

Знакоположительные ряды.

Свойства сходящихся рядов

4.09.24, 18.09.24

Опр. 1. Ряд

Сумма членов бесконечной последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется рядом и равна пределу последовательности его частичной суммы:

$$a_1 + a_2 + a_3 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n U_k \quad (1)$$

При этом a_n называется **общим членом ряда**

Опр. 2. Частичная сумма ряда - это сумма его первых n членов:

$$S_n = \sum_{k=1}^n U_k \quad (2)$$

Опр. 3. Остаток ряда r_n - сумма ряда, остающаяся после отбрасывания частичной суммы ряда.

NB: Ряд и его остаток сходятся или расходятся одновременно.

Proof. **TODO** ■

1 Исследование сходимости ряда

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum S_k = S \in \mathbb{R}$ - предел последовательности частичных сумм ряда.

$$\begin{aligned} \text{существует и сходится } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum S_k = S \in \mathbb{R} &\implies \text{ряд сходится ("к сумме S")} \\ \text{иначе} &\implies \text{ряд расходится} \end{aligned} \quad (3)$$

1.1 Признаки сходимости для знакоположительных рядов

Признак 1.1.1. Мажорантный признак

Для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n : \forall n : a_n \leq b_n \implies$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ расходится} &\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ тоже расходится} \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сходится} &\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ тоже сходится.} \end{aligned} \quad (4)$$

Proof. Пусть $a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_a$ - частичная сумма первого ряда,
 $b_1 + b_2 + \dots + b_n = S_b$ - частичная сумма второго ряда. Т.к. $a_n \leq b_n \implies S_a \leq S_b$.
Пусть 2-й ряд сходится, тогда

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_b = L_b, \quad (5)$$

причем $S_b < L_b \implies S_a \leq S_b < L_b \implies |S_a|$ ограничена сверху числом L_b ,
тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть 1-й ряд расходится, тогда $\lim S_a = \infty$. Т.к. $S_a \leq S_b$, $\lim S_b = \infty$,
тогда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. ■

Эталонные ряды: Гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \alpha > 1 \implies \text{сходится} \\ \alpha \leq 1 \implies \text{расходится} \end{cases} \quad (6)$$

Признак 1.1.2. Предельный признак

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ исследуемый, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - вспомогательный

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \quad (7)$$

Тогда ряды **одновременно** сходятся или расходятся

Proof.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= L \\ \iff \forall \epsilon > 0 : \exists N(\epsilon) : \forall n > N &\implies \left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \epsilon \\ \iff -\epsilon < \frac{a_n}{b_n} - L < \epsilon &\implies L > 0 \implies L - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \epsilon \\ \iff b_n(L - \epsilon) < a_n < b_n(L + \epsilon) \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть сходится ряд b_n , \implies сходится $\sum_{n=1}^{\infty} (L + \epsilon)b_n \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по мажорантному **пр.** Пусть расходится ряд $b_n \implies$ расходится $\sum_{n=1}^{\infty} (L - \epsilon)b_n \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится по мажорантному **пр.** ■

Эталонные ряды:

TODO

Признак 1.1.3. Признак Д'Аламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

$$L < 1 \implies \text{ряд сходится}$$

$$L > 1 \implies \text{ряд расходится}$$

$$L = 1 \text{ ряд может сходиться или расходиться}$$
(9)

Proof.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

$$\iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) : n > N \implies \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \epsilon$$

$$\iff L - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon$$
(10)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q < L + \epsilon$$

Докажем сходимость при $L < 1$.

Подберем ϵ так, чтобы $L + \epsilon < 1$ и $q < 1$:

$$a_2 = qa_1$$

$$a_3 = q^2 a_1$$

$$a_4 = q^3 a_1$$

$$\dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} q^n a_1 = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} q^n.$$
(11)

Если $q < 1$, то ряд сходится. Для $q > 1$ аналогично ■

Признак 1.1.4. Радикальный признак Коши

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = L$$

$$L < 1 \implies \text{ряд сходится}$$

$$L > 1 \implies \text{ряд расходится}$$

$$L = 1 \text{ ряд может сходиться или расходиться}$$
(12)

Proof.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = L$$

$$\iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) : \forall n > N(\epsilon) \implies \left| \sqrt[n]{U_n} - L \right| < \epsilon.$$

$$L - \epsilon < \sqrt[n]{U_n} < L + \epsilon$$

$$\sqrt[n]{U_n} = q < 1.$$
(13)

Пусть $L > 1$. Выберем $\epsilon : L - \epsilon > 1 \implies q > 1$

$U_n = q^n > 1 \implies \lim U_n \leq 0$, т.е. ряд расходится. ■

Признак 1.1.5. Интегральный признак Коши

Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$, члены которого являются значениями непрерывной, неотрицательной и монотонно убывающей на $[1, +\infty]$ функции $f(x)$ при целых x :

$$U_1 = f(1), U_2 = f(2), \dots, U_n = f(n). \quad (14)$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно

Proof. **TODO** ■

1.2 Свойства сходящихся рядов

Свойство 1.2.1. Необходимое условие сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (15)$$

Proof. **TODO** ■

NB.: свойство не работает в обратную сторону.

Пример - гармонический ряд (расходится):

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \dots + \frac{1}{n} = S_n$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n} = S'_n$$

$$\begin{aligned} S'_n &\leq S_n \\ S'_1 &= 1 \\ S'_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\ S'_4 &= 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \\ S'_8 &= 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 \\ &\dots \\ S'_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} \cdot 2^k \rightarrow \infty \text{ при } k \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (16)$$

Если сумма S'_n меньшего ряда расходится, то сумма S_n также расходится (по [мажорантному признаку](#)). При этом общий член стремится к нулю: $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

Свойство 1.2.2. Достаточное условие расходимости ряда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \not\rightarrow 0 \implies \text{ряд расходится} \quad (17)$$

Proof. Предположим, что сходится. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ по [св-ву 1.2.1](#), противоречие ■

Свойство 1.2.3. Сходящиеся ряды можно почленно складывать, при этом сходимость не изменится, а сумма полученного ряда будет равна сумме сумм исходных рядов.

Proof. **TODO** ■

Свойство 1.2.4. При умножении сходящегося ряда на число, сходимость не изменится, при этом сумма изменится в это число раз.

Proof.

$$\begin{aligned} 1. \sum_{n=1}^{\infty} U_n &= S_n; & \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= S \\ 2. \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot U_n &= S'_n, \end{aligned}$$

$$\text{тогда: } S'_n = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot U_n = c \sum_{n=1}^{\infty} U_n = c \cdot S_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = c \cdot S$$

■

Свойство 1.2.5. Сходимость ряда не изменится, если к нему прибавить или отбросить конечное число слагаемых.