

Типовой расчет №3  
по математической статистике.  
Статистические гипотезы

Ким В.Р.  
Группа МЗ207  
Вариант №5

**Теоретическая справка**

- Нулевая гипотеза  $H_0 : \theta = \theta_0$
- Альтернативная гипотеза  $H_1$ 
  - двусторонняя:  $\theta \neq \theta_0$
  - односторонняя  $\theta > \theta_0, \theta < \theta_0$
- Ошибка I рода - отклонение верной  $H_0$ 
  - $P(I) = \alpha$  - уровень значимости
  - Ошибка II рода
- Ошибка II рода - принятие неверной  $H_1$ 
  - $P(II) = \beta$
  - $1 - \beta$  - мощность критерия или вероятность правильно отвергнуть  $H_0$ , когда она ложна.
- Проверка гипотезы о виде распределения
  - требует вычисления теоретических частот  $n'_i$  (согласно предполагаемому распределению)
  - проверяется в помощью критерия Пирсона:  $\chi^2_{\text{exp}} = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
  - если  $\chi^2_{\text{exp}} < \chi^2_{\text{crit}}(\alpha; k)$ , гипотеза принимается
- Гипотеза о равенстве мат. ожиданий
  - если генеральные дисперсии известны, критерий:  $z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}}$
  - если не известны, но считаются равными:
    - \* используем критерий  $t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{D_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ , где  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  – выборочные средние,  $n_1$  и  $n_2$  – объемы выборок,  $D_p$  – объединенная оценка стандартного отклонения
    - \*  $D_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)D(X) + (n_2-1)D(Y)}{n_1 + n_2 - 2}}$ , где  $D(X)$  и  $D(Y)$  – выборочные дисперсии.
    - \* число степеней свободы t-распределения:  $k = n_1 + n_2 - 2$

**Задача 1.** По выборке объема  $n = 36$ , извлеченной из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением  $\sigma = 6$ , на уровне значимости  $\alpha = 0,01$  проверяется нулевая гипотеза  $H_0: a = a_0 = 15$  при конкурирующей гипотезе  $H_1: a = a_0 \neq 15$ .

Найти мощность  $(1 - \beta)$  двустороннего критерия проверки рассматриваемой гипотезы для  $a_1 = 12$ .

**Решение:**

Найдем границы допустимой области:

$$\begin{aligned}\Phi(k_{crit}) &= \frac{1 - \alpha}{2} = \frac{0,995}{2} = 0,4975 \implies k_{crit} = 2,08 \\ \Phi(-k_{crit}) &= -\Phi(k_{crit}) \implies -k_{crit} = -2,08\end{aligned}$$

итого, допустимая область:  $[-2,08; 2,08]$

$$U = \frac{\bar{x} - a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{x} - 15}{6/\sqrt{36}} = \bar{x} - 15$$

Найдем мощность рассматриваемого критерия, что по определению есть вероятность попадания статистики критерия в критическую область при допущении, что справедлива конкурирующая гипотеза

$$\begin{aligned}1 - \beta &= P\left(\left|\frac{\bar{x} - a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| > k_{crit} \mid H_1\right); \\ &\left|\frac{\bar{x} - a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| > k_{crit} \\ &\Leftrightarrow \\ &\bar{x} - a_0 < -k_{crit} \cup \bar{x} - a_0 > k_{crit} \\ &\Leftrightarrow \\ &\bar{x} < a_0 - k_{crit} \cup \bar{x} > a_0 + k_{crit} \\ &\bar{x} < 12,92 \cup \bar{x} > 17,08\end{aligned}$$

если  $\bar{x}$  оказывается в этих пределах, то  $H_0$  отвергается.

Если истинное значение  $a = 12$ , то:

$$\bar{x} \sim N\left(a_1, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(12, \frac{6^2}{36}\right) = N(12, 1).$$

Преобразуем критические значения  $\bar{x}$  в  $Z$ -оценки:

$$Z_{лев} = \frac{12.42 - 12}{1} = 0.42, \quad Z_{прав} = \frac{17.58 - 12}{1} = 5.58.$$

Расчет мощности критерия:

Мощность  $(1 - \beta)$  — это вероятность попадания  $\bar{x}$  в критическую область при  $a = 12$ :

$$1 - \beta = P(\bar{x} < 12.42 \mid a = 12) + P(\bar{x} > 17.58 \mid a = 12).$$

- Левая критическая область:

$$P(\bar{x} < 12.42 \mid a = 12) = P(Z < 0.42) \approx 0.6628 \quad (\text{из таблиц } N(0, 1)).$$

- Правая критическая область:

$$P(\bar{x} > 17.58 \mid a = 12) = P(Z > 5.58) \approx 1 - \Phi(5.58) \approx 1 - 0.999999 = 0.000001.$$

Итоговая мощность:

$$1 - \beta \approx 0.6628 + 0.000001 \approx 0.66$$

**Ответ:** 0,66

**Задача 2.** Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема  $n = 17$  и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия  $s^2 = 0,24$ .

Требуется при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  проверить нулевую гипотезу  $H_0 : \sigma_0^2 = 18$ , приняв в качестве альтернативной гипотезы  $H_1 : \sigma_0^2 > 0,18$

**Решение:**

Так как дана исправленная выборочная дисперсия, для определения статистики критерия и границы критической области будем использовать распределение Хи-квадрат.

Исходя из вида  $H_1$ , критическая область правосторонняя. Найдем критическую границу. У нас  $n - 1 = 16$  степеней свободы и  $\alpha = 1 - a = 0,95$ :

$$\chi_{\text{crit}}^2 = \chi_{0,95}^2(16) = 7,962$$

Посчитаем статистику критерия

$$U = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma_0^2} = \frac{16 \cdot 0,24}{18} \approx 0,213,$$

так как  $0,213 < 7,962$ , гипотеза  $H_0$  принимается.

**Ответ:**  $H_0$  принимается

**Задача 3.** По группировке, полученной в типовом расчете №1 (часть1), используя критерий  $\chi^2$ , проверить при уровнях значимости 0,05 и 0,01 гипотезу о нормальном распределении соответствующего признака взяв в качестве значений параметров нормального распределения их оценки, полученные по сгруппированному данным

**Решение:**

Из первого типовика:

Номер интервала $i$	Границы интервала $i$	Середина интервала $x_i$	Частота $n_i$	Отн. частота $W_i = \frac{n_i}{N}$
1	[5.13; 7.24)	6.18	1	0.01
2	[7.24; 9.35)	8.29	0	0
3	[9.35; 11.46)	10.40	2	0.02
4	[11.46; 13.56)	12.51	19	0.19
5	[13.56; 15.67)	14.62	46	0.46
6	[15.67; 17.78)	16.73	28	0.28
7	[17.78; 19.89)	18.84	4	0.04

Выборочное среднее  $\bar{x} = 14.81$ , несмещенная оценка дисперсии  $\hat{s}^2 = 3.88$ , среднеквадратич-

ное отклонение =  $s = 1.97$ .

Для нормального распределения вероятность попадания в интервал выглядит так:

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Посчитаем теоретические частоты.

$$1. \Phi\left(\frac{7.24-14.81}{1.97}\right) - \Phi\left(\frac{5.13-14.81}{1.97}\right) = \Phi(-3.84) - \Phi(-4.91) \approx 0.00008,$$

$$n'_i = 100 \cdot 0.00008 = 0.008$$

$$2. \Phi\left(\frac{9.35-14.81}{1.97}\right) - \Phi\left(\frac{7.24-14.81}{1.97}\right) = \Phi(-2.77) - \Phi(-3.84) \approx 0.499992 - 0.4971 \approx 0.003,$$

$$n'_i = 100 \cdot 0.003 = 0.3$$

$$3. \Phi\left(\frac{11.46-14.81}{1.97}\right) - \Phi\left(\frac{9.35-14.81}{1.97}\right) = \Phi(-1.7) - \Phi(-2.77) = 0.4973 - 0.4554 \approx 0.04,$$

$$n'_i = 4$$

$$4. \Phi\left(\frac{13.56-14.81}{1.97}\right) - \Phi\left(\frac{11.46-14.81}{1.97}\right) = \Phi(-0.63) - \Phi(-1.7) = 0.4554 - 0.2357 \approx 0.22,$$

$$n'_i = 22$$

$$5. \Phi\left(\frac{15.67-14.81}{1.97}\right) - \Phi\left(\frac{13.56-14.81}{1.97}\right) = \Phi(0.43) - \Phi(-0.63) = 0.2357 + 0.1664 \approx 0.4,$$

$$n'_i = 40$$

$$6. \Phi\left(\frac{17.78-14.81}{1.97}\right) - \Phi\left(\frac{15.67-14.81}{1.97}\right) = \Phi(1.5) - \Phi(0.43) = 0.4332 - 0.1664 \approx 0.27,$$

$$n'_i = 27$$

$$7. \Phi\left(\frac{19.89-14.81}{1.97}\right) - \Phi\left(\frac{17.78-14.81}{1.97}\right) = \Phi(2.57) - \Phi(1.5) = 0.495 - 0.4332 \approx 0.062,$$

$$n'_i = 6.2$$

На первых 3 интервалах  $n'_i$  слишком мало ( $< 5$ ), объединим их чтобы не получить большую погрешность при расчете  $\chi^2_{\text{exp}}$ .  $n'_{1-3} = 0.008 + 0.3 + 4 = 4.308$ .

Сравним экспериментальные частоты из 1 типовика и полученные теоретические частоты, для проверки.

$i$	$n_i$	$n'_i$
1..3	3	4.308
4	19	22
5	46	40
6	28	27
7	4	6.2

ну вроде похоже.

Критерий согласия Пирсона:

$$\chi_{\text{exp}}^2 = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$$

$$\chi_{\text{exp}}^2 = \frac{(3 - 4.308)^2}{4.308} + \frac{(19 - 22)^2}{22} + \frac{(46 - 40)^2}{40} + \frac{(28 - 27)^2}{27} + \frac{(4 - 6.2)^2}{6.2} \approx 2.52$$

Число степеней свободы для Хи-квадрат распределения определяется так:  $k = n - p - 1$ , у нас:  $k = 7 - 2 - 1 = 4$  ( $p = 2$  - два параметра нормального распределения).

Критическое  $\chi_{\text{crit}}^2(\alpha; k)$  находится из таблицы:

- $\chi_{\text{crit}}^2(0,05; 4) = 9.5$
- $\chi_{\text{crit}}^2(0,01; 4) = 13.3$

Если  $\chi_{\text{exp}}^2 < \chi_{\text{crit}}^2(\alpha; k)$ , гипотеза принимается. В нашем случае:  $\chi_{\text{exp}}^2 < \chi_{\text{crit}}^2(\alpha; k)$  при обоих  $\alpha$

**Ответ:** гипотеза принимается в обоих случаях

**Задача 4.** По выборке объема  $n = 30$  найден средний вес  $\bar{x} = 130$ г изделий, изготовленных на первом станке; по выборке объема  $m = 40$  найден средний вес  $\bar{y} = 125$ г изделий, изготовленных на втором станке. Генеральные дисперсии известны:  $D(X) = 60$ г,  $D(Y) = 80$ г.

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу  $H_0 : M(X) = M(Y)$  при конкурирующей гипотезе  $H_1 : M(X) \neq M(Y)$ . Предполагается, что случайные величины  $X$  и  $Y$  распределены нормально и выборки независимы

**Решение:**

Критерий для проверки гипотезы о равенстве мат. ожиданий при известных генеральных дисперсиях выглядит вот так:

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}}$$

В нашем случае:

$$\begin{aligned}\bar{x} - \bar{y} &= 130 - 125 = 5. \\ \sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}} &= \sqrt{\frac{60}{30} + \frac{80}{40}} = \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2. \\ z &= \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}} = \frac{5}{2} = 2.5.\end{aligned}$$

Гипотеза двусторонняя ( $H_1 : M(X) \neq M(Y)$ ), поэтому уровень значимости  $\alpha = 0.05$  делим пополам:  $\alpha/2 = 0.025$ . Критическое значение  $z_{\text{crit}}$  для стандартного нормального распределения:

$$P(Z > z_{\text{crit}}) = 0.025 \implies z_{\text{crit}} = 1.96.$$

Критическая область:  $|z| > 1.96$ .

$|z| = 2.5 > 1.96$ , значение  $z = 2.5$  попадает в критическую область.

На уровне значимости  $\alpha = 0.05$  отвергаем нулевую гипотезу  $H_0 : M(X) = M(Y)$ , так как  $|z| = 2.5 > 1.96$ . Средние веса изделий на первом и втором станках различаются.

**Ответ:** гипотеза отвергается в пользу альтернативной

**Задача 5.** В результате взвешивания 800 стальных шариков получено эмпирическое распределение, приведенное в таблице (в первом столбце указан интервал веса в граммах, во втором – частота, то есть количество шариков, вес которых принадлежит этому интервалу).

Требуется при уровне значимости 0,01 проверить гипотезу о том, что вес шариков  $X$  распределен равномерно

$X_{i-1} - X_i$	$n_i$
20.0-20.5	91
20.5-21.0	76
21.0-21.5	75
21.5-22.0	74
22.0-22.5	92
22.5-23.0	83
23.0-23.5	79
23.5-24.0	73
24.0-24.5	80
24.5-25.0	77

**Решение:**

Для проверки гипотезы о виде распределения используем критерий  $\chi^2$ .

Равномерное распределение на отрезке  $[a, b]$  имеет плотность  $f(x) = \frac{1}{b-a}$ . Из таблицы:  $a = 20$ ,  $b = 25$ , тогда:

$$b - a = 25 - 20 = 5, \quad f(x) = \frac{1}{5} = 0.2.$$

Всего  $k = 10$  интервалов, каждый длиной 0.5 г. Вероятность попадания в каждый интервал:

$$P(X \in [x_{i-1}, x_i]) = f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0.2 \cdot 0.5 = 0.1.$$

Теоретические частоты очевидно будут одинаковы для всех интервалов и равны числу  $n'_i = n \cdot P = 800 \cdot 0.1 = 80$ . Все  $n'_i \geq 5$ , объединение интервалов не требуется.

Вычислим статистику для критерия согласия Пирсона  $\chi^2_{\text{exp}} = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$ :

- $\frac{(91-80)^2}{80} = \frac{11^2}{80} = \frac{121}{80} = 1.5125$
- $\frac{(76-80)^2}{80} = \frac{(-4)^2}{80} = \frac{16}{80} = 0.2$
- $\frac{(75-80)^2}{80} = \frac{(-5)^2}{80} = \frac{25}{80} = 0.3125$
- $\frac{(74-80)^2}{80} = \frac{(-6)^2}{80} = \frac{36}{80} = 0.45$
- $\frac{(92-80)^2}{80} = \frac{12^2}{80} = \frac{144}{80} = 1.8$
- $\frac{(83-80)^2}{80} = \frac{3^2}{80} = \frac{9}{80} = 0.1125$
- $\frac{(79-80)^2}{80} = \frac{(-1)^2}{80} = \frac{1}{80} = 0.0125$

- $\frac{(73-80)^2}{80} = \frac{(-7)^2}{80} = \frac{49}{80} = 0.6125$

- $\frac{(80-80)^2}{80} = 0$

- $\frac{(77-80)^2}{80} = \frac{(-3)^2}{80} = \frac{9}{80} = 0.1125$

$$\chi_{\text{exp}}^2 = 1.5125 + 0.2 + 0.3125 + 0.45 + 1.8 + 0.1125 + 0.0125 + 0.6125 + 0 + 0.1125 = 5.125.$$

Число степеней свободы:  $k = n - p - 1$ , где  $k = 10$ ,  $p$  — число оцениваемых параметров. Для равномерного распределения параметры  $a$  и  $b$  известны, тогда ( $p = 0$ ):

$$k = 10 - 0 - 1 = 9.$$

Заглянем в таблицу Хи-квадрат распределения

$$\chi_{\text{crit}}^2(0.01; 9) = 21.7.$$

Сравниваем:  $\chi_{\text{exp}}^2 = 5.125 < \chi_{\text{crit}}^2 = 21.7$ , то есть  $H_0$  принимается

**Ответ:** гипотеза принимается