление:

первая итерация $k, l: (1, 1 \Rightarrow 2, 2), (2, 2 \Rightarrow 1, 1)$,

вторая итерация $k, l: (2, 2 \Rightarrow 1, 1), (1, 1 \Rightarrow 2, 2)$,

третья итерация $k, l: (2, 1 \Rightarrow 1, 2), (1, 2 \Rightarrow 2, 1)$,

четвёртая итерация $k, l: (1, 2 \Rightarrow 2, 1), (2, 1 \Rightarrow 1, 2)$,

12.4.2. На сетке

$$D_h = \{(x_k, y_l): x_k = kh_x, k = \overline{0, K}, h_x K = 3; y_l = lh_y, l = \overline{0, L}, h_y L = 3, K, L = 3\}$$

решить уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6[x^2(x-3)(y-1) + y^2(y-3)(x-1)], 0 \leq x, y \leq 3, u|_G = 0$$

попеременно-треугольным методом с начальным приближением $u^0(x, y) = 0$.

Произвести четыре итерации. На каждой итерации вычислять невязку получаемого численного решения.

Попеременно-треугольная последовательность проведения итераций:

а) все четыре итерации одинаково $k, l: (1, 1 \Rightarrow 2, 2), (2, 2 \Rightarrow 1, 1)$,

б) каждый раз меняя направление:

первая итерация $k, l: (1, 1 \Rightarrow 2, 2), (2, 2 \Rightarrow 1, 1)$,

вторая итерация $k, l: (2, 2 \Rightarrow 1, 1), (1, 1 \Rightarrow 2, 2)$,

третья итерация $k, l: (2, 1 \Rightarrow 1, 2), (1, 2 \Rightarrow 2, 1)$,

четвёртая итерация $k, l: (1, 2 \Rightarrow 2, 1), (2, 1 \Rightarrow 1, 2)$.

12.5. Метод конечных элементов

Этот подход к решению эллиптических уравнений основан на использовании системы линейно независимых базисных функций.

Снова в качестве примера выберем задачу Дирихле с нулевыми граничными условиями для уравнения Пуассона в единичном квадрате двумерной прямоугольной области:

$$-\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y); u|_G = 0; D = \{0 < x, y < 1\}$$

или в операторной форме:

$$Lu = \begin{cases} -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right); & f = \begin{cases} f(x,y) \\ 0 \end{cases}; & Lu = f. \\ u|_G \end{cases} \quad (12.5.1)$$

Введём скалярное произведение $(u, v) = \iint_D u v dx dy$.

Теорема 12.5.1 (формула Грина). Пусть D — плоская область, и её граница G является кусочно-гладким контуром, и пусть в замкнутой области \bar{D} заданы функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, непрерывные на \bar{D} вместе со своими частными производными $\partial P / \partial y$ и $\partial Q / \partial x$. Тогда справедлива

$$\text{формула } \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{G^+} P dx + \oint_{G^+} Q dy.$$

Если воспользоваться теоремой, то можно показать, что оператор L из (12.5.1):

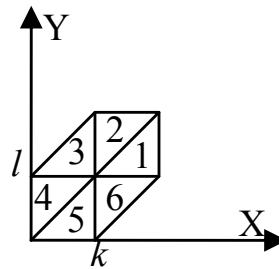
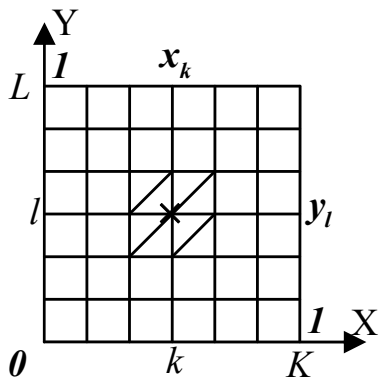
во-первых, самосопряжённый $(Lu, v) = (u, Lv)$;

во-вторых, положительно определенный $(Lu, u) \geq 0$; $(Lu, u) = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0$.

Введём в области интегрирования сетку

$$D_h = \{(x_k, y_l) : x_k = kh_x, k = \overline{0, K}, h_x = 1/K; y_l = lh_y, l = \overline{0, L}, h_y = 1/L\}$$

и выполним триангуляцию области.



Зададим на сетке систему линейно независимых базисных функций $\varphi_{k,l}$, определённых для каждого внутреннего узла сетки (k, l) , $k = \overline{1, K-1}, l = \overline{1, L-1}$:

$$\varphi_{k,l} = \frac{1}{\sqrt{h_x h_y}} \begin{cases} 1) 1 - \left(\frac{x}{h_x} - k \right) \text{ при } x_k \leq x \leq x_{k+1}, y_l \leq y \leq y_l + \frac{h_y}{h_x} (x - x_k); \\ 2) 1 - \left(\frac{y}{h_y} - l \right) \text{ при } x_k \leq x \leq x_{k+1}, y_l + \frac{h_y}{h_x} (x - x_k) \leq y \leq y_{l+1}; \\ 3) 1 + \left(\frac{x}{h_x} - k \right) - \left(\frac{y}{h_y} - l \right) \text{ при } x_{k-1} \leq x \leq x_k, y_l \leq y \leq y_l + \frac{h_y}{h_x} (x - x_{k-1}); \\ 4) 1 + \left(\frac{x}{h_x} - k \right) \text{ при } x_{k-1} \leq x \leq x_k, y_{l-1} + \frac{h_y}{h_x} (x - x_{k-1}) \leq y \leq y_l; \\ 5) 1 + \left(\frac{y}{h_y} - l \right) \text{ при } x_{k-1} \leq x \leq x_k, y_{l-1} \leq y \leq y_{l-1} + \frac{h_y}{h_x} (x - x_{k-1}); \\ 6) 1 - \left(\frac{x}{h_x} - k \right) + \left(\frac{y}{h_y} - l \right) \text{ при } x_k \leq x \leq x_{k+1}, y_{l+1} + \frac{h_y}{h_x} (x - x_k) \leq y \leq y_l. \end{cases}$$

Рассмотрим множество функций, представленных в виде линейной комбинации базисных функций:

$$u^{(h)} = \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{l=1}^{L-1} C_{k,l} \varphi_{k,l},$$

и воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 12.5.2. Пусть L – самосопряжённый, положительно определённый оператор, заданный на множестве $K = \{u(x, y) : u(x, y) \in C^{(2)}(D), u(x, y) = 0 \text{ на } G\}$, а $F(u)$ – функционал вида $F(u) = (Lu, u) - 2(f, u)$, где $f = Lu$. Если краевая задача $Lu = f$ с однородными граничными условиями имеет решение \bar{u} , то это решение даёт минимум функционалу $F(u)$. Обратно, если в K существует функция \bar{u} , дающая минимум функционалу $F(u)$, то эта функция является решением уравнения $Lu = f$. Следовательно, решение задачи (12.5.1) можно заменить поиском минимума функционала $F(u)$. Такой подход называется методом Ритца.

Метод Ритца. Подставим $u^{(h)}$ в функционал

$$\begin{aligned}
F(u^{(h)}) &= (Lu^{(h)}, u^{(h)}) - 2(f, u^{(h)}) = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u^{(h)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(h)}}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \\
&- 2 \iint_D f u^{(h)} dx dy = \iint_D \left[\left(\frac{\partial \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=1}^{L-1} C_{i,j} \varphi_{i,j}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=1}^{L-1} C_{i,j} \varphi_{i,j}}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \\
&- 2 \iint_D \left(f \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=1}^{L-1} C_{i,j} \varphi_{i,j} \right) dx dy
\end{aligned}$$

и потребуем, чтобы выполнялись условия

$$\frac{\partial F(u^{(h)})}{\partial C_{k,l}} = 0, k = \overline{1, K-1}; l = \overline{1, L-1}.$$

Тогда учитывая, что

$$\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{h_x h_y}} \begin{cases} 1) \frac{-1}{h_x}, \\ 2) 0, \\ 3) \frac{1}{h_x}, \\ 4) \frac{1}{h_x}, \\ 5) 0, \\ 6) \frac{1}{h_x}, \end{cases} \quad \left(\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_{k,l}}{\partial x} \right) = \frac{1}{h_x h_y} \begin{cases} \frac{-2}{h_x^2}, k = i+1, l = j, \\ 0, k = i+1, l = j+1, \\ 0, k = i, l = j+1, \\ \frac{-2}{h_x^2}, k = i-1, l = j, \\ 0, k = i-1, l = j-1, \\ 0, k = i, l = j-1, \\ \frac{4}{h_x^2}, k = i, l = j, \end{cases}$$

$$\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{h_x h_y}} \begin{cases} 1) 0, \\ 2) \frac{-1}{h_y}, \\ 3) \frac{-1}{h_y}, \\ 4) 0, \\ 5) \frac{1}{h_y}, \\ 6) \frac{1}{h_y}, \end{cases} \quad \left(\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_{k,l}}{\partial y} \right) = \frac{1}{h_x h_y} \begin{cases} 0, k = i+1, l = j, \\ 0, k = i+1, l = j+1, \\ \frac{-2}{h_y^2}, k = i, l = j+1, \\ 0, k = i-1, l = j, \\ 0, k = i-1, l = j-1, \\ \frac{-2}{h_y^2}, k = i, l = j-1, \\ \frac{4}{h_y^2}, k = i, l = j, \end{cases}$$

приходим к системе линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $C_{k,l}$:

$$\frac{-C_{k+1,l} + 2C_{k,l} - C_{k-1,l}}{h_x^2} + \frac{-C_{k,l+1} + 2C_{k,l} - C_{k,l-1}}{h_y^2} = \frac{1}{6} \iint_D f \varphi_{k,l} dx dy, k = \overline{1, K-1},$$

$$l = \overline{1, L-1}, C_{0,l} = C_{K,l} = C_{k,0} = C_{k,L} = 0, k = \overline{0, K}, l = \overline{0, L}.$$

Решив эту систему уравнений, получаем $u^{(h)}$ и, следовательно, находим решение задачи (12.5.1).

Ответы к задачам раздела 12

12.1.1 а). При n – чётном эллиптическое. При n – нечётном и $y > 0$ – эллиптическое, а при $y < 0$ – гиперболическое.

б). При n – чётном эллиптическое. При n – нечётном и $x > 0$ – эллиптическое, а при $x < 0$ – гиперболическое.

в). При n – чётном эллиптическое. При n – нечётном эллиптическое в первом и третьем квадрантах и гиперболическое во втором и четвёртом.

12.1.2. Для гармонических функций $\int_G \frac{\partial u}{\partial n} dG = 0$

12.1.3. В соответствии с принципом максимума а) $u(x, y) = 5$,

б) $0 \leq u(x, y) \leq 3$, в) $u(x, y)$ на границе разрывна, поэтому принцип максимума не применим.

12.1.4. $-3/4 < u_{k,l} < 3/4, k = \overline{0, K}, l = \overline{0, L}$.

12.1.5. $-5/4 < u_{k,l} < 3/4, k = \overline{0, K}, l = \overline{0, L}$.

12.1.6. Все корректны.

12.1.7. а), б) Корректны, поскольку $\iint_D \cos \pi x \cos \pi y dx dy = \int_G \frac{\partial u}{\partial n} dG = 0$,

в) Не корректны, поскольку $\iint_D \cos \pi x \cos \pi y dx dy = 0$, но $\int_G \frac{\partial u}{\partial n} dG \neq 0$

12.1.8. а) Не корректна, поскольку, хотя граничные условия корректны, но решение однозначно не определено. б), в), г) Корректны, поскольку даны условия, определяющие однозначность решения.

12.1.9. а), б) не корректны, поскольку

$$\iint_D \sin \frac{\pi x}{4} \sin \frac{\pi y}{4} dx dy = \frac{128}{\pi^2} \neq \int_G \psi(x, y) dG ;$$

в), г), д) корректны, поскольку $\iint_D \sin \frac{\pi x}{4} \sin \frac{\pi y}{4} dx dy = \frac{128}{\pi^2} = \int_G \psi(x, y) dG ;$

12.1.10. а), б) не корректны, поскольку

$$h_x h_y \sum_{l=0}^4 \sum_{k=0}^4 \sin \frac{k h_x \pi}{4} \sin \frac{l h_y \pi}{4} = 3 + 2\sqrt{2} \neq$$

$$h_x \sum_{k=1}^3 \left(\frac{u_{k,0} - u_{k,1}}{h_y} + \frac{u_{k,L} - u_{k,L-1}}{h_y} \right) + h_y \sum_{l=1}^3 \left(\frac{u_{,0,l} - u_{,1,l}}{h_x} + \frac{u_{,K,l} - u_{,K-1,l}}{h_x} \right) ;$$

в), г), д) корректны, поскольку

$$h_x h_y \sum_{l=0}^4 \sum_{k=0}^4 \sin \frac{k h_x \pi}{4} \sin \frac{l h_y \pi}{4} = 3 + 2\sqrt{2} =$$

$$h_x \sum_{k=1}^3 \left(\frac{u_{k,0} - u_{k,1}}{h_y} + \frac{u_{k,L} - u_{k,L-1}}{h_y} \right) + h_y \sum_{l=1}^3 \left(\frac{u_{,0,l} - u_{,1,l}}{h_x} + \frac{u_{,K,l} - u_{,K-1,l}}{h_x} \right) ;$$

12.2.5.

$$\lambda^{(p,q)} = \frac{4}{h_x^3} \sin^2 \frac{(p-1)\pi}{2(K-1)} + \frac{4}{h_x^3} \sin^2 \frac{q\pi}{2L},$$

$$\psi_{k,l}^{(p,q)} = C \cos \frac{(p-1)k\pi}{(K-1)} \sin \frac{ql\pi}{L}, \quad p = \overline{1, (K-1)}, \quad q = \overline{1, (L-1)}, \quad k = \overline{0, K}, \quad l = \overline{1, L}.$$

12.2.6.

$$\lambda^{(p,q)} = \frac{4}{h_x^3} \sin^2 \frac{(p-1)\pi}{(K-1)} + \frac{4}{h_x^3} \sin^2 \frac{q\pi}{2L},$$

$$\psi_{k,l}^{(p,q)} = C \cos \frac{(p-1)k\pi}{(K-1)} \sin \frac{ql\pi}{L}, \quad p = \overline{1, (K-1)}, \quad q = \overline{1, (L-1)}, \quad k = \overline{0, K}, \quad l = \overline{1, L}.$$

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{(k-1)\pi}{(N-1)}, \quad y_{kn} = C_1 \cos \frac{2(k-1)n\pi}{(N-1)} + C_2 \sin \frac{2(k-1)n\pi}{(N-1)},$$

$$k = \overline{1, (N-1)}, \quad n = \overline{0, N}.$$

12.2.7.

$$\lambda^{(p,q)} = \frac{4}{h_x^3} \sin^2 \frac{(p-1)\pi}{(K-1)} + \frac{4}{h_x^3} \sin^2 \frac{(q-1)\pi}{2L},$$

$$\psi_{k,l}^{(p,q)} = C \cos \frac{(p-1)k\pi}{(K-1)} \sin \frac{ql\pi}{L}, \quad p = \overline{1, (K-1)}, \quad q = \overline{1, (L-1)}, \quad k = \overline{0, K}, \quad l = \overline{1, L}.$$

12.2.8.

$$\lambda^{(p,q)} = \frac{4}{h_x^3} \sin^2 \frac{(p-1)\pi}{(K-1)} + \frac{4}{h_x^3} \sin^2 \frac{(q-1)\pi}{(L-1)},$$

$$\psi_{k,l}^{(p,q)} = C \cos \frac{(p-1)k\pi}{(K-1)} \sin \frac{ql\pi}{L}, \quad p = \overline{1, (K-1)}, \quad q = \overline{1, (L-1)}, \quad k = \overline{0, K}, \quad l = \overline{1, L}.$$

$$12.3.1. \quad \|\delta \mathbf{f}^{(h)}\|_{F_h} \leq O(h_x^2 + h_y^2).$$

$$12.3.2. \quad \|\delta \mathbf{f}^{(h)}\|_{F_h} \leq O(h_x + h_y).$$

$$12.3.3. \quad \|\delta \mathbf{f}^{(h)}\|_{F_h} \leq O(h_x^3 + h_y^2).$$

$$12.3.4. \quad \|\delta \mathbf{f}^{(h)}\|_{F_h} \leq O(h_x^2 + h_y^2).$$

$$12.3.5. \quad \|\delta \mathbf{f}^{(h)}\|_{F_h} \leq O(h_x + h_y^2).$$

$$12.3.6. \quad \|\delta \mathbf{f}^{(h)}\|_{F_h} \leq O(h_x^2 + h_y).$$

$$12.3.7. \quad \|\delta \mathbf{f}^{(h)}\|_{F_h} \leq O(h_x + h_y).$$

12.3.8. а) $\|\delta \mathbf{f}^{(h)}\|_{F_h} \leq O(h)$, б) $\|\delta \mathbf{f}^{(h)}\|_{F_h} \leq O(h^2)$, в) $\|\delta \mathbf{f}^{(h)}\|_{F_h} = O(1)$, аппроксимация отсутствует

12.3.10.

$$а) \quad \tau_n = \frac{2}{(\lambda_{\max}^{pq} + \lambda_{\min}^{pq}) + (\lambda_{\max}^{pq} - \lambda_{\min}^{pq}) \cos \frac{(2n-1)\pi}{16}}, \quad n = \overline{1, 8},$$

$$\lambda_{\max}^{pq} = \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{(K-1)\pi}{2K} + \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{(L-1)\pi}{2L}, \quad \lambda_{\min}^{pq} = \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{\pi}{2K} + \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{\pi}{2L}.$$

$$n = 1, 8, 4, 5, 2, 7, 3, 6. \tau_n = \{\tau_1, \tau_8, \tau_4, \tau_5, \tau_2, \tau_7, \tau_3, \tau_6\}.$$

$$\text{б) } \tau_n = \frac{2}{(\lambda_{\max}^{pq} + \lambda_{\min}^{pq}) + (\lambda_{\max}^{pq} - \lambda_{\min}^{pq}) \cos \frac{(2n-1)\pi}{18}}, n = \overline{1, 9},$$

$$\lambda_{\max}^{pq} = \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{(K-1)\pi}{2K} + \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{(L-1)\pi}{2L}, \lambda_{\min}^{pq} = \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{\pi}{2K} + \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{\pi}{2L}.$$

$$2n-1 = 1, 15, 7, 9, 3, 13, 5, 11, 17. \tau_n = \{\tau_1, \tau_8, \tau_4, \tau_5, \tau_2, \tau_7, \tau_3, \tau_6, \tau_9\}.$$

$$\text{в) } \tau_n = \frac{2}{(\lambda_{\max}^{pq} + \lambda_{\min}^{pq}) + (\lambda_{\max}^{pq} - \lambda_{\min}^{pq}) \cos \frac{(2n-1)\pi}{32}}, n = \overline{1, 16},$$

$$\lambda_{\max}^{pq} = \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{(K-1)\pi}{2K} + \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{(L-1)\pi}{2L}, \lambda_{\min}^{pq} = \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{\pi}{2K} + \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{\pi}{2L}.$$

$$n = 1, 16, 8, 9, 4, 13, 5, 12, 2, 5, 7, 10, 3, 14, 6, 11.$$

$$\tau_n = \{\tau_1, \tau_{16}, \tau_8, \tau_9, \tau_4, \tau_{13}, \tau_5, \tau_{12}, \tau_2, \tau_5, \tau_7, \tau_{10}, \tau_3, \tau_{14}, \tau_6, \tau_{11}\}.$$

$$\text{г) } \tau_n = \frac{2}{(\lambda_{\max}^{pq} + \lambda_{\min}^{pq}) + (\lambda_{\max}^{pq} - \lambda_{\min}^{pq}) \cos \frac{(2n-1)\pi}{38}}, n = \overline{1, 19},$$

$$\lambda_{\max}^{pq} = \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{(K-1)\pi}{2K} + \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{(L-1)\pi}{2L}, \lambda_{\min}^{pq} = \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{\pi}{2K} + \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{\pi}{2L}.$$

$$2n-1 = 1, 37, 15, 23, 7, 31, 9, 29, 3, 25, 5, 33, 11, 27, 17, 21, 19.$$

$$\tau_n = \{\tau_1, \tau_{19}, \tau_8, \tau_{12}, \tau_4, \tau_{16}, \tau_5, \tau_{15}, \tau_2, \tau_{13}, \tau_3, \tau_{17}, \tau_6, \tau_{14}, \tau_9, \tau_{11}, \tau_{10}\}.$$

$$\text{3) } \tau_n = \frac{2}{(\lambda_{\max}^{pq} + \lambda_{\min}^{pq}) + (\lambda_{\max}^{pq} - \lambda_{\min}^{pq}) \cos \frac{(2n-1)\pi}{64}}, n = \overline{1, 32},$$

$$\lambda_{\max}^{pq} = \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{(K-1)\pi}{2K} + \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{(L-1)\pi}{2L}, \lambda_{\min}^{pq} = \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{\pi}{2K} + \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{\pi}{2L}.$$

$$n = 1, 32, 16, 17, 8, 25, 9, 24, 4, 29, 13, 20, 5, 28, 12, 21,$$

$$2, 31, 15, 18, 7, 26, 10, 23, 3, 30, 14, 19, 6, 27, 11, 22.$$

$$\tau_n = \{\tau_1, \tau_{32}, \tau_{16}, \tau_{17}, \tau_8, \tau_{25}, \tau_9, \tau_{24}, \tau_4, \tau_{29}, \tau_{13}, \tau_{20}, \tau_5, \tau_{28}, \tau_{12}, \tau_{21}$$

$$\tau_2, \tau_{31}, \tau_{15}, \tau_{18}, \tau_7, \tau_{26}, \tau_{10}, \tau_{23}, \tau_3, \tau_{30}, \tau_{14}, \tau_{19}, \tau_6, \tau_{27}, \tau_{11}, \tau_{22}\}.$$

$$\text{и) } \tau_n = \frac{2}{(\lambda_{\max}^{pq} + \lambda_{\min}^{pq}) + (\lambda_{\max}^{pq} - \lambda_{\min}^{pq}) \cos \frac{(2n-1)\pi}{82}}, \quad n = \overline{1, 41},$$

$$\lambda_{\max}^{pq} = \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{(K-1)\pi}{2K} + \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{(L-1)\pi}{2L}, \quad \lambda_{\min}^{pq} = \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{\pi}{2K} + \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{\pi}{2L}.$$

$2n-1 = 1, 79, 39, 41, 19, 61, 21, 59, 7, 73, 33, 47, 13, 67, 27, 53, 3, 77, 37, 43, 17, 63, 23, 57, 5, 75, 35, 45, 15, 55, 25, 45, 9, 71, 31, 49, 11, 69, 29, 51, 81.$

Литература к разделу 12

1. Косарев В.И. 12 лекций по вычислительной математике. – 3-е изд. – М. : Физматкнига, 2013. – 240 с.
2. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике. – М. : Интернет-Университет Информационных Технологий, 2006. – 523 с.
3. Рябенский В.С. Введение в вычислительную математику. – 3-е изд. – М. : Физматлит, 2008. – 288 с. (Физтехковский учебник).
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – 7-е изд. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 636 с.
5. Калиткин Н.Н. Численные методы: учебное пособие. – 2-е изд. – СПб. : БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
6. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. – М. : Наука, 1973. – 400 с.
7. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М. : Наука, 1978. – 591 с.
8. Барабанщиков А.В., Гамилов Т. М., Демченко В.В., Пастушков Р.С., Симанков С.С. Упражнения и задачи контрольных работ по вычислительной математике. Часть I. – М. : МФТИ, 2013. – 143 с.

13. ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Линейным уравнениям с частными производными параболического типа с двумя независимыми переменными называется уравнение

$$\mathbf{A} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + 2\mathbf{B} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t \partial x} + \mathbf{C} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} + \mathbf{E} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{J} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \mathbf{I} \vec{u} = \vec{F}, \quad \text{где } \vec{u} = \vec{u}(t, x), \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E}, \mathbf{J},$$

\mathbf{I}, \vec{F} — функции, зависящие от t и x , причем выполнено $\mathbf{B}^2 - \mathbf{AC} = \mathbf{0}$.
Функции определены в некоторой области D с границей G .

Наиболее известными уравнениями параболического типа являются уравнения теплопроводности и диффузии. Многочисленные варианты процессов теплопроводности, охватывающие все состояния вещества от твёрдого тела до высокотемпературной плазмы, оказываются физически актуальными и в настоящее время. Вначале остановимся более подробно на пространственно одномерном случае уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом с тем, чтобы обсудить характерные особенности численных методов решения смешанных задач.

13.1. Явные и неявные разностные схемы

Пусть поставлена первая смешанная задача для одномерного уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом в единичном квадрате декартовой системы координат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad a^2 = \text{const}; \\ u(0, x) &= \varphi(x); \quad 0 < t, x < 1; \\ u(t, 0) &= \psi_0(t); \quad u(t, 1) = \psi_1(t). \end{aligned} \right\} \quad (13.1.1)$$

Введём в области интегрирования сетку $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = \overline{0, N}; x_l = lh, hL = 1, l = \overline{0, L}\}$ и, используя явный четырёхточечный шаблон

$$\begin{array}{ccccc} & & \bullet & & n+1 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & \bullet & & n \\ l-1 & & l & & l+1 \end{array},$$

построим разностную схему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_l^{n+1} - u_l^n}{\tau} &= a^2 \frac{u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_{l-1}^n}{h^2}; \quad n = \overline{0, N-1}; l = \overline{1, L-1}; \\ u_l^0 &= \varphi_l, l = \overline{0, L}; u_0^n = (\psi_0)^n, u_L^n = (\psi_1)^n, n = \overline{1, N}. \end{aligned} \right\} \quad (13.1.2)$$

После исследования (13.1.2) на устойчивость спектральным признаком получим, что разностная схема устойчива при выполнении условия $\tau \leq h^2/2a^2$. Это достаточно жесткое ограничение на структуру сетки, т.к. уменьшение шага h в два раза будет приводить к четырёхкратному уменьшению τ или к четырёхкратному увеличению числа временных слоёв N . Измельчение сетки будет сопровождаться быстрым ростом затрат реального времени на один расчёт, что необходимо для обеспечения сходимости численных результатов к следу точного решения дифференциальной задачи.

Рассмотрим неявную разностную схему, построенную по шаблону

$$\begin{array}{ccccccc} & \dots & \bullet & \dots & \bullet & \dots & n+1 \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & \dots & \bullet & \dots & & & n \\ & & l-1 & & l & & l+1 \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_l^{n+1} - u_l^n}{\tau} &= a^2 \frac{u_{l+1}^{n+1} - 2u_l^{n+1} + u_{l-1}^{n+1}}{h^2}; \quad n = \overline{0, N-1}; l = \overline{1, L-1}; \\ u_l^0 &= \varphi_l, l = \overline{0, L}; u_0^n = (\psi_0)^n, u_L^n = (\psi_1)^n, n = \overline{1, N}. \end{aligned} \right\} \quad (13.1.3)$$

Исследование спектральной устойчивости показывает, что схема (13.1.3) безусловно устойчива, что является большим преимуществом по сравнению со схемой (13.1.2). Недостаток (13.1.3) заключается в том, что в отличие от (13.1.2) для нахождения неизвестных значений сеточной функции нужно решать систему линейных уравнений высокого порядка с трёхдиагональной матрицей. Однако существует метод прогонки, с помощью которого можно достаточно эффективно решать такие задачи.

13.2. Многомерные уравнения теплопроводности

Обсудим теперь численные методы интегрирования многомерных уравнений параболического типа с переменными коэффициентами на примере первой смешанной задачи для пространственно двумерного уравнения теплопроводности в единичном кубе декартовой системы координат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[a^2(t, x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[a^2(t, x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right] + f(t, x, y); \\ a^2 - \text{const}; \quad u(0, x, y) &= \varphi(x, y); \quad 0 < t, x, y < 1; \\ u(t, 0, y) &= \psi_0(t, y); \quad u(t, 1, y) = \psi_1(t, y); \\ u(t, x, 0) &= \chi_0(t, x); \quad u(t, x, 1) = \chi_1(t, x). \end{aligned} \right\} \quad (13.2.1)$$

Введём в области интегрирования сетку $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = \overline{0, N}; x_l = lh_x, h_x L = 1, l = \overline{0, L}; y_m = mh_y, h_y M = 1, m = \overline{0, M}\}$. Заменим в (13.2.1) вторые пространственные производные конечно-разностными отношениями по трём ближайшим точкам, а производную по времени – по двум. В итоге получим разностную схему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_{l,m}^{n+1/2} - u_{l,m}^n}{\tau} &= \frac{(a_{l+1/2,m}^{n+1/2})^2 (u_{l+1,m}^{n+1/2} - u_{l,m}^{n+1/2}) - (a_{l-1/2,m}^{n+1/2})^2 (u_{l,m}^{n+1/2} - u_{l-1,m}^{n+1/2})}{h_x^2} + \\ &\quad \frac{(a_{l,m+1/2}^n)^2 (u_{l,m+1}^n - u_{l,m}^n) - (a_{l,m-1/2}^n)^2 (u_{l,m}^n - u_{l,m-1}^n)}{2h_y^2}; \quad l = \overline{1, L-1}; m = \overline{1, M-1}; \\ u_{0,m}^n &= (\psi_0)_m^n, u_{0,m}^{n+1/2} = (\psi_0)_m^{n+1/2}, u_{L,m}^n = (\psi_1)_m^n, u_{L,m}^{n+1/2} = (\psi_1)_m^{n+1/2}, n = \overline{1, N}; \\ \frac{u_{l,m}^{n+1} - u_{l,m}^{n+1/2}}{\tau} &= \frac{(a_{l,m+1/2}^{n+1})^2 (u_{l,m+1}^{n+1} - u_{l,m}^{n+1}) - (a_{l,m-1/2}^{n+1})^2 (u_{l,m}^{n+1} - u_{l,m-1}^{n+1})}{2h_y^2} + f_{l,m}^{n+1/2}; \\ u_{l,0}^n &= (\chi_0)_l^n, u_{l,M}^n = (\chi_1)_l^n, n = \overline{1, N}; l = \overline{1, L-1}; m = \overline{1, M-1}; \\ u_{l,m}^0 &= \varphi_{l,m}, l = \overline{1, L}; m = \overline{1, M}. \end{aligned} \right\} \quad (13.2.2)$$

Переход с одного временного слоя на другой осуществляется в два этапа, используя промежуточный полуслой. Разностная задача поставлена корректно, если число неизвестных значений искомой сеточной функции равняется числу линейно независимых уравнений этой системы. В нашем случае число неизвестных равняется числу узлов сетки, учитывая промежуточные полуслои, т.е. $(2N+1)(L+1)(M+1)$. Количество уравнений находится из суммы $2N(L-1)(M-1) + 4N(M+1) + 4N(L-1) + (L+1)(M+1) = (2N+1)(L+1)(M+1)$. Для сходимости решений, полученных по разностной схеме (13.2.2), необходимо, чтобы, во-первых, была аппроксимация на решении u дифференциальной задачи; во-вторых, выполнялось условие устойчивости.

Исследование аппроксимации даёт оценку нормы невязки $\|\delta f^{(h)}\| \leq C_\tau \tau^2 + C_x h_x^2 + C_y h_y^2$. Следовательно, разностная схема (13.2.2) аппроксимирует дифференциальную задачу (13.2.1) на решении u со вторым

Теперь выразим производные по времени через производные по пространству. Для этого используем исходное уравнение $[\dot{u}]_l^n = 81[u'']_l^n$: возьмем производную по пространству $[\dot{u}']_l^n = 81[u''']_l^n$, $[\dot{u}'']_l^n = 81[u^{IV}]_l^n$ и по времени $[\ddot{u}]_l^n = 81[\dot{u}']_l^n$. Получаем $[\dot{u}]_l^n = 81[u'']_l^n$, $[\ddot{u}]_l^n = 81[\dot{u}']_l^n = 81^2[u^{IV}]_l^n$. Запишем выражение для невязки, собрав коэффициенты при производных по пространству

$$\begin{aligned} \delta f_l^n = & [u]_l^n \left(\alpha + \beta + \gamma + \frac{1}{\tau} \right) + [u']_l^n h(\beta - \gamma) + [u'']_l^n \left(\beta \frac{h^2}{2} + \gamma \frac{h^2}{2} + 81 \frac{1}{\tau} \right) + \\ & + [u''']_l^n \frac{h^3}{6} (\beta - \gamma) + [u^{IV}]_l^n \left(\frac{h^4}{24} \beta + \frac{h^4}{24} \gamma + 81^2 \frac{1}{\tau} \frac{\tau^2}{2} \right) + [u^V]_l^n \frac{h^5}{5!} (\beta - \gamma) + \\ & + (\beta + \gamma) O(h^6) + \frac{1}{\tau} O(\tau^3). \end{aligned}$$

Потребуем равенства нулю всех коэффициентов при производных, учтем $\tau = ah^2$:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \frac{1}{\tau} = 0, \\ \beta - \gamma = 0, \\ (\beta + \gamma) \frac{h^2}{2} + 81 = 0, \\ (\beta + \gamma) \frac{h^4}{24} + 81^2 \frac{ah^2}{2} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\beta - \frac{1}{\tau}, \\ \beta = \gamma, \\ \beta h^2 = -81, \\ \beta \frac{h^4}{12} = -81^2 \frac{ah^2}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \frac{81}{h^2} - \frac{1}{\tau}, \\ \beta = \gamma = -\frac{81}{h^2}, \\ a = 81 \cdot \frac{12}{2} = 486. \end{cases}$$

Получаем схему, аппроксимирующую при $\tau = 486h^2$ дифференциальное уравнение в точке (l, n) с порядком $O(h^4)$:

$$\frac{u_l^{n+1} - u_l^n}{\tau} - 81 \frac{u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_{l-1}^n}{h^2} = 0.$$

Отметим, что при получившемся соотношении τ и h схема будет неустойчивой.

Пример 2

Исследовать на спектральную устойчивость разностную схему $u_l^{n+1} = u_l^n + \tau(u_{l+1}^{n+1} - 2u_l^{n+1} + u_{l-1}^{n+1} + u_l^n - 2u_{l+1}^n + u_{l+2}^n) / (2h^2)$, $n = \overline{0, N-1}$, $u_l^0 = \varphi_l$, $l = 0, \pm 1, \dots, \pm \infty$, заданную на сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots, \pm \infty\}$.

Решение

Подставляем в разностную схему $u_l^n \rightarrow \lambda^n e^{i\alpha l}$, находим $\lambda = \frac{\lambda^{n+1}}{\lambda^n}$ и требуем $|\lambda| < 1 \forall \alpha$:

$$\lambda_l^{n+1} e^{i\alpha l} = \lambda_l^n e^{i\alpha l} + \frac{\tau}{2h^2} (\lambda_l^{n+1} e^{i\alpha l} - 2\lambda_l^{n+1} e^{i\alpha(l-1)} + \lambda_l^{n+1} e^{i\alpha(l-2)} + \\ + \lambda_l^n e^{i\alpha l} - 2\lambda_l^n e^{i\alpha(l+1)} + \lambda_l^n e^{i\alpha(l+2)}), \quad \sigma = \frac{\tau}{2h^2} > 0,$$

$$\lambda = 1 + \sigma(\lambda - 2\lambda e^{-i\alpha} + \lambda e^{-2i\alpha} + 1 - 2e^{i\alpha} + e^{2i\alpha}),$$

$$\lambda(1 - \sigma + 2\sigma e^{-i\alpha} - \sigma e^{-2i\alpha}) = 1 + \sigma(1 - 2e^{i\alpha} + e^{2i\alpha}),$$

$$\lambda = \frac{1 + \sigma(1 - 2e^{i\alpha} + e^{2i\alpha})}{1 - \sigma(1 + 2e^{-i\alpha} - e^{-2i\alpha})}.$$

Возьмем $\alpha = \pi$ и учтем $\sigma > 0$:

$$\lambda = \frac{1 + \sigma(1 - 2e^{i\pi} + e^{2i\pi})}{1 - \sigma(1 + 2e^{-i\pi} - e^{-2i\pi})} = \frac{1 + \sigma(1 + 2 + 1)}{1 - \sigma(1 - 2 - 1)} = \frac{1 + 4\sigma}{1 + 2\sigma} = 1 + \frac{2\sigma}{1 + 2\sigma} > 1.$$

Схема неустойчива.

Пример 3

Для решения дифференциальной задачи

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}); 0 \leq t \leq 1; -\infty \leq x, y \leq 1; u(0, x, y) = \varphi(x, y)$$

используется разностная схема. Исследовать на аппроксимацию и спектральную устойчивость разностную схему, заданную на сетке

$$D_h = \{(t^n, x_h, y_m) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh_x,$$

$$h_x = \text{const}, l = 0; \pm 1; \dots; y_m = mh_y, h_y = \text{const}, m = 0; \pm 1; \dots\}.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_{l,m}^{n+1} - u_{l,m}^n}{\tau} = a^2 \left[\frac{3}{4} \frac{u_{l+1,m}^{n+1} - 2u_{l,m}^{n+1} + u_{l-1,m}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{1}{4} \frac{u_{l+1,m}^n - 2u_{l,m}^n + u_{l-1,m}^n}{h_x^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \frac{u_{l,m+1}^{n+1} - 2u_{l,m}^{n+1} + u_{l,m-1}^{n+1}}{h_y^2} + \frac{3}{4} \frac{u_{l,m+1}^n - 2u_{l,m}^n + u_{l,m-1}^n}{h_y^2} \right], \\ n = \overline{0, N-1}; \quad l, m = \overline{0; \pm 1; \dots}; \quad u_{l,m}^0 = \varphi_{l,m}, l, m = \overline{0; \pm 1; \dots}; \quad a = \text{const}; \quad \varphi^{(h)} - \text{задана.} \end{aligned} \right\}$$

Решение

1) Аппроксимация

Вычислим вектор невязки, разложив все значения функции в ряд Тейлора относительно точки (n, l, m) :

$$\delta f_{l,m}^n = \frac{[u]_{l,m}^{n+1} - [u]_{l,m}^n}{\tau} - a^2 \left[\frac{3}{4} \frac{[u]_{l+1,m}^{n+1} - 2[u]_{l,m}^{n+1} + [u]_{l-1,m}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{1}{4} \frac{[u]_{l+1,m}^n - 2[u]_{l,m}^n + [u]_{l-1,m}^n}{h_x^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \frac{[u]_{l,m+1}^{n+1} - 2[u]_{l,m}^{n+1} + [u]_{l,m-1}^{n+1}}{h_y^2} + \frac{3}{4} \frac{[u]_{l,m+1}^n - 2[u]_{l,m}^n + [u]_{l,m-1}^n}{h_y^2} \right].$$

Распишем разложения в ряд Тейлора каждого из слагаемых:

$$\frac{1}{\tau} ([u]_{l,m}^{n+1} - [u]_{l,m}^n) = \frac{1}{\tau} ([u]_{l,m}^n + [u_t]_{l,m}^n \tau + O(\tau^2) - [u]_{l,m}^n) = [u_t]_{l,m}^n + O(\tau);$$

$$\frac{3([u]_{l+1,m}^{n+1} - 2[u]_{l,m}^{n+1} + [u]_{l-1,m}^{n+1})}{4h_x^2} = \frac{3}{4h_x^2} \left([u]_{l,m}^n + [u_x]_{l,m}^n h_x + [u_{xx}]_{l,m}^n \frac{h_x^2}{2} + [u_{xxx}]_{l,m}^n \frac{h_x^3}{6} + \right. \\ \left. + \left([u_t]_{l,m}^n \tau + [u_{tt}]_{l,m}^n \frac{\tau^2}{2} + \dots \right) + [u_{xt}]_{l,m}^n \tau h_x + [u_{xtt}]_{l,m}^n \frac{\tau^2}{2} h_x - 2 \left([u_t]_{l,m}^n \tau + [u_{tt}]_{l,m}^n \frac{\tau^2}{2} + \dots \right) + \right. \\ \left. + [u]_{l,m}^n - [u_x]_{l,m}^n h_x + [u_{xx}]_{l,m}^n \frac{h_x^2}{2} - [u_{xxx}]_{l,m}^n \frac{h_x^3}{6} + \left([u_t]_{l,m}^n \tau + [u_{tt}]_{l,m}^n \frac{\tau^2}{2} + \dots \right) - [u_{xt}]_{l,m}^n \tau h_x - \right. \\ \left. - [u_{xtt}]_{l,m}^n \frac{\tau^2}{2} h_x + O(h_x^4, \tau h_x^2) \right) = \frac{3}{4h_x^2} ([u_{xx}]_{l,m}^n h_x^2 + O(h_x^4, \tau h_x^2)) = \frac{3}{4} [u_{xx}]_{l,m}^n + O(h_x^2, \tau).$$

Аналогично последнему разложению:

$$\frac{1}{4} \frac{[u]_{l+1,m}^n - 2[u]_{l,m}^n + [u]_{l-1,m}^n}{h_x^2} = \frac{1}{4} [u_{xx}]_{l,m}^n + O(h_x^2);$$

$$\frac{1}{4} \frac{[u]_{l,m+1}^{n+1} - 2[u]_{l,m}^{n+1} + [u]_{l,m-1}^{n+1}}{h_y^2} = \frac{1}{4} [u_{yy}]_{l,m}^n + O(h_y^2, \tau);$$

$$\frac{3}{4} \frac{[u]_{l,m+1}^n - 2[u]_{l,m}^n + [u]_{l,m-1}^n}{h_y^2} = \frac{3}{4} [u_{yy}]_{l,m}^n + O(h_y^2).$$

Подставляем разложения в выражение для невязки:

$$\delta f_{l,m}^n = [u_t]_{l,m}^n - a^2 \left(\frac{3}{4} [u_{xx}]_{l,m}^n + \frac{1}{4} [u_{xx}]_{l,m}^n + \frac{1}{4} [u_{yy}]_{l,m}^n + \frac{3}{4} [u_{yy}]_{l,m}^n \right) + O(h_x^2, h_x^2, \tau) = \\ = [u_t]_{l,m}^n - a^2 ([u_{xx}]_{l,m}^n + [u_{yy}]_{l,m}^n) + O(h_x^2, h_x^2, \tau) = O(h_x^2, h_x^2, \tau).$$

Разностная схема имеет первый порядок аппроксимации по времени и второй порядок по пространству.

2) Устойчивость

Подставляем в разностную схему $u_l^n \rightarrow \lambda^n e^{i(\alpha l + \beta m)}$, находим $\lambda = \frac{\lambda^{n+1}}{\lambda^n}$

и требуем $|\lambda| < 1, \forall \alpha$:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^{n+1} e^{i(\alpha l + \beta m)} - \lambda^n e^{i(\alpha l + \beta m)}}{\tau} = a^2 \left[\frac{3}{4} \frac{\lambda^{n+1} e^{i(\alpha(l+1) + \beta m)} - 2\lambda^{n+1} e^{i(\alpha l + \beta m)} + \lambda^{n+1} e^{i(\alpha(l-1) + \beta m)}}{h_x^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \frac{\lambda^n e^{i(\alpha(l+1) + \beta m)} - 2\lambda^n e^{i(\alpha l + \beta m)} + \lambda^n e^{i(\alpha(l-1) + \beta m)}}{h_x^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \frac{\lambda^{n+1} e^{i(\alpha l + \beta(m+1))} - 2\lambda^{n+1} e^{i(\alpha l + \beta m)} + \lambda^{n+1} e^{i(\alpha l + \beta(m-1))}}{h_y^2} + \right. \\ \left. + \frac{3}{4} \frac{\lambda^n e^{i(\alpha l + \beta(m+1))} - 2\lambda^n e^{i(\alpha l + \beta m)} + \lambda^n e^{i(\alpha l + \beta(m-1))}}{h_y^2} \right], \quad \sigma_x = \frac{a^2 \tau}{h_x^2}, \quad \sigma_y = \frac{a^2 \tau}{h_y^2}. \end{aligned}$$

Делим на $\lambda^n e^{i(\alpha l + \beta m)}$:

$$\begin{aligned} \lambda - 1 = \frac{3}{4} \sigma_x (\lambda e^{i\alpha} - 2\lambda + \lambda e^{-i\alpha}) + \frac{1}{4} \sigma_x (e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}) + \\ + \frac{1}{4} \sigma_y (\lambda e^{i\beta} - 2\lambda + \lambda e^{-i\beta}) + \frac{3}{4} \sigma_y (e^{i\beta} - 2 + e^{-i\beta}). \end{aligned}$$

Учитывая $e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha} = 2 \cos \alpha - 2 = -4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, получаем

$$\begin{aligned} \lambda - 1 = 3\lambda \sigma_x \left(-\sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) + \sigma_x \left(-\sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) + \lambda \sigma_y \left(-\sin^2 \frac{\beta}{2}\right) + 3\sigma_y \left(-\sin^2 \frac{\beta}{2}\right), \\ \lambda = \frac{1 - \sigma_x \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 3\sigma_y \sin^2 \frac{\beta}{2}}{1 + 3\sigma_x \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sigma_y \sin^2 \frac{\beta}{2}} \rightarrow -1 < \frac{1 - \sigma_x \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 3\sigma_y \sin^2 \frac{\beta}{2}}{1 + 3\sigma_x \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sigma_y \sin^2 \frac{\beta}{2}} < 1, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 1 - \sigma_x \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 3\sigma_y \sin^2 \frac{\beta}{2} < 1 + 3\sigma_x \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sigma_y \sin^2 \frac{\beta}{2}, \\ 1 - \sigma_x \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 3\sigma_y \sin^2 \frac{\beta}{2} > -1 - 3\sigma_x \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sigma_y \sin^2 \frac{\beta}{2}; \\ 4\sigma_x \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 4\sigma_y \sin^2 \frac{\beta}{2} > 0, \text{ — выполняется } \forall \alpha, \beta \in R, \\ 2 > 2\sigma_y \sin^2 \frac{\beta}{2} - 2\sigma_x \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

$\sigma_y \sin^2 \frac{\beta}{2} - \sigma_x \sin^2 \frac{\alpha}{2} < 1$ — выполняется $\forall \alpha, \beta \in R$, если $\sigma_y < 1$.

Ответ: порядок аппроксимации схемы $O(h_x^2, h_x^2, \tau)$, условие устойчивости схемы $\frac{a^2 \tau}{h_y^2} < 1$.

Задачи

13.1. Для решения уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x$; $a = \text{const}$ во внутренних

точках области используется схема $\frac{u_l^{n+1} - u_l^n}{\tau} = a^2 \frac{u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_{l-1}^n}{h^2} + x_l^n$, где

$\tau = \alpha h^2$. Какой нужно взять параметр α , чтобы порядок аппроксимации был наивысшим?

13.2. Исследовать схему из задачи 13.1 на спектральную устойчивость. Удовлетворяет ли условию устойчивости α , обеспечивающее максимальный порядок аппроксимации?

13.3. На сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, 2\tau = ah^2; \tau N = 1, n = 0 \div 2N; x_l = lh, h = \text{const}, l = 0; \pm 1; \pm 2; \dots \pm L, 1 \ll L\}$, подобрав параметр a , методом неопределённых коэффициентов построить разностную схему, аппроксимирующую с порядком $O(h^4)$ в точке (n, l) задачу Коши для уравнения теплопроводности $\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0; k = \text{const} > 0 \\ u(0, x) &= \psi(x); 0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty \end{aligned} \right\}$, используя шаблон

.....●..... $n+1$
●..... $n+1/2$
●.....●.....●..... n
 $l-1 \quad l \quad l+1$

13.4. На сетке $D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \pm 2; \dots \pm L, 1 \ll L\}$ методом неопределённых коэффициентов построить разностную схему, аппроксимирующую с наивысшим порядком задачу в указанной точке Коши для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x)$, $u(0, x) = \psi(x); 0 \leq t \leq 1; -\infty < x < +\infty$, используя указанный шаблон (в случае невозможности построения схемы объяснить причину):

а) в точке $(n+1/2, l)$ шаблон

$$\begin{array}{ccccccc} & & \dots & \bullet & \dots & \bullet & \dots n+1 \\ & & & & & & \\ \dots & \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet & \dots n \\ & & & & & & \\ & & l-1 & & l & & l+1 \end{array};$$

б) в точке $(n+1/2, l)$ шаблон

$$\begin{array}{ccccccc} & & \dots & \bullet & \dots & \bullet & \dots n+1 \\ & & & & & & \\ \dots & \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet & \dots n \\ & & & & & & \\ & & l-1 & & l & & l+1 \end{array};$$

в) в точке $(n+1/2, l+1)$ шаблон из варианта б);

г) в точке $(n+1/2, l-1)$ шаблон из варианта а);

д) в точке $(n+1, l+1)$ шаблон

$$\begin{array}{ccccccc} & & \dots & \bullet & \dots & \bullet & \dots n+2 \\ & & & & & & \\ \dots & \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet & \dots n+1 \\ & & & & & & \\ \dots & \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet & \dots n \\ & & & & & & \\ & & l-1 & & l & & l+1 \end{array};$$

е) в точке (n, l) , шаблон

$$\begin{array}{ccccccc} & & \dots & \bullet & \dots & \bullet & \dots n+1 \\ & & & & & & \\ \dots & \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet & \dots n \\ & & & & & & \\ \dots & \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet & \dots n-1 \\ & & & & & & \\ & & l-1 & & l & & l+1 \end{array};$$

ж) в точке $(n+1, l+1/2)$ шаблон

$$\begin{array}{ccccccc} & & \dots & \bullet & \dots & \bullet & \dots n+1 \\ & & & & & & \\ \dots & \bullet & \dots & \bullet & \dots & \bullet & \dots n \\ & & & & & & \\ & & l & & l+1 & & \end{array}.$$

Уравнение (13.1.1) не имеет выделенного пространственного направления. Поэтому разностные схемы, построенные для решения уравнения теплопроводности, часто обладают свойством симметричности относительно прямой $x = lh$. Если записать схему в виде $u_l^{n+1} = \sum_{\mu, \nu} \alpha_{\mu}^{\nu} u_{l+\mu}^{n+\nu}$, то коэффициенты, соответствующие симметричным относительно прямой $x = lh$ точкам, полагаются одинаковыми $\alpha_{\mu}^{\nu} = \alpha_{-\mu}^{\nu}$ (см. [1, 2]).

13.5. Методом неопределенных коэффициентов построить симметричную относительно прямой $x = lh$ разностную схему, заданную на сетке

$$D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots, \pm \infty\},$$

аппроксимирующую уравнение теплопроводности $u_t = au_{xx} + f(x, t)$, $a > 0$ с наивысшим порядком в точке (n, l) . Использовать указанный шаблон:

$$\begin{array}{l}
\text{a) } \begin{array}{c} \dots\dots\dots \bullet \dots\dots\dots n+1 \\ \dots \bullet \dots\dots \bullet \dots\dots \bullet \dots\dots n \\ \dots \bullet \dots\dots\dots \bullet \dots\dots n \\ l-1 \quad l \quad l+1 \end{array} ; \\
\text{б) } \begin{array}{c} \dots \bullet \dots\dots \bullet \dots\dots \bullet \dots\dots n+1 \\ \dots \bullet \dots\dots \bullet \dots\dots \bullet \dots\dots n \\ l-1 \quad l \quad l+1 \end{array} ; \\
\text{в) } \begin{array}{c} \dots\dots\dots \bullet \dots\dots\dots n+1 \\ \dots \bullet \dots\dots \bullet \dots\dots \bullet \dots\dots \bullet \dots\dots n \\ l-2 \quad l-1 \quad l \quad l+1 \quad l+2 \\ \dots \bullet \dots\dots \bullet \dots\dots \bullet \dots\dots n+1 \end{array} ; \\
\text{г) } \begin{array}{c} \dots \bullet \dots\dots \bullet \dots\dots \bullet \dots\dots n \\ \dots \bullet \dots\dots\dots \bullet \dots\dots n-1 \\ l-1 \quad l \quad l+1 \end{array} .
\end{array}$$

13.6. Исследовать на спектральную устойчивость и указать шаблон разностной схемы, заданной на сетке

$$D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots, \pm \infty\} :$$

$$\begin{array}{l}
\text{а) } u_l^{n+1} = u_l^n + \tau \frac{u_l^n - 2u_{l+1}^n + u_{l+2}^n}{h^2}, n = \overline{0, N-1}, l = 0, \pm 1, \dots, \pm \infty, u_l^0 = \varphi_l, l = 0, \pm 1, \dots, \pm \infty; \\
\text{б) } u_l^{n+1} = u_l^n + \tau \frac{u_l^n - 2u_{l-1}^n + u_{l-2}^n}{h^2}, n = \overline{0, N-1}, l = 0, \pm 1, \dots, \pm \infty, u_l^0 = \varphi_l, l = 0, \pm 1, \dots, \pm \infty; \\
\text{в) } u_l^{n+1} = u_l^n + \tau \frac{u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_{l-1}^n}{h^2}, n = \overline{0, N-1}, l = 0, \pm 1, \dots, \pm \infty, u_l^0 = \varphi_l, l = 0, \pm 1, \dots, \pm \infty; \\
\text{г) } u_l^{n+1} = u_l^n + \tau \frac{u_{l+1}^{n+1} - 2u_l^{n+1} + u_{l-1}^{n+1}}{h^2}, n = \overline{0, N-1}, l = 0, \pm 1, \dots, \pm \infty, u_l^0 = \varphi_l, l = 0, \pm 1, \dots, \pm \infty.
\end{array}$$

13.7. Указать алгоритм выбора шага по времени τ_{n+1} , обеспечивающий устойчивость разностной схемы:

$$(u_l^{n+1} - u_l^n) / \tau_{n+1} - t^n (1 + x_l^2)^{-1} (u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_{l-1}^n) / h^2 = \sin t^n \ln(1 + \cos^2 x_l);$$

$$h = \text{const}; l = 0; \pm 1; \dots; t^n = \sum_{k=1}^n \tau_k; n = 0 \div N.$$

13.8. Исследовать на спектральную устойчивость и указать шаблон разностной трехслойной схемы, заданной на сетке

$$D_h = \{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0; \pm 1; \dots, \pm \infty\} :$$

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & \frac{u_l^{n+1} - u_l^{n-1}}{2\tau} = \frac{u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_{l-1}^n}{h^2}, n = \overline{0, N-1}, l = \overline{0, \pm 1, \dots, \pm \infty}, u_l^0 = \varphi_l, l = \overline{0, \pm 1, \dots, \pm \infty}; \\
\text{б)} \quad & \frac{u_l^{n+1} - u_l^{n-1}}{2\tau} = \frac{u_{l+1}^{n+1} - 2u_l^{n+1} + u_{l-1}^{n+1}}{h^2}, n = \overline{0, N-1}, l = \overline{0, \pm 1, \dots, \pm \infty}, u_l^0 = \varphi_l, l = \overline{0, \pm 1, \dots, \pm \infty}; \\
\text{в)} \quad & \frac{u_l^{n+1} - u_l^{n-1}}{2\tau} = \frac{u_{l+1}^n - 2u_l^{n+1} + u_{l-1}^n}{h^2}, n = \overline{0, N-1}, l = \overline{0, \pm 1, \dots, \pm \infty}, u_l^0 = \varphi_l, l = \overline{0, \pm 1, \dots, \pm \infty};
\end{aligned}$$

аппроксимирует ли схема в) уравнение $\partial u / \partial t - \partial^2 u / \partial x^2 = 0$?

13.9. Указать алгоритм выбора шага по времени τ_{n+1} , обеспечивающий устойчивость разностной схемы

$$\frac{u_{l,m}^{n+1} - u_{l,m}^n}{\tau_n} + y_m \frac{u_{l+1,m}^n - u_{l-1,m}^n}{2h} + x_l \frac{u_{l,m+2}^n - u_{l,m-2}^n}{4h} = x_l y_m t^n;$$

$$l = \overline{1 \div 19}; m = \overline{2 \div 18}; n = \overline{1 \div N-1}; h = \frac{3}{20}; x_l = 1 + hl; l = \overline{0 \div 20}; y_m = 1 + hm;$$

$$m = \overline{0 \div 20}; t^n = \sum_{k=1}^n \tau_k; n = \overline{1 \div N}; t^0 = 0; \sum_{k=1}^N \tau_k = 1.$$

13.10. Исследовать на спектральную устойчивость разностную схему, заданную на сетке $D_h = \{(t^n, x_h, y_m) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = \overline{0 \div N}; x_l = lh_x,$

$$\text{a)} \quad \left. \begin{aligned} & \frac{u_{l,m}^{n+1} - u_{l,m}^{n-1}}{2\tau} = a^2 \left[\frac{u_{l+1,m}^n - 2u_{l,m}^n + u_{l-1,m}^n}{h_x^2} + \frac{u_{l,m+1}^n - 2u_{l,m}^n + u_{l,m-1}^n}{h_y^2} \right] \\ & n = \overline{0, N-1}; l, m = \overline{0; \pm 1; \dots}; u_{l,m}^0 = \varphi_{l,m}, u_{l,m}^1 = (\varphi_1)_{l,m}, l, m = \overline{0; \pm 1; \dots}; \\ & a = \text{const}; \varphi^{(h)}, \varphi_1^{(h)} - \text{заданы}; \end{aligned} \right\}$$

$$\text{б)} \quad \left. \begin{aligned} & \frac{u_{l,m}^{n+1} - u_{l,m}^{n-1}}{2\tau} = a^2 \left[\frac{u_{l+1,m}^{n+1} - 2u_{l,m}^{n+1} + u_{l-1,m}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{u_{l,m+1}^{n+1} - 2u_{l,m}^{n+1} + u_{l,m-1}^{n+1}}{h_y^2} \right] \\ & n = \overline{0, N-1}; l, m = \overline{0; \pm 1; \dots}; u_{l,m}^0 = \varphi_{l,m}, u_{l,m}^1 = (\varphi_1)_{l,m}, l, m = \overline{0; \pm 1; \dots}; \\ & a = \text{const}; \varphi^{(h)}, \varphi_1^{(h)} - \text{заданы}; \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{u_{l,m}^{n+1} - u_{l,m}^{n-1}}{2\tau} = a^2 \left[\frac{1}{2} \frac{u_{l+1,m}^{n+1} - 2u_{l,m}^{n+1} + u_{l-1,m}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{1}{2} \frac{u_{l+1,m}^n - 2u_{l,m}^n + u_{l-1,m}^n}{h_x^2} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \frac{u_{l,m+1}^{n+1} - 2u_{l,m}^{n+1} + u_{l,m-1}^{n+1}}{h_y^2} + \frac{1}{2} \frac{u_{l,m+1}^{n-1} - 2u_{l,m}^{n-1} + u_{l,m-1}^{n-1}}{h_y^2} \right]; \\
& n = \overline{0, N-1}; \quad l, m = \overline{0; \pm 1; \dots}; \quad u_{l,m}^0 = \varphi_{l,m}, u_{l,m}^1 = (\varphi_1)_{l,m}, l, m = \overline{0; \pm 1; \dots}; \\
& a = \text{const}; \quad \varphi^{(h)}, \varphi_1^{(h)} - \text{заданы};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{u_{l,m}^{n+1} - u_{l,m}^{n-1}}{2\tau} = a^2 \left[\frac{1}{2} \frac{u_{l+1,m}^{n-1} - 2u_{l,m}^{n-1} + u_{l-1,m}^{n-1}}{h_x^2} + \frac{1}{2} \frac{u_{l+1,m}^n - 2u_{l,m}^n + u_{l-1,m}^n}{h_x^2} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \frac{u_{l,m+1}^{n-1} - 2u_{l,m}^{n-1} + u_{l,m-1}^{n-1}}{h_y^2} + \frac{1}{2} \frac{u_{l,m+1}^n - 2u_{l,m}^n + u_{l,m-1}^n}{h_y^2} \right]; \\
& n = \overline{0, N-1}; \quad l, m = \overline{0; \pm 1; \dots}; \quad u_{l,m}^0 = \varphi_{l,m}, u_{l,m}^1 = (\varphi_1)_{l,m}, l, m = \overline{0; \pm 1; \dots}; \\
& a = \text{const}; \quad \varphi^{(h)}, \varphi_1^{(h)} - \text{заданы}.
\end{aligned}$$

13.11. Для решения уравнения $u_t = u_{xx} + u_{yy} + f(x, t)$ на сетке

$D_h = \{(t^n, x_h, y_m) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = \overline{0 \div N}; x_l = lh_x, h_x = \text{const}, l = \overline{0; \pm 1; \pm 2 \dots \pm L};$
 $y_m = mh_y, h_y = \text{const}, m = \overline{0; \pm 1; \pm 2 \dots \pm M}\}$ используется схема расщепления.

Исследовать схему на спектральную устойчивость

$$\begin{aligned}
& \frac{\tilde{u}_{l,m} - u_{l,m}^n}{\tau} = \frac{\tilde{u}_{l+1,m} - 2\tilde{u}_{l,m} + \tilde{u}_{l-1,m}}{h_x^2} + \frac{1}{2} f_{l,m}^{n+1}, l, m = \overline{0; \pm 1; \dots}; \\
& \text{а) } \frac{u_{l,m}^{n+1} - \tilde{u}_{l,m}}{\tau} = \frac{u_{l,m+1}^{n+1} - 2u_{l,m}^{n+1} + u_{l,m-1}^{n+1}}{h_y^2} + \frac{1}{2} f_{l,m}^{n+1}, l, m = \overline{0; \pm 1; \dots}; \\
& n = \overline{0, N-1}; \quad u_{l,m}^0 = \varphi_{l,m}, l, m = \overline{0; \pm 1; \dots}; \varphi^{(h)} - \text{задана};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\tilde{u}_{l,m} - u_{l,m}^n}{\tau} = \frac{\tilde{u}_{l+1,m} - 2\tilde{u}_{l,m} + \tilde{u}_{l-1,m}}{h_x^2} + f_{l,m}^{n+1}, l, m = \overline{0; \pm 1; \dots}; \\
& \text{б) } \frac{u_{l,m}^{n+1} - \tilde{u}_{l,m}}{\tau} = \frac{u_{l,m+1}^n - 2u_{l,m}^n + u_{l,m-1}^n}{h_y^2}, l, m = \overline{0; \pm 1; \dots}; \\
& n = \overline{0, N-1}; \quad u_{l,m}^0 = \varphi_{l,m}, l, m = \overline{0; \pm 1; \dots}; \varphi^{(h)} - \text{задана}.
\end{aligned}$$

13.12. Для решения уравнения $u_t = u_{xx} + u_{yy} + f(x, t)$ на сетке

$D_h = \{(t^n, x_h, y_m) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh_x, h_x = \text{const}, l = 0; \pm 1; \pm 2 \dots \pm L;$
 $y_m = mh_y, h_y = \text{const}, m = 0; \pm 1; \pm 2 \dots \pm M\}$ используется схема переменных направлений. Исследовать схему на спектральную устойчивость

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{u}_{l,m} - u_{l,m}^n}{\tau/2} &= \frac{\tilde{u}_{l+1,m} - 2\tilde{u}_{l,m} + \tilde{u}_{l-1,m}}{h_x^2} + \frac{u_{l,m+1}^n - 2u_{l,m}^n + u_{l,m-1}^n}{h_y^2} + f_{l,m}^{n+1}, \\ \frac{u_{l,m}^{n+1} - \tilde{u}_{l,m}}{\tau/2} &= \frac{u_{l+1,m}^n - 2u_{l,m}^n + u_{l-1,m}^n}{h_x^2} + \frac{u_{l,m+1}^{n+1} - 2u_{l,m}^{n+1} + u_{l,m-1}^{n+1}}{h_y^2} + f_{l,m}^{n+1}, \\ n &= 0, N-1; \quad l, m = 0; \pm 1; \dots; \quad u_{l,m}^0 = \varphi_{l,m}, \varphi^{(h)} - \text{задана.} \end{aligned} \right\}$$

Ответы к задачам раздела 13

13.1. $\tau = h^2 / (6a^2)$.

13.2. Доп. условие $a^2 > 1/3$.

13.4. а) $\frac{1}{\tau} \left(\frac{u_{l-1}^{n+1} + u_{l+1}^{n+1}}{2} - \frac{u_{l-1}^n + u_{l+1}^n}{2} \right) - \frac{u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_{l-1}^n}{h^2} = f_l^{n+\frac{1}{2}},$

б) $\frac{1}{\tau} \left(\frac{u_{l-1}^{n+1} + u_{l+1}^{n+1}}{2} - \frac{u_{l-1}^n + u_{l+1}^n}{2} \right) - \frac{u_{l+1}^{n+1} - 2u_l^{n+1} + u_{l-1}^{n+1}}{h^2} = f_l^{n+\frac{1}{2}},$

ж) построить схему на данном шаблоне нельзя.

13.6. а), б) — неустойчивы, в) устойчива при $\tau < h^2/2$, г) устойчива.

13.5. а) $\frac{1}{2} \left(\frac{u_l^{n+1} - u_l^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_{l+1}^n - u_{l+1}^{n-1}}{\tau} + \frac{u_{l-1}^n - u_{l-1}^{n-1}}{\tau} \right) \right) = a \frac{u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_{l-1}^n}{h^2} + f_l^n.$

13.7. $\tau_n < h^2 / (2t^n).$

13.8. а) неустойчива.

13.10. в) неустойчива (свести к квадратному уравнению относительно параметра λ , подобрать углы $\alpha = \pi, \beta = 0$ — см. Пример 3);

г) устойчива, если $\tau < \frac{h_x^2 h_y^2}{2a^2 (h_x^2 + h_y^2)}.$

13.11. а) устойчива.

Литература к разделу 13

1. Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. – М.: Наука, 1988.
2. Холодов А.С. О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений параболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. – Т. 24, № 9. – С. 1346–1358.
3. Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике: учебное пособие. — М.: Интернет-Университет информационных технологий, 2009. – 528 с.
4. Демченко В.В., Маркин В.Д. О некотором семействе точных решений многомерного нелинейного уравнения теплопроводности // ЖВМ и МФ. 1985. – Т. 25, №3. – С. 461–466.
5. Демченко В.В. Вычислительный практикум по прикладной математике: учеб. пособие. – М.: МФТИ, 2007. – 196 с.

Учебное издание

Барабанщиков Александр Владимирович
Гамилов Тимур Мударисович
Демченко Владимир Владимирович
Пастушков Роман Серафимович
Симаков Сергей Сергеевич

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ
КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ
ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

ЧАСТЬ II

Редактор *И. А. Волкова*. Корректор *О. П. Котова*
Компьютерная верстка *Н. Е. Кобзева*

Подписано в печать 11.04.2014. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$. Усл. печ. л. 11,4.
Уч.- изд. л. 10,5. Тираж 250 экз. Заказ № 150.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mail.mipt.ru.

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mail.mipt.ru.

Для заметок