

Раздел I

Случайные события

03.09.24

Теория вероятностей — наука, изучающая закономерности в массовых случайных явлениях. Разделы курса: случайные события, случайные величины, предельные теоремы.

1 Основные понятия и формулы

- Ω пространство элементарных исходов
- $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ множество всех единственно равновозможных исходов данного эксперимента
- F σ -алгебра случайных событий
- \mathbb{P} вероятность
- $A, B, C \dots$ случайные события
- U, Ω достоверное событие
- V, \emptyset невозможное событие
- $\bar{A}, \{\omega_i, \omega_i \notin A\}$ противоположное событие

Вероятность случайного события A определяем как $P(A) = w_i, w_i \in [0, 1]$.

Опр. 1. Полная группа событий События H_1, \dots, H_n образуют полную группу событий, если они попарно несовместны и среди них содержатся все элементарные исходы

NB: Т.к. события полной группы несовместны, то вероятность их суммы равна сумме их вероятностей, и при этом она равна единице:

$$P(H_1) + \dots + P(H_n) = 1 \quad (1)$$

Опр. 2. Условная вероятность $P(A|B)$ - вероятность наступления A при условии, что B наступило. Вычисляется как:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (2)$$

10.09.24

Теорема 1.0.1. Формула произведения вероятностей

$$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|P(A_1A_2)) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1A_2 \dots A_{n-1}) \quad (3)$$

Proof. TODO ■

Теорема 1.0.2. Формула полной вер-ти Пусть H_1, H_2, \dots, H_n - полная группа событий. A - вер-ть того, что произошло какое-то из них. Тогда

$$P(A) = \sum_1^n P(H_i)P(A|H_i) \quad (4)$$

Теорема 1.0.3. Формула Байеса Пусть H_1, H_2, \dots, H_n - полная группа событий. Известно, что A произошло. Тогда:

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_1^n P(H_i)P(A|H_i)} \quad (5)$$

Proof.

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k A)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_1^n P(H_i)P(A|H_i)} \quad (6)$$

(раскрыли усл. вер-ть по определению, в числ. применяем формулу произведения вероятностей, а в знаменателе — формулу полной вероятности) ■

2 Парадокс Монти-Холла

17.09.24

3 Схема независимых испытаний. Формула Бернулли

Опр. 3. Независимые испытания - испытания, исход каждого из которых не влияет на исход последующих

Опр. 4. Схема независимых испытаний Бернулли - неоднократное воспроизведение независимых опытов в одинаковых условиях

Теорема 3.0.1. Формула Бернулли: пусть проводится n независимых одинаковых опытов, в каждом из которых некоторое событие A может наступить с вероятностью p и не наступить с вероятностью q . Тогда вероятность того, что A наступит ровно m раз ($m \leq n$):

$$P_{n,m}(A) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (7)$$

Proof. Пусть T - A наступило ($P(T) = p$), F - " A не наступило" ($P(F) = q$), A' - A наступило m раз из n .

Рассмотрим один из элементарных исходов, благоприятствующих A' :

$$A'_1 = \underbrace{T \dots T}_{m \text{ раз}} \underbrace{F \dots F}_{n-m \text{ раз}} \quad (8)$$

т.к. испытания независимы, $P(A'_1) = p^m q^{n-m}$.

Остальные элементарные исходы, благоприятствующие A' отличаются только расстановкой событий T и F . Количество таких расстановок равно C_n^m . Получаем

$$P_{n,m}(A) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (9)$$

■

4 Наивероятнейшее число успехов

Опр. 5. m^* - наивероятнейшее число успехов в данной серии испытаний относительно события A , если при данном m : $P(A_{n,m}) \rightarrow \max$

(10)

5 Геометрическое определение вероятности