Знакопеременные и знакочередующиеся ряды

18.09.24

NB:. Знакочередующимся называется ряд, где знак меняется для каждого следующего члена ряда. В знакопеременном ряде знак может изменяться по любому правилу.

Теорема 0.0.1. *Признак Лейбница (о сходимости знакочередующегося ряда)*
Дан знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}U_n$. Если последоавтельность модулей членов ряда монотонно убывает и $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$, то ряд сходится.

Proof. Рассмотрим частичную сумму S_{2k}:

$$S_{2k} = (U_1 - U_2) + (U_3 - U_4) + \cdots + (U_{2k-1} - U_{2k}) \tag{1}$$

Все скобки > 0, т.к. модули членов ряда убывают. Тогда $S_{2k} > 0$ и возрастает с увеличением k.

$$0 < S_{2k} \leq U_1 \tag{2}$$

Сумма S_{2k} положительна и ограничена сверху, тогда она имеет конечный предел S.
Рассмотрим сумму $S_{2k+1} = S_{2k} + U_{2k+1}$:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} S_{2k+1} &= \lim_{k\to\infty} + \underbrace{\lim_{k\to\infty} U_{2k+1}}_{\text{=0 т.к. модули членов убывают}} = S + 0 = S \\ \lim_{n\to\infty} S_n &= S. \end{aligned} \tag{3}$$

$\implies$ ряд сходится. ■

Следствие 0.0.1.

1 Абсолютная сходимость знакопеременного ряда

Опр. 1. *Ряд называется* ***абсолютно сходящимся****, если сходится ряд модулей его членов. Если ряд сходится, а ряд модулей его членов расходится, то такой ряд называется* ***условно сходящимся***

Теорема 1.0.1. *Абсолютная сходимость знакопеременного ряда*

Proof. ■

1.1 Свойства абсолютно сходящихся рядов