GCN
- 空域 — 直观 — 无向/有向图
- 谱域 — 抽象

无向图

- 1st — 傅里叶变换
- 2nd — 简化
- 3rd — 简化

符号定义:

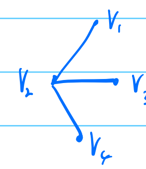
① 无向图: $G = \{V, E, A\}$, 有 $|V|$ 个节点, $|E|$ 条边

② 邻接矩阵: A $\quad A_{ij}$: 第 i 个节点和 j 个节点连接关系

$i \leftrightarrow j \quad A_{ij} = 1$; $\quad i \not\leftrightarrow j \quad A_{ij} = 0$

A 对称矩阵

③ 节点 i 的度: 第 i 个节点所有邻居节点的个数



$deg(v_1) = 1 \qquad deg(v_2) = 3$

④ 图信号: 节点集 V 到 n 维 $\mathbb{R}$ 的映射: $V \to \mathbb{R}$, $V \to \mathbb{R}^m$

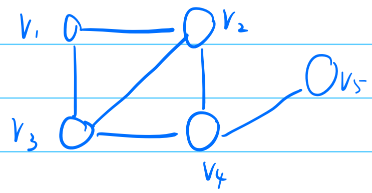
就是每个节点上携带的数值特征向量

$X_{n\times 1} = [x_1, x_2 \cdots x_n]^T$

⑤ 拉普拉斯矩阵 (频域图的关键)

定义: A laplacian matrix: $L = D - A \in \mathbb{R}^n = \begin{cases} deg(i), & i=j \\ -1, & e_{ij} \in E \\ 0, & otherwise \end{cases}$

$$D = \begin{pmatrix} deg(v_1) & & \\ & deg(v_2) & \\ & & deg(v_3) \end{pmatrix} - A$$

$G=$ 

$$L=D-A=\begin{pmatrix}2&&&&\\&3&&&\\&&3&&\\&&&3&\\&&&&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\1&0&1&1&0\\0&1&0&1&0\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&-1&-1&0&0\\-1&3&-1&-1&0\\0&-1&3&-1&0\\0&-1&-1&3&-1\\0&0&0&-1&1\end{pmatrix}$$

拉普拉斯矩阵的性质:

① L矩阵实对称半正定矩阵，有一组正交的特征向量 $U=\{v_i\}_{i=1}^{n}$

② $\lambda_{min}=0$

③ L矩阵对角化:

$$L=U\Lambda U^T=\begin{pmatrix}|&|&\cdots&|\\v_1&v_2&\cdots&v_n\\|&|&\cdots&|\end{pmatrix}_{n\times n}\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}_{n\times n}\begin{pmatrix}—v_1^T—\\—v_2^T—\\\vdots\\—v_n^T—\end{pmatrix}_{n\times n}$$

∴ 设 $x=(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)^T$

$$Lx=\begin{pmatrix}\sum_{j\in N(1)}(x_1-x_j)\\\sum_{j\in N(2)}(x_2-x_j)\\\vdots\\\sum_{j\in N(n)}(x_n-x_j)\end{pmatrix}$$

$N(i)$ 代表 v_i 节点的所有邻居节点

L算子可以用来描述每个节点与其邻居节点的信号差异

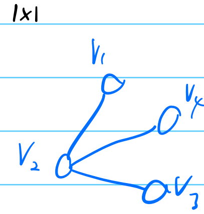
∴ L为系数矩阵的二次型（图的总变差）

$$TV=x^TLx=x^TU\Lambda U^Tx=x^T_{1\times n}\begin{pmatrix}\sum_{j\in N(1)}(x_1-x_j)\\\vdots\end{pmatrix}_{n\times 1}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=N(i)}x_i(x_i-x_j)\right)_{1\times 1}$$

$$=\sum_{e_{ij}}(x_i-x_j)^2$$

→ 代表边



TV 具体含义：图信号在图上的整体平滑度

TV越小，图信号分布越平滑。/ 频率的概念

傅里叶级数：一般地，任何一个函数 $f(x) \in C[-\pi, \pi]$

可以用 sin/cos 来逼近

$$\Rightarrow f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

a_n, b_n 为傅里叶系数

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \\ b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \end{cases}$$

（$f(x)$ 与三角函数基的内积/投影）

傅里叶系数是离散的

$f(t)$ → 用傅里叶系数去逼近（分解成不同频率三角函数的叠加）

信号

时域 ⟹ 频域上　　a_k b_k 即在频域空间上的坐标

$\sin(nx)$ n取得越来越细 → 连续的

⟹ 傅里叶变换