Знакоположительные ряды.
Свойства сходящихся рядов

4.09.24, 18.09.24

Опр. 1. ***Ряд***
Сумма членов бесонечной последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется рядом и равна пределу последовательности его частичной суммы:

$$a_1 + a_2 + a_3 ... = \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} U_k \tag{1}$$

При этом a_n называется ***общим членом ряда***

Опр. 2. ***Частичная сумма ряда*** *- это сумма его первых n членов:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k \tag{2}$$

Опр. 3. ***Остаток ряда*** r_n *- сумма ряда, остающаяся после отбрасывания частичной суммы ряда.*

NB:. Ряд и его остаток сходятся или расходятся одновременно.

Proof. TODO ■

1 Исследование сходимости ряда

$\lim_{n\to\infty} \sum S_k = S \in \mathbb{R}$ - предел последовательности частичных сумм ряда.

$$\begin{aligned} \text{существует и сходится } \lim_{n\to\infty} \sum S_k = S \in \mathbb{R} &\implies \text{ряд сходится ("к сумме } S\text{")} \\ \text{иначе} &\implies \text{ряд расходится} \end{aligned} \tag{3}$$

Теорема 1.0.1. ***Необходимое условие сходимости ряда***

$$\sum U_n \text{ сходится} \implies \lim_{n\to\infty} U_n = 0. \tag{4}$$

Удобнее использовать признак расходимости:

$$\lim_{n\to\infty} U_n! = 0 \implies \text{ ряд расходится} \tag{5}$$

1.1 Признаки сходимости для знакоположительных рядов

Признак 1.1.1. ***Мажорантный признак***

Для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n : \forall n : a_n \leq b_n \implies$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ расходится } &\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ тоже расходится} \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сходится } &\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ тоже сходится.} \end{aligned} \tag{6}$$

Proof. Пусть $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_a$ - частичная сумма первого ряда, $b_1 + b_2 + \cdots + b_3 = S_b$ - частичная сумма второго ряда. Т.к. $a_n \leq b_n \implies S_a \leq S_b$. Пусть 2-й ряд сходится, тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_b = L_b, \tag{7}$$

причем $S_b < L_b \implies S_a \leq S_b < L_b \implies |S_a|$ ограничена сверху числом L_b, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть 1-й ряд расходится, тогда $\lim S_a = \infty$. Т.к. $S_a \leq S_b$, $\lim_{S}b = \infty$, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_b$ расходится.

∎

Эталонные ряды: *Гармонический ряд* ***TODO***

Признак 1.1.2. ***Предельный признак***

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *исследуемый,* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *- вспомогательный*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n : \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \tag{8}$$

Тогда ряды ***одновременно*** *сходятся или расходятся*

Proof.

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \\ &\iff \forall \epsilon > 0 : \exists N(\epsilon) : \forall n > N \implies |\frac{a_n}{b_n} - L| < \epsilon \\ &\iff -\epsilon < \frac{a_n}{b_n} - L < \epsilon \implies L > 0 \implies L - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \epsilon \\ &\iff b_n(L-\epsilon) < a_n < b_n(L+\epsilon) \end{aligned} \tag{9}$$

Пусть сходится ряд b_n, $\implies$ сходится $\sum_{n=1}^{\infty}(L+\epsilon)b_n \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по мажорантному пр. Пусть расходится ряд $b_n \implies$ расходится $\sum_{n=1}^{\infty}(L-\epsilon)b_n \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится по мажорантному пр.

∎

Эталонные ряды:

TODO

Признак 1.1.3. ***Признак Д'Аламбера***

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$$
$$\begin{aligned}
&L<1 \implies \textit{ряд сходится}\\
&L>1 \implies \textit{ряд расходится}\\
&L=1\textit{ряд может сходиться или расходится}
\end{aligned}\tag{10}$$

Proof.
$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L\\
&\iff \forall\epsilon>0 \quad \exists N(\epsilon): n>N \implies |\frac{a_{n+1}}{a_n}-L|<\epsilon\\
&\iff L-\epsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<L+\epsilon
\end{aligned}\tag{11}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<L+\epsilon$$

Докажем сходимость при $L<1$.
Подберем ϵ так, чтобы $L+\epsilon<1$ и $q<1$:

$$\begin{aligned}
&a_2=qa_1\\
&a_3=q^2a_1\\
&a_4=q^3a_1\\
&\dots\\
&\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}q^na_1=a_1\sum_{n=1}^{\infty}q^n.
\end{aligned}\tag{12}$$

Если $q<1$, то ряд сходится. Для $q>1$ аналогично ■

Признак 1.1.4. ***Радикальный признак Коши***

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=L$$
$$\begin{aligned}
&L<1 \implies \textit{ряд сходится}\\
&L>1 \implies \textit{ряд расходится}\\
&L=1\textit{ряд может сходиться или расходится}
\end{aligned}\tag{13}$$

Proof.
$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=L\\
&\iff \forall\epsilon>0 \quad \exists N(\epsilon): \forall n>N(\epsilon) \implies |\sqrt[n]{U_n}|<\epsilon.\\
&L-\epsilon<\sqrt[n]{U_n}<L+\epsilon\\
&\sqrt[n]{U_n}=q<1.
\end{aligned}\tag{14}$$

Пусть $L>1$. Выберем $\epsilon: L-\epsilon>1 \implies q>1$
$U_n=q^n>1 \implies \lim U_n\leq 0$, т.е. ряд расходится. ■

Признак 1.1.5. ***Интегральный признак Коши***
Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$, члены которого являются значениями непрерывной, неотрицательной и монотонно ***убывающей*** *на $[1, +\infty]$ функции $f(x)$ при целых x:*

$$U_1 = f(1), U_2 = f(2), \ldots, U_n = f(n). \tag{15}$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся ***одновременно***

Proof. TODO ■

1.2 Свойства сходящихся рядов

Свойство 1.2.1. *Необходимое условие сходимости ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{сходится} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{16}$$

Proof. TODO ■

NB:. свойство не работает в обратную сторону.
Пример - гармонический ряд (расходится):

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \ldots + \frac{1}{n} = S_n$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{n} = S_n^{'}$$

$$\begin{aligned}
&S_n^{'} \le S_n \\
&S_1^{'} = 1 \\
&S_2^{'} = 1 + \frac{1}{2} \\
&S_4^{'} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \\
&S_8^{'} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 \\
&\ldots \\
&S_{2^k}^{'} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2^k \to \infty \text{ при } k \to \infty
\end{aligned} \tag{17}$$

Если сумма $S_n^{'}$ меньшего ряда расходится, то сумма S_n также расходится (по мажорантному признаку). При этом общий член стремится к нулю: $\frac{1}{n} \to \infty$ при $n \to \infty$

Свойство 1.2.2. *Достаточное условие расходимости ряда*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \nrightarrow 0 \implies \textit{ряд расходится} \tag{18}$$

Proof. Предположим, что сходится. Тогда $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ по св-ву 1.2.1, противоречие ■

Свойство 1.2.3. *Сходящиеся ряды можно почленно складывать, при этом сходимость не изменится, а сумма полученного ряда будет равна сумме сумм исходных рядов.*

Proof. TODO ■

Свойство 1.2.4. *При умножении сходящегося ряда на число, сходимость не изменятся, при этом сумма изменится в это число раз.*

Proof.

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty} U_n = S_n; \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

$$2.\ \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot U_n = S_n^{'},$$

$$\text{тогда:} \qquad S_n^{'} = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot U_n = c\sum_{n=1}^{\infty} U_n = c \cdot S_n, \qquad \lim_{n\to\infty} S_n^{'} = c \lim_{n\to\infty} S_n = c \cdot S$$

■

Свойство 1.2.5. *Сходимость ряда не изменится, если к нему прибавить или отбросить конечное число слагаемых.*