Раздел II
Случайные величины

17.09.24

Опр. 1. ***Случайная величина*** *(СВ) - величина, которая может принимать все из своих возможных значений в зависимости от элементарных исходов испытания*
СВ обозначаются заглавными буквами, а их значения - соответствующими маленькими буквами:

$$X, Y, X \dots . x, y, z \tag{1}$$

Случайные величины:

- ***дискретные*** *(ДСВ) - возможные значения изолированы друг от друга (отдельные, конкретные значения, например - число, выпавшее при броске игральной кости)*
- ***непрерывные*** *(НСВ) - целиком заполняют собой определенный участок числовой прямой*

  Опр. 2. *Строгое определение: СВ X называется непрерывной, если для нее существует функция $y = f(x)$ такая, что:*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = F(x) \tag{2}$$

Пример.

$$f(x) = 0 \text{ при } x < 0, a \sin x \text{ при } 0 \le x \le \pi, 0 \text{ при } x > \pi \tag{3}$$

a - ? $F(x)$ - ? $P(\frac{\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2})$ - ?

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \implies \\ &\int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} a \sin x dx + \int_{\pi}^{+\infty} 0dx = \\ &- a \cos x|_{0}^{\pi} = -a(-1) - (-a) = 2a = 1 \implies \\ &a = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{4}$$

Пример. Ошибка при взвешивания вещества - это НСВ, кол-во ошибок - это ДСВ.

Опр. 3. ***Закон распределения*** *- соотношение между всевозможными значениями СВ и их вероятностями*

24.09.24

1 Закон распределения ДСВ

Пример. В ящике 2 белых, 8 черных шаров. Одновременно достают 3.
X - число белых среди них.

1.1 Ряд распределения

$$x_0 = 0; \quad m_1 =$$
$$x_1 = 1; \quad m_2 =$$
$$x_2 = 2; \quad m_3 =$$

x_i	01	2
p_i	$\frac{56}{120}\frac{56}{120}$	$\frac{8}{120}$

1.2 Многоугольник распределения

1.3 Функция распределения

вероятность того, что X примет определенное значение относительно x.

$$F(x) = P(X < x) \tag{6}$$

Пример.

$$F(-1) = P(X < -1) \tag{7}$$

Свойство 1.3.1. *Функция распределения везде определена:* $D(F) = (-\infty; +\infty)$

Свойство 1.3.2. *Область значений совпадает с областью значений вероятности:* $E(F) = [0; 1]$

Свойство 1.3.3. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

Свойство 1.3.4. *Функция распределения неубывающая*

Свойство 1.3.5. *Имеет разрывы I рода в точках $x = x_i$ и величина разрыва равна p_i (разрывы отсчитываются от предыдущего уровня, а не от $y = 0$)*

Свойство 1.3.6. $P(a \leq x < b) = F(b) - F(a)$

Proof.

$$\begin{aligned}
&A.x < a \\
&B.x < b \\
&C.a \leq x < b \\
&A + C = B, \text{а также } A, C \text{ несовместны} \\
&P(A + C) = P(A) + P(C)
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
&P(A) + P(C) = P(B) \implies P(C) = P(B) - P(A) = \\
&P(x < b) - P(x < a) = F(b) - F(a)
\end{aligned}$$

■

2 Закон распределения НСВ

$$P(x = x_i) = 0. \tag{9}$$

A - невозможное $\implies P(A) = 0$.

NB:. не работает в обратную сторону!

Свойство 2.0.1.

$$F(X) = P(X < x) \tag{10}$$

01.10.24

3 Числовые характеристики случайной величины

Опр. 4. ***Математическое ожидание*** *($M(x); E(x); M\xi$) - среднее по вероятности значение случайной величины. Для ДСВ:*

$$M(x) = \frac{\sum x_i p_i}{\sum p_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \tag{11}$$

Физический смысл: бр бр бррр

Переход к формуле мат. ожидания для НСВ: $x_i \to x; p_i \to f(x)dx; \sum_{i=1}^{n} \to \int_{-\infty}^{+\infty}$

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \tag{12}$$

геом. смысл: соответсвует абсциссе центра тяжести графика фигуры, образованной графиком $f(x)$

Опр. 5. ***Мода*** m_o *- наиболее возможное значение случайной величины*

Опр. 6. ***Медиана*** m_e*- такое значение, что вероятность того, что*

$$P(x < m_e) = P(x > m_e) = \frac{1}{2} \tag{13}$$

геом. смысл: точка, которая делит площадь под графиком плотности пополам.

NB:. Если распределение дискретное и не симметричное, то за m_e принимают такое значение СВ, что сумма вероятностей до него и после него минимально отличаются друг от друга.

Опр. 7. ***Дисперсия*** $D(x)$ *- степень отклонения значений СВ от мат. ожидания. Или: степень разброса значений СВ относительно мат. ожидания.*

$$D(x) = M((x - M(x))^2) \tag{14}$$

Для ДСВ:

$$D(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(x))^2 p_i \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
&(x - M(x))^2 = x^2 - 2xM(x) + (M(x))^2 \\
&M(x^2 - 2xM(x) + (M(x))^2) = M(x^2) - 2M(x)M(x) + (M(x))^2 = \\
&M(x^2) - 2(M(x))^2 + (M(x))^2 = \\
&M(x^2) - (M(x))^2
\end{aligned} \tag{16}$$

Для НСВ:

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - M(x))^2 f(x)dx \tag{17}$$

Пример.

$$\begin{aligned}
x_i &=: 0; 1; 2 \\
p_i &=: \frac{7}{15}; \frac{7}{15}; \frac{1}{15}
\end{aligned} \tag{18}$$

для ДСВ:

$$M(x) = 0 \cdot \frac{7}{15} + 1 \cdot \frac{7}{15} + 2 \cdot \frac{1}{15} = \frac{9}{15}$$

$$m_o = 0 \wedge m_o = 1 \text{ (две моды)}$$

$$m_e = 1$$

(19)

$$\begin{aligned} & D(x) = 0^2 \cdot \frac{7}{15} + 1^2 \cdot \frac{7}{15} + 2^2 \cdot \frac{1}{15} - \frac{9}{15}^2 \\ & = \frac{7}{15} + \frac{4}{15} - \frac{81}{225} \\ & = \frac{28}{75} \end{aligned}$$

для НСВ:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \frac{1}{2} \sin x; 0 \leq x \geq \pi \\ 0, x > \pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & M(x) = \\ & = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P(x < m_e) = \frac{1}{2} \text{ ясно, что } m_e \in [0; \pi] \\ & P(x < m_e) = \int_{-\infty}^{m_e} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^{m_e} \frac{1}{2} \sin x dx = \frac{1}{2} \\ & \implies \int_0^{m_e} \frac{1}{2} \sin x dx = \frac{1}{2} \dots \\ & \dots = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(x))^2 \\ & = \int_0^{\pi} x^2 \frac{1}{2} \sin x dx - \frac{\pi}{2}^2 \\ & = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx - \frac{\pi}{2}^2 \\ & = \dots = \end{aligned}$$

Опр. 8. ***Среднеквадратическое отклонение*** *(СКО)* $\sigma(x)$

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} &[M(x)] = [m_o] = [m_e] = [x] \\ &[D(x)] = [x^2] \\ &[\sigma(x)] = [x] \end{aligned} \tag{22}$$

имеет ту же размерность, что и мат. ожидание

3.1 Основные свойства мат. ожидания$M(x)$

Свойство 3.1.1. $M(C) = C$

Свойство 3.1.2. $M(x \cdot C) = C \cdot M(x)$

Proof. ■

Свойство 3.1.3. $M(x + -y) = M(x) + -M(y)$

Proof. ■

Свойство 3.1.4. *если* x, y *независимы:* $M(x \cdot y) = M(x) \cdot M(y)$

3.2 Основные свойства дисперсии $D(x)$

Свойство 3.2.1. $D(C) = 0$

Свойство 3.2.2. $D(s \cdot C) = C^2 D(x)$

Proof.

$$\begin{aligned} &D(x \cdot C) \\ &= M((xC - M(xC)))^2 \\ &= M((xC - CM(x)))^2 \\ &= M(C^2(x - M(x))^2) \\ &= C^2 M((x - M(x)))^2 \\ &= C^2 D(x) \end{aligned} \tag{23}$$

■

Свойство 3.2.3. *если* x, y *независимы:* $D(x + -y) = D(x) + -D(y)$

3.3 Понятие о начальных и центральных теоретических моментах

Опр. 9. ***Начальный момент порядка k***

$$\nu_k = M(x^k) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \text{ для ДСВ} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx \text{ для НСВ} \end{cases} \tag{24}$$

Опр. 10. ***Центральный момент порядка k***

$$\mu_k = M((x - M(x))^k) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(x))^k \text{ для ДСВ} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^k f(x) dx \text{ для НСВ} \end{cases} \tag{25}$$

Пример.

$$\begin{aligned} \mu_2 &= D(x) = \nu_2 - (\nu_1)^2 \\ D(x) &= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - (M(x))^2 = \nu_2 - (\nu_1)^2 \end{aligned} \tag{26}$$

Опр. 11. ***Коэффициент асимментрии*** *- характеризует меру скошенности распределения*

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \tag{27}$$

Опр. 12. ***Коэффициент эксцесса*** *- степень "пологости". $E_k > 0$ - "заостренное", $E_k < 0$ - "пологое"*

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \tag{28}$$

4 Основные законы распределения случайных величин

4.1 Дискретные

Опр. 13. ***Равномерное*** *- все вероятности одинаковы*

$$p_i = \frac{1}{n} \tag{29}$$

при этом

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{n+1}{2} \\ D(x) &= \frac{n^2 - 1}{12} \end{aligned} \tag{30}$$

Пример. бросание игральной кости