Типовой расчет №1 по математической статистике. Часть I

Ким В.Р.
Группа М3207
Вариант №5

Выборка *(100 элементов)* : 5.13 11.95 13.60 12.27 16.62 15.37 17.00 17.06 14.20 17.76 16.31 14.51 12.81 13.21 12.58 11.54 15.92 14.11 11.00 15.96 14.91 15.75 15.31 13.46 15.46 14.68 15.70 16.86 13.96 14.28 13.83 13.56 13.01 15.64 16.43 14.28 13.91 16.41 14.18 16.59 13.00 13.57 12.10 15.82 16.37 16.29 14.13 13.66 12.95 17.08 15.73 14.02 15.63 16.58 14.85 12.50 15.16 14.94 14.36 12.46 14.52 15.31 15.97 16.00 13.44 16.80 13.83 14.67 17.37 15.40 14.85 17.24 17.27 15.06 13.15 15.03 14.74 15.64 16.09 13.28 17.81 17.28 18.20 14.61 13.75 14.03 14.25 14.67 14.09 14.29 12.00 9.97 14.48 13.23 17.88 19.89 16.38 14.70 13.97 15.25

Отсортированная: 5.13 9.97 11.00 11.54 11.95 12.00 12.10 12.27 12.46 12.50 12.58 12.81 12.95 13.00 13.01 13.15 13.21 13.23 13.28 13.44 13.46 13.56 13.57 13.60 13.66 13.75 13.83 13.83 13.91 13.96 13.97 14.02 14.03 14.09 14.11 14.13 14.18 14.20 14.25 14.28 14.28 14.29 14.36 14.48 14.51 14.52 14.61 14.67 14.67 14.68 14.70 14.74 14.85 14.85 14.91 14.94 15.03 15.06 15.16 15.25 15.31 15.31 15.37 15.40 15.46 15.63 15.64 15.64 15.70 15.73 15.75 15.82 15.92 15.96 15.97 16.00 16.09 16.29 16.31 16.37 16.38 16.41 16.43 16.58 16.59 16.62 16.80 16.86 17.00 17.06 17.08 17.24 17.27 17.28 17.37 17.76 17.81 17.88 18.20 19.89

Задача 1. Представить выборку из n=100 значений в виде вариационного ряда. Найти размах ряда $R = X_{max} - X_{min}$

Решение:
$R = 19.89 - 5.13 \approx 14.76$

Ответ: 14.76

Задача 2. Построить интервальный статистический ряд, используя требуемое количество интервалов m (формула Стерженса) и вычислив ширину интервала $h = R/m$

Решение:
Число интервалов по формуле Стёрженса: $m = \log_2(N) + 1 = 7$
Ширина интервала: $h = R/m = 14.76/7 \approx 2.109$
Интервальный статистический ряд - это столбцы "границы интервала"и "частота"в следующем задании

Ответ: 7 интервалов, шириной 2.109

Задача 3. Результаты группировки свести в таблицу:

Номер интервала i	Границы интервала i	Середина интервала x_i	Частота n_i	Отн. частота $W_i = \frac{n_i}{N}$	Накопл. частота $\sum_j^i n_i$	Накопл. отн. частота $\sum_j^i \frac{n_i}{N}$	Плотность отн. частоты $\frac{W_i}{h}$
...	...	...	...	...	...	...	...

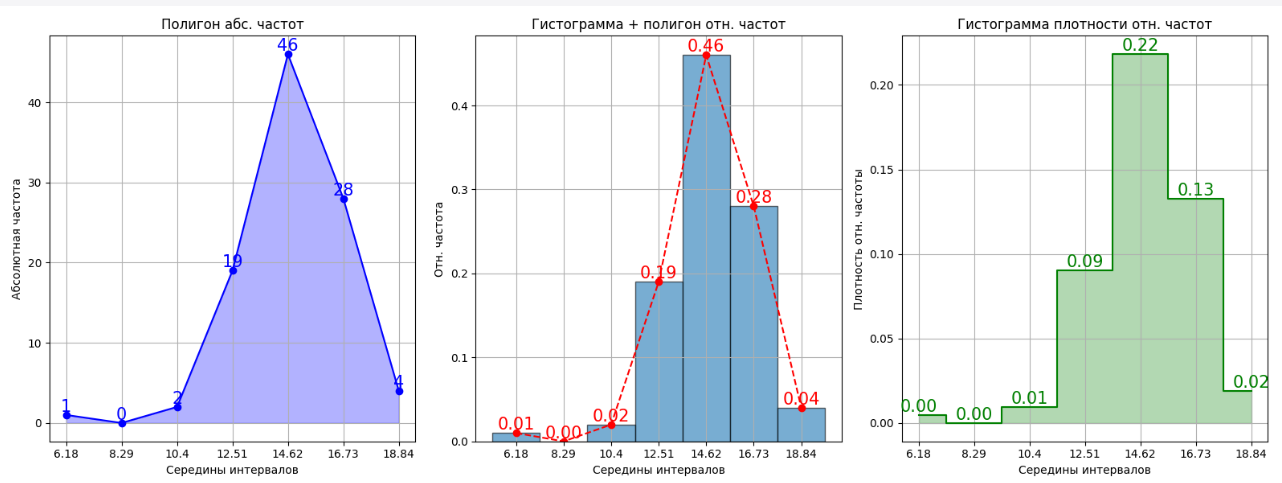
Решение:

Номер интервала i	Границы интервала i	Середина интервала x_i	Частота n_i	Отн. частота $W_i = \frac{n_i}{N}$	Накопл. частота $\sum_j^i n_i$	Накопл. отн. частота $\sum_j^i \frac{n_i}{N}$	Плотность отн. частоты $\frac{W_i}{h}$
1	[5.13; 7.24)	6.18	1	0.01	1	0.01	0.0047
2	[7.24; 9.35)	8.29	0	0	1	0.01	0
3	[9.35; 11.46)	10.40	2	0.02	3	0.03	0.0095
4	[11.46; 13.56)	12.51	19	0.19	22	0.22	0.0901
5	[13.56; 15.67)	14.62	46	0.46	68	0.68	0.2182
6	[15.67; 17.78)	16.73	28	0.28	96	0.96	0.1328
7	[17.78; 19.89)	18.84	4	0.04	100	1	0.019

Задача 4. По результатам группировки построить

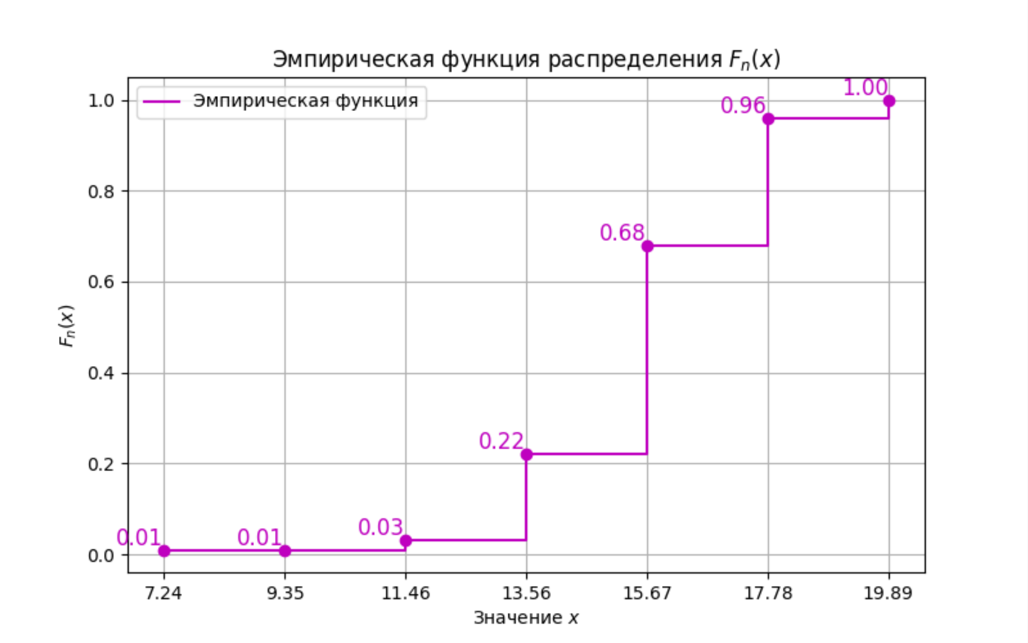
- Полигон абсолютных частот (ломаная с вершинами в точках $(x_i; n_i)$)
- Гистограмму относительных частот
  - и на ней полигон относительных частот, соединив отрезками прямой середины верхних сторон прямоугольников гистограммы.
- Гистограмму плотностей относительных частот(ступенчатую фигуру из прямоугольников с основаниями, равными интервалам значений признака, и высотами, равными частостям/плотностям частостей интервалов)

Решение:



Задача 5. Построить эмпирическую функцию распределения интервального ряда $F_n(x)$), то есть относительную частоту (частость) того, что признак (случайная величина X) примет значение, меньшее заданного x , т.е. $F_n(x) = w(X < x)$. Для данного эмпирическая функция распределения представляет накопленную частость $w_x^{acc} = \frac{n_x^{acc}}{n}$. Графиком эмпирической функции распределения является кумулята накопленных относительных частот, то есть ломаная, вершины которой имеют абсциссы, совпадающие с правыми границами интервалов группировки, и ординаты, совпадающие со значениями накопленных частот для соответствующих интервалов.

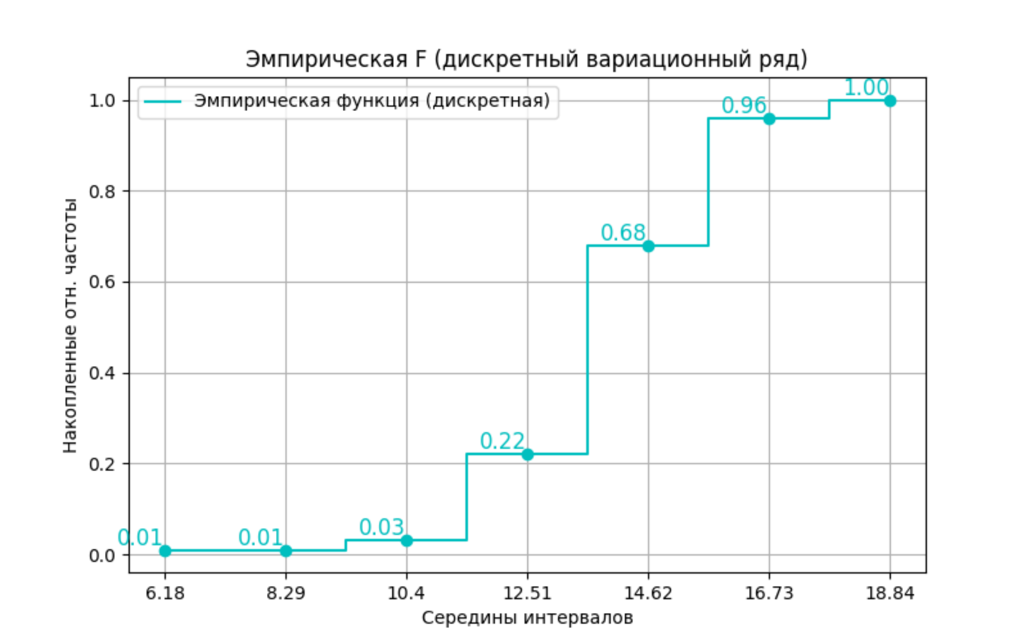
Решение:



Задача 6. Найти эмпирическую функцию распределения дискретного вариационного ряда (середины интервалов – накопленные относительные частоты). Здесь эмпирическая функция распределения представляет собой разрывную ступенчатую функцию по аналогии с функцией распределения для дискретной случайной величины с той разницей, что по оси ординат вместо вероятностей – накопленные частости

Решение:

Решение:



Задача 7. Найти оценки математического ожидания (выборочное среднее), несмещенную и смещенную оценки дисперсии и среднего квадратического отклонения.

Решение:
Выборочное среднее

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i w_i = 14.81,$$

где w_i - это отн. частота i

Смещенная оценка дисперсии

$$s^2 = \sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x})^2 w_i = 3.84$$

Несмещенная оценка дисперсии

$$\hat{s^2} = \frac{n}{n-1} s^2 = 3.88$$

Среднеквадратичное отклонение =

$$s = \sqrt{s^2} = 1.97$$

Ответ:

Задача 8. Найти медиану вариационного ряда $\hat{M}_e$ (значение признака, приходящегося на середину вариационного ряда). Для интервального вариационного ряда медиана находится с помощью линейного интерполирования медианного интервала ряда или с помощью кумуляты накопленных частот, как значение признака, для которого накопленная частота равна 0.5

Решение:
Для вариационного ряда с $n = 100$, значение посередине равно среднему между значениями под номерами 50 и 51:

$$\hat{M}_e = (14.68 + 14.7)/2 = 14.69$$

Решение для интервального вариационного ряда:
$n/2 = 100/2 = 50$.
Медианным интервалом $[L_m, U_m]$ является интервал, в котором лежит накопленная частота, равная либо наименьшая превышающая 50, то есть, интервал $[13.56; 15.67)$ с частотой $f_m = 46$
Кумулятивная частота F_{m-1} интервала предшествующего медианному равна 19 Ширина интервалов h равна 2.109

$$\hat{M}_e = L_m + \frac{h(\frac{n}{2} - F_{m-1})}{f_m}$$

$$\hat{M}_e = 13.56 + \frac{2.109(50 - 19)}{46} \approx 14.98$$

Ответ: 14.98

Задача 9. Найти моду вариационного ряда $\hat{M}_o$ (вариант, которому соответствует наибольшая частота). Для интервального ряда значение моды определяется с помощью линейного интерполирования модального интервала

Решение:
Для варицонного ряда: максимальная частота в выборке равна 2, ее имеют элементы 13.83, 14.28, 14.67, 14.85, 15.31, 15.64.

Решение для интервального вариационного ряда:
модальный интервал $[L_m; U_m]$ (или интервал с наибольшей частотой) - $[13.56; 15.67)$.
Его частота f_m равна 46.
Частота интервала до него f_{m-1} равна 19, после (f_{m+1}) - 28 (из задачи №3).
Ширина интервалов h равна 2.109
Тогда по методу линейного интерполирования модального интервала, мода $\hat{M}_e$ вычисляется по формуле:

$$\hat{M}_o = L_m + \frac{h(f_m - f_{m-1})}{2(f_m - f_{m-1}) + (f_m - f_{m+1})},$$

$$\hat{M_o} = 13.56 + \frac{2.109(46-19)}{2(46-19)+(46-28)} \approx 14.35$$

Ответ: 14.35

Задача 10. Вычислить коэффициент ассиметрии вариационного ряда

$$\tilde{A} = \frac{\tilde{\mu_3}}{s^3},$$

$$\tilde{\mu_k} = \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^k n_i}{n},$$

где m - число неповторяющихся вариантов или число интервалов

Решение:
$s = 1.97$, $s^3 = 1.97^3 \approx 7.65$
$\bar{x} = 14.81$ (из задания 7)

Вычислим третий момент:

$$\tilde{\mu_3} = \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^3 n_i}{n} = \frac{(-642.71 \cdot 1 - 85.76 \cdot 2 - 12.17 \cdot 19 - 0.01 \cdot 46 + 7.08 \cdot 28 + 65.46 \cdot 4)}{100}$$

$$\approx \frac{-585.84}{100} \approx -5.86$$

$\hat{\mu_3} < 0$ говорит о левосторонней ассиметрии.

Тепепрь считаем коэффициент ассиметрии:

$$\tilde{A} = \frac{\tilde{\mu_3}}{s^3} = \frac{-5.86}{7.65} \approx -0.77$$

Ответ: -0.77

Задача 11. Вычислить коэффициент эксцесса вариационного ряда

$$\tilde{E} = \frac{\tilde{\mu_4}}{s^4} - 3$$

Решение:
$s = 1.97$, $s^4 = 1.97^4 \approx 15.06$
$\bar{x} = 14.81$ (из задания 7)

Вычислим четвертый момент:

$$\tilde{\mu_3} = \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^3 n_i}{n} = \frac{(5547 \cdot 1378 \cdot 228 \cdot 1914 \cdot 28264 \cdot 4)}{100}$$

$$\approx \frac{8270.23}{100} \approx 82.7$$

$\hat{\mu_4} > 0$ говорит о сосредоточенности значений вокруг среднего (заостренная вершина графика по сравнению с нормальным распределением).

Тепепрь считаем коэффициент эксцесса:

$$\tilde{A} = \frac{\tilde{\mu_4}}{s^4} = \frac{82.7}{15.06} \approx 5.49$$

Ответ: 5.49