

# Знакопеременные и знакочередующиеся ряды

18.09.24

*NB:* Знакопередающим называется ряд, где знак меняется для каждого следующего члена ряда. В знакопеременном ряде знак может изменяться по любому правилу.

**Теорема 0.0.1.** *Признак Лейбница (о сходимости знакочередующегося ряда)*

Дан знакочередующийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} U_n$ . Если последовательность модулей членов ряда монотонно убывает и  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$ , то ряд сходится.

*Proof.* Рассмотрим частичную сумму  $S_{2k}$ :

$$S_{2k} = (U_1 - U_2) + (U_3 - U_4) + \dots + (U_{2k-1} - U_{2k}) \quad (1)$$

Все скобки  $> 0$ , т.к. модули членов ряда убывают. Тогда  $S_{2k} > 0$  и возрастает с увеличением  $k$ .

$$0 < S_{2k} \leq U_1 \quad (2)$$

Сумма  $S_{2k}$  положительна и ограничена сверху, тогда она имеет конечный предел  $S$ .

Рассмотрим сумму  $S_{2k+1} = S_{2k} + U_{2k+1}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k+1} &= \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} + \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} U_{2k+1}}_{= 0 \text{ т.к. ряд убывает}} = S + 0 = S \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= S. \end{aligned} \quad (3)$$

$\Rightarrow$  ряд сходится. ■

**Следствие 0.0.1.**

## 1 Абсолютная сходимость знакопеременного ряда

**Опр. 1.** Ряд называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд модулей его членов. Если ряд сходится, а ряд модулей его членов расходится, то такой ряд называется **условно сходящимся**.

**Теорема 1.0.1.** Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

*Proof.*  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$  знакопеременный, сходится абсолютно.  $\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty} (U_n + |U_n|)$ . Очевидно, что  $V_n < 2|U_n|$ . Так как сходится  $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$ , сходится и  $\sum_{n=1}^{\infty} 2|U_n|$ . Тогда:  $V_n$  сходится по мажорантному признаку,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} V_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (U_n + |U_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n + \sum_{n=1}^{\infty} |U_n| \\ \implies \sum_{n=1}^{\infty} U_n &= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} V_n}_{\text{сход.}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|}_{\text{сход.}} \implies \sum_{n=1}^{\infty} U_n \text{ сходится} \end{aligned} \tag{4}$$

■

## 1.1 Свойства абсолютно сходящихся рядов