Функциональные ряды

02.10.24

Опр. 1. *Ряд, члены которых - это функции*

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \tag{1}$$

где $\{U_n(x)\}$ *называется функциональной последовательностью*

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \text{ - степенной ряд} \tag{2}$$

Опр. 2. ***Частичная сумма функционального ряда***

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x) \tag{3}$$

$\{S_n(x)\}$ *- последовательность частичных сумм*

Опр. 3. ***Функциональная последовательность***

$$\{f_n(x)\} \tag{4}$$

1 Сходимость функциональной последовательности

Опр. 4. *сходимость функциональной последовательности: Если* $f(x), f_n(x)$ *определены на* X*:*

$$\begin{aligned} &\{f_n(x)\} \text{ сходится на } X \text{ к } f(x) \implies \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x). \\ &f_n(x) \to f(x) \Leftrightarrow \forall x_0 \in X \\ &\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_x \end{aligned} \tag{5}$$

Опр. 5. *Если при фиксированном* x_0 *функциональный ряд сходится, тоговорят, что он сходится в точке* $x = x_0$*. При этом множество* X *всех таких точек назыается* ***областью сходимости*** *ряда. Аналогично для расходимости.*

Теорема 1.0.1. ***Остаток сходящегося функционального ряда равен 0****. Если ряд* *сходится к сумме $S(x)$ и $S(x) = S_n(x) + r_{n+1}(x)$ (r - остаток ряда), то*

$$\lim_{n\to\infty} r_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty}(S(x) - S_n(x)) = S(x) - \underbrace{\lim_{n\to\infty} S_{n+1}(x)_{=S(x)}} = 0 \tag{6}$$

Пример.

$$\begin{aligned}&\sum \frac{n+1}{x^3} \text{ везде расходится:}\\ &\lim_{n\to\infty} U_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{x^3} = \frac{1}{x^3}\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.\end{aligned} \tag{7}$$

Пример.

$$\begin{aligned}&\sum x^n \cdot n! \text{ - сходится только в 0}\\ &\sum \frac{x^n}{n!} \text{ - везде сходится}\\ &\sum \frac{1}{x^n \cdot n!} \text{ - расходится при } x = 0\end{aligned} \tag{8}$$

Пример.

$$\begin{aligned}&\sum x^n - \text{ геом. ряд}\\ &|x| < 1 \implies \text{ сходится}\\ &|x| >= 1 \implies \text{ расходится}\\ &(-1;1) \text{ - область сходимости}\end{aligned} \tag{9}$$

2 Нахожедение области абсолютной сходимости

Теорема 2.0.1.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = q(x) \qquad \begin{cases}\lim = 0 \implies \textit{ сходится на } -\infty; +\infty\\ \lim = \infty \implies \textit{ сходится только в } x = 0\\ \textit{иначе: интервал из н-ва } |q(x)| < 1. \textit{ Затем исследуются концы интервала}\end{cases} \tag{10}$$

Пример.

$$\sum \frac{(-1)^n \cdot 5^n}{(2n+5)(3x-2)^{2n}}$$

$$U_{n+1}(x) = \frac{5 \cdot 5^n}{(2n+5)(3x-2)^{2n+2}}$$
$$\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} = \dots = \frac{5(2n+3)}{(2n+5)(3x-2)^2}$$
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{5(2n+3)}{(2n+5)(3x-2)^2} \right| = \frac{5}{(3x-2)^2} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+5}}_{=1} < 1$$
$$\frac{5}{(3x-2)^2} < 1 \tag{11}$$
$$\frac{(3x-2)^2}{5} > 1$$
$$(3x-2)^2 > 5$$
$$|3x-2| > \sqrt{5}$$
$$3x - 2 > \sqrt{5} \implies x > \frac{2+\sqrt{5}}{3}$$
$$3x - 2 < -\sqrt{5} \implies x < \frac{2-\sqrt{5}}{3}$$
$$x \in (-\infty; \frac{2-\sqrt{5}}{3}) \cup (\frac{2+\sqrt{5}}{3}; +\infty) \text{ - область абсолютной сходимости ряда}$$

границы проверяем отдельно, исследуем возникающие числовые ряды:

Proof. **TODO** ■

Теорема 2.0.2. ***признак Коши***

$$\lim_{n\to\infty} \left| \sqrt[n]{U_n(x)} \right| < 1 \implies \textit{решаем} \tag{12}$$

3 Равномерная сходимость функционального ряда

Опр. 6. *ряд называется равномерно сходящимся на множестве $X \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists N(\epsilon)$ и не зависящее от x:*

$$\forall n > N \implies |S_n(x) - S(x)| < \epsilon \Leftrightarrow |R_n(x)| < \epsilon$$
$$|S_n(x) - S(x)| = |S(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| \tag{13}$$

Пример. ряд, сходящийся неравномерно:

$$\textbf{TODO} \tag{14}$$

3.1 Признаки равномерной сходимости

Теорема 3.1.1. *Признак равномерной сходимости* ***Вейрштрасса****. Если члены функционального ряда $\sum U_n(x)$ не превосходят на некотором множестве X членов сходящегося числового ряда, то на X ряд $\sum U_n(x)$ сходится равномерно*

Proof.

$$
\begin{aligned}
&1. \sum U_n(x) && && \text{Остаток: } R_n \\
&2. \sum |U_n(x)| && && \text{Остаток: } F_n \\
&3. \sum C_n && \text{числовой ряд, сходится.} && \text{Остаток: } P_n
\end{aligned} \tag{15}
$$

$$\forall x \in X : |U_n(x)| \leq C_n$$

Если ряд 3 сходится, то ряд 2 сходится на X по признаку сравнения. Тогда ряд 1 сходится абсолютно на $X \implies$ сходится на X.
Докажем равномерную сходимость.

$$
\begin{aligned}
&U_n(x) \leq |U_n(x)| \leq C_n \\
&R_n(x) \leq F_n(x) \leq P_n(x) \\
&|R_n(x)| \leq F_n(x) \leq P_n(x) \forall x \in X
\end{aligned} \tag{16}
$$

Так как 3 сходится, то $\lim_{n\to\infty} P_n = 0$ (по св-ву сходящегося числового ряда). Тогда

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists N(\epsilon) \\
&\implies |P_n - 0| < \epsilon \\
&\implies |P_n < \epsilon| ; \\
&|P_n < \epsilon| \, \forall x \in X
\end{aligned} \tag{17}
$$

∎