# Знакоположительные ряды. Свойства сходящихся рядов

4.09.24, 18.09.24

**Опр. 1.** ***Ряд***
*Сумма членов бесконечной последовательности* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется рядом и равна пределу последовательности его частичной суммы:*

$$a_1 + a_2 + a_3 ... = \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} U_k \tag{1}$$

*При этом* $a_n$ *называется* ***общим членом ряда***

**Опр. 2.** *Остаток ряда* $r_n$ *- сумма ряда, остающаяся после отбрасывания частичной суммы ряда.*

## 1 Исследование сходимости ряда

**Опр. 3.**

$$\begin{aligned} \text{существует и конечен } \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} U_k &\implies \text{ряд сходится} \\ \text{иначе} &\implies \text{ряд расходится} \end{aligned} \tag{2}$$

### 1.1 Признаки сходимости для знакоположительных рядов

**Признак 1.1.1.** *Мажорантный признак*
*Для рядов* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n : \forall n : a_n \leq b_n \implies$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ расходится} &\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ тоже расходится} \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сходится} &\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ тоже сходится.} \end{aligned} \tag{3}$$

*Proof.* TODO ■

**Признак 1.1.2.** *Предельный признак*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n : \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \tag{4}$$

*Тогда ряды **одновременно** сходятся или расходятся*

*Proof.* TODO ■

**Признак 1.1.3.** *Признак Д'Аламбера*

$$\begin{gathered} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \\ L < 1 \implies \text{ряд сходится} \\ L > 1 \implies \text{ряд расходится} \\ L = 1 \text{ряд может сходиться или расходится} \end{gathered} \tag{5}$$

*Proof.* ■

**Признак 1.1.4.** *Радикальный признак Коши*

$$\begin{gathered} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = L \\ L < 1 \implies \text{ряд сходится} \\ L > 1 \implies \text{ряд расходится} \\ L = 1 \text{ряд может сходиться или расходится} \end{gathered} \tag{6}$$

*Proof.* ■

**Признак 1.1.5.** *Интегральный признак Коши*
*Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$, члены которого являются значениями непрерывной, неотрицательной и монотонно **убывающей** на $[1, +\infty]$ функции $f(x)$ при целых $x$:*

$$U_1 = f(1), U_2 = f(2), \ldots, U_n = f(n). \tag{7}$$

*Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся **одновременно***

*Proof.* ■

## 1.2 Свойства сходящихся рядов

**Свойство 1.2.1.** *Необходимое условие сходимости ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{сходится} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{8}$$

*NB:*. свойство не работает в обратную сторону.
Пример - гармонический ряд (расходится):

$$1+\underbrace{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+\ldots+\frac{1}{n}=S_n$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{n}=S_n^{'}$$

$$\begin{aligned}
&S_n^{'} \leq S_n \\
&S_1^{'} = 1 \\
&S_2^{'} = 1+\frac{1}{2} \\
&S_4^{'} = 1+\frac{1}{2}\cdot 2 \\
&S_8^{'} = 1+\frac{1}{2}\cdot 3 \\
&\ldots \\
&S_{2^k}^{'} = 1+\frac{1}{2}\cdot 2^k \to \infty \text{ при } k \to \infty
\end{aligned} \tag{9}$$

Если сумма $S_n^{'}$ меньшего ряда расходится, то сумма $S_n$ также расходится (по мажорантному признаку). При этом общий член стремится к нулю: $\frac{1}{n} \to \infty$ при $n \to \infty$

**Свойство 1.2.2.** *Достаточное условие расходимости ряда*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \nrightarrow 0 \implies \textit{ряд расходится} \tag{10}$$

*Proof.* Предположим, что сходится. Тогда $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ по св-ву 1.2.1, противоречие ■

**Свойство 1.2.3.** *Линейность.*
*- сходящиеся ряды можно почленно складывать, сходимость рез-та не изменится*
*- при умножении всех членов ряда на число сходимость не меняется (а сумма ряда изменится в это число раз)*
*- сходимость не меняется для частичной суммы/остатка ряда*