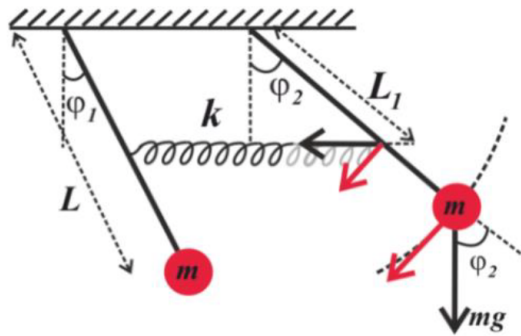


Модель №.4.  
Магнитные колебания.  
Связанные маятники

Ким В.Р., Вишневский С.А  
Группа М3207

**Задание.** Два одинаковых математических маятника, связанных пружиной с коэффициентом жёсткости  $k$  на расстоянии  $L_1$  от точки крепления маятников. Точки крепления обоих связанных маятников находятся на одном уровне. Оба математических маятника имеют одинаковые длины подвеса  $L$  и массы  $m$  (см. Рис.). Сила сопротивления для каждого маятника прямо пропорциональна скорости. Коэффициент затухания каждого маятника равен  $\beta$ . Для заданных начальных отклонений построить графики зависимостей углов и скоростей от времени для каждого маятника. Найти нормальные частоты. Параметры должны задаваться.



Ниже представлено подробное описание теоретических основ, необходимых для моделирования системы двух связанных математических маятников. Все определения, формулы и рассуждения приведены с обоснованием их использования в численной модели.

## 1. Введение и постановка задачи

Рассматривается система двух идентичных математических маятников, подвешенных на равной высоте, соединённых пружиной с коэффициентом жёсткости  $k$ . Пружина прикреплена к маятникам на расстоянии  $L_1$  от точки их крепления. Каждый маятник имеет длину  $L$  и массу  $m$ . Для каждого маятника учитывается сила затухания, пропорциональная скорости, с коэффициентом  $\beta$ . Целью задачи является построение графиков зависимости угловых отклонений и угловых скоростей от времени, а также определение нормальных частот системы.

## 2. Математический маятник: определения и базовые уравнения

**Математический маятник** — идеализированная модель, в которой масса сосредоточена в точке, а подвес считается нерастяжимым и безмассовым. Обобщённой координатой является угол отклонения  $\phi$  от вертикального направления (положения равновесия).

Для малых колебаний (при условии  $\sin \phi \approx \phi$ ) уравнение движения выводится из закона сохранения момента импульса:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{N},$$

где  $\vec{M}$  — момент импульса, а  $\vec{N}$  — суммарный момент сил, действующих на систему. Приводя это уравнение к скалярной форме для колебаний вокруг точки крепления, получаем:

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0,$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$  — собственная (естественная) частота свободного маятника, а  $g$  — ускорение свободного падения.

При наличии затухающего сопротивления, пропорционального скорости, уравнение принимает вид:

$$\ddot{\phi} + 2\beta\dot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0.$$

Здесь  $\beta$  — коэффициент затухания, отражающий диссипативные процессы в системе.

### 3. Система двух связанных маятников

При рассмотрении двух маятников, связанных пружиной, следует учитывать взаимодействие, возникающее из-за разности их углов. Обозначим:

$$\phi_1(t), \phi_2(t)$$

— углы отклонения первого и второго маятников соответственно.

В отсутствие затухания, уравнения движения можно записать следующим образом:

$$\ddot{\phi}_1 + \omega_0^2 \phi_1 - \kappa^2 (\phi_2 - \phi_1) = 0,$$

$$\ddot{\phi}_2 + \omega_0^2 \phi_2 + \kappa^2 (\phi_2 - \phi_1) = 0.$$

Здесь введён параметр связи  $\kappa$ , который определяется через жёсткость пружины и геометрию системы. Часто встречается соотношение:

$$\kappa^2 = \frac{kL_1^2}{mL^2}.$$

Знак в членах, содержащих  $\kappa^2(\phi_2 - \phi_1)$ , отражает то, что пружинная сила стремится уменьшить разницу углов маятников.

С учётом затухания уравнения дополняются членами, пропорциональными скорости:

$$\ddot{\phi}_1 + 2\beta\dot{\phi}_1 + \omega_0^2 \phi_1 - \kappa^2 (\phi_2 - \phi_1) = 0,$$

$$\ddot{\phi}_2 + 2\beta\dot{\phi}_2 + \omega_0^2 \phi_2 + \kappa^2 (\phi_2 - \phi_1) = 0.$$

### 4. Преобразование в нормальные координаты и нормальные моды

Для упрощения анализа системы удобно ввести нормальные координаты:

$$\xi_1 = \phi_1 + \phi_2, \quad \xi_2 = \phi_2 - \phi_1.$$

Путём суммирования и вычитания исходных уравнений движения (без затухания для чистоты рассуждения) получаем:

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_0^2 \xi_1 = 0,$$

$$\ddot{\xi}_2 + (\omega_0^2 + 2\kappa^2) \xi_2 = 0.$$

Таким образом, система сводится к двум независимым колебательным уравнениям с нормальными частотами:

$$\Omega_{n1} = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \Omega_{n2} = \sqrt{\omega_0^2 + 2\kappa^2} = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2kL_1^2}{mL^2}}.$$

Решения для нормальных координат имеют вид:

$$\xi_1(t) = \Phi_{01} \cos(\Omega_{n1}t + \varphi_{01}),$$

$$\xi_2(t) = \Phi_{02} \cos(\Omega_{n2}t + \varphi_{02}),$$

где  $\Phi_{01}, \Phi_{02}$  — амплитуды, а  $\varphi_{01}, \varphi_{02}$  — начальные фазы, определяемые начальными условиями. Переход обратно к углам маятников осуществляется по формулам:

$$\phi_1 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \quad \phi_2 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{2}.$$

В результате получаем общее решение для углов:

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= \frac{1}{2} [\Phi_{01} \cos(\Omega_{n1}t + \varphi_{01}) + \Phi_{02} \cos(\Omega_{n2}t + \varphi_{02})], \\ \phi_2(t) &= \frac{1}{2} [\Phi_{01} \cos(\Omega_{n1}t + \varphi_{01}) - \Phi_{02} \cos(\Omega_{n2}t + \varphi_{02})]. \end{aligned}$$

## 5. Режимы колебаний

В зависимости от начальных условий в системе могут возникать различные режимы колебаний:

1. **Синфазное колебание:** Если задать начальные условия так, что  $\Phi_{02} = 0$ , то

$$\phi_1(t) = \phi_2(t) = \frac{\Phi_{01}}{2} \cos(\Omega_{n1}t + \varphi_{01}).$$

Оба маятника движутся синхронно с частотой  $\Omega_{n1} = \omega_0$ .

2. **Противофазное колебание:** Если задать начальные условия так, что  $\Phi_{01} = 0$ , то

$$\phi_1(t) = \frac{\Phi_{02}}{2} \cos(\Omega_{n2}t + \varphi_{02}), \quad \phi_2(t) = -\frac{\Phi_{02}}{2} \cos(\Omega_{n2}t + \varphi_{02}).$$

Маятники движутся с частотой  $\Omega_{n2}$ , но в противоположных фазах.

3. **Суперпозиция нормальных мод (биения):** При возбуждении обеих нормальных мод, например, если только один маятник изначально отклонён, решение для первого маятника может записываться как

$$\phi_1(t) = \frac{\phi_1(0)}{2} [\cos(\Omega_{n1}t) + \cos(\Omega_{n2}t)].$$

Применяя тригонометрическую формулу для суммы косинусов, получаем:

$$\phi_1(t) = \phi_1(0) \cos\left(\frac{\Omega_{n1} + \Omega_{n2}}{2}t\right) \cos\left(\frac{\Omega_{n2} - \Omega_{n1}}{2}t\right).$$

Здесь быстрые колебания с частотой  $\frac{\Omega_{n1} + \Omega_{n2}}{2}$  амплитудно модулированы медленной огибающей с частотой  $\frac{\Omega_{n2} - \Omega_{n1}}{2}$  — эффект биений. При слабой связи разность частот невелика, а период биений оценивается как

$$T_{\text{биений}} \approx \frac{2\pi}{\Omega_{n2} - \Omega_{n1}}.$$

## 6. Учет затухания в системе

В реальных системах затухание приводит к экспоненциальному уменьшению амплитуд. Сила затухания для каждого маятника пропорциональна его скорости, поэтому к уравнениям движения добавляется член  $2\beta\dot{\phi}$ . Итоговые уравнения с учетом затухания имеют вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_1 + 2\beta\dot{\phi}_1 + \omega_0^2\phi_1 - \kappa^2(\phi_2 - \phi_1) &= 0, \\ \ddot{\phi}_2 + 2\beta\dot{\phi}_2 + \omega_0^2\phi_2 + \kappa^2(\phi_2 - \phi_1) &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения описывают, как затухание влияет на динамику системы, уменьшая амплитуду колебаний с течением времени.

## 7. Итоговая схема моделирования и интерпретация результатов

При численной реализации модели выполняются следующие этапы:

- **Инициализация параметров:** вводятся значения  $m$ ,  $L$ ,  $L_1$ ,  $k$ ,  $\beta$ ,  $g$  и начальные условия для  $\phi_1$  и  $\phi_2$ .
- **Формулировка системы ОДУ:** записываются уравнения движения для  $\phi_1(t)$  и  $\phi_2(t)$  с учетом затухания и пружинной связи.
- **Численное интегрирование:** для решения системы дифференциальных уравнений используются численные методы (например, метод Рунге–Кутты).
- **Построение графиков:** полученные решения представляются в виде графиков зависимости углов  $\phi_1(t)$ ,  $\phi_2(t)$  и их производных (угловых скоростей) от времени.
- **Определение нормальных частот:** на основании формул

$$\Omega_{n1} = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \Omega_{n2} = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2kL_1^2}{mL^2}},$$

вычисляются нормальные частоты системы, что позволяет дополнительно проанализировать режимы синфазных и противофазных колебаний.

## 8. Заключение

Представленная теоретическая база охватывает основные аспекты динамики двух связанных математических маятников с учётом затухания и пружинной связи. Были приведены определения математического маятника, обоснованы базовые уравнения движения, выполнено преобразование в нормальные координаты и получены выражения для нормальных частот. Описаны режимы синфазных и противофазных колебаний, а также эффект биений при возбуждении обеих нормальных мод. Эти положения лягут в основу численного моделирования системы, что позволяет визуализировать динамику угловых отклонений и скоростей, а также исследовать влияние параметров системы на её поведение.