Знакопеременные и знакочередующиеся ряды

18.09.24

NB:. Знакочередующимся называется ряд, где знак меняется для каждого следующего члена ряда. В знакопеременном ряде знак может изменяться по любому правилу.

1 Признак Лейбница

Теорема 1.0.1. *Признак Лейбница (о сходимости знакочередующегося ряда)*
Дан знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}U_n$. Если последоавтельность модулей членов ряда монотонно убывает и $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$, то ряд сходится.

Proof. Рассмотрим частичную сумму S_{2k}:

$$S_{2k} = (U_1 - U_2) + (U_3 - U_4) + \cdots + (U_{2k-1} - U_{2k}) \tag{1}$$

Все скобки > 0, т.к. модули членов ряда убывают. Тогда $S_{2k} > 0$ и возрастает с увеличением k.

$$0 < S_{2k} \leq U_1 \tag{2}$$

Сумма S_{2k} положительна и ограничена сверху, тогда она имеет конечный предел S.
Рассмотрим сумму $S_{2k+1} = S_{2k} + U_{2k+1}$:

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} + \underbrace{\lim_{k\to\infty} U_{2k+1}}_{\text{= 0 т.к. ряд убывает}} = S + 0 = S \\ &\lim_{n\to\infty} S_n = S. \end{aligned} \tag{3}$$

$\implies$ ряд сходится. ∎

Следствие 1.0.1. *Остаток знакочередующегося ряда по модулю не превосходит первого отброшенного члена.*

$$|r_n| \leq |(-1)^n U_{n+1}| \tag{4}$$

2 Абсолютная сходимость знакопеременного ряда

Опр. 1. *Ряд называется* ***абсолютно сходящимся****, если сходится ряд модулей его членов. Если ряд сходится, а ряд модулей его членов расходится, то такой ряд* *называется* ***условно сходящимся***

Теорема 2.0.1. *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.*

Proof. $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ знакопеременный, сходится абсолютно. $\sum_{n=1}^{\infty} V_n = U_n + |U_n|$. Очевидно, что $V_n < 2|U_n|$. Так как сходится $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$, сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} 2|U_n|$. Тогда: V_n сходится по мажорантному признаку,

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty}(U_n + |U_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n + \sum_{n=1}^{\infty} |U_n| \\ \implies \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} V_n}_{\text{сход.}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|}_{\text{сход.}} \implies \sum_{n=1}^{\infty} U_n \text{ сходится}\end{gathered} \tag{5}$$

■

2.1 Свойства абсолютно сходящихся рядов

Свойство 2.1.1. *Сумма и сходимость ряда не меняются от перестановки членов ряда местами.*

Свойство 2.1.2. $|\sum_{n=1}^{\infty} U_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$

02.10.24