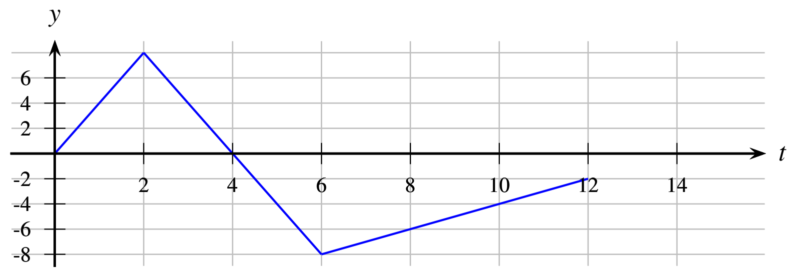
Préparation à l'examen final

Question 1 (Application, sans TI.)

Soit v la fonction dont le graphe est illustré ci-dessous.



Soit g la fonction définie par

$$g(x) = \int_0^x v(t)dt.$$

(a) Calculez $g(10)$, $g'(10)$ et $g''(10)$.

(b) En quels valeurs de x la fonction $g(x)$ atteint-elle des extremums absolus sur $[0\,;12]$? Précisez s'il s'agit de maximum ou de minimum.

Un objet se déplace horizontalement sur une trajectoire rectiligne. La fonction $v(t)$ dont le graphe est donné ci-dessus représente la vitesse en $\mathrm{m/min}$ de l'objet au temps t, où t est mesuré en minutes. La position de l'objet au temps $t = 0$ est de 60 m.

(c) Calculez la position de l'objet au temps $t = 10$ min.

(d) Calculez la distance totale parcourue par l'objet durant les 10 premières minutes (c'est-à-dire durant l'intervalle $[0\,;10]$ min).)

(e) Calculez l'accélération de l'objet au temps $t = 10$ min.

(f) Calculez la vitesse moyenne au cours des 10 premières minutes.

Réponses : a) $g(10) = -16$. $g'(10) = -4$. $g''(10) = 1$. b) Maximum absolu en $x = 4$. Minimum absolu en $x = 12$. c) 44 m. d) 48 m. e) 1 m/s². f) $-1{,}6$ m/min.

Question 2 (Intégration, sans TI.)

Intégrez, en présentant toutes les étapes. Si l'intégrale est impropre, dites pourquoi et évaluez-la.

(a)
$$\int \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^3}\,dx$$

(b)
$$\int_1^e \frac{1}{x(1+\ln(x))^2}\,dx$$

(c)
$$\int_1^e \frac{1}{x(1+(\ln(x))^2)}\,dx$$

(d)
$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$$

(e)
$$\int \frac{5x+1}{9x^2+6x+3}\,dx$$

(f)
$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3(2x)\sin(2x)\,dx$$

(g)
$$\int_{-1}^3 \frac{dx}{x^2}$$

(h)
$$\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^2-10x+25}$$

(i)
$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

(j)
$$\int \frac{e^x+1}{e^x}\,dx$$

(k) $$\int \frac{x^2}{4+x^6}\,dx$$

(l) $$\int (x^2-7)^2\,dx$$

(m) $$\int_1^\infty \frac{2\,dx}{x(\ln(x))^3}$$

(n) $$\int_e^{e^4} \frac{\sqrt{\ln(x)}dx}{x}$$

(o) $$\int x\sqrt{1+2x}\,dx$$

(p) $$\int 4x^2e^{(x^3)}\,dx$$

(q) $$\int xe^{3x}\,dx$$

(r) $$\int_0^2 \frac{4x^2dx}{\sqrt{9+2x^3}}$$

(s) $$\int_0^{2\pi} x\sin(x)$$

(t) $$\int x^2\ln(x)\,dx$$

(u) $$\int \arcsin(x)\,dx$$

(v) $$\int_2^x 10\,dt$$

Question 3 (Séries, sans TI.)

Utilisez le test du rapport pour déterminer l'intervalle ouvert de convergence de la série suivante (sans vérifier la convergence aux extrémités de l'intervalle)

(a) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+10)^n}{4^n}$$

(b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$$

Réponses : a) $]-14\,;-6[$ b) $]-\infty\,;\infty[$

Question 4 (Séries, sans TI.)

Calculez le polynôme de Taylor d'ordre 3 de
$$f(x) = \cos(2x)$$
développé en $x = \frac{\pi}{2}$ en calculant les coefficients (c'est-à-dire à partir des dérivées et non pas à partir d'une série connue).

Réponses : $-1+2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2$

Question 5 (Séries, sans TI.)

Soit
$$f(t) = \frac{3t}{1+4t^2}$$

(a) Utilisez la table des des séries de base pour donnez les 3 premiers termes non nuls de la série de Taylor de $f(t)$ développée en $t = 0$. Indiquez clairement le changement de variable et les manipulations algébriques effectuées.

(b) Donnez l'intervalle de convergence de la série obtenue.

Réponses : a) $3t-12t^3+48t^5+\cdots$ b) $]-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}[$

Question 6 (Séries, sans TI.)

Calculez la somme de la série suivante.
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{2}{3}\right)^5+\cdots$$

Réponses : $\frac{4}{3}$

Question 7 (Géométrie, avec TI.)

Soit R la région bornée par $y = e^{x+1}$ et $y = 4 - (x-1)^2$. Les axes sont mesurés en centimètres.

(a) Calculez le volume du solide engendré par la révolution de R autour de la droite $x = 5$.

(b) Calculez l'aire de la région R.

(c) Calculez le périmètre de la région R.

(d) Calculez le volume du solide engendré par la révolution de R autour de la droite $y = 5$.

Réponses : a) $5,789$ cm³ b) $0,178$ cm² c) $4,047$ cm d) $2,834$ cm³.

Question 8 (Application, avec TI.)

Une barre de métal se refroidit. Sa température initiale est de 1000 °C et son taux de refroidissement est donné par la formule

$$R(t) = -98e^{-t/10}$$

où t est le temps mesuré en minutes, R est le taux de variation de la température par rapport au temps mesuré en °C par minute.

(a) Trouvez la température de la barre après trente minutes.

(b) Combien de temps faudra-t-il pour que la température de la barre atteigne 22 °C ?

(c) La température se stabilise-t-elle après un certain temps ? Si oui, à quelle valeur ?

Réponses : a) Après 30 minutes, la température sera de $68,8$ °C. b) Elle sera de 22 °C après $61,944$ minutes $(10\ln(490))$. c) Oui, à 20 °C.

Question 9 (Séries, avec TI.)

Approximez

$$\int_0^{\pi/6} \cos(x^2)\, dx$$

grâce à un polynôme de Taylor ayant 3 termes non nuls et donnez une borne pour l'erreur.
Réponses : $0,519677031 \pm 0,000000024$

Question 10 (Séries.)

Soit $f(t)$ une fonction continue.

(a) Est-il toujours possible d'évaluer une intégrale définie $\int_a^b f(t)dt$ avec le théorème fondamental ? Pourquoi ?

(b) Est-il toujours possible d'approximer une intégrale définie $\int_a^b f(t)dt$ en utilisant le développement en série de $f(t)$? Pourquoi ?

(c) Est-il toujours possible d'approximer une intégrale définie $\int_a^b f(t)dt$ avec autant de précision que l'on veut en utilisant une somme de droite ?

Réponses : a) Non, car il faut trouver une primitive $F(t)$ de $f(t)$ pour pouvoir utiliser le TFC, et cela n'est pas toujours possible. b) Non, il faut que les bornes d'intégration soient comprises dans l'intervalle de convergence de la série de f. c) Oui, si f est connue en tout point de $[a,b]$, on peut approximer l'intégrale définie avec la précision souhaitée en utilisant une somme de droite avec un nombre suffisant de rectangles (mais cela peut être très long).

Question 11 (Vrai ou faux variés)

Déterminez si chacun des énoncés est vrai (**V**) ou faux (**F**). Si c'est vrai, expliquez pourquoi. Si c'est faux, expliquez pourquoi ou donnez un exemple qui contredit l'énoncé.
Une bonne réponse sans justification ne vaut aucun point.

(a) Les sommes de gauche G_n et de droite D_n de $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx$ sont égales pour tout $n \geq 1$.

(b) Si $g(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(t)dt$, alors $g'(\pi) = 0$.

(c) Si la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[2;6]$ est de 20, alors $\displaystyle\int_2^6 f(x)dx = 5$.

(d) La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1.23)^n$ vaut $\dfrac{1}{1+1.23}$.

Réponses :
a) Faux. Par exemple, pour $n = 1$ on a $D_1 = 1$ et $G_1 = 0$: les sommes ne sont donc pas égales.
b) Vrai. Par le TFC, on a $g'(x) = \sin(x)$. Pour $x = 0$, on a : $g'(\pi) = \sin(\pi) = 0$.
c) Faux. Par définition, on a $f_{moy} = \dfrac{1}{6-2}\displaystyle\int_2^6 f(x)dx$. En isolant l'intégrale définie, on trouve 80. Cela contredit la valeur de 5 qui est donnée dans l'énoncé.

$$\int_2^6 f(x)dx = (6-2)\cdot f_{moy} = 4\cdot 20 = 80 \neq 5.$$

d) Faux. Il s'agit de la série de $\frac{1}{1-u}$ pour $u = -1.23$. Cette valeur n'appartient pas à l'intervalle de convergence qui est $]-1\,;1[$, donc la série diverge.

Bonne étude !

Et bonne fin de session !