Типовой расчет №1
по математической статистике.
Часть II

Ким В.Р.
Группа М3207
Вариант №5

Задача 1. Пассажир, приходящий в случайные моменты времени на автобусную остановку, в течение пяти поездок фиксировал свое время ожидания автобуса : 5,3; 3,8; 1,2; 9,2; 4,7 минуты. Известно, что автобус ходит с интервалом в Θ минут. Оценить методом максимального правдоподобия Θ. Вычислить несмещенную оценку.

Решение:
Описано равномерное распределение:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Theta}, & 0 \leq x \leq \Theta), \\ 0, & x < 0 \vee x > \Theta). \end{cases} \tag{1}$$

Выборка: $1.2, 3.8, 4.7, 5.3, 9.2$, ее максимум - $9,2$. Для $\Theta < 9.2$, x_{max} будет выходить за пределы $[0, \Theta]$, и функция распределения примет значение 0 (невозможное время ожидания автобуса)

1. Составим функцию правдоподобия:
   При $\Theta \geq 9.2$:
   $$L(x_1, \ldots, x_5, \Theta) = \prod i = 1^5 f(x_i, \Theta) = \prod_{i=1}^{5} \frac{1}{\Theta} = \frac{1}{\Theta^5},$$
   тогда:
   $$L(\Theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Theta^5}, & \Theta \geq 9.2, \\ 0, & \Theta < 9.2 \end{cases} \tag{2}$$
2. Теперь нужно максимизировать $L(\Theta)$.
   $\dfrac{1}{\Theta^5}$ возрастает при убывании знаменателя, то есть, подойдет минимальное Θ, при котором $L(\Theta) > 0$. Единственное такое значение - это $x_{max} = 9.2$

Ответ: 9.2

Задача 2. Случайная величина ξ (число семян сорников в пробе зерна) распределена по закону Пуассона. Ниже прриведено распределение семян сорников в $n = 1000$ пробах семян.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_1	405	366	175	40	8	4	2

Найти методом моментов точную оценку параметра λ. Оценить вероятность того, что в пробе зерна не будет сорняков

Решение:
Размер выборки $n = 1000$
Закон Пуассона:

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Применим метод моментов для оценки λ:

1. Неизвестный параметр один, поэтому запишем только первые моменты.
   Выборочный момент:

   $$\nu_1^* = \frac{1}{n}\sum x_i^1 = \frac{366 + 175 \cdot 2 + 40 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{1000} = 0.9$$

   Теоретический момент: первый момент - это матожидание, для распределения Пуассона оно равно параметру λ.

2. Приравнивая теоретический момент к выборочному, получаем сразу $\lambda = 0.9$

Вероятность отсутствия сорняков:

$$P(0) = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = e^{-\lambda} = e^{-0.9} \approx 0.4$$

Ответ: 0.9; 0.4

Задача 3. Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ – случайная выборка из генеральной совокупности X, имеющей нормальное распределение с неизвестным средним значением Θ и известной дисперсией σ^2. Доказать, что оценка $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(X_1, X_2, ..., X_n) = X_1$ является несмещенной, но не является состоятельной оценкой.

Решение:
Для нормального распределения, среднее значение является первым параметром, СКО - вторым. Тогда выборка $\in \mathcal{N}(\Theta, \sigma)$

1. $\square$ Точечная оценка является несмещенной, если ее матожидание равно оцениваемому параметру, то есть: $M(\hat{\Theta}) = \Theta$.

   $$M(\hat{\Theta}) = M(X_1)$$

   Так как X_1 - элемент выборки из нормального распределения $\mathcal{N}(\Theta, \sigma)$, $M(X_1) = \Theta$. Получили $M(\hat{\Theta}) = \Theta$, то есть, оценка несмещенная $\blacksquare$

2. $\square$ Точечная оценка является состоятельной, если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру, формально:

   $$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P(|\hat{\Theta} - \Theta| > \varepsilon) = 0.$$

   Выражение под знаком предела связано с дисперсией через н-во Чебышева:

   $$P(|\hat{\Theta} - \Theta| > \varepsilon) \le \frac{D(\hat{\Theta})}{\varepsilon^2}.$$

Правая часть - это верхняя граница $P(|\hat{\Theta} - \Theta| > \varepsilon)$, она должна стремиться к нулю по определению состоятельности оценки. Тогда, $D(\hat{\Theta}) \to 0$ при $n \to \infty$ (= возрастание точности оценки при увеличении числа испытаний) - это необходимое условие состоятельности $\hat{\Theta}$. В нашем случае:

$$D(\hat{\Theta}) = D(X_1) = \sigma^2$$

получили константное значение. То есть, $D(\hat{\Theta}) \nrightarrow 0$, и оценка несостоятельная ■

ура!