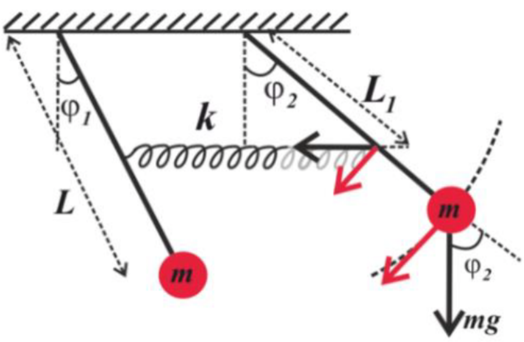
Модель №.4.
Магнитные колебания.
Связанные маятники

Ким В.Р., Вишневский С.А
Группа М3207

Задание. Два одинаковых математических маятника, связанных пружиной с коэффициентом жёсткости k на расстоянии L_1 от точки крепления маятников. Точки крепления обоих связанных маятников находятся на одном уровне. Оба математических маятника имеют одинаковые длины подвеса L и массы m (см. Рис.). Сила сопротивления для каждого маятника прямо пропорциональна скорости. Коэффициент затухания каждого маятника равен β. Для заданных начальных отклонений построить графики зависимостей углов и скоростей от времени для каждого маятника. Найти нормальные частоты. Параметры должны задаваться.



Введение и постановка задачи

Рассматривается система двух идентичных математических маятников, подвешенных на равной высоте, соединённых пружиной с коэффициентом жёсткости k. Пружина прикреплена к маятникам на расстоянии L_1 от точки их крепления. Каждый маятник имеет длину L и массу m. Для каждого маятника учитывается сила затухания, пропорциональная скорости, с коэффициентом β. Целью задачи является построение графиков зависимости угловых отклонений и угловых скоростей от времени, а также определение нормальных частот системы.

Математический маятник: определения и базовые уравнения

Математический маятник — идеализированная модель, в которой масса сосредоточена в точке, а подвес считается нерастяжимым и безмассовым. Обобщённой координатой является угол отклонения ϕ от вертикального направления (положения равновесия).
Для малых колебаний (при условии $\sin\phi \approx \phi$) уравнение движения выводится из закона сохранения момента импульса:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{N},$$

где $\vec{M}$ — момент импульса, а $\vec{N}$ — суммарный момент сил, действующих на систему.

Приводя это уравнение к скалярной форме для колебаний вокруг точки крепления, получаем:

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0,$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ — собственная (естественная) частота свободного маятника, а g — ускорение свободного падения.
При наличии затухающего сопротивления, пропорционального скорости, уравнение принимает вид:

$$\ddot{\phi} + 2\beta\dot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0.$$

Здесь β — коэффициент затухания, отражающий диссипативные процессы в системе.

Система двух связанных маятников

При рассмотрении двух маятников, связанных пружиной, следует учитывать взаимодействие, возникающее из-за разности их углов. Обозначим:

$$\phi_1(t), \phi_2(t)$$

— углы отклонения первого и второго маятников соответственно.
В отсутствие затухания, уравнения движения можно записать следующим образом:

$$\ddot{\phi}_1 + \omega_0^2 \phi_1 - \kappa^2(\phi_2 - \phi_1) = 0, \tag{1}$$
$$\ddot{\phi}_2 + \omega_0^2 \phi_2 + \kappa^2(\phi_2 - \phi_1) = 0. \tag{2}$$
$$\tag{3}$$

Здесь введён параметр связи κ, который определяется через жёсткость пружины и геометрию системы. Часто встречается соотношение:

$$\kappa^2 = \frac{kL_1^2}{mL^2}.$$

Знак в членах, содержащих $\kappa^2(\phi_2 - \phi_1)$, отражает то, что пружинная сила стремится уменьшить разницу углов маятников.
С учётом затухания уравнения дополняются членами, пропорциональными скорости:

$$\ddot{\phi}_1 + 2\beta\dot{\phi}_1 + \omega_0^2 \phi_1 - \kappa^2(\phi_2 - \phi_1) = 0, \tag{4}$$
$$\ddot{\phi}_2 + 2\beta\dot{\phi}_2 + \omega_0^2 \phi_2 + \kappa^2(\phi_2 - \phi_1) = 0. \tag{5}$$
$$\tag{6}$$

Преобразование в нормальные координаты и нормальные моды

Для упрощения анализа системы удобно ввести нормальные координаты:

$$\xi_1 = \phi_1 + \phi_2, \quad \xi_2 = \phi_2 - \phi_1.$$

Путём суммирования и вычитания исходных уравнений движения (без затухания для чистоты рассуждения) получаем:

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_0^2 \xi_1 = 0,$$
$$\ddot{\xi}_2 + \left(\omega_0^2 + 2\kappa^2\right)\xi_2 = 0.$$

Таким образом, система сводится к двум независимым колебательным уравнениям с нормальными частотами:

$$\Omega_{n1} = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \Omega_{n2} = \sqrt{\omega_0^2 + 2\kappa^2} = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2kL_1^2}{mL^2}}.$$

Решения для нормальных координат имеют вид:

$$\xi_1(t) = \Phi_{01} \cos\left(\Omega_{n1} t + \varphi_{01}\right),$$
$$\xi_2(t) = \Phi_{02} \cos\left(\Omega_{n2} t + \varphi_{02}\right),$$

где Φ_{01}, Φ_{02} — амплитуды, а $\varphi_{01}, \varphi_{02}$ — начальные фазы, определяемые начальными условиями. Переход обратно к углам маятников осуществляется по формулам:

$$\phi_1 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \quad \phi_2 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{2}.$$

В результате получаем общее решение для углов:

$$\phi_1(t) = \frac{1}{2}\left[\Phi_{01} \cos\left(\Omega_{n1} t + \varphi_{01}\right) + \Phi_{02} \cos\left(\Omega_{n2} t + \varphi_{02}\right)\right],$$
$$\phi_2(t) = \frac{1}{2}\left[\Phi_{01} \cos\left(\Omega_{n1} t + \varphi_{01}\right) - \Phi_{02} \cos\left(\Omega_{n2} t + \varphi_{02}\right)\right].$$

Режимы колебаний

В зависимости от начальных условий в системе могут возникать различные режимы колебаний:

1. **Синфазное колебание:** Если задать начальные условия так, что $\Phi_{02} = 0$, то

$$\phi_1(t) = \phi_2(t) = \frac{\Phi_{01}}{2} \cos\left(\Omega_{n1} t + \varphi_{01}\right).$$

Оба маятника движутся синхронно с частотой $\Omega_{n1} = \omega_0$.

2. **Противофазное колебание:** Если задать начальные условия так, что $\Phi_{01} = 0$, то

$$\phi_1(t) = \frac{\Phi_{02}}{2} \cos\left(\Omega_{n2} t + \varphi_{02}\right), \quad \phi_2(t) = -\frac{\Phi_{02}}{2} \cos\left(\Omega_{n2} t + \varphi_{02}\right).$$

Маятники движутся с частотой Ω_{n2}, но в противоположных фазах.

3. **Суперпозиция нормальных мод (биения):** При возбуждении обеих нормальных мод, например, если только один маятник изначально отклонён, решение для первого маятника может записываться как

$$\phi_1(t) = \frac{\phi_1(0)}{2}\left[\cos\left(\Omega_{n1} t\right) + \cos\left(\Omega_{n2} t\right)\right].$$

Применяя тригонометрическую формулу для суммы косинусов, получаем:

$$\phi_1(t) = \phi_1(0) \cos\left(\frac{\Omega_{n1} + \Omega_{n2}}{2} t\right) \cos\left(\frac{\Omega_{n2} - \Omega_{n1}}{2} t\right).$$

Здесь быстрые колебания с частотой $\frac{\Omega_{n1}+\Omega_{n2}}{2}$ амплитудно модулированы медленной огибающей с частотой $\frac{\Omega_{n2}-\Omega_{n1}}{2}$ — эффект биений. При слабой связи разность частот невелика, а период биений оценивается как

$$T_{\text{биений}} \approx \frac{2\pi}{\Omega_{n2} - \Omega_{n1}}.$$

Учет затухания в системе

В реальных системах затухание приводит к экспоненциальному уменьшению амплитуд. Сила затухания для каждого маятника пропорциональна его скорости, поэтому к уравнениям движения добавляется член $2\beta\dot{\phi}$. Итоговые уравнения с учетом затухания имеют вид:

$$\ddot{\phi}_1 + 2\beta\dot{\phi}_1 + \omega_0^2\phi_1 - \kappa^2(\phi_2 - \phi_1) = 0, \quad (7)$$

$$\ddot{\phi}_2 + 2\beta\dot{\phi}_2 + \omega_0^2\phi_2 + \kappa^2(\phi_2 - \phi_1) = 0. \quad (8)$$

$$(9)$$

Эти уравнения описывают, как затухание влияет на динамику системы, уменьшая амплитуду колебаний с течением времени.

Итоговая схема моделирования и интерпретация результатов

При численной реализации модели выполняются следующие этапы:

- **Инициализация параметров:** вводятся значения m, L, L_1, k, β, g и начальные условия для ϕ_1 и ϕ_2.
- **Формулировка системы ОДУ:** записываются уравнения движения для $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ с учетом затухания и пружинной связи.
- **Численное интегрирование:** для решения системы дифференциальных уравнений используются численные методы (например, метод Рунге–Кутты).
- **Построение графиков:** полученные решения представляются в виде графиков зависимости углов $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ и их производных (угловых скоростей) от времени.
- **Определение нормальных частот:** на основании формул

  $$\Omega_{n1} = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \Omega_{n2} = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2kL_1^2}{mL^2}},$$

  вычисляются нормальные частоты системы, что позволяет дополнительно проанализировать режимы синфазных и противофазных колебаний.

Моделирование

1. Инициализация параметров

$$m,\ L,\ L_1,\ k,\ \beta \quad (10)$$

```
m = float(entry_m.get())           # mass of pendulums (kg)
L = float(entry_L.get())           # length of pendulum string (m)
L1 = float(entry_L1.get())         # distance from suspension point to spring attachment (m)
k = float(entry_k.get())           # spring stiffness (N/m)
beta = float(entry_beta.get())     # damping coefficient (kg/s)
```

2. Задание начальных условий

$$\phi_1(0),\ \phi_2(0),\ \dot{\phi}_1(0),\ \dot{\phi}_2(0),\ T \quad (11)$$

```
phi1_0 = float(entry_phi1.get())  # initial angle of first pendulum (rad)
phi2_0 = float(entry_phi2.get())  # initial angle of second pendulum (rad)

v1_0 = float(entry_v1.get())       # initial angular velocity of first pendulum (rad/s)
v2_0 = float(entry_v2.get())       # initial angular velocity of second pendulum (rad/s)

t_max = float(entry_time.get())    # maximum simulation time (s)
```

3. Система уравнений движения

Аналитическая запись:

$$\ddot{\phi}_1 + \frac{\beta}{m}\dot{\phi}_1 + \left(\tfrac{g}{L} + \kappa^2\right)\phi_1 - \kappa^2\phi_2 = 0,$$
$$\ddot{\phi}_2 + \frac{\beta}{m}\dot{\phi}_2 + \left(\tfrac{g}{L} + \kappa^2\right)\phi_2 - \kappa^2\phi_1 = 0,$$
$$\kappa^2 = \frac{kL_1^2}{mL^2}.$$

```
def system(y, t, m, L, L1, k, beta, g=9.81):
    phi1, v1, phi2, v2 = y
    K = k * L1**2 / (m * L**2)
    omega0_sq = g / L
    dydt = [
        v1,
        -(beta/m)*v1 - (omega0_sq + K)*phi1 + K*phi2,
        v2,
        -(beta/m)*v2 - (omega0_sq + K)*phi2 + K*phi1
    ]
    return dydt
```

4. Численное интегрирование

Аналитическая форма: решение системы ОДУ

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \text{system}(\mathbf{y}, t) \tag{12}$$

```
y0  = [phi1_0, v1_0, phi2_0, v2_0]
sol = odeint(system, y0, t, args=(m, L, L1, k, beta))
phi1, v1, phi2, v2 = sol[:,0], sol[:,1], sol[:,2], sol[:,3]
```

5. Построение графиков

```
# angles graphic
ax1.plot(t, phi1, label='\phi_2(t)')
ax1.plot(t, phi2, label='\phi_2(t)')
ax1.set_xlabel('t, s')
ax1.set_ylabel('\phi, rad')
ax1.legend()

# velocity graphic
ax2.plot(t, v1, label='\phi_2^{*}(t)')
ax2.plot(t, v2, label='\phi_2^{*}')
ax2.set_xlabel('t, s')
ax2.set_ylabel('velocity, rad/s')
ax2.legend()
```

6. Вычисление нормальных частот

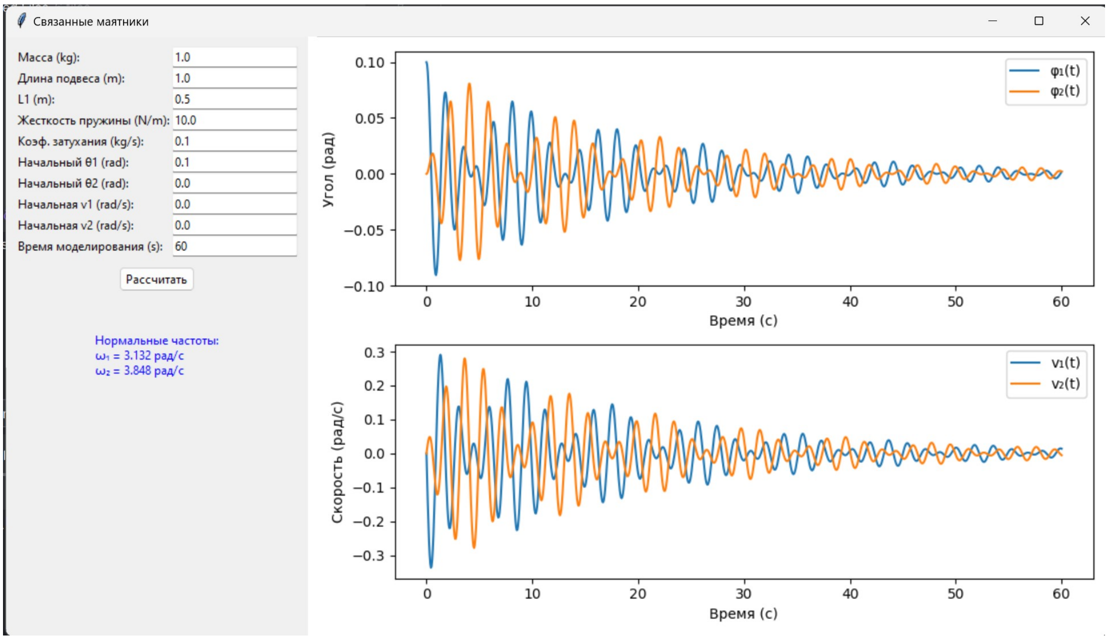
Аналитические формулы:

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L}},$$
$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L} + 2\kappa^2}.$$

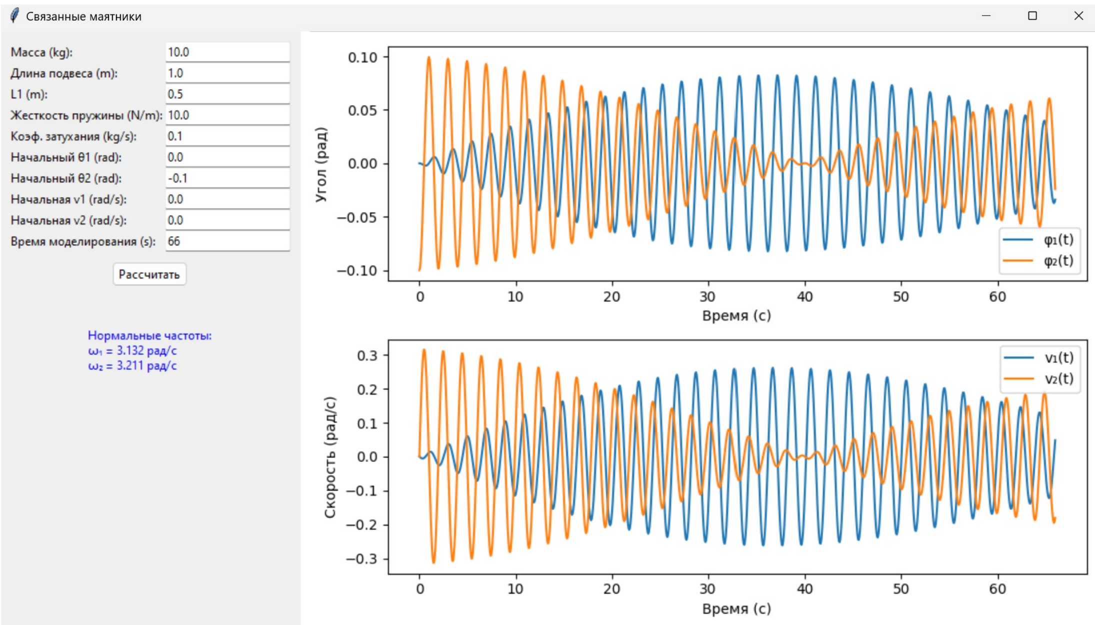
```
omega1 = np.sqrt(9.81 / L)
omega2 = np.sqrt(9.81 / L + 2 * k * L1 ** 2 / (m * L ** 2))
```

1 Демо-примеры запуска программы

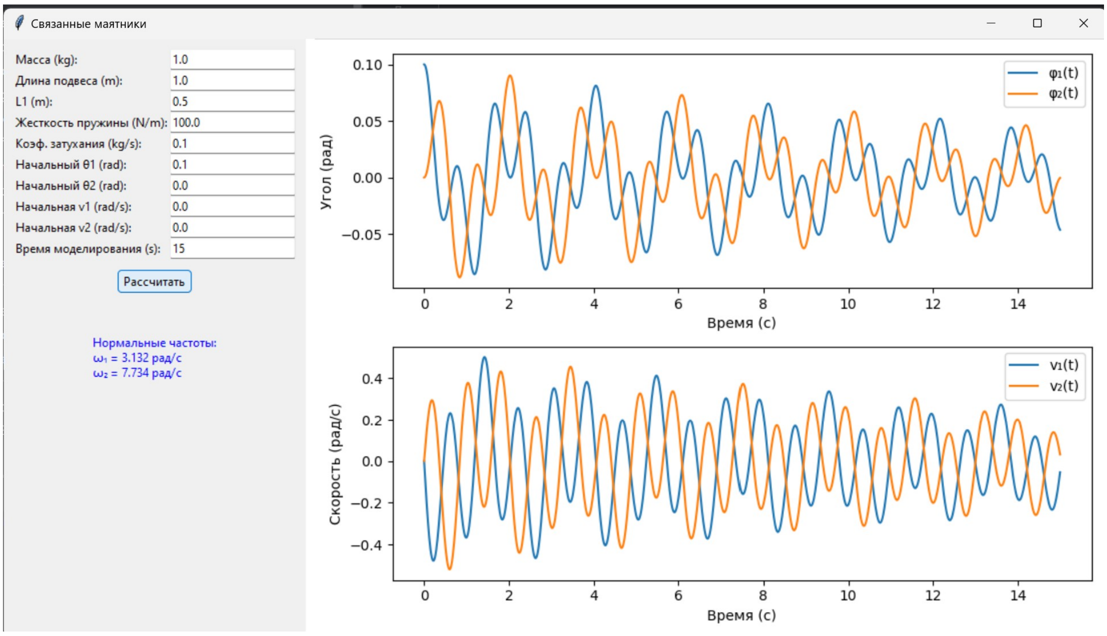
1.1 Дефолтные параметры



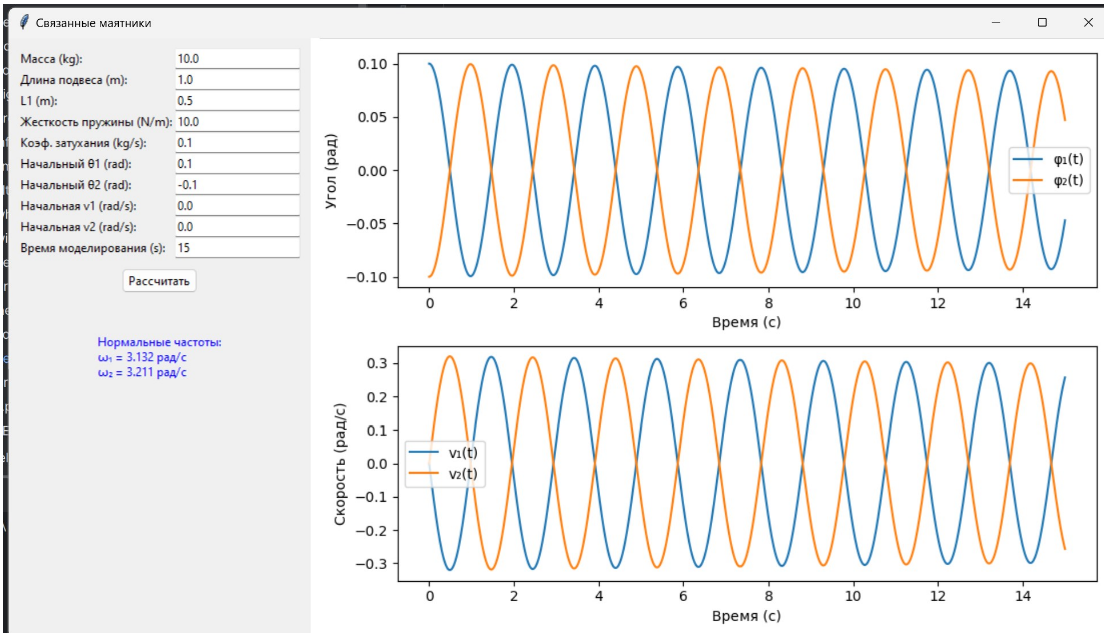
1.2 Биение в суперпозиции



1.3 Симфазное колебание с высокой жесткостью пружины



1.4 Противофазное колебание с высокой массой подвеса



Выводы

На всех представленных графиках — независимо от начальных условий и параметров системы — чётко прослеживается зеркальная симметрия углов и угловых скоростей маятников. Это поведение отражает фундаментальное свойство колебательной системы из двух связанных маятников при симметричных параметрах: движение одного маятника зеркально компенсируется движением другого. Такая антисимметрия указывает на возбуждение либо противофазной моды, либо линейной комбинации нормальных мод, где один маятник отдаёт энергию другому. Кроме того, в каждом случае наблюдается, что графики углов и скоростей следуют в противоположных фазах: пики углов соответствуют нулям скоростей и наоборот, что типично для гармонических колебаний.