Раздел I
Случайные события

03.09.24

Теория вероятностей — наука, изучающая закономерности в массовых случайных явлениях. Разделы курса: случайные события, случайные величины, предельные теоремы.

1 Основные понятия и формулы

- Ω пространство элементарных исходов
- $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\omega_n\}$ множество всех единственно равновозможных исходов данного эксперимента
- F σ-алгебра случайных событий
- $\mathbb{P}$ вероятность

- $A, B, C \dots$ случаные события
- U, Ω достоверное событие
- $V, \emptyset$ невозможное событие
- $\bar{A}, \{\omega_i, \omega_i \notin A\}$ противоположное событие

Вероятность случайного события A определяем как $P(A) = w_i, w_i \in [0, 1]$.

Опр. 1. ***Полная группа событий*** *События $H_1, \dots, H_n$ образуют полную группу событий, если они попарно несовместны и среди них содержатся все элементарные исходы*

NB:. Т.к. события полной группы несовместны, то вероятность их суммы равна сумме их вероятностей, и при этом она равна единице:

$$P(H_1) + \cdots + P(H_n) = 1 \tag{1}$$

Опр. 2. *Условная вероятность $P(A|B)$ - вероятность наступления A при условии, что B наступило. Вычисляется как:*

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{2}$$

10.09.24

Теорема 1.0.1. ***Формула произведения вероятностей***

$$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|P(A_1A_2)) \cdot \dots P(A_n|A_1A_2 \dots A_{n-1}) \tag{3}$$

Proof. TODO ■

Теорема 1.0.2. ***Формула полной вер-ти*** *Пусть $H_1, H_2, \dots, H_n$ - полная группа событий. A - вер-ть того, что произошло какое-то из них. Тогда*

$$P(A) = \sum_1^{\infty} P(H_i)P(A|H_i) \tag{4}$$

Теорема 1.0.3. ***Формула Байеса*** *Пусть $H_1, H_2, \dots, H_n$ - полная группа событий. Известно, что A произошло. Тогда:*

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_1^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)} \tag{5}$$

Proof.

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_kA)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_1^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)} \tag{6}$$

(раскрыли усл. вер-ть по определению, в числ. применяем формулу произведения вероятностей, а в знаменателе — формулу полной вероятности) ■

2 Парадокс Монти-Холла

17.09.24

3 Схема независимых испытаний. Формула Бернулли

Опр. 3. ***Независимые испытания*** *- испытания, исход каждого из которых не влияет на исход последующих*

Опр. 4. ***Схема независимых испытаний Бернулли*** *- неоднократное вопроизведение независимых опытов в одинаковых условиях*

Теорема 3.0.1. ***Формула Бернулли:*** *пусть проводится n незаивисимых одинаковых опытов, в каждом из которых некоторое событие A может наступить с вероятностью p и не наступить с вероятностью q. Тогда вероятность того, что A наступит ровно m раз ($m \leq n$):*

$$P_{n,m}(A) = C_n^m p^m q^{n-m} \tag{7}$$

Proof. Пусть T - A наступило ($P(T) = p$), F - "A не наступило" ($P(T) = q$), $A^{'}$ - A наступило m раз из n.
Рассмотрим один из элементарных исходов, благоприятствующих $A^{'}$:

$$A_1^{'} = \underbrace{T \dots T}_{m \text{ раз}} \underbrace{F \dots F}_{n-m \text{ раз}} \tag{8}$$

т.к. испытания независимы, $P(A_1^{'}) = p^k q^{n-k}$.
Остальные элементарные исходы, благоприятствующие $A^{'}$ отличаются только расстановкой событий T и F. Количество таких расстановок равно C_n^m. Получаем

$$P_{n,m}(A) = C_n^m p^m q^{n-m} \tag{9}$$

■

4 Наивероятнейшее число успехов

Опр. 5. *m^* - наивероятнейшее число успехов в данной серии испытаний относительно события A, если при данном m:* $P(A_{n,m}) \to \max$

(10)

5 Геометрическое определение вероятности