

Знакопеременные и знакочередующиеся ряды

18.09.24

NB: Знакоперевающимся называется ряд, где знак меняется для каждого следующего члена ряда. В знакопеременном ряде знак может изменяться по любому правилу.

1 Признак Лейбница

Теорема 1.0.1. *Признак Лейбница (достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда)*

Дан знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} U_n$. Если последовательность модулей членов ряда убывает, т.е. выполняется $\lim_{n \rightarrow \infty} |U_n| = 0$, и при этом убывает **монотонно**, то ряд сходится.

Proof. Рассмотрим частичную сумму S_{2k} :

$$S_{2k} = (U_1 - U_2) + (U_3 - U_4) + \dots + (U_{2k-1} - U_{2k}) \quad (1)$$

Все скобки > 0 , т.к. модули членов ряда убывают. Тогда $S_{2k} > 0$ и возрастает с увеличением k .

$$0 < S_{2k} \leq U_1 \quad (2)$$

Сумма S_{2k} положительна и ограничена сверху, тогда она имеет конечный предел S .

Рассмотрим сумму $S_{2k+1} = S_{2k} + U_{2k+1}$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} + \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} U_{2k+1}}_{= 0 \text{ т.к. ряд убывает}} = S + 0 = S \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

\Rightarrow ряд сходится. ■

Следствие 1.0.1. *Остаток знакочередующегося ряда по модулю не превосходит первого отброшенного члена.*

$$|r_n| \leq |(-1)^n U_{n+1}| \quad (4)$$

2 Абсолютная сходимость знакопеременного ряда

Опр. 1. Ряд называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд модулей его членов. Если ряд сходится, а ряд модулей его членов расходится, то такой ряд называется **условно сходящимся**

Теорема 2.0.1. Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

Proof. $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ знакопеременный, сходится абсолютно. $\sum_{n=1}^{\infty} V_n = U_n + |U_n|$. Очевидно, что $V_n < 2|U_n|$. Так как сходится $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$, сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} 2|U_n|$. Тогда: V_n сходится по мажорантному признаку,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} V_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (U_n + |U_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n + \sum_{n=1}^{\infty} |U_n| \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} U_n &= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} V_n}_{\text{сход.}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|}_{\text{сход.}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} U_n \text{ сходится} \end{aligned} \quad (5)$$

■

2.1 Свойства абсолютно сходящихся рядов

Свойство 2.1.1. Сумма и сходимость ряда не меняются от перестановки членов ряда местами.

Свойство 2.1.2. $|\sum_{n=1}^{\infty} U_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$

02.10.24