Знакоположительные ряды. Свойства сходящихся рядов

4.09.24, 18.09.24

Опр. 1. ***Ряд***
Сумма членов бесонечной последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется рядом и равна пределу последовательности его частичной суммы:

$$a_1 + a_2 + a_3 ... = \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} U_k \tag{1}$$

*При этом a_n называется **общим членом ряда***

Опр. 2. ***Частичная сумма ряда*** *- это сумма его первых n членов:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k \tag{2}$$

Опр. 3. ***Остаток ряда*** *r_n - сумма ряда, остающаяся после отбрасывания частичной суммы ряда.*

NB:. Ряд и его остаток сходятся или расходятся одновременно.

Proof. TODO ■

1 Исследование сходимости ряда

$$\begin{aligned} \text{существует } \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} U_k = S \in \mathbb{R} &\implies \text{ряд сходится ("к сумме } S\text{")} \\ \text{иначе } &\implies \text{ряд расходится} \end{aligned} \tag{3}$$

1.1 Признаки сходимости для знакоположительных рядов

Признак 1.1.1. ***Мажорантный признак***
Для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n : \forall n : a_n \leq b_n \implies$

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ расходится } \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ тоже расходится}\\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ сходится } \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ тоже сходится.}\end{gathered} \tag{4}$$

Proof. Пусть $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_a$ - частичная сумма первого ряда, $b_1 + b_2 + \cdots + b_3 = S_b$ - частичная сумма второго ряда. Т.к. $a_n \leq b_n \implies S_a \leq S_b$. Пусть 2-й ряд сходится, тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_b = L_b, \tag{5}$$

причем $S_b < L_b \implies S_a \leq S_b < L_b \implies |S_a|$ ограничена сверху числом L_b, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть 1-й ряд расходится, тогда $\lim S_a = \infty$.Т.к. $S_a \leq S_b$, $\lim_{S\ b} = \infty$, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_b$ расходится.

■

Признак 1.1.2. ***Предельный признак***

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ исследуемый, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - вспомогательный

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n : \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L,\\ \textit{Тогда ряды } \textbf{\textit{одновременно}} \textit{ сходятся или расходятся}\end{gathered} \tag{6}$$

Proof.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L\\ &\iff \forall \epsilon > 0 : \exists N(\epsilon) : \forall n > N \implies |\frac{a_n}{b_n} - L| < \epsilon\\ &\iff -\epsilon < \frac{a_n}{b_n} - L < \epsilon \implies L > 0 \implies L - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \epsilon\\ &\iff b_n(L - \epsilon) < a_n < b_n(L + \epsilon)\end{aligned} \tag{7}$$

Пусть сходится ряд b_n, $\implies$ сходится $\sum_{n=1}^{\infty}(L + \epsilon)b_n \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по мажорантному пр. Пусть расходится ряд $b_n \implies$ расходится $\sum_{n=1}^{\infty}(L - \epsilon)b_n \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится по мажорантному пр.

■

Признак 1.1.3. ***Признак Д'Аламбера***

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L\\ &\qquad L < 1 \implies \textit{ряд сходится}\\ &\qquad L > 1 \implies \textit{ряд расходится}\\ &\qquad L = 1 \textit{ряд может сходиться или расходится}\end{aligned} \tag{8}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \\
&\iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) : n > N \implies |\frac{a_{n+1}}{a_n} - L| < \epsilon \\
&\iff L - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q < L + \epsilon$$

Докажем сходимость при $L < 1$.

Подберем ϵ так, чтобы $L + \epsilon < 1$ и $q < 1$:

$$\begin{aligned}
&a_2 = qa_1 \\
&a_3 = q^2 a_1 \\
&a_4 = q^3 a_1 \\
&\ldots \\
&\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} q^n a_1 = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} q^n.
\end{aligned} \tag{10}$$

Если $q < 1$, то ряд сходится. Для $q > 1$ аналогично ■

Признак 1.1.4. ***Радикальный признак Коши***

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = L \\
&L < 1 \implies \textit{ряд сходится} \\
&L > 1 \implies \textit{ряд расходится} \\
&L = 1 \textit{ряд может сходиться или расходится}
\end{aligned} \tag{11}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = L \\
&\iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) : \forall n > N(\epsilon) \implies |\sqrt[n]{U_n}| < \epsilon. \\
&L - \epsilon < \sqrt[n]{U_n} < L + \epsilon \\
&\sqrt[n]{U_n} = q < 1.
\end{aligned} \tag{12}$$

Пусть $L > 1$. Выберем $\epsilon : L - \epsilon > 1 \implies q > 1$

$U_n = q^n > 1 \implies \lim U_n \leq 0$, т.е. ряд расходится. ■

Признак 1.1.5. ***Интегральный признак Коши***

Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$, члены которого являются значениями непрерывной, неотрицательной и монотонно ***убывающей*** *на $[1, +\infty]$ функции $f(x)$ при целых x:*

$$U_1 = f(1), U_2 = f(2), \ldots, U_n = f(n). \tag{13}$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся ***одновременно***

Proof. TODO ■

1.2 Свойства сходящихся рядов

Свойство 1.2.1. *Необходимое условие сходимости ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{сходится} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{14}$$

Proof. TODO ■

NB:. свойство не работает в обратную сторону.
Пример - гармонический ряд (расходится):

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \ldots + \frac{1}{n} = S_n$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{n} = S_n'$$

$$\begin{aligned}
&S_n' \leq S_n \\
&S_1' = 1 \\
&S_2' = 1 + \frac{1}{2} \\
&S_4' = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \\
&S_8' = 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 \\
&\ldots \\
&S_{2^k}' = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2^k \to \infty \text{ при } k \to \infty
\end{aligned} \tag{15}$$

Если сумма S_n' меньшего ряда расходится, то сумма S_n также расходится (по мажорантному признаку). При этом общий член стремится к нулю: $\frac{1}{n} \to \infty$ при $n \to \infty$

Свойство 1.2.2. *Достаточное условие расходимости ряда*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \nrightarrow 0 \implies \textit{ряд расходится} \tag{16}$$

Proof. Предположим, что сходится. Тогда $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ по св-ву 1.2.1, противоречие ■

Свойство 1.2.3. *Сходящиеся ряды можно почленно складывать, при этом сходимость не изменится, а сумма полученного ряда будет равна сумме сумм исходных рядов.*

Proof. TODO ■

Свойство 1.2.4. *При умножении сходящегося ряда на число, сходимость не изменятся, при этом сумма изменится в это число раз.*

Proof.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} U_n = S_n; \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot U_n = S_n^{'},$$

тогда: $\quad S_n^{'} = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot U_n = c \sum_{n=1}^{\infty} U_n = c \cdot S_n, \quad \lim_{n\to\infty} S_n^{'} = c \lim_{n\to\infty} S_n = c \cdot S$

■

Свойство 1.2.5. *Сходимость ряда не изменится, если к нему прибавить или отбросить конечное число слагаемых.*