

Модель №.3.

Оптика. Кольца Ньютона

Ким В.Р., Вишневский С.А
Группа М3207

Задание. Моделирование колец Ньютона для линзы заданного радиуса. Рассмотреть *монохроматический* и *квазимонохроматический* свет (задается середина и ширина спектра в нанометрах). Вывод цветного распределения интенсивности интерференционной картины и графика зависимости интенсивности от радиальной координаты.

1 Теория

1.1 Введение

Кольца Ньютона — это интерференционная картина в виде концентрических светлых и тёмных колец, наблюдаемая при освещении системы «выпуклая линза на плоской пластине» светом. Возникает она в результате *интерференции**** отражённого света в тонком воздушном зазоре между поверхностями линзы и пластины. Толщина зазора зависит от расстояния от точки касания, поэтому фаза отражённого света изменяется по радиусу, формируя характерные кольца.

Целью моделирования является вычисление и визуализация распределения интенсивности отражённого света в зависимости от радиальной координаты, как для *монохроматического*** свет, так и для *квазимонохроматического*** освещения.

* **интерференция** — взаимное увеличение или уменьшение результирующей амплитуды двух или нескольких когерентных**** волн при их наложении друг на друга

** **монохроматический свет** — это световые колебания одной частоты.

*** **квазихроматический свет** можно представить как суперпозицию монохроматических волн, частоты которых расположены в узком спектральном диапазоне.

**** **когерентные волны:** если частоты колебаний в обеих волнах одинаковы, а разность фаз возбуждаемых колебаний остается постоянной во времени, то такие волны называются когерентными.

1.2 Геометрия системы

Рассматривается выпуклая линза с радиусом кривизны R , которая лежит на плоской стеклянной пластине. Между ними образуется тонкий воздушный зазор переменной толщины. Вблизи центра (при $h \ll R$) толщина зазора $h(r)$ описывается:

$$h(r) = \frac{r^2}{2R} \quad (1)$$

где:

- r — расстояние от центра контактной точки (в метрах),
- R — радиус кривизны линзы (в метрах),
- $h(r)$ — толщина воздушного слоя.

1.3 Интерференция света

Свет отражается от двух границ: верхней (линза–воздух) и нижней (воздух–пластина). В результате возникают две когерентные волны, интерферирующие между собой.

1.3.1 Разность хода

Разность оптических путей между двумя отражёнными волнами:

$$\Delta = 2h(r) + \frac{\lambda}{2} \quad (2)$$

где λ — длина волны света, а $\lambda/2$ — поправка на сдвиг фазы при отражении от более плотной среды.

1.3.2 Условия интерференции

Для тёмных колец (минимум интенсивности):

$$2h(r) = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

$$r_m = \sqrt{(2m + 1)\frac{\lambda R}{2}} \quad (4)$$

$$(5)$$

Для светлых колец (максимум интенсивности):

$$2h(r) = m\lambda \quad (6)$$

$$r_m = \sqrt{m\lambda R} \quad (7)$$

$$(8)$$

где m — порядок интерференции.

1.4 Интенсивность отражённого света

Интенсивность отражённого света рассчитывается как:

$$I(r) = I_0 \cdot \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right) \right] \quad (9)$$

Подставляя разность хода:

$$I(r) = I_0 \cdot \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi h(r)}{\lambda} + \pi\right) \right] \quad (10)$$

С учётом $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$:

$$I(r) = I_0 \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{4\pi h(r)}{\lambda}\right) \right] \quad (11)$$

И, подставляя $h(r)$:

$$I(r) = I_0 \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi r^2}{\lambda R}\right) \right] \quad (12)$$

1.5 Квазимонохроматический свет

При освещении светом с конечной спектральной шириной $\Delta\lambda$, свет состоит из диапазона длин волн, распределённых вокруг центрального значения λ_0 : $\lambda_i \in [\lambda_0 - \Delta\lambda/2, \lambda_0 + \Delta\lambda/2]$. Интенсивность отражения тогда определяется усреднением по спектру:

$$I(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi r^2}{\lambda_i R} \right) \right] \cdot S(\lambda_i) \quad (13)$$

где $S(\lambda)$ - вклад каждой длины волны λ , он определяется спектральной плотностью, распределенной по Гауссу:

$$S(\lambda) = \exp \left(-\frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2\sigma^2} \right), \quad \sigma = \frac{\Delta\lambda}{2\sqrt{2 \ln 2}} \quad (14)$$

1.6 Цветовое изображение интерференционной картины

Для двумерной визуализации кольцевой структуры строится двумерное поле интенсивности:

$$I(x, y) = I \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) \quad (15)$$

1.7 Итоги

На основе этой теории можно:

- Рассчитать радиусы тёмных и светлых колец;
- Построить зависимость интенсивности от расстояния r ;
- Получить цветное изображение интерференционной картины;
- Исследовать влияние спектральной ширины на чёткость колец.

2 Моделирование

В данном разделе описывается структура программы, реализующей моделирование колец Ньютона

2.1 Пользовательский интерфейс и настройка параметров

В этой части кода реализован графический интерфейс пользователя на базе Tkinter. Интерфейс позволяет задать следующие параметры:

- Радиус кривизны R (м).
- Центральная длина волны λ_0 (нм), которая затем переводится в метры.
- Ширина спектра $\Delta\lambda$ (нм), также переводимая в метры.
- Режим освещения - моно-, квази-хроматический, *белый свет*

Под *белым светом* в данной работе понимается непрерывный спектр видимого диапазона, состоящий из волн разных длин, объединённых без выраженного пикового распределения. В упрощённой модели этот спектр аппроксимируется равномерным распределением длин волн от 400 нм до 700 нм.

2.2 Расчёт интенсивности

Программа рассчитывает интенсивность интерференционной картины в зависимости от радиальной координаты r . Для этого используются две функции:

- **Монохроматический свет:** Функция `intensity_mono` рассчитывает интенсивность по формуле (9), где I_0 представлена коэффициентом нормировки (в коде установлено значение 0.5). Значение выражения $1 - \cos(\cdot)$ изменяется от 0 до 2, поскольку $\cos\left(\frac{2\pi r^2}{\lambda R}\right) \in [-1, 1]$. Если принять $I_0 = 0.5$, то получим

$$I(r) = 0.5 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi r^2}{\lambda R}\right) \right],$$

что нормирует интенсивность в диапазон $[0, 1]$. Такой выбор удобен для визуализации, так как после масштабирования (например, перемножением на 255) можно получить корректное 8-битное изображение, где 0 соответствует полной темноте, а 255 — максимальной яркости.

```
1 def intensity_mono(self, r, wavelength):
2     return 0.5 * (1 - np.cos(2 * np.pi * r ** 2 / (wavelength * self.R)))
3
```

- **Квазимонохроматический случай. Усреднение с использованием спектральной плотности** При квазимонохроматическом освещении свет рассматривается как диапазон длин волн

$$\lambda_i \in \left[\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}, \lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2} \right],$$

распределённых вокруг центрального значения λ_0 . Теоретически интенсивность определяется по формуле (13), где $S(\lambda)$ задаётся Гауссовой функцией (14)

В реализации используется следующий подход:

- Генерируется массив из 20 равномерных длин волн $\{\lambda_i\}$ в указанном диапазоне.
- Вычисляются веса

$$w_i = \frac{S(\lambda_i)}{\sum_{j=1}^{20} S(\lambda_j)},$$

с помощью одной векторной операции: `weights = np.array([self.spectral_density(wl) for wl in wavelengths]); weights /= weights.sum()`.

- Создаётся трёхканальный массив $\text{image}[x, y, k]$, $k \in \{0, 1, 2\}$ для RGB:
 - * для каждой λ_i рассчитывается скалярное поле интенсивности $I_{\text{mono}}(r, \lambda_i)$ функцией `intensity_mono`,
 - * находят цветовые коэффициенты $\text{rgb} = \text{wavelength_to_rgb}(\lambda_i)$,
 - * и суммируют вклад во все три канала:

$$\text{image}[:, :, k] += w_i I_{\text{mono}}(r, \lambda_i) \text{rgb}[k].$$

- После цикла массив нормализуется по максимуму, умножается на 255 и приводится к типу `uint8`:

$$\text{image} \rightarrow \frac{\text{image}}{\max(\text{image})} \times 255.$$

```

1  def intensity_quasi(self, r):
2      wavelengths = np.linspace(self.lambda0 - self.delta_lambda / 2,
3                                self.lambda0 + self.delta_lambda / 2, 20)
4      weights = np.array([self.spectral_density(wl) for wl in wavelengths])
5      weights /= np.sum(weights)
6
7      image = np.zeros((r.shape[0], r.shape[1], 3))
8      for wl, weight in zip(wavelengths, weights):
9          I = self.intensity_mono(r, wl)
10         rgb = wavelength_to_rgb(wl)
11         for i in range(3):
12             image[:, :, i] += weight * I * rgb[i]
13         image /= np.max(image)
14         return (image * 255).astype(np.uint8)
15

```

Итого, `intensity_quasi` возвращает готовое RGB-изображение. Пусть через $\text{rgb}_k(\lambda_i)$, $k \in \{R, G, B\}$, обозначается k -я компонента, возвращаемая функцией `wavelength_to_rgb`(λ_i). Тогда для каждого канала выполняется взвешенная сумма:

$$\begin{aligned}
 R(r) &= \sum_{i=1}^{20} w_i I_{\text{mono}}(r, \lambda_i) \text{rgb}_R(\lambda_i), \\
 G(r) &= \sum_{i=1}^{20} w_i I_{\text{mono}}(r, \lambda_i) \text{rgb}_G(\lambda_i), \\
 B(r) &= \sum_{i=1}^{20} w_i I_{\text{mono}}(r, \lambda_i) \text{rgb}_B(\lambda_i),
 \end{aligned}$$

где

$$w_i = \frac{S(\lambda_i)}{\sum_{j=1}^{20} S(\lambda_j)}, \quad I_{\text{mono}}(r, \lambda_i) = 0.5[1 - \cos(2\pi r^2/(\lambda_i R))].$$

После вычисления всех трёх каналов массив $[R(r), G(r), B(r)]$ нормализуется по своему максимуму и масштабируется в диапазон $[0, 255]$, получая итоговое 8-битное RGB-изображение.

2.3 Построение двумерного поля интенсивности

Для визуализации интерференционной картины создаётся двумерная координатная сетка, где интенсивность $I(x, y)$ определяется как функция $I\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$. Это соответствует преобразованию теоретической зависимости $I(r)$ в изображение, что позволяет получить кольцевую структуру модели.

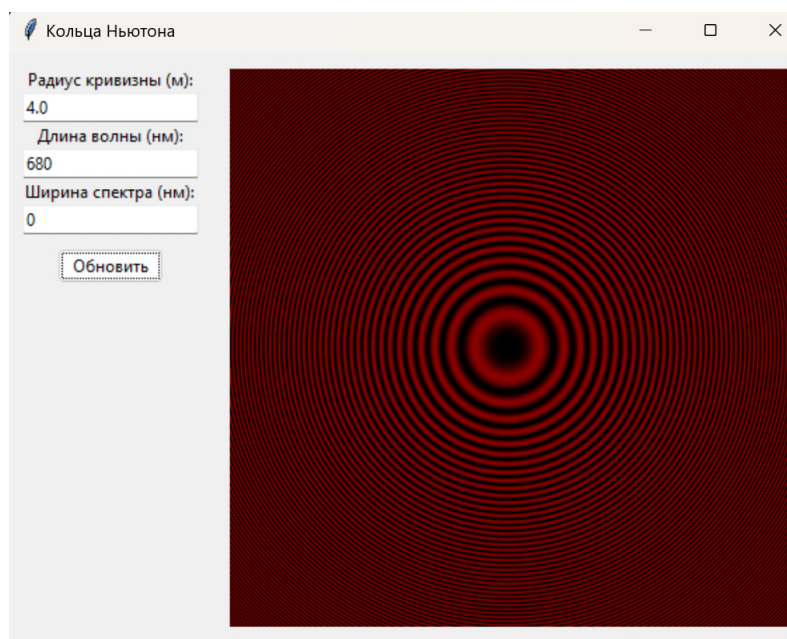
```

1  x = np.linspace(-0.01, 0.01, self.size)
2  y = np.linspace(-0.01, 0.01, self.size)
3  xx, yy = np.meshgrid(x, y)
4  r = np.sqrt(xx ** 2 + yy ** 2)
5

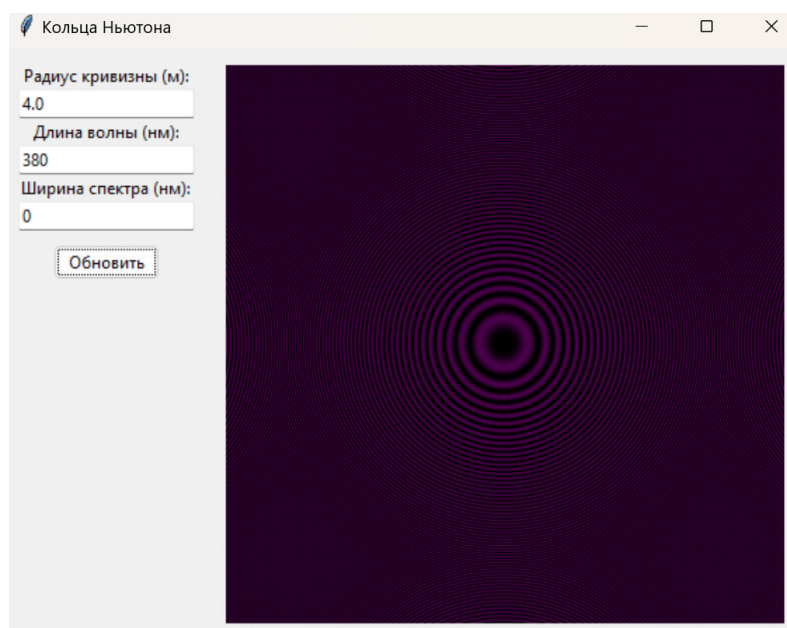
```

3 Демо-примеры запуска программы

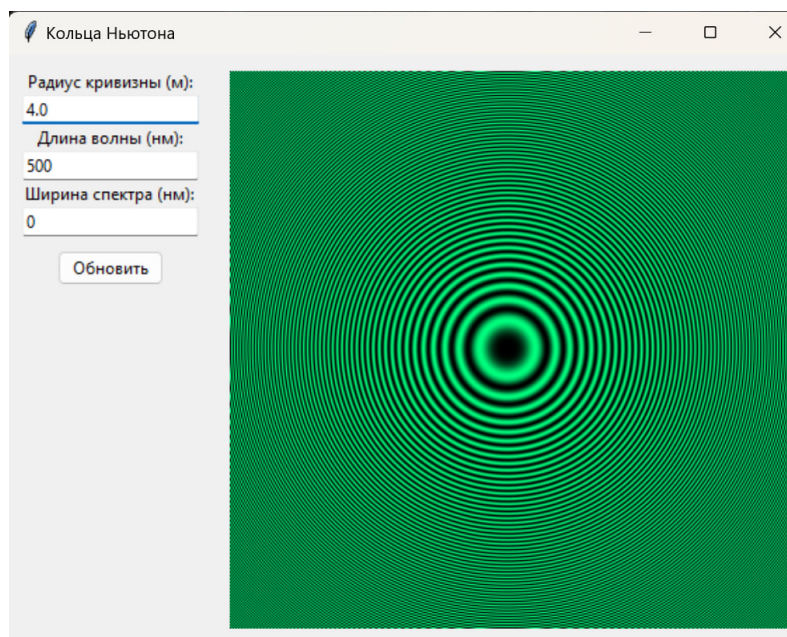
3.1 Монохром, близкий к ИК



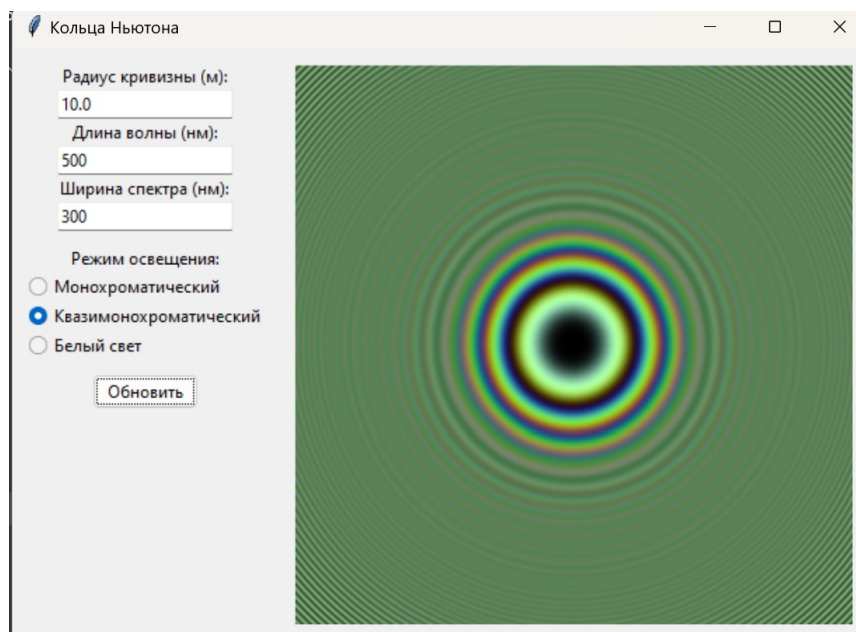
3.2 Монохром, близкий к УФ



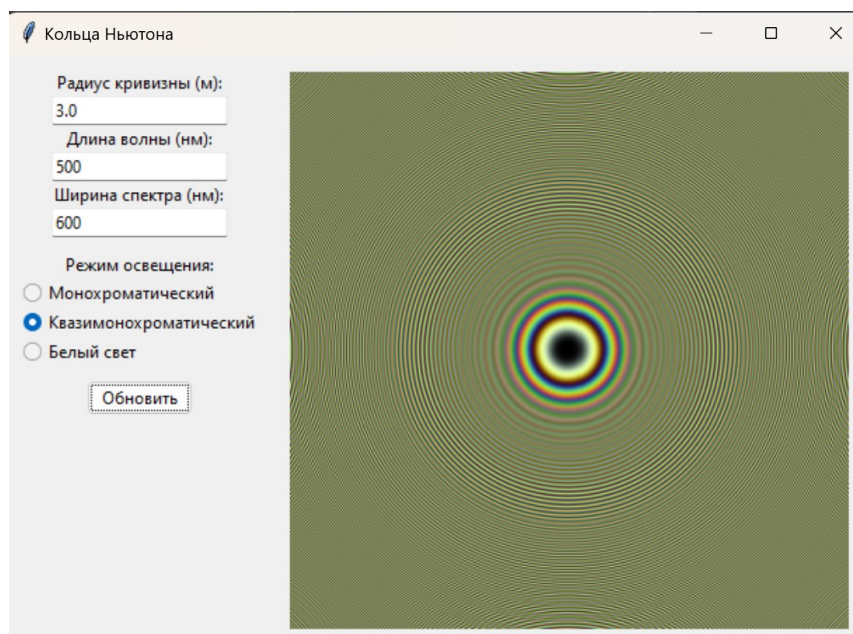
3.3 Зеленый монохром



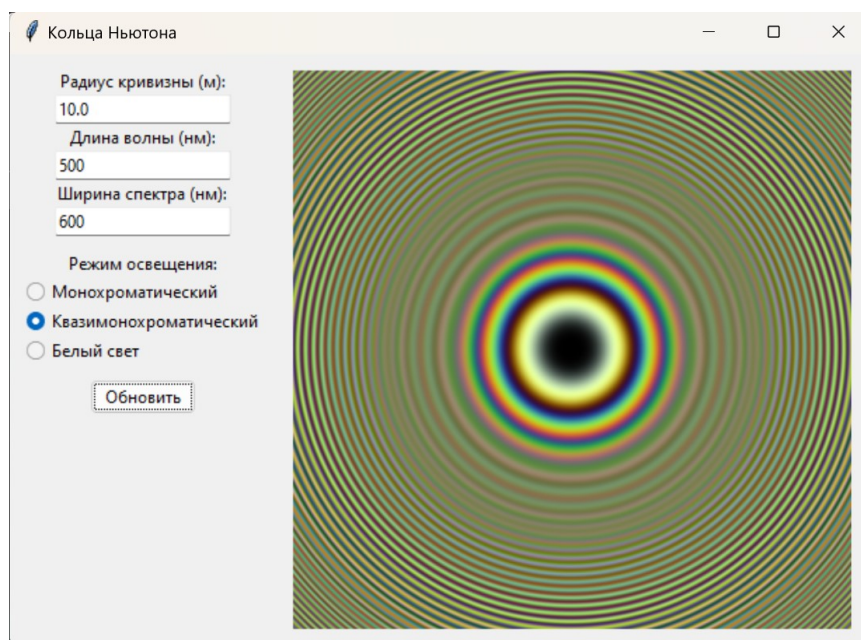
3.4 Большой квазихром



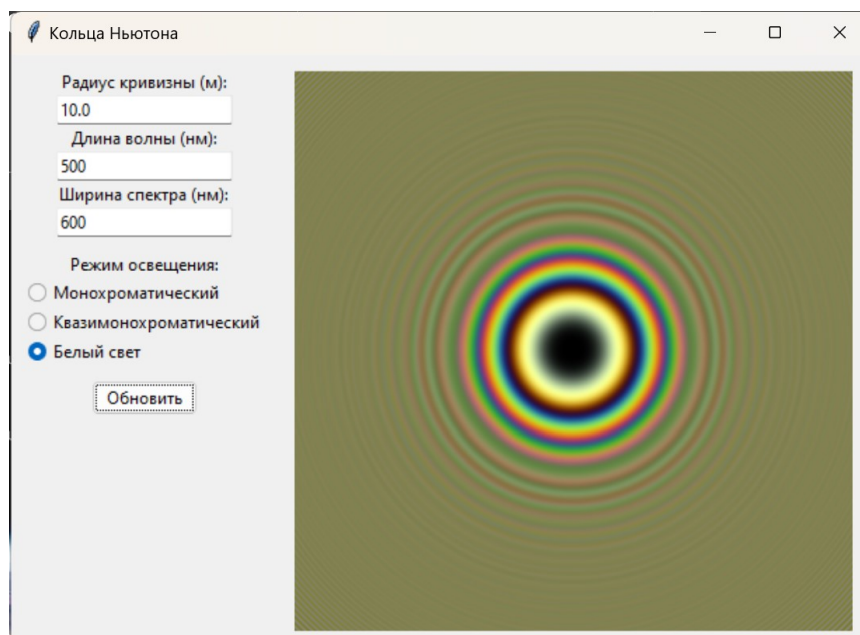
3.5 Маленький квазихром



3.6 Квазихром с широким спектром волн



3.7 Белый свет



4 Вывооооод

Можно заметить, что интерференция на определенных промежутках становится невидимой, а потом (с большим радиусом) возвращается. Почему?(?) Для тёмных колец (минимумов интерференции) радиус r_m определяется выражением:

$$r_m = \sqrt{(2m + 1) \frac{\lambda R}{2}}$$

где:

- m — порядок минимума ($m = 0, 1, 2, \dots$),
- λ — длина волны света,
- R — радиус кривизны линзы.

Для светлых колец (максимумов интерференции):

$$r_m = \sqrt{m\lambda R}$$

Причины исчезновения интерференции Свет содержит множество длин волн λ (от 400 до 700 нм). Каждая длина волны создаёт собственную систему колец с различными радиусами. В результате:

Кольца от разных длин волн **не совпадают** пространственно:

$$r_m^{(\lambda_1)} = \sqrt{m\lambda_1 R}, \quad r_m^{(\lambda_2)} = \sqrt{m\lambda_2 R}$$

При наложении разных систем колец происходит **взаимное гашение**: свет одного цвета может находиться в максимуме, другой — в минимуме.

Причины восстановления интерференции При больших номерах m может наблюдаться частичное совпадение колец разных длин волн. Это возможно, если для двух длин волн λ_1 и λ_2 выполняется:

$$\sqrt{m_1 \lambda_1 R} \approx \sqrt{m_2 \lambda_2 R} \Rightarrow m_1 \lambda_1 \approx m_2 \lambda_2$$

Таким образом, кольца от разных длин волн снова накладываются конструктивно (потому что волны усиливают друг друга), и картина интерференции **восстанавливается**.