Знакоположительные ряды. Свойства сходящихся рядов

4.09.24, 18.09.24

Опр. 1. ***Ряд***
Сумма членов бесонечной последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется рядом и равна пределу последовательности его частичной суммы:

$$a_1 + a_2 + a_3 ... = \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} U_k \tag{1}$$

*При этом a_n называется **общим членом ряда***

Опр. 2. ***Частичная сумма ряда*** *- это сумма его первых n членов:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k \tag{2}$$

Опр. 3. ***Остаток ряда*** *r_n - сумма ряда, остающаяся после отбрасывания частичной суммы ряда.*

NB:. Ряд и его остаток сходятся или расходятся одновременно.

Proof. **TODO** ■

1 Исследование сходимости ряда

$$\begin{gathered} \text{существует } \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} U_k = S \in \mathbb{R} \implies \text{ряд сходится (”к сумме } S\text{”)} \\ \text{иначе} \implies \text{ряд расходится} \end{gathered} \tag{3}$$

1.1 Признаки сходимости для знакоположительных рядов

Признак 1.1.1. *Мажорантный признак*
Для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n : \forall n : a_n \leq b_n \implies$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ расходится } \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ тоже расходится}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сходится } \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ тоже сходится.} \tag{4}$$

Proof. Пусть $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_a$ - частичная сумма первого ряда,
$b_1 + b_2 + \cdots + b_3 = S_b$ - частичная сумма второго ряда. Т.к. $a_n \leq b_n \implies S_a \leq S_b$.
Пусть 2-й ряд сходится, тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_b = L_b, \tag{5}$$

причем $S_b < L_b \implies S_a \leq S_b < L_b \implies |S_a|$ ограничена сверху числом L_b,
тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть 1-й ряд расходится, тогда $\lim S_a = \infty$.Т.к. $S_a \leq S_b$, $\lim_{S\ b} = \infty$,
тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_b$ расходится.

■

Признак 1.1.2. *Предельный признак*
Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ исследуемый, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - вспомогательный

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n : \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \tag{6}$$

*Тогда ряды **одновременно** сходятся или расходятся*

Proof.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \\
&\iff \forall \epsilon > 0 : \exists N(\epsilon) : \forall n > N \implies |\frac{a_n}{b_n} - L| < \epsilon \\
&\iff -\epsilon < \frac{a_n}{b_n} - L < \epsilon \implies L > 0 \implies L - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \epsilon \\
&\iff b_n(L-\epsilon) < a_n < b_n(L+\epsilon)
\end{aligned} \tag{7}$$

Пусть сходится ряд b_n, $\implies$ сходится $\sum_{n=1}^{\infty}(L+\epsilon)b_n \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по мажорантному пр. Пусть расходится ряд $b_n \implies$ расходится $\sum_{n=1}^{\infty}(L-\epsilon)b_n \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится по мажорантному пр.

■

Признак 1.1.3. *Признак Д'Аламбера*

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \\
&\qquad L < 1 \implies \text{ряд сходится} \\
&\qquad L > 1 \implies \text{ряд расходится} \\
&\qquad L = 1 \text{ряд может сходиться или расходится}
\end{aligned} \tag{8}$$

Proof. TODO ■

Признак 1.1.4. *Радикальный признак Коши*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = L$$
$$\begin{aligned} L < 1 &\implies \text{ряд сходится} \\ L > 1 &\implies \text{ряд расходится} \\ L = 1&\text{ряд может сходиться или расходится} \end{aligned} \tag{9}$$

Proof. TODO ■

Признак 1.1.5. *Интегральный признак Коши*
*Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$, члены которого являются значениями непрерывной, неотрицательной и монотонно **убывающей** на $[1, +\infty]$ функции $f(x)$ при целых x:*

$$U_1 = f(1), U_2 = f(2), \ldots, U_n = f(n). \tag{10}$$

*Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся **одновременно***

Proof. TODO ■

1.2 Свойства сходящихся рядов

Свойство 1.2.1. *Необходимое условие сходимости ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{сходится} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{11}$$

Proof. TODO ■

NB:. свойство не работает в обратную сторону.

Пример - гармонический ряд (расходится):

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + ... + \frac{1}{n} = S_n$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{n} = S_n^{'}$$

$$\begin{aligned} &S_n^{'} \leq S_n \\ &S_1^{'} = 1 \\ &S_2^{'} = 1 + \frac{1}{2} \\ &S_4^{'} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \\ &S_8^{'} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 \\ &... \\ &S_{2^k}^{'} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2^k \to \infty \text{ при } k \to \infty \end{aligned} \tag{12}$$

Если сумма $S_n^{'}$ меньшего ряда расходится, то сумма S_n также расходится (по мажорантному признаку). При этом общий член стремится к нулю: $\frac{1}{n} \to \infty$ при $n \to \infty$

Свойство 1.2.2. *Достаточное условие расходимости ряда*

$$\lim_{n \to \infty} a_n \nrightarrow 0 \implies \textit{ряд расходится} \tag{13}$$

Proof. Предположим, что сходится. Тогда $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ по св-ву 1.2.1, противоречие ■

Свойство 1.2.3. *Сходящиеся ряды можно почленно складывать, при этом сходимость не изменится, а сумма полученного ряда будет равна сумме сумм исходных рядов.*

Proof. TODO ■

Свойство 1.2.4. *При умножении сходящегося ряда на число, сходимость не изменятся, при этом сумма изменится в это число раз.*

Proof.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} U_n = S_n; \qquad \lim_{n \to \infty} S_n = S$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot U_n = S_n^{'},$$

$$\text{тогда:} \quad S_n^{'} = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot U_n = c \sum_{n=1}^{\infty} U_n = c \cdot S_n, \quad \lim_{n \to \infty} S_n^{'} = c \lim_{n \to \infty} S_n = c \cdot S$$

■

Свойство 1.2.5. *Сходимость ряда не изменится, если к нему прибавить или отбросить конечное число слагаемых.*