Раздел I
Случайные события

03.09.24

Теория вероятностей — наука, изучающая закономерности в массовых случайных явлениях. Разделы курса: случайные события, случайные величины, предельные теоремы.

1 Основные понятия

Опр. 1. ***Случайный эксперимент*** *- эксперимент, результат которого нельзя предугадать.*

Опр. 2. ***Пространство элементарных исходов*** $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\omega_n\}$ *- множество всех единственно равновозможных исходов данного испытания.*

Опр. 3. ***Достоверное событие*** U, Ω *- непременно произойдет событие, включающее в себя все благоприятные исходы испытания.*

Опр. 4. ***Невозможное событие*** $V, \emptyset$ *- событие, не включающее в себя ни единого благоприятного исхода.*

Опр. 5. ***Противоположное событие*** $\bar{A}, \{\omega_i, \omega_i \notin A\}$

Вероятность случайного события A определяем как $P(A) = w_i, w_i \in [0, 1]$.

1.1 Классическое определение вероятности

Опр. 6.

$$P(A) = \frac{m_a}{n}, \tag{1}$$

где m_a *- число элементарных исходов, благоприятствующих* A*,* n *- общее число элементарных исходов.*

1.2 Статистическое определение вероятности

1.3 Геометрическое определение вероятности

Опр. 7. *Если множество элементарных исходов испытания можно представить в виде некоторой области* G *на плоскости, а благоприятствующие событию* A *исходы*

- в виде области $g \subset G$, то

$$P(A) = \frac{S_g}{S_G} \tag{2}$$

Пример. На отрезок $a = [0;1]$ брошены случайным образом две точки. Какова вероятность того, что из отрезков, на которые они разделили a на отрезки, из которых можно составить треугольник?

2 Основные формулы

Опр. 8. ***Полная группа событий*** *События $H_1, \dots, H_n$ образуют полную группу событий, если они попарно несовместны и среди них содержатся все элементарные исходы*

NB:. Т.к. события полной группы несовместны, то вероятность их суммы равна сумме их вероятностей, и при этом она равна единице:

$$P(H_1) + \dots + P(H_n) = 1 \tag{3}$$

Опр. 9. *Условная вероятность $P(A|B)$ - вероятность наступления A при условии, что B наступило. Вычисляется как:*

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{4}$$

10.09.24

Теорема 2.0.1. ***Формула произведения вероятностей***

$$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|P(A_1A_2)) \cdot \dots P(A_n|A_1A_2 \dots A_{n-1}) \tag{5}$$

Proof. TODO ■

Теорема 2.0.2. ***Формула полной вер-ти*** *Пусть $H_1, H_2, \dots, H_n$ - полная группа событий. A - вер-ть того, что произошло какое-то из них. Тогда*

$$P(A) = \sum_1^n P(H_i)P(A|H_i) \tag{6}$$

Теорема 2.0.3. ***Формула Байеса*** *Пусть $H_1, H_2, \dots, H_n$ - полная группа событий. Известно, что A произошло. Тогда:*

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_1^n P(H_i)P(A|H_i)} \tag{7}$$

Proof.

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_kA)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_1^n P(H_i)P(A|H_i)} \tag{8}$$

(раскрыли усл. вер-ть по определению, в числ. применяем формулу произведения вероятностей, а в знаменателе — формулу полной вероятности) ■

3 Парадокс Монти-Холла

17.09.24

4 Схема независимых испытаний. Формула Бернулли

Опр. 10. ***Независимые испытания*** *- испытания, исход каждого из которых не влияет на исход последующих*

Опр. 11. ***Схема независимых испытаний Бернулли*** *- неоднократное вопроизведение независимых опытов в одинаковых условиях*

Теорема 4.0.1. ***Формула Бернулли:*** *пусть проводится n незаивисимых одинаковых опытов, в каждом из которых некоторое событие A может наступить с вероятностью p и не наступить с вероятностью q. Тогда вероятность того, что A наступит ровно m раз ($m \leq n$):*

$$P_{n,m}(A) = C_n^m p^m q^{n-m} \tag{9}$$

Proof. Пусть T - A наступило ($P(T) = p$), F - "A не наступило" ($P(T) = q$), $A^{'}$ - A наступило m раз из n.

Рассмотрим один из элементарных исходов, благоприятствующих $A^{'}$:

$$A_1^{'} = \underbrace{T \dots T}_{m \text{ раз}} \underbrace{F \dots F}_{n-m \text{ раз}} \tag{10}$$

т.к. испытания независимы, $P(A_1^{'}) = p^k q^{n-k}$.

Остальные элементарные исходы, благоприятствующие $A^{'}$ отличаются только расстановкой событий T и F. Количество таких расстановок равно C_n^m. Получаем

$$P_{n,m}(A) = C_n^m p^m q^{n-m} \tag{11}$$

■

5 Наивероятнейшее число успехов

Опр. 12. *m^* - наивероятнейшее число успехов в данной серии испытаний относительно события A, если при данном m: $P(A_{n,m}) \to \max$*

$$pn - q \leq k \leq pn + q \tag{12}$$

Proof.

$$\textbf{TODO} \tag{13}$$

■