Модель №.3. Оптика. Кольца Ньютона

Ким В.Р., Вишневский С.А Группа М3207

Задание. Моделирование колец Ньютона для линзы заданного радиуса. Рассмотреть монохроматический и квазимонохроматический свет (задается середина и ширина спектра в нанометрах). Вывод цветного распределения интенсивности интерференционной картины и графика зависимости интенсивности от радиальной координаты.

1 Теория

1.1 Введение

Кольца Ньютона — это интерференционная картина в виде концентрических светлых и тёмных колец, наблюдаемая при освещении системы «выпуклая линза на плоской пластине» светом. Возникает она в результате интерференции*** отражённого света в тонком воздушном зазоре между поверхностями линзы и пластины. Толщина зазора зависит от расстояния от точки касания, поэтому фаза отражённого света изменяется по радиусу, формируя характерные кольца. Целью моделирования является вычисление и визуализация распределения интенсивности отражённого света в зависимости от радиальной координаты, как для монохроматического**, так и для квазимонохроматического** освещения.

- * **интерференция** взаимное увеличение или уменьшение результирующей амлитуды двух или нескольких когерентных**** волн при их наложении друг на друга
- ** монохроматический свет это световые колебания одной частоты.
- *** **квазихроматический свет** можно представить как суперпозицию монохроматических волн, частоты которых расположены в узком спектральном диапазоне.
- **** когерентные волны: если частоты колебаний в обеих волнах одинаковы, а разность фаз возбуждаемых колебаний остается постоянной во времени, то такие волны называются когерентными.

1.2 Геометрия системы

Рассматривается выпуклая линза с радиусом кривизны R, которая лежит на плоской стеклянной пластине. Между ними образуется тонкий воздушный зазор переменной толщины. Вблизи центра (при $h \ll R$) толщина зазора h(r) описывается:

$$h(r) = \frac{r^2}{2R} \tag{1}$$

где:

- r расстояние от центра контактной точки (в метрах),
- R радиус кривизны линзы (в метрах),
- h(r) толщина воздушного слоя.

1.3 Интерференция света

Свет отражается от двух границ: верхней (линза-воздух) и нижней (воздух-пластина). В результате возникают две когерентные волны, интерферирующие между собой.

1.3.1 Разность хода

Разность оптических путей между двумя отражёнными волнами:

$$\Delta = 2h(r) + \frac{\lambda}{2} \tag{2}$$

где λ — длина волны света, а $\lambda/2$ — поправка на сдвиг фазы при отражении от более плотной среды.

1.3.2 Условия интерференции

Для тёмных колец (минимум интенсивности):

$$2h(r) = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$
 (3)

$$r_m = \sqrt{(2m+1)\frac{\lambda R}{2}}\tag{4}$$

(5)

Для светлых колец (максимум интенсивности):

$$2h(r) = m\lambda \tag{6}$$

$$r_m = \sqrt{m\lambda R} \tag{7}$$

(8)

где m — порядок интерференции.

1.4 Интенсивность отражённого света

Интенсивность отражённого света рассчитывается как:

$$I(r) = I_0 \cdot \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right) \right] \tag{9}$$

Подставляя разность хода:

$$I(r) = I_0 \cdot \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi h(r)}{\lambda} + \pi \right) \right]$$
 (10)

C учётом $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$:

$$I(r) = I_0 \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{4\pi h(r)}{\lambda}\right) \right] \tag{11}$$

 \mathbf{M} , подставляя h(r):

$$I(r) = I_0 \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi r^2}{\lambda R}\right) \right] \tag{12}$$

1.5 Квазимонохроматический свет

При освещении светом с конечной спектральной шириной $\Delta\lambda$, свет состоит из диапазона длин волн, распределённых вокруг центрального значения $\lambda_0: \lambda_i \in [\lambda_0 - \Delta\lambda/2, \lambda_0 + \Delta\lambda/2]$. Интенсивность отражения тогда определяется усреднением по спектру:

$$I(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi r^2}{\lambda_i R}\right) \right] \cdot S(\lambda_i)$$
 (13)

где $S(\lambda)$ - вклад каждой длины волны λ , он определяется спектральной плотностью, распределенной по Гауссу:

$$S(\lambda) = \exp\left(-\frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma = \frac{\Delta\lambda}{2\sqrt{2\ln 2}}$$
 (14)

1.6 Цветовое изображение интерференционной картины

Для двумерной визуализации кольцевой структуры строится двумерное поле интенсивности:

$$I(x,y) = I\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \tag{15}$$

1.7 Итоги

На основе этой теории можно:

- Рассчитать радиусы тёмных и светлых колец;
- Построить зависимость интенсивности от расстояния r;
- Получить цветное изображение интерференционной картины;
- Исследовать влияние спектральной ширины на чёткость колец.

2 Моделирование

В данном разделе описывается структура программы, реализующей моделирование колец Ньютона

2.1 Пользовательский интерфейс и настройка параметров

В этой части кода реализован графический интерфейс пользователя на базе **Tkinter**. Интерфейс позволяет задать следующие параметры:

- Радиус кривизны R (м).
- Центральная длина волны λ_0 (нм), которая затем переводится в метры.
- Ширина спектра $\Delta \lambda$ (нм), также переводимая в метры.
- Режим освещения моно-, квази-хроматический, белый свет

Под *белым светом* в данной работе понимается непрерывный спектр видимого диапазона, состоящий из волн разных длин, объединённых без выраженного пикового распределения. В упрощённой модели этот спектр аппроксимируется равномерным распределением длин волн от 400 нм до 700 нм.

2.2 Расчёт интенсивности

Программа рассчитывает интенсивность интерференционной картины в зависимости от радиальной координаты r. Для этого используются две функции:

• Монохроматический свет: Функция intensity_mono рассчитывает интенсивность по формуле (9), где I_0 представлена коэффициентом нормировки (в коде установлено значение 0.5). Значение выражения $1 - \cos(\cdot)$ изменяется от 0 до 2, поскольку $\cos\left(\frac{2\pi r^2}{\lambda R}\right) \in [-1, 1]$. Если принять $I_0 = 0.5$, то получим

$$I(r) = 0.5 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi r^2}{\lambda R}\right) \right],$$

что нормирует интенсивность в диапазон [0, 1]. Такой выбор удобен для визуализации, так как после масштабирования (например, перемножением на 255) можно получить корректное 8-битное изображение, где 0 соответствует полной темноте, а 255 — максимальной яркости.

```
def intensity_mono(self, r, wavelength):
    return 0.5 * (1 - np.cos(2 * np.pi * r ** 2 / (wavelength * self.R)))
3
```

• Квазимонохроматический случай. Усреднение с использованием спектральной плотности При квазимонохроматическом освещении свет рассматривается как диапазон длин волн

$$\lambda_i \in \left[\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}, \, \lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}\right],$$

распределённых вокруг центрального значения λ_0 . Теоретически интенсивность определяется по формуле (13), где $S(\lambda)$ задаётся Гауссовой функцией (14)

В реализации используется следующий подход:

- Генерируется массив из 20 равномерных длин волн $\{\lambda_i\}$ в указанном диапазоне.
- Вычисляются веса

$$w_i = \frac{S(\lambda_i)}{\sum_{j=1}^{20} S(\lambda_j)},$$

с помощью одной векторной операции: weights = np.array([self.spectral_density(wl) for wl in wavelengths]); weights /= weights.sum().

- Создаётся трёхканальный массив image $[x, y, k], k \in \{0, 1, 2\}$ для RGB:
 - * для каждой λ_i рассчитывается скалярное поле интенсивности $I_{\text{mono}}(r,\lambda_i)$ функцией intensity_mono,
 - * находят цветовые коэффициенты $rgb = wavelength_to_rgb(\lambda_i)$,
 - * и суммируют вклад во все три канала:

image[:,:,k] +=
$$w_i I_{\text{mono}}(r, \lambda_i) \operatorname{rgb}[k]$$
.

 После цикла массив нормализуется по максимуму, умножается на 255 и приводится к типу uint8:

image
$$\rightarrow \frac{\text{image}}{\text{max(image)}} \times 255.$$

```
def intensity_quasi(self, r):
2
                   wavelengths = np.linspace(self.lambda0 - self.delta_lambda / 2,
                                              self.lambda0 + self.delta_lambda / 2, 20)
                   weights = np.array([self.spectral_density(wl) for wl in wavelengths])
                   weights /= np.sum(weights)
                   image = np.zeros((r.shape[0], r.shape[1], 3))
                   for wl, weight in zip(wavelengths, weights):
8
                       I = self.intensity_mono(r, wl)
9
                       rgb = wavelength_to_rgb(w1)
                       for i in range(3):
                           image[:, :, i] += weight * I * rgb[i]
12
                   image /= np.max(image)
13
                   return (image * 255).astype(np.uint8)
14
```

Итого, intensity_quasi возвращает готовое RGB-изображение. Пусть через $\operatorname{rgb}_k(\lambda_i)$, $k \in \{R,G,B\}$, обозначается k-я компонента, возвращаемая функцией wavelength_to_rgb(λ_i). Тогда для каждого канала выполняется взвешенная сумма:

$$R(r) = \sum_{i=1}^{20} w_i \ I_{\text{mono}}(r, \lambda_i) \ \text{rgb}_R(\lambda_i),$$

$$G(r) = \sum_{i=1}^{20} w_i \ I_{\text{mono}}(r, \lambda_i) \ \text{rgb}_G(\lambda_i),$$

$$B(r) = \sum_{i=1}^{20} w_i \ I_{\text{mono}}(r, \lambda_i) \ \text{rgb}_B(\lambda_i),$$

где

$$w_i = \frac{S(\lambda_i)}{\sum_{i=1}^{20} S(\lambda_i)}, \quad I_{\text{mono}}(r, \lambda_i) = 0.5 [1 - \cos(2\pi r^2/(\lambda_i R))].$$

После вычисления всех трёх каналов массив [R(r), G(r), B(r)] нормализуется по своему максимуму и масштабируется в диапазон [0, 255], получая итоговое 8-битное RGB-изображение.

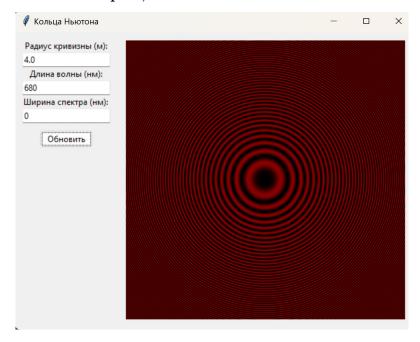
2.3 Построение двумерного поля интенсивности

Для визуализации интерференционной картины создаётся двумерная координатная сетка, где интенсивность I(x,y) определяется как функция $I\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$. Это соответствует преобразованию теоретической зависимости I(r) в изображение, что позволяет получить кольцевую структуру модели.

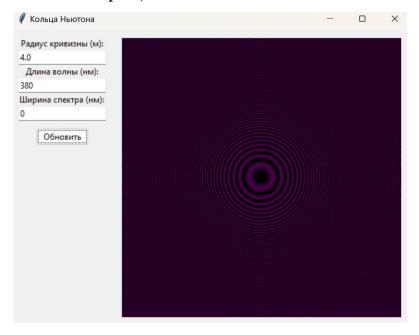
```
x = np.linspace(-0.01, 0.01, self.size)
y = np.linspace(-0.01, 0.01, self.size)
xx, yy = np.meshgrid(x, y)
r = np.sqrt(xx ** 2 + yy ** 2)
```

3 Демо-примеры запуска программы

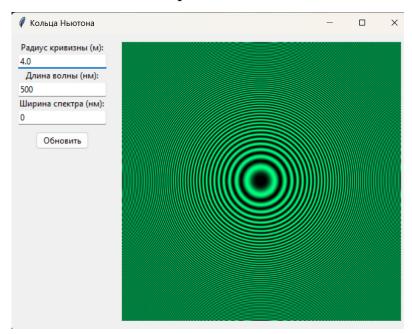
3.1 Монохром, близкий к ИК



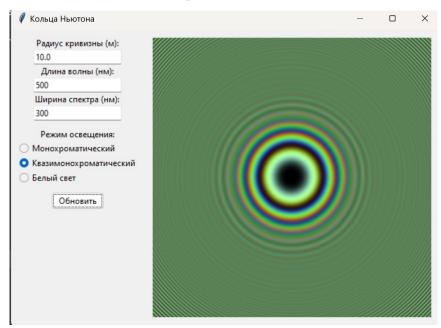
3.2 Монохром, близкий к УФ



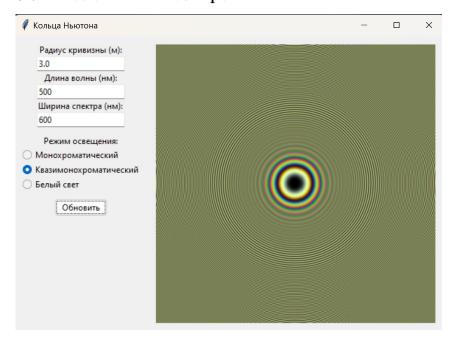
3.3 Зеленый монохром



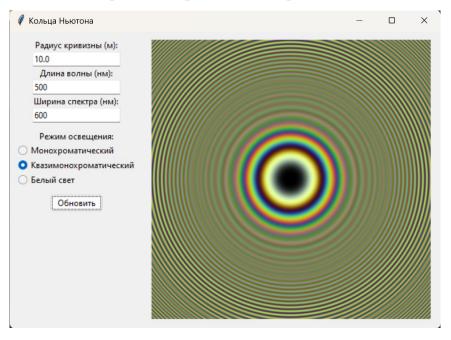
3.4 Большой квазихром



3.5 Маленький квазихром



3.6 Квазихром с широким спектром волн



3.7 Белый свет

