Типовой расчет №3
по математической статистике.
Статистические гипотезы

Ким В.Р.
Группа M3207
Вариант №5

Теоретическая справка

- Нулевая гипотеза $H_0 : \theta = \theta_0$
- Альтернативная гипотеза H_1
  - двусторонняя: $\theta \neq \theta_0$
  - односторонняя $\theta > \theta_0, \theta < \theta_0$
- Ошибка I рода - отклонение верной H_0
  - $P(I) = \alpha$ - уровень значимости
  - Ошибка II рода
- Ошибка II рода - принятие неверной H_1
  - $P(II) = \beta$
  - $1 - \beta$ - мощность критерия или вероятность правильно отвергнуть H_0, когда она ложна.
- Проверка гипотезы о виде распределения
  - требует вычисления теоретических частот n_i' (согласно предполагаемому распределению)
  - проверяется в помощью критерия Пирсона: $\chi^2_{\text{exp}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
  - если $\chi^2_{\text{exp}} < \chi^2_{\text{crit}}(\alpha; k)$, гипотеза принимается
- Гипотеза о равенстве мат. ожиданий
  - если генеральные дисперсии известны, критерий: $z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}}$
  - если не известны, но считаются равными:
    * используем критерий $t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{D_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$, где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — выборочные средние, n_1 и n_2 — объемы выборок, D_p — объединенная оценка стандартного отклонения
    * $D_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)D(X) + (n_2 - 1)D(Y)}{n_1 + n_2 - 2}}$, где $D(X)$ и $D(Y)$ — выборочные дисперсии.
    * число степеней свободны t-распределения: $k = n_1 + n_2 - 2$

Задача 1. По выборке объема $n = 36$, извлеченной из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 6$, на уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверяется нулевая гипотеза H_0: $a = a_0 = 15$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : a = a_0 \neq 15$.

Найти мощность $(1-\beta)$ двустороннего критерия проверки рассматриваемой гипотезы для $a_1 = 12$.

Решение:
Найдем границы допустимой области:

$$\Phi(k_{crit}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{0,995}{2} = 0,4975 \Longrightarrow k_{crit} = 2,08$$
$$\Phi(-k_{crit}) = -\Phi(k_{crit}) \Longrightarrow -k_{crit} = -2,08$$

итого, допустимая область: $[-2,08; 2,08]$

$$U = \frac{\bar{x} - a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{x} - 15}{6/\sqrt{36}} = \bar{x} - 15$$

Найдем мощность рассматриваемого критерия, что по определению есть вероятность попадания статистики критерия в критическую область при допущении, что справедлива конкурирующая гипотеза

$$1 - \beta = P\left(\left|\frac{\bar{x} - a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| > k_{\text{crit}} \,\middle|\, H_1\right);$$
$$\left|\frac{\bar{x} - a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| > k_{\text{crit}}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\bar{x} - a_0 < -k_{\text{crit}} \;\cup\; \bar{x} - a_0 > k_{\text{crit}}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\bar{x} < a_0 - k_{\text{crit}} \;\cup\; \bar{x} > a_0 + k_{\text{crit}}$$
$$\bar{x} < 12,92 \;\cup\; \bar{x} > 17,08$$

если $\bar{x}$ оказывается в этих пределах, то H_0 отвергается.

Если истинное значение $a = 12$, то:

$$\bar{x} \sim N\left(a_1, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(12, \frac{6^2}{36}\right) = N(12, 1).$$

Преобразуем критические значения $\bar{x}$ в Z-оценки:

$$Z_{\text{лев}} = \frac{12.42 - 12}{1} = 0.42, \quad Z_{\text{прав}} = \frac{17.58 - 12}{1} = 5.58.$$

Расчет мощности критерия:
Мощность $(1 - \beta)$ — это вероятность попадания $\bar{x}$ в критическую область при $a = 12$:

$$1 - \beta = P(\bar{x} < 12.42 \mid a = 12) + P(\bar{x} > 17.58 \mid a = 12).$$

- Левая критическая область:

$$P(\bar{x} < 12.42 \mid a = 12) = P\left(Z < 0.42\right) \approx 0.6628 \quad (\text{из таблиц } N(0,1)).$$

- Правая критическая область:

$$P(\bar{x} > 17.58 \mid a = 12) = P(Z > 5.58) \approx 1 - \Phi(5.58) \approx 1 - 0.999999 = 0.000001.$$

Итоговая мощность:

$$1 - \beta \approx 0.6628 + 0.000001 \approx 0.66$$

Ответ: 0,66

Задача 2. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 17$ и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия $s^2 = 0,24$.

Требуется при уровне значимости $a = 0,05$ проверить нулевую гипотезу $H_0 : \sigma_0^2 = 18$, приняв в качестве альтернативной гипотезы $H_1 : \sigma_0^2 > 0,18$

Решение:
Так как дана исправленная выборочная дисперсия, для определения статистики критерия и границы критической области будем использовать распределение Хи-квадрат.

Исходя из вида H_1, критическая область правосторонняя. Найдем критическую границу. У нас $n - 1 = 16$ степеней свободы и $\alpha = 1 - a = 0,95$:

$$\chi^2_{\text{crit}} = \chi^2_{0,95}(16) = 7,962$$

Посчитаем статистику критерия

$$U = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma_0^2} = \frac{16 \cdot 0,24}{18} \approx 0,213,$$

так как $0,213 < 7,962$, гипотеза H_0 принимается.

Ответ: H_0 принимается

Задача 3. По группировке, полученной в типовом расчете №1 (часть1), используя критерий χ^2, проверить при уровнях значимости 0,05 и 0,01 гипотезу о нормальном распределении соответствующего признака взяв в качестве значений параметров нормального распределения их оценки, полученные по сгруппированным данным

Решение:
Из первого типовика:

Номер интервала i	Границы интервала i	Середина интервала x_i	Частота n_i	Отн. частота $W_i = \frac{n_i}{N}$
1	[5.13; 7.24)	6.18	1	0.01
2	[7.24; 9.35)	8.29	0	0
3	[9.35; 11.46)	10.40	2	0.02
4	[11.46; 13.56)	12.51	19	0.19
5	[13.56; 15.67)	14.62	46	0.46
6	[15.67; 17.78)	16.73	28	0.28
7	[17.78; 19.89)	18.84	4	0.04

Выборочное среднее $\bar{x} = 14.81$, несмещенная оценка дисперсии $\hat{s^2} = 3.88$, среднеквадратичное отклонение $= s = 1.97$.

Для нормального распределения вероятность попадания в интервал выглядит так:

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}).$$

Посчитаем теоретические частоты.

1. $\Phi\left(\frac{7.24-14.81}{1.97}\right) - \Phi\left(\frac{5.13-14.81}{1.97}\right) = \Phi(-3.84) - \Phi(-4.91) \approx 0.00008,$

   $n_i^{'} = 100 \cdot 0.00008 = 0.008$
2. $\Phi\left(\frac{9.35-14.81}{1.97}\right) - \Phi\left(\frac{7.24-14.81}{1.97}\right) = \Phi(-2.77) - \Phi(-3.84) \approx 0.499992 - 0.4971 \approx 0.003,$

   $n_i^{'} = 100 \cdot 0.003 = 0.3$
3. $\Phi\left(\frac{11.46-14.81}{1.97}\right) - \Phi\left(\frac{9.35-14.81}{1.97}\right) = \Phi(-1.7) - \Phi(-2.77) = 0.4973 - 0.4554 \approx 0.04,$

   $n_i^{'} = 4$
4. $\Phi\left(\frac{13.56-14.81}{1.97}\right) - \Phi\left(\frac{11.46-14.81}{1.97}\right) = \Phi(-0.63) - \Phi(-1.7) = 0.4554 - 0.2357 \approx 0.22,$

   $n_i^{'} = 22$
5. $\Phi\left(\frac{15.67-14.81}{1.97}\right) - \Phi\left(\frac{13.56-14.81}{1.97}\right) = \Phi(0.43) - \Phi(-0.63) = 0.2357 + 0.1664 \approx 0.4,$

   $n_i^{'} = 40$
6. $\Phi\left(\frac{17.78-14.81}{1.97}\right) - \Phi\left(\frac{15.67-14.81}{1.97}\right) = \Phi(1.5) - \Phi(0.43) = 0.4332 - 0.1664 \approx 0.27,$

   $n_i^{'} = 27$
7. $\Phi\left(\frac{19.89-14.81}{1.97}\right) - \Phi\left(\frac{17.78-14.81}{1.97}\right) = \Phi(2.57) - \Phi(1.5) = 0.495 - 0.4332 \approx 0.062,$

   $n_i^{'} = 6.2$

На первых 3 интервалах $n_i^{'}$ слишком мало (< 5), объединим их чтобы не получить большую погрешность при расчете χ^2_{exp}. $n_{1-3}^{'} = 0.008 + 0.3 + 4 = 4.308$.
Сравним экспериментальные частоты из 1 типовика и полученные теоретические частоты, для проверки.

i	n_i	$n_i^{'}$
1..3	3	4.308
4	19	22
5	46	40
6	28	27
7	4	6.2

ну вроде похоже.

Критерий согласия Пирсона:

$$\chi^2_{\text{exp}} = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$$

$$\chi^2_{\text{exp}} = \frac{(3-4.308)^2}{4.308} + \frac{(19-22)^2}{22} + \frac{(46-40)^2}{40} + \frac{(28-27)^2}{27} + \frac{(4-6.2)^2}{6.2} \approx 2.52$$

Число степеней свободы для Хи-квадлрат распределения определяется так: $k = n - p - 1$, у нас: $k = 7 - 2 - 1 = 4$ ($p = 2$ - два параметра нормального распределения).
Критическое $\chi^2_{\text{crit}}(\alpha; k)$ находится из таблицы:

- $\chi^2_{\text{crit}}(0,05; 4) = 9.5$
- $\chi^2_{\text{crit}}(0,01; 4) = 13.3$

Если $\chi^2_{\text{exp}} < \chi^2_{\text{crit}}(\alpha; k)$, гипотеза принимается. В нашем случае: $\chi^2_{\text{exp}} < \chi^2_{\text{crit}}(\alpha; k)$ при обоих α

Ответ: гипотеза принимается в обоих случаях

Задача 4. По выборке объема $n = 30$ найден средний вес $x = 130$г изделий, изготовленных на первом станке; по выборке объема $m = 40$ найден средний вес $\bar{y} = 125$г изделий, изготовленных на втором станке. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 60$г, $D(Y) = 80$г.

Требуется при уровне значимости $0,05$ проверить нулевую гипотезу $H_0 : M(X) = M(Y)$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : M(X) \neq M(Y)$. Предполагается, что случайные величины XиY распределены нормально и выборки независимы

Решение:
Критерий для проверки гипотезы о равенстве мат. ожиданий при известных генеральных дисперсиях выглядит вот так:

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}}.$$

В нашем случае:

$$\bar{x} - \bar{y} = 130 - 125 = 5.$$

$$\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}} = \sqrt{\frac{60}{30} + \frac{80}{40}} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2.$$

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}} = \frac{5}{2} = 2.5.$$

Гипотеза двусторонняя ($H_1 : M(X) \neq M(Y)$), поэтому уровень значимости $\alpha = 0.05$ делим пополам: $\alpha/2 = 0.025$. Критическое значение z_{crit} для стандартного нормального распределения:

$$P(Z > z_{\text{crit}}) = 0.025 \implies z_{\text{crit}} = 1.96.$$

Критическая область: $|z| > 1.96$.
$|z| = 2.5 > 1.96$, значение $z = 2.5$ попадает в критическую область.
На уровне значимости $\alpha = 0.05$ отвергаем нулевую гипотезу $H_0 : M(X) = M(Y)$, так как $|z| = 2.5 > 1.96$. Средние веса изделий на первом и втором станках различаются.

Ответ: гипотеза отвергается в пользу альтернативной

Задача 5. В результате взвешивания 800 стальных шариков получено эмпирическое распределение, приведенное в таблице (в первом столбце указан интервал веса в граммах, во втором – частота, то есть количество шариков, вес которых принадлежит этому интервалу).

Требуется при уровне значимости $0,01$ проверить гипотезу о том, что вес шариков X распределен равномерно

$X_{i-1} - X_i$	n_i
20.0-20.5	91
20.5-21.0	76
21.0-21.5	75
21.5-22.0	74
22.0-22.5	92
22.5-23.0	83
23.0-23.5	79
23.5-24.0	73
24.0-24.5	80
24.5-25.0	77

Решение:
Для проверки гипотезы о виде распределения используем критерий χ^2.
Равномерное распределение на отрезке $[a, b]$ имеет плотность $f(x) = \frac{1}{b-a}$. Из таблицы: $a = 20$, $b = 25$, тогда:

$$b - a = 25 - 20 = 5, \quad f(x) = \frac{1}{5} = 0.2.$$

Всего $k = 10$ интервалов, каждый длиной 0.5 г. Вероятность попадания в каждый интервал:

$$P(X \in [x_{i-1}, x_i)) = f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0.2 \cdot 0.5 = 0.1.$$

Теоретические частоты очевидно будут одинаковы для всех интервалов и равны числу $n'_i = n \cdot P = 800 \cdot 0.1 = 80$. Все $n'_i \geq 5$, объединение интервалов не требуется.

Вычислим статистику для критерия согласия Пирсона $\chi^2_{\text{exp}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$:

- $\frac{(91-80)^2}{80} = \frac{11^2}{80} = \frac{121}{80} = 1.5125$
- $\frac{(76-80)^2}{80} = \frac{(-4)^2}{80} = \frac{16}{80} = 0.2$
- $\frac{(75-80)^2}{80} = \frac{(-5)^2}{80} = \frac{25}{80} = 0.3125$
- $\frac{(74-80)^2}{80} = \frac{(-6)^2}{80} = \frac{36}{80} = 0.45$
- $\frac{(92-80)^2}{80} = \frac{12^2}{80} = \frac{144}{80} = 1.8$
- $\frac{(83-80)^2}{80} = \frac{3^2}{80} = \frac{9}{80} = 0.1125$
- $\frac{(79-80)^2}{80} = \frac{(-1)^2}{80} = \frac{1}{80} = 0.0125$

- $\frac{(73-80)^2}{80} = \frac{(-7)^2}{80} = \frac{49}{80} = 0.6125$

- $\frac{(80-80)^2}{80} = 0$

- $\frac{(77-80)^2}{80} = \frac{(-3)^2}{80} = \frac{9}{80} = 0.1125$

$$\chi^2_{\text{exp}} = 1.5125 + 0.2 + 0.3125 + 0.45 + 1.8 + 0.1125 + 0.0125 + 0.6125 + 0 + 0.1125 = 5.125.$$

Число степеней свободы: $k = n - p - 1$, где $k = 10$, p — число оцениваемых параметров. Для равномерного распределения параметры a и b известны, тогда ($p = 0$):

$$k = 10 - 0 - 1 = 9.$$

Заглянем в таблицу Хи-квадрат распределения

$$\chi^2_{\text{crit}}(0.01; 9) = 21.7.$$

Сравниваем: $\chi^2_{\text{exp}} = 5.125 < \chi^2_{\text{crit}} = 21.7$, то есть H_0 принимается

Ответ: гипотеза принимается