Функциональные ряды

02.10.24

Опр. 1. *Ряд, члены которых - это функции*

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \tag{1}$$

где $\{U_n(x)\}$ *называется функциональной последовательностью*

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \text{ - степенной ряд} \tag{2}$$

Опр. 2. ***Частичная сумма функционального ряда***

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x) \tag{3}$$

$\{S_n(x)\}$ *- последовательность частичных сумм*

Опр. 3. ***Функциональная последовательность***

$$\{f_n(x)\} \tag{4}$$

сходимость функциональной последовательности:

$$\begin{gathered} \{f_n(x)\} \text{ сходится на } X \text{ к } f(x) \\ \lim_{\to\infty} f_n(x) = f(x) \\ f_n(x) \to f(x) \Leftrightarrow \forall x_0 \in X \\ \lim_{\to\infty} f_n(x) = f_x \\ f(x), f_n(x) \text{ опеределены на } X \end{gathered} \tag{5}$$

говорят, что функциональный ряд сходится на множестве X*, если* $S_n(x) \to S(x)$ *на* X*.*

$$\begin{gathered} \text{Если } \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x_0) \text{ сходится, то } x_0 \text{ - точка сходимости} \\ \text{Если } \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x_0) \text{ расходится, то } x_0 \text{ - точка расходимости} \end{gathered} \tag{6}$$

при этом X *назыается* ***областью сходимости (расходимости)*** *ряда.*

Пример.

$$\begin{gathered}\sum \frac{n+1}{x^3} \text{ везде расходится:} \\ \lim_{\to\infty} U_n(x) = \lim_{\to\infty} \frac{n+1}{x^3} = \frac{1}{x^3} \lim_{\to\infty}(n+1) = \infty.\end{gathered} \tag{7}$$

Пример.

$$\begin{gathered}\sum x^n \cdot n! \text{ - сходится только в 0} \\ \sum \frac{x^n}{n!} \text{ - везде сходится} \\ \sum \frac{1}{x^n \cdot n!} \text{ - расходится при } x = 0\end{gathered} \tag{8}$$

Пример.

$$\begin{aligned}&\sum x^n - \text{ геом. ряд} \\ &|x| < 1 \implies \text{ сходится} \\ &|x| >= 1 \implies \text{ расходится} \\ &(-1; 1) \text{ - область сходимости}\end{aligned} \tag{9}$$

1 Нахожедение области абсолютной сходимости

Теорема 1.0.1. ***признак Д'Аламбера***

$$\lim_{\to\infty} |\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}| < 1 \implies \textit{решаем} \tag{10}$$

Пример.

$$\begin{aligned}&\sum \frac{(-1)^n \cdot 5^n}{(2n+5)(3x-2)^{2n}} \\ \\ &U_{n+1}(x) = \frac{5 \cdot 5^n}{(2n+5)(3x-2)^{2n+2}} \\ &\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} = \dots = \frac{5(2n+3)}{(2n+5)(3x-2)^2} \\ &\lim_{\to\infty} |\frac{5(2n+3)}{(2n+5)(3x-2)^2}| = \frac{5}{(3x-2)^2} \underbrace{\lim_{\to\infty} \frac{2n+3}{2n+5}}_{=1} < 1 \\ &\frac{5}{(3x-2)^2} < 1 \\ &\frac{(3x-2)^2}{5} > 1 \\ &(3x-2)^2 > 5 \\ &|3x-2| > \sqrt{5} \\ &3x-2 > \sqrt{5} \implies x > \frac{2+\sqrt{5}}{3} \\ &3x-2 < -\sqrt{5} \implies x < \frac{2-\sqrt{5}}{3} \\ &x \in (-\infty; \frac{2-\sqrt{5}}{3}) \cup (\frac{2+\sqrt{5}}{3}; +\infty) \text{ - область абсолютной сходимости ряда}\end{aligned} \tag{11}$$

концы проверяем отдельно:

Proof. TODO ■

Теорема 1.0.2. ***признак Коши***

$$\lim_{\to\infty}\left|\sqrt[n]{U_n(x)}\right| < 1 \implies \textit{решаем} \tag{12}$$

2 Равномерная сходимость функционального ряда

Опр. 4. *ряд называется равномерно сходящимся на множестве $X \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 : \exists N(\epsilon)$ и не зависящее от x:*

$$\begin{gathered}\forall n > N \implies |S_n(x) - S(x)| < \epsilon \Leftrightarrow |R_n(x)| < \epsilon \\ |S_n(x) - S(x)| = |S(x) - S_n(x)| = |R_n(x)|\end{gathered} \tag{13}$$

Пример. ряд, сходящийся неравномерно:

$$\text{TODO} \tag{14}$$

2.1 Признаки равномерной сходимости

Теорема 2.1.1. *Признак равномерной сходимости* ***Вейрштрасса.*** *Если члены функционального ряда $\sum U_n(x)$ не превосходят на некотором множестве X членов сходящегося числового ряда, то на X ряд $\sum U_n(x)$ сходится равномерно*

Proof.

$$\begin{aligned} &1. \sum U_n(x) && && \text{Остаток: } R_n \\ &2. \sum |U_n(x)| && && \text{Остаток: } F_n \\ &3. \sum C_n && \text{числовой ряд, сходится.} && \text{Остаток: } P_n \end{aligned} \tag{15}$$

$$\forall x \in X : |U_n(x)| \leq C_n$$

Если ряд 3 сходится, то ряд 2 сходится на X по признаку сравнения. Тогда ряд 1 сходится абсолютно на $X \implies$ сходится на X.
Докажем равномерную сходимость.

$$\begin{aligned} &U_n(x) \leq |U_n(x)| \leq C_n \\ &R_n(x) \leq F_n(x) \leq P_n(x) \\ &|R_n(x)| \leq F_n(x) \leq P_n(x) \forall x \in X \end{aligned} \tag{16}$$

Так как 3 сходится, то $\lim_{\to\infty} P_n = 0$ (по св-ву сходящегося числового ряда). Тогда

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 : \exists N(\epsilon)\\
&\implies |P_n - 0| < \epsilon\\
&\implies |P_n < \epsilon|;\\
&|P_n < \epsilon| \forall x \in X
\end{aligned} \tag{17}$$

■