Модель №.4.
Магнитные колебания.
Связанные маятники

Ким В.Р., Вишневский С.А
Группа М3207

Задание. Два одинаковых математических маятника, связанных пружиной с коэффициентом жёсткости k на расстоянии L_1 от точки крепления маятников. Точки крепления обоих связанных маятников находятся на одном уровне. Оба математических маятника имеют одинаковые длины подвеса L и массы m (см. Рис.). Сила сопротивления для каждого маятника прямо пропорциональна скорости. Коэффициент затухания каждого маятника равен β. Для заданных начальных отклонений построить графики зависимостей углов и скоростей от времени для каждого маятника. Найти нормальные частоты. Параметры должны задаваться.

Ниже представлено подробное описание теоретических основ, необходимых для моделирования системы двух связанных математических маятников. Все определения, формулы и рассуждения приведены с обоснованием их использования в численной модели.

1. Введение и постановка задачи

Рассматривается система двух идентичных математических маятников, подвешенных на равной высоте, соединённых пружиной с коэффициентом жёсткости k. Пружина прикреплена к маятникам на расстоянии L_1 от точки их крепления. Каждый маятник имеет длину L и массу m. Для каждого маятника учитывается сила затухания, пропорциональная скорости, с коэффициентом β. Целью задачи является построение графиков зависимости угловых отклонений и угловых скоростей от времени, а также определение нормальных частот системы.

2. Математический маятник: определения и базовые уравнения

Математический маятник — идеализированная модель, в которой масса сосредоточена в точке, а подвес считается нерастяжимым и безмассовым. Обобщённой координатой является угол отклонения ϕ от вертикального направления (положения равновесия).
Для малых колебаний (при условии $\sin\phi \approx \phi$) уравнение движения выводится из закона сохранения момента импульса:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{N},$$

где $\vec{M}$ — момент импульса, а $\vec{N}$ — суммарный момент сил, действующих на систему.
Приводя это уравнение к скалярной форме для колебаний вокруг точки крепления, получаем:

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2\phi = 0,$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ — собственная (естественная) частота свободного маятника, а g — ускорение свободного падения.
При наличии затухающего сопротивления, пропорционального скорости, уравнение принимает вид:

$$\ddot{\phi} + 2\beta\dot{\phi} + \omega_0^2\phi = 0.$$

Здесь β — коэффициент затухания, отражающий диссипативные процессы в системе.

3. Система двух связанных маятников

При рассмотрении двух маятников, связанных пружиной, следует учитывать взаимодействие, возникающее из-за разности их углов. Обозначим:

$$\phi_1(t), \phi_2(t)$$

— углы отклонения первого и второго маятников соответственно.
В отсутствие затухания, уравнения движения можно записать следующим образом:

$$\ddot{\phi}_1 + \omega_0^2\phi_1 - \kappa^2(\phi_2 - \phi_1) = 0,$$

$$\ddot{\phi}_2 + \omega_0^2\phi_2 + \kappa^2(\phi_2 - \phi_1) = 0.$$

Здесь введён параметр связи κ, который определяется через жёсткость пружины и геометрию системы. Часто встречается соотношение:

$$\kappa^2 = \frac{kL_1^2}{mL^2}.$$

Знак в членах, содержащих $\kappa^2(\phi_2 - \phi_1)$, отражает то, что пружинная сила стремится уменьшить разницу углов маятников.
С учётом затухания уравнения дополняются членами, пропорциональными скорости:

$$\ddot{\phi}_1 + 2\beta\dot{\phi}_1 + \omega_0^2\phi_1 - \kappa^2(\phi_2 - \phi_1) = 0,$$

$$\ddot{\phi}_2 + 2\beta\dot{\phi}_2 + \omega_0^2\phi_2 + \kappa^2(\phi_2 - \phi_1) = 0.$$

4. Преобразование в нормальные координаты и нормальные моды

Для упрощения анализа системы удобно ввести нормальные координаты:

$$\xi_1 = \phi_1 + \phi_2, \quad \xi_2 = \phi_2 - \phi_1.$$

Путём суммирования и вычитания исходных уравнений движения (без затухания для чистоты рассуждения) получаем:

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_0^2\xi_1 = 0,$$
$$\ddot{\xi}_2 + \left(\omega_0^2 + 2\kappa^2\right)\xi_2 = 0.$$

Таким образом, система сводится к двум независимым колебательным уравнениям с нормальными частотами:

$$\Omega_{n1} = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \Omega_{n2} = \sqrt{\omega_0^2 + 2\kappa^2} = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2kL_1^2}{mL^2}}.$$

Решения для нормальных координат имеют вид:

$$\xi_1(t) = \Phi_{01}\cos\left(\Omega_{n1}t + \varphi_{01}\right),$$

$$\xi_2(t) = \Phi_{02}\cos\left(\Omega_{n2}t + \varphi_{02}\right),$$

где Φ_{01}, Φ_{02} — амплитуды, а $\varphi_{01}, \varphi_{02}$ — начальные фазы, определяемые начальными условиями.
Переход обратно к углам маятников осуществляется по формулам:

$$\phi_1 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \quad \phi_2 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{2}.$$

В результате получаем общее решение для углов:

$$\phi_1(t) = \frac{1}{2}\left[\Phi_{01}\cos\left(\Omega_{n1}t + \varphi_{01}\right) + \Phi_{02}\cos\left(\Omega_{n2}t + \varphi_{02}\right)\right],$$

$$\phi_2(t) = \frac{1}{2}\left[\Phi_{01}\cos\left(\Omega_{n1}t + \varphi_{01}\right) - \Phi_{02}\cos\left(\Omega_{n2}t + \varphi_{02}\right)\right].$$

5. Режимы колебаний

В зависимости от начальных условий в системе могут возникать различные режимы колебаний:

1. **Синфазное колебание:** Если задать начальные условия так, что $\Phi_{02} = 0$, то

$$\phi_1(t) = \phi_2(t) = \frac{\Phi_{01}}{2}\cos\left(\Omega_{n1}t + \varphi_{01}\right).$$

   Оба маятника движутся синхронно с частотой $\Omega_{n1} = \omega_0$.

2. **Противофазное колебание:** Если задать начальные условия так, что $\Phi_{01} = 0$, то

$$\phi_1(t) = \frac{\Phi_{02}}{2}\cos\left(\Omega_{n2}t + \varphi_{02}\right), \quad \phi_2(t) = -\frac{\Phi_{02}}{2}\cos\left(\Omega_{n2}t + \varphi_{02}\right).$$

   Маятники движутся с частотой Ω_{n2}, но в противоположных фазах.

3. **Суперпозиция нормальных мод (биения):** При возбуждении обеих нормальных мод, например, если только один маятник изначально отклонён, решение для первого маятника может записываться как

$$\phi_1(t) = \frac{\phi_1(0)}{2}\left[\cos\left(\Omega_{n1}t\right) + \cos\left(\Omega_{n2}t\right)\right].$$

   Применяя тригонометрическую формулу для суммы косинусов, получаем:

$$\phi_1(t) = \phi_1(0)\cos\left(\frac{\Omega_{n1} + \Omega_{n2}}{2}t\right)\cos\left(\frac{\Omega_{n2} - \Omega_{n1}}{2}t\right).$$

   Здесь быстрые колебания с частотой $\frac{\Omega_{n1}+\Omega_{n2}}{2}$ амплитудно модулированы медленной огибающей с частотой $\frac{\Omega_{n2}-\Omega_{n1}}{2}$ — эффект биений. При слабой связи разность частот невелика, а период биений оценивается как

$$T_{\text{биений}} \approx \frac{2\pi}{\Omega_{n2} - \Omega_{n1}}.$$

6. Учет затухания в системе

В реальных системах затухание приводит к экспоненциальному уменьшению амплитуд. Сила затухания для каждого маятника пропорциональна его скорости, поэтому к уравнениям движения добавляется член $2\beta\dot{\phi}$. Итоговые уравнения с учетом затухания имеют вид:

$$\ddot{\phi}_1 + 2\beta\dot{\phi}_1 + \omega_0^2\phi_1 - \kappa^2(\phi_2 - \phi_1) = 0,$$

$$\ddot{\phi}_2 + 2\beta\dot{\phi}_2 + \omega_0^2\phi_2 + \kappa^2(\phi_2 - \phi_1) = 0.$$

Эти уравнения описывают, как затухание влияет на динамику системы, уменьшая амплитуду колебаний с течением времени.

7. Итоговая схема моделирования и интерпретация результатов

При численной реализации модели на Python выполняются следующие этапы:

- **Инициализация параметров:** вводятся значения m, L, L_1, k, β, g и начальные условия для ϕ_1 и ϕ_2.

- **Формулировка системы ОДУ:** записываются уравнения движения для $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ с учетом затухания и пружинной связи.

- **Численное интегрирование:** для решения системы дифференциальных уравнений используются численные методы (например, метод Рунге–Кутты).

- **Построение графиков:** полученные решения представляются в виде графиков зависимости углов $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ и их производных (угловых скоростей) от времени.

- **Определение нормальных частот:** на основании формул

$$\Omega_{n1} = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \Omega_{n2} = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2kL_1^2}{mL^2}},$$

  вычисляются нормальные частоты системы, что позволяет дополнительно проанализировать режимы синфазных и противофазных колебаний.

8. Заключение

Представленная теоретическая база охватывает основные аспекты динамики двух связанных математических маятников с учётом затухания и пружинной связи. Были приведены определения математического маятника, обоснованы базовые уравнения движения, выполнено преобразование в нормальные координаты и получены выражения для нормальных частот. Описаны режимы синфазных и противофазных колебаний, а также эффект биений при возбуждении обеих нормальных мод. Эти положения лягут в основу численного моделирования системы на Python, что позволяет визуализировать динамику угловых отклонений и скоростей, а также исследовать влияние параметров системы на её поведение.