알고리즘 설계 – 3장

탐욕적인 방법 (Greedy Method)

목차

- 탐욕적인 방법의 소개
- 최소비용 신장 트리
  - Prim의 방법
  - Kruskal의 방법
- 단일 출발점 최단 경로 문제
- 0-1 배낭 채우기 문제

1. 탐욕적인 방법의 소개

- 결정을 해야 할 때마다 그 순간에 가장 좋다고 생각되는 것을 해답으로 선택함으로써 최종적인 해답에 도달
- 그 순간의 선택은 그 당시(local)에는 최적이다.
- 그러나 최적이라고 생각했던 해답들을 모아서 최종적인 (global)해답을 만들었다고 해서, 그 해답이 궁극적으로 최적이라는 보장이 없다.
- 따라서 탐욕적인 방법이 항상 최적의 해답을 주는지를 반드시 검증

탐욕적인 알고리즘의 설계 절차

- 선정 과정**(selection procedure)**
  - 현재 상태에서 가장 좋으리라고 생각되는(greedy) 해답을 찾아서 해답모음(solution set)에 포함
- 적정성 점검**(feasibility check)**
  - 새로 얻은 해답모음이 적절한지를 결정
- 해답 점검**(solution check)**
  - 새로 얻은 해답모음이 최적의 해인지를 결정

보기: 거스름돈 문제

- 동전의 개수가 최소가 되도록 거스름 돈을 주는 문제

- 탐욕적인 알고리즘
  - 거스름돈을 x라 하자.
  - 먼저, 가치가 가장 높은 동전부터 x가 초과되지 않도록 계속 내준다.
  - 이 과정을 가치가 높은 동전부터 내림차순으로 총액이 정확히 x가 될 때까지 계속한다.

- 현재 우리나라에서 유통되고 있는 동전만을 가지고, 이 알고리즘을 적용하여 거스름돈을 주면, 항상 동전의 개수는 최소가 된다. 따라서 이 알고리즘은 최적(optimal)!

최적의 해를 얻지 못하는 경우

- 120원 짜리 동전을 새로 발행했다고 하자.

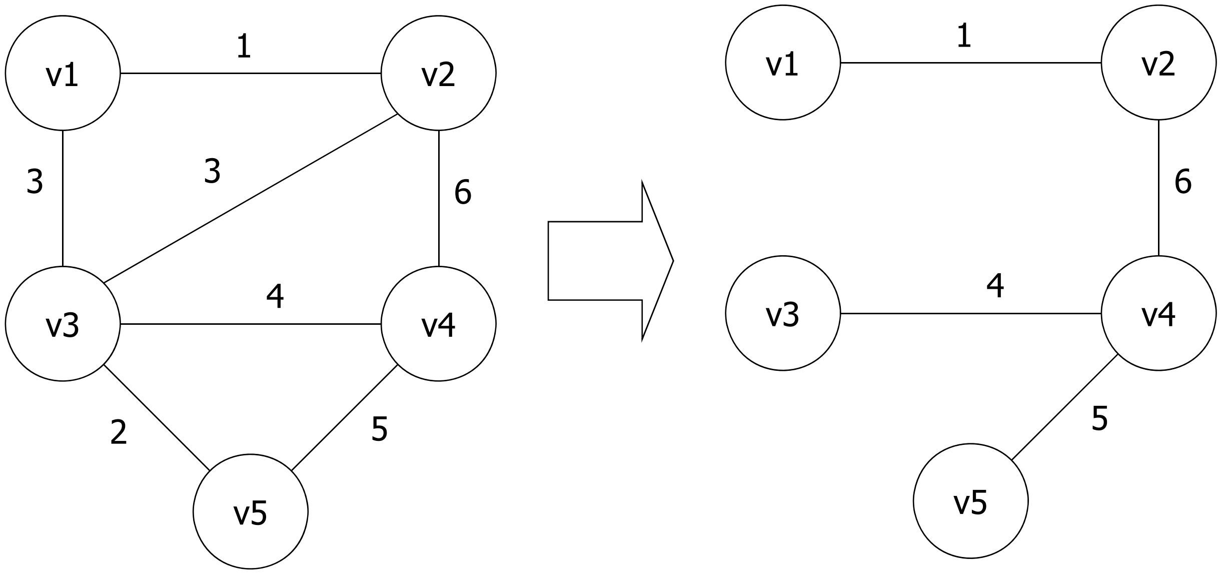
- 이 알고리즘을 적용하여 거스름돈을 주면, 항상 동전의 개수가 최소가 된다는 보장이 없다.

- 보기: 거스름돈 액수 = 160원
  - 탐욕 알고리즘의 결과:
    - 120원 × 1개 = 120원, 10원 × 4개 = 40원
  - 동전의 개수 = 5개 ⇒ 최적(optimal)이 아님!
  - 최적의 해:
    - 100원 × 1개, 50원 × 1개, 10원 × 1개가 되어 동전의 개수는 3개가 된다.

2. 최소비용 신장 트리 (Minimum cost spanning tree)

- 신장 트리의 정의
  - 연결된, 비방향성 그래프 G에서 순환경로를 제거하면서 연결된 부분 그래프가 되도록 에지를 제거하면 신장 트리(spanning tree)가 된다.
  - 따라서 신장 트리는 G안에 있는 모든 정점을 다 포함하면서 트리가 되는 연결된 부분 그래프이다.

신장 트리의 예



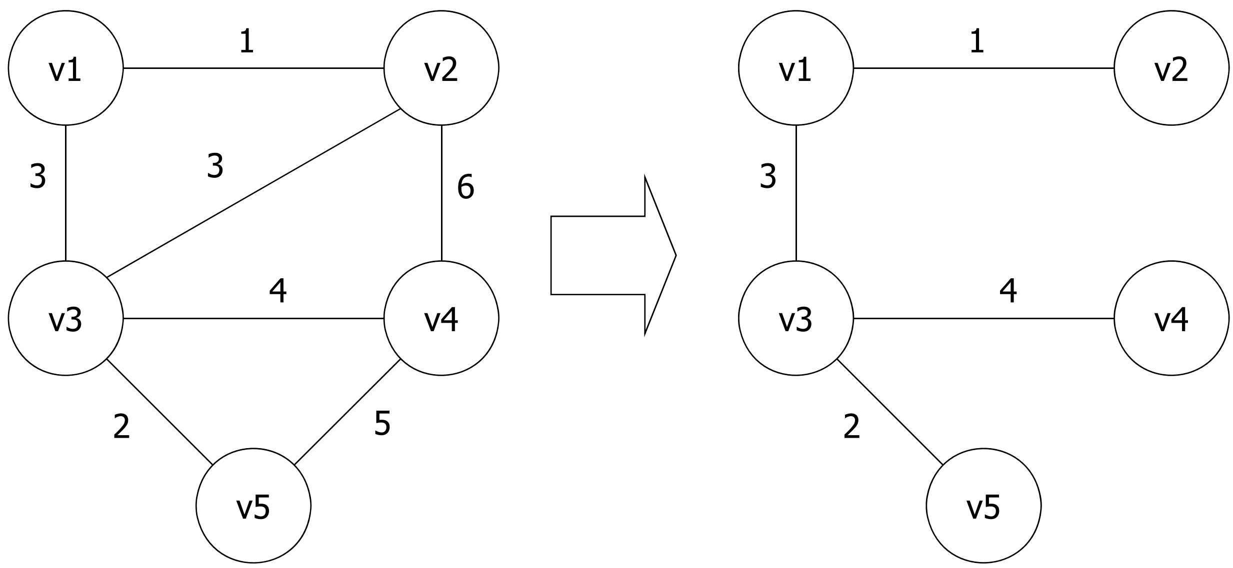
정의: 최소비용 신장 트리

- 신장트리가 되는 G의 부분그래프 중에서 가중치가 최소가 되는 부분 그래프를 최소비용 신장트리(minimum cost spanning tree) 라고 한다.

- 최소의 가중치를 가진 부분그래프는 반드시 트리임.
  - 만약 트리가 아니라면, 분명히 순환경로(cycle)가 있을 것이고, 그렇게 되면 순환경로 상의 한 에지를 제거하면 더 작은 비용의 신장트리가 되기 때문이다.

- 관찰: 모든 신장트리가 최소비용 신장트리는 아니다.

최소비용 신장 트리의 예



최소비용 신장트리의 응용 분야

- 도로건설
  - 도시들을 모두 연결하면서 도로의 길이가 최소가 되도록 하는 문제
- 통신(telecommunications)
  - 전화선의 길이가 최소가 되도록 전화 케이블 망을 구성하는 문제
- 배관(plumbing)
  - 파이프의 총 길이가 최소가 되도록 연결하는 문제

탐욕적인 접근 방법

- 문제: 비방향성 그래프 G = (V,E)가 주어졌을 때, F ⊆ E를 만족하면서, (V,F)가 G의 최소비용 신장트리(MST)가 되는 F를 찾는 문제.
- 알고리즘:
  - F := 0;
  - 최종해답을 얻지 못하는 동안 다음 절차를 계속 반복
    - <u>선정 절차</u>: 적절한 최적해 선정절차에 따라서 하나의 에지를 선정
    - <u>적정성 점검</u>: 선정한 에지를 F에 추가시켜도 순환경로가 생기지 않으면, F에 추가시킨다.
    - <u>해답 점검</u>: T = (V,F)가 신장트리 이면, T가 최소비용 신장트리 이다.

2.1 Prim의 알고리즘

- 개념

- F := 0;
- Y := {v1};
- 최종해답을 얻지 못하는 동안 다음 절차를 계속 반복
  - 선정 절차/적정성 점검: V – Y에 속한 정점 중에서, Y에 가장 가까운 정점 하나를 선정한다.
  - 선정한 정점을 Y에 추가한다.
  - Y로 이어지는 에지를 F에 추가한다.
  - 해답 점검: Y = V가 되면, T = (V,F)가 최소비용 신장트리 이다.

자료 구조

- 인접행렬을 이용한 그래프의 구현, W[i][j] =
  - 에지의 가중치 (v_i와 v_j를 연결하는 에지 존재할 경우)
  - ∞ (v_i와 v_j를 연결하는 에지가 없을 경우)
  - 0 (i = j인 경우)

- 추가적으로 nearest[1..n]과 distance[1..n] 배열 유지
  - nearest[i]
    - Y에 속한 정점 중에서 v_i에서 가장 가까운 정점
  - distance[i]
    - v_i 와 nearest[i]를 잇는 에지의 가중치

```
void prim(int n, const number W[][], set_of_edges& F)
{
    index i, vnear, nearest[2..n];
    number min, distance[2..n];
    edge e;

    F = empty_set;
    for (i=2; i <= n; i++) {                    // 초기화
        nearest[i] = 1;                         // vi에서 가장 가까운 정점을 v1으로 초기화
        distance[i] = W[1][i];                  // vi와 v1을 잇는 에지의 가중치로 초기화
    }
    repeat (n-1 times) {           // n-1개의 정점을 Y에 추가한다
        min = "infinite";
        for (i=2; i <= n; i++)                          // 각 정점에 대해서
            if (0 <= distance[i] < min) {               // distance[i]를 검사하여
                min = distance[i];                      // 가장 가까이 있는 vnear을
                vnear = i;                              // 찾는다.
            }
        e = vnear와 nearest[vnear]를 잇는 에지;
        e를 F에 추가;
        distance[vnear] = -1;                   // 찾은 노드를 Y에 추가한다.
        for (i=2; i <= n; i++)
            if (W[vnear][i] < distance[i]) {            // Y에 없는 각 노드에 대해서
                distance[i] = W[vnear][i];              // distance[i]를 갱신한다.
                nearest[i] = vnear;
            }
    }
    return F;
}
```

알고리즘 분석

- 단위연산: repeat-루프 안에 있는 두 개의 for-루프
- 내부에 있는 명령문
  - 입력크기: 정점의 개수, n
  - 분석: repeat-루프가 n-1번 반복되므로
  - $T(n) = 2(n-1)(n-1) \in \Theta(n^2)$

최적여부의 검증(Optimality Proof)

- Prim의 알고리즘의 결과가 최소비용 신장트리인지를 검증

- 정의 **4.1**: 비방향성 그래프 G = (V,E)가 주어지고, E의 부분집합 F에 MST가 되도록 에지를 추가할 수 있으면, F는 유망하다(promising)라고 한다.

- 보조정리 **4.1**: G = (V,E)는 연결된 가중치 포함 비방향성 그래프. F가 E의 유망한 부분집합이라고 하고, <u>Y는 F에 포함된 에지에 의해서 연결된 정점의 집합</u>이라고 하자. 이때, Y에 있는 어떤 정점과 V – Y에 있는 어떤 정점을 잇는 에지 중에서 가중치가 가장 작은 에지를 e라고 하면, $F \cup \{e\}$는 유망하다.

보조정리 4.1의 증명

- (V, F′)가 MST라고 가정. $F \subseteq F'$
- e: Y와 V – Y를 연결하는 가중치가 가장 작은 에지
- If ($e \in F'$), $F \cup \{e\} \subseteq F'$ 이므로 $F \cup \{e\}$는 유망
- Otherwise ($e \notin F'$)
  - $F' \cup \{e\}$는 하나의 cycle을 포함.
    - Y의 정점과 V – Y의 정점을 잇는 다른 에지 e′ 존재
    - $F' \cup \{e\} - \{e'\}$: MST
    - (왜냐하면, e는 Y와 V – Y를 잇는 최소비용 에지)
  - $e' \notin F$이므로, $F \cup \{e\} \subseteq F' \cup \{e\} - \{e'\}$
  - 그러므로 $F \cup \{e\}$는 유망

최적여부의 검증(계속)

- 정리: Prim의 알고리즘은 항상 최소비용신장트리를 만들어 낸다.
- 증명: (수학적귀납법) 매번 반복이 수행된 후에 집합 F가 유망하다는 것을 보이면 된다.
  - 출발점: 공집합은 당연히 유망하다.
  - 귀납가정: 어떤 주어진 반복이 이루어진 후, 그때까지 선정하였던 에지의 집합인 F가 유망하다고 가정한다
  - 귀납절차: 집합 F ∪ {e}가 유망하다는 것을 보이면 된다. 여기서 e는 다음 단계의 반복 수행 시 선정된 에지이다. 그런데, 위의 보조정리 1에 의하여 F ∪ {e}은 유망하다고 할 수 있다. 왜냐하면 이음선 e는 Y에 있는 어떤 정점을 V – Y에 있는 다른 정점으로 잇는 에지 중에서 최소의 가중치를 가지고 있기 때문이다.

2.2 Kruskal의 알고리즘

- 개념

- F := 0;
- 서로소(disjoint)가 되는 V 의 부분집합 들을 만드는데, 각 부분집합 마다 하나의 정점만 가지도록 한다
- E안에 있는 에지를 가중치의 오름차순으로 정렬
- 최종해답을 얻지 못하는 동안 다음 절차를 계속 반복
  - 선정 절차: **최소의 가중치**를 갖는 다음 에지를 선정
  - 적정성 점검: **만약 선정된 에지가 두 개의 서로소인 정점을 잇는다면,** 먼저 그 부분집합을 하나의 집합으로 합하고, 그 다음에 그 에지를 F에 추가한다.
  - 해답 점검: 만약 모든 부분집합이 하나의 집합으로 합하여 지면, 그 때 T = (V,F)가 최소비용 신장트리 이다.

서로 소인 집합의 구현

- index i;
- set_pointer p, q;
- initial(n): n개의 서로소 부분집합을 초기화
  - 하나의 부분집합에 1에서 n사이의 인덱스가 정확히 하나 포함됨
- p = find(i): 인덱스 i가 포함된 집합의 포인터 p를 넘겨줌
- merge(p, q): 두 개의 집합을 가리키는 p와 q를 합병
- equal(p, q): p와 q가 같은 집합을 가리키면 true를 넘겨줌

알고리즘의 구현

```
void kruskal(int n, int m, set_of_edges E, set_of_edges& F) {
   index i, j;
   set_pointer p, q;
   edge e;

   E에 속한 m개의 에지들을 가중치의 오름차순으로 정렬;
   F = emptyset;
   initial(n);
   while (F에 속한 에지의 개수가 n-1보다 작다) {
         e = 아직 점검하지 않은 최소의 가중치를 가진 에지;
         i, j = e를 이루는 양쪽 정점의 인덱스;
         p = find(i);
         q = find(j);
         if (!equal(p,q)) {
                  merge(p,q);
                  e를 F에 추가;
}  }      }
```

알고리즘 분석

- 단위연산: 비교문
- 입력크기: 정점의 수 n과 에지의 수 e
  1. 에지 들을 정렬하는데 걸리는 시간: $\Theta(e \log e)$
  2. 반복문 안에서 걸리는 시간: 루프를 e번 수행한다. 서로소는 집합 자료구조를 사용하여 구현하고, find, equal, merge 같은 동작을 호출하는 횟수가 상수이면, e번 반복에 대한 시간복잡도는 $\Theta(e \log e)$이다.
  3. n개의 서로소인 집합을 초기화하는데 걸리는 시간: $\Theta(n)$
- $e \geq n - 1$이기 때문에, 1과 2는 3을 지배. $W(e, n) = \Theta(e \log e)$
- 최악의 경우: 모든 정점이 다른 모든 정점과 연결이 될 수 있기 때문에 $e = n(n-1)/2$ 가 된다. 그러므로, 시간복잡도는

  $$W(e, n) \in \Theta(n^2 \log n^2) = \Theta(2n^2 \log n) = \Theta(n^2 \log n)$$

- 최적여부의 검증(Optimality Proof)
  - Prim의 알고리즘의 경우와 비슷함. (교재 참조)

두 알고리즘의 비교

	W(e, n)	sparse graph	dense graph
Prim	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$
Kruskal	$\Theta(e \log e)$, $\Theta(n^2 \log n)$	$\Theta(e \log e)$	$\Theta(n^2 \log n)$

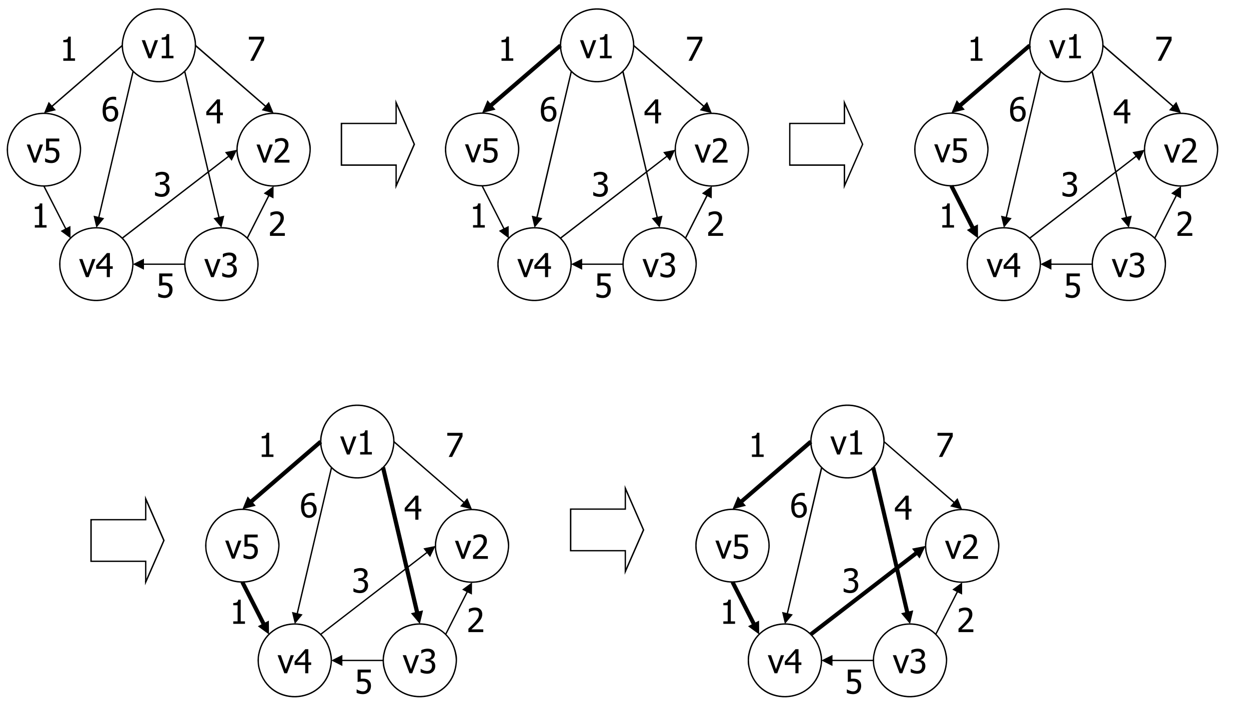
연결된 그래프에서의 e는 $n - 1 \leq e \leq n(n-1)/2$ 의 범위를 갖는다.

3. 단일 출발점 최소 경로(Dijkstra)

- 가중치가 있는 방향성 그래프에서 한 특정 정점에서 다른 모든 정점으로 가는 최단경로를 구하는 문제.
- 알고리즘:

- F := 0;
- Y := $\{v_1\}$;
- 최종해답을 얻지 못하는 동안 다음 절차를 계속 반복
  - 선정 절차/적정성 점검:
    - V – Y에 속한 정점 중에서, v_1에서 Y에 속한 정점 만을 거쳐서 최단경로가 되는 정점 v를 선정
    - 정점 v를 Y에 추가
    - v에서 F로 이어지는 최단경로 상의 에지를 F에 추가
  - 해답 점검:
    - Y = V가 되면, T = (V,E)가 최단경로를 나타내는 그래프이다.

예제 그래프



Dijkstra 알고리즘의 분석

- Prim의 알고리즘의 경우와 비슷함
  - $T(n) \in \Theta(n^2)$
- 최적 여부의 검증도 Prim의 알고리즘과 비슷함.

탐욕적인 방법과 동적 프로그래밍의 비교

탐욕적인 접근 방법	동적 프로그래밍
▪최적화 문제를 푸는데 적합	▪최적화 문제를 푸는데 적합
▪알고리즘이 존재할 경우 보통 더 효율적	▪때로는 불필요하게 복잡
▪알고리즘이 최적인지를 증명	▪최적화 원칙이 적용되는지를 점검
▪단일 출발점 최단 경로 문제: $\Theta(n^2)$	▪단일 출발점 최단 경로 문제: $\Theta(n^3)$
▪배낭 빈틈없이 채우기 문제는 풀지만, 0-1 배낭 채우기 문제는 풀지 못함	▪0-1 배낭 채우기 문제는 푼다

4. 0-1 배낭 채우기 문제 (0-1 Knapsack Problem)

- 문제: S = {$item_1$, $item_2$,…, $item_n$}
  - w_i = $item_i$의 무게
  - p_i = $item_i$의 가치
  - W = 배낭에 넣을 수 있는 총 무게라고 할 때,
  - $\sum_{item\ i \in A} w_i \le W$를 만족하면서 $\sum_{item\ i \in A} p_i$가 최대가 되도록 $A \subseteq S$인 A를 구하는 문제.

- 무작정 알고리즘
  - n개의 물건에 대해서 모든 부분집합을 다 고려한다.
  - 크기가 n인 집합의 부분집합의 수는 2^n개 이다.

0-1 배낭 채우기 문제: 탐욕적 알고리즘(1)

- 가장 비싼 물건부터 우선적으로 채운다.
- 애석하게도 이 알고리즘은 최적이 아니다!

- 왜 아닌지 보기:
  - 문제 정의
    - W = 30kg
    - item1: 무게 25kg, 값 10만원
    - item2: 무게 10kg, 값 9만원
    - item3: 무게 10kg, 값 9만원

  - 탐욕적인 방법: item1 ⇒ 25kg ⇒ 10만원
  - 최적의 해: item2 + item3 ⇒ 20kg ⇒ 18만원

0-1 배낭 채우기 문제: 탐욕적 알고리즘(2)

- 무게 당 가치가 가장 높은 물건부터 우선적으로 채운다.
- 그래도 최적이 아니다!
- 왜 아닌지 보기:
  - 문제 정의
    - W = 30kg
    - item1: 무게 5kg, 값 50만원, 가치 10만원/kg
    - item2: 무게 10kg, 값 60만원, 가치 6만원/kg
    - item3: 무게 20kg, 값 140만원, 가치 7만원/kg
  - 탐욕적인 방법: item1 + item3 ⇒ 25kg ⇒ 190만원
  - 최적의 해: item2 + item3 ⇒ 30kg ⇒ 200만원

배낭 빈틈없이 채우기 문제

- 물건의 일부분을 잘라서 담을 수 있다.
- 탐욕적인 접근방법으로 최적의 해를 구하는 알고리즘을 만들 수 있다.
- item1 + item3 + item2 * 1/2 ⇒ 30kg ⇒ 220만원
  - 최적의 해.

Knapsack problem의 종류

- 0-1 knapsack problem
  - 각 item당 배낭에 들어갈 수 있는 수는 기껏해야 1
- Bounded knapsack problem
  - $item_i$가 배낭에 들어갈 수 있는 수 $\in \{0, 1, \ldots, c_i\}$
- Unbounded knapsack problem
  - 각 item당 배낭에 들어갈 수 있는 수가 무제한

0-1 배낭 채우기 문제: 동적 프로그래밍(1)

- $i > 0$ 이고 $w > 0$일 때, 전체 무게가 w를 넘지 않도록 i번째까지의 항목 중에서 얻어진 최고의 이익 P[i][w] =
  - maximum(P[i-1][w], p_i + P[i-1][w-w_i]) ($w_i \le w$)
  - P[i-1][w] ($w_i > w$)

  - P[i-1][w]: i번째 항목을 포함시키지 않는 경우의 최고 이익
  - p_i + P[i-1][w-w_i]: i번째 항목을 포함시키는 경우의 최고 이익
- 위의 재귀 관계식은 최적화 원칙을 만족함.

0-1 배낭 채우기 문제: 동적 프로그래밍(2)

- 최종 해 P[n][W]를 구하는 방법
  - 2차원 배열 int P[0..n][0..W] 정의
  - 각 항을 차례대로 계산.
  - 단, P[0][w] = 0, P[i][0] = 0

- 시간복잡성
  - 계산해야 할 항목의 수 = nW ∈ Θ (nW)

- 주의
  - 여기서 n과 W와는 아무런 상관관계가 없다.
  - W = n!이라고 한다면 수행시간은 Θ (n × n!)이 된다.
  - 무작정 알고리즘보다 뭐가 좋지?

0-1 배낭 채우기 문제: 동적 프로그래밍(3)

- 개선된 동적 프로그래밍
  - P[n][W]를 계산하기 위해서 (n-1)번째 항을 모두 계산할 필요 없음!
  - P[n-1][W]와 P[n-1][W-w_n] 두 항만 계산하면 된다.
  - 이런 식으로 n = 1이나 w ≤ 0일 때 까지 계속

item1: 무게 5kg, 값 50만원
item2: 무게 10kg, 값 60만원
item3: 무게 20kg, 값 140만원

- 예
  - P[3][30] = max(P[2][30], 140 + P[2][10]) = 200
  - P[2][30] = max(P[1][30], 60 + P[1][20]) = 110
  - P[2][10] = max(P[1][10], 60 + P[1][0]) = 60
  - P[1][30] = max(P[0][30], 50 + P[0][25]) = 50
  - P[1][20] = P[1][10] = 50
  - P[1][0] = 0

7개의 항만 계산 (nW = 90)

0-1 배낭 채우기 문제: 동적 프로그래밍(4)

- 개선된 동적 프로그래밍의 분석
  - (n – i)번째 항에서 기껏해야 2^i 항을 계산
  - 계산하는 총 항의 수 = $\Theta(2^n)$

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

  - 최악의 경우의 수행시간은 $O(\text{minimum}(2^n, nW))$이다.
    - 분할 정복법으로 접근할 경우: $O(2^n)$
    - 동적 프로그래밍의 경우: nW항이 추가! ($W \approx n$일 때 사용 가능)

- 아직 아무도 이 문제의 최악의 경우 실행시간이 지수(exponential)보다 나은 알고리즘을 발견하지 못했고, 그러한 알고리즘이 없다라고 증명한 사람도 없다.

NP문제