4 сентября 2024

Опр. 1. ***Ряд***
Сумма членов бесонечной последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется рядом и равна пределу последовательности его частичной суммы:*

$$a_1 + a_2 + a_3 ... = \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} U_k \tag{1}$$

При этом a_n *называется* ***общим членом ряда***

Опр. 2. *Остаток ряда* r_n *- сумма ряда, остающаяся после отбрасывания частичной суммы ряда.*

1 Исследование сходимости ряда

Опр. 3.

$$\begin{gathered} \text{существует и конечен } \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} U_k \implies \text{ряд сходится} \\ \text{иначе} \implies \text{ряд расходится} \end{gathered} \tag{2}$$

1.1 Признаки сходимости для знакоположительных рядов

Признак 1.1.1. *Мажорантный признак*
Для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n : \forall n : a_n \leq b_n \implies$

$$\begin{gathered} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ расходится} \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ тоже расходится} \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сходится} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ тоже сходится.} \end{gathered} \tag{3}$$

Proof. TODO ■

Признак 1.1.2. *Предельный признак*

$$\begin{gathered} \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n : \exists \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \\ \text{Тогда ряды \textbf{одновременно} сходятся или расходятся} \end{gathered} \tag{4}$$

Proof. TODO ■

1.2 Свойства сходящихся рядов

Свойство 1.2.1. *Необходимое условие сходимости ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{сходится} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{5}$$

Замечание. не работает в обратную сторону. Пример - гармонический ряд: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, но ряд расходится

Свойство 1.2.2. *Достаточное условие расходимости ряда*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \nrightarrow 0 \implies \textit{ряд расходится} \tag{6}$$

Proof. Предположим, что сходится. Тогда $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ по св-ву 1.2.1, противоречие ■

Свойство 1.2.3. *Линейность.*
- сходящиеся ряды можно почленно складывать, сходимость рез-та не изменится
- при умножении всех членов ряда на число сходимость не меняется (а сумма ряда изменится в это число раз)
- сходимость не меняется для частичной суммы/остатка ряда