

4 сентября 2024

Опр. 1. Ряд

Сумма членов бесконечной последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется рядом и равна пределу последовательности его частичной суммы:

$$a_1 + a_2 + a_3 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n U_k \quad (1)$$

При этом a_n называется **общим членом ряда**

Опр. 2. Остаток ряда r_n - сумма ряда, остающаяся после отбрасывания частичной суммы ряда.

1 Исследование сходимости ряда

Опр. 3.

$$\begin{aligned} \text{существует и конечен } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n U_k &\implies \text{ряд сходится} \\ \text{иначе} &\implies \text{ряд расходится} \end{aligned} \quad (2)$$

1.1 Признаки сходимости для знакоположительных рядов

Признак 1.1.1. Мажорантный признак

Для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n : \forall n : a_n \leq b_n \implies$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ расходится} &\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ тоже расходится} \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сходится} &\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ тоже сходится.} \end{aligned} \quad (3)$$

Proof. TODO ■

Признак 1.1.2. Предельный признак

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \quad (4)$$

Тогда ряды **одновременно** сходятся или расходятся

Proof. TODO

■

1.2 Свойства сходящихся рядов

Свойство 1.2.1. Необходимое условие сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{сходится} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (5)$$

NB.: свойство не работает в обратную сторону.

Пример - гармонический ряд (расходится):

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \dots + \frac{1}{n} = S_n$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n} = S'_n$$

$$\begin{aligned} S'_n &\leq S_n \\ S'_1 &= 1 \\ S'_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\ S'_4 &= 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \\ S'_8 &= 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 \\ &\dots \\ S'_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} \cdot 2^k \rightarrow \infty \text{ при } k \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (6)$$

Если сумма S'_n меньшего ряда расходится, то сумма S_n также расходится. При этом общий член стремится к нулю: $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

Свойство 1.2.2. Достаточное условие расходимости ряда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \not\rightarrow 0 \implies \text{ряд расходится} \quad (7)$$

Proof. Предположим, что сходится. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ по [св-ву 1.2.1](#), противоречие

■

Свойство 1.2.3. Линейность.

- сходящиеся ряды можно почленно складывать, сходимость рез-та не изменится
- при умножении всех членов ряда на число сходимость не меняется (а сумма ряда изменится в это число раз)
- сходимость не меняется для частичной суммы/остатка ряда