

Типовой расчет №1  
по математической статистике.  
Часть II

Ким В.Р.  
Группа МЗ207  
Вариант №5

**Задача 1.** Пассажир, приходящий в случайные моменты времени на автобусную остановку, в течение пяти поездок фиксировал свое время ожидания автобуса : 5,3; 3,8; 1,2; 9,2; 4,7 минуты. Известно, что автобус ходит с интервалом в  $\Theta$  минут. Оценить методом максимального правдоподобия  $\Theta$ . Вычислить несмещенную оценку.

**Решение:**

Описано равномерное распределение:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Theta}, & 0 \leq x \leq \Theta, \\ 0, & x < 0 \vee x > \Theta. \end{cases} \quad (1)$$

Выборка: 1.2, 3.8, 4.7, 5.3, 9.2, ее максимум - 9,2. Для  $\Theta < 9.2$ ,  $x_{max}$  будет выходить за пределы  $[0, \Theta]$ , и функция распределения примет значение 0 (невозможное время ожидания автобуса)

1. Составим функцию правдоподобия:

При  $\Theta \geq 9.2$ :

$$L(x_1, \dots, x_5, \Theta) = \prod_{i=1}^5 f(x_i, \Theta) = \prod_{i=1}^5 \frac{1}{\Theta} = \frac{1}{\Theta^5},$$

тогда:

$$L(\Theta) = \begin{cases} \frac{1}{\Theta^5}, & \Theta \geq 9.2, \\ 0, & \Theta < 9.2 \end{cases} \quad (2)$$

2. Теперь нужно максимизировать  $L(\Theta)$ .

$\frac{1}{\Theta^5}$  возрастает при убывании знаменателя, то есть, подойдет минимальное  $\Theta$ , при котором  $L(\Theta) > 0$ . Единственное такое значение - это  $x_{max} = 9.2$

**Ответ:** 9.2

**Задача 2.** Случайная величина  $\xi$  (число семян сорняков в пробе зерна) распределена по закону Пуассона. Ниже приведено распределение семян сорняков в  $n = 1000$  пробах семян.

$x_i$	0	1	2	3	4	5	6
$n_i$	405	366	175	40	8	4	2

Найти методом моментов точную оценку параметра  $\lambda$ . Оценить вероятность того, что в пробе зерна не будет сорняков

**Решение:**

Размер выборки  $n = 1000$

Закон Пуассона:

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Применим метод моментов для оценки  $\lambda$ :

1. Неизвестный параметр один, поэтому запишем только первые моменты.

Выборочный момент:

$$\nu_1^* = \frac{1}{n} \sum x_i^1 = \frac{366 + 175 \cdot 2 + 40 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{1000} = 0.9$$

Теоретический момент: первый момент - это матожидание, для распределения Пуассона оно равно параметру  $\lambda$ .

2. Приравняв теоретический момент к выборочному, получаем сразу  $\lambda = 0.9$

Вероятность отсутствия сорняков:

$$P(0) = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = e^{-\lambda} = e^{-0.9} \approx 0.4$$

**Ответ:** 0.9; 0.4

**Задача 3.** Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – случайная выборка из генеральной совокупности  $X$ , имеющей нормальное распределение с неизвестным средним значением  $\Theta$  и известной дисперсией  $\sigma^2$ . Доказать, что оценка  $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(X_1, X_2, \dots, X_n) = X_1$  является несмещенной, но не является состоятельной оценкой.

**Решение:**

Для нормального распределения, среднее значение является первым параметром, СКО - вторым. Тогда выборка  $\in \mathcal{N}(\Theta, \sigma)$

1.  $\square$  Точечная оценка является несмещенной, если ее матожидание равно оцениваемому параметру, то есть:  $M(\hat{\Theta}) = \Theta$ .

$$M(\hat{\Theta}) = M(X_1)$$

Так как  $X_1$  - элемент выборки из нормального распределения  $\mathcal{N}(\Theta, \sigma)$ ,  $M(X_1) = \Theta$ . Получили  $M(\hat{\Theta}) = \Theta$ , то есть, оценка несмещенная ■

2.  $\square$  Точечная оценка является состоятельной, если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру, формально:

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\Theta} - \Theta| > \varepsilon) = 0.$$

Выражение под знаком предела связано с дисперсией через н-во Чебышева:

$$P(|\hat{\Theta} - \Theta| > \varepsilon) \leq \frac{D(\hat{\Theta})}{\varepsilon^2}.$$

Правая часть - это верхняя граница  $P(|\hat{\Theta} - \Theta| > \varepsilon)$ , она должна стремиться к нулю по определению состоятельности оценки. Тогда,  $D(\hat{\Theta}) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  (= возрастание точности оценки при увеличении числа испытаний) - это необходимое условие состоятельности  $\hat{\Theta}$ . В нашем случае:

$$D(\hat{\Theta}) = D(X_1) = \sigma^2$$

получили константное значение. То есть,  $D(\hat{\Theta}) \nrightarrow 0$ , и оценка несостоятельная ■

ура!