Опр. 1. Сумма членов бесконечной последовательности $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется **рядом** и равна пределу его частичной суммы:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} U_k \tag{1}$$

При этом U_n называется **общим членом последовательности**.

Опр. 2. Остаток ряда r_n — сумма, остающаяся после отбрасывания частичной суммы ряда.

Исследование сходимости ряда:
предел последовательности частичных сумм $\exists$ и конечен $\implies$ ряд сходится (далее — СХ), иначе ряд расходится (далее — РХ).

Знакоположительные ряды. Признаки сходимости

Признак 1. Признак сравнения с неравенством (мажорантный)

$$\begin{gathered}\text{Для рядов } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n : \forall n : a_n \leq b_n \implies \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сходится, } \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ тоже сходится;} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ расходится, } \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ тоже расходится.}\end{gathered} \tag{2}$$

Доказательство

□

TODO ■

Признак 2. Предельный (относительный) признак

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n : \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.\text{Тогда ряды одновременно СХ или РХ.} \tag{3}$$

Доказательство

□

TODO ■

Свойства сходящихся рядов

Свойство 1. $\sum U_n$ СХ $\implies r_n \to 0$

Свойство 2. Необходимое условие сходимости
$\sum U_n$ сходится $\implies U_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство

□

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0 \tag{4}$$

■

NB: свойство не работает в обратную сторону. Пример - гармонический ряд:

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \dots + \frac{1}{n} = S_n$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n} = S_n$$

$$S'_n \le S_n$$

$$\begin{aligned}
&S'_1 = 1\\
&S'_2 = 1 + \frac{1}{2}\\
&S'_4 = 1 + 2\cdot\frac{1}{2}\\
&S'_8 = 1 + 3\cdot\frac{1}{2}\\
&S'_{16} = 1 + 4\cdot\frac{1}{2}\\
&\dots\\
&S'_{2^k} = 1 + k\cdot\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{при } k\to\infty} \infty
\end{aligned} \tag{5}$$

Если сумма $S_n^{'}$ меньшего ряда расходится, то сумма S_n также расходится. При этом общий член U_n стремится к нулю:

$$U_n = \frac{1}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Свойство 3. Достаточное условие расходимости
$U_n \not\to 0$ при $n \to \infty \implies$ РХ (предположим, что СХ. Тогда $U_n \to 0$ по св-ву 2.)

Свойство 4. Линейность
- сходящиеся ряды можно почленно складывать, сходимость рез-та не изменится
- при умножении всех членов ряда на скаляр сходимость не меняется (а сумма ряда изменится в это число раз)
- сходимость не меняется для частичной суммы/остатка ряда