

Опр. 1. Сумма TESTчленов бесконечной последовательности $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется **рядом** и равна пределу его частичной суммы:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n U_k \quad (1)$$

При этом U_n называется **общим членом последовательности**.

Опр. 2. Остаток ряда r_n — сумма, остающаяся после отбрасывания частичной суммы ряда.

Исследование сходимости ряда:

предел последовательности частичных сумм \exists и конечен \implies ряд сходится (далее — CX),
иначе ряд расходится (далее — PX).

Знакоположительные ряды. Признаки сходимости

Признак 1. Признак сравнения с неравенством (мажорантный)

$$\begin{aligned} \text{Для рядов } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n : \forall n : a_n \leq b_n \implies \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сходится, } \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ тоже сходится;} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ расходится, } \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ тоже расходится.} \end{aligned} \quad (2)$$

Доказательство

□

TODO

■

Признак 2. Предельный (относительный) признак

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L. \text{ Тогда ряды одновременно CX или PX.} \quad (3)$$

Доказательство

□

TODO

■

Свойства сходящихся рядов

Свойство 1. $\sum U_n \text{ CX} \implies r_n \rightarrow 0$

Свойство 2. Необходимое условие сходимости

$\sum U_n \text{ сходится} \implies U_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$

Доказательство

□

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0 \quad (4)$$

■

NB: свойство не работает в обратную сторону. Пример - гармонический ряд:

$$\begin{aligned} 1 + \underbrace{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \dots + \frac{1}{n} &= S_n \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n} &= S_n \\ S'_n &\leq S_n \\ S'_1 &= 1 \\ S'_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\ S'_4 &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \\ S'_8 &= 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} \\ S'_{16} &= 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} \\ \dots \\ S'_{2^k} &= 1 + k \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{при } k \rightarrow \infty} \infty \end{aligned} \quad (5)$$

Если сумма S'_n меньшего ряда расходится, то сумма S_n также расходится. При этом общий член U_n стремится к нулю:

$$U_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Свойство 3. Достаточное условие расходимости

$U_n \not\rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \implies \text{РХ}$ (предположим, что СХ. Тогда $U_n \rightarrow 0$ по св-ву 2.)

Свойство 4. Линейность

- сходящиеся ряды можно почленно складывать, сходимость рез-та не изменится
- при умножении всех членов ряда на скаляр сходимость не меняется (а сумма ряда изменится в это число раз)
- сходимость не меняется для частичной суммы/остатка ряда