1) Intégration par substitution $\int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$

Ca n'existe pas directement dans la table d'où on va recourir à une cert technique d'intégration

2) L'intégration par partie

Soit à calculer $\int 2x e^{x^2} dx$

3) L'intégration par complétion de carré

Théorem $\int f'(g(x))\, g'(x)\, dx = f \circ g$

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ où $F'(x) = f(x)$

Soit $\int f(g(x))dx$ (I)

on pose $u = g(x) \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = g'(x) \Leftrightarrow du = g'(x)dx$

Alors $\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$

on a $\int 2x e^{x^2} dx$ pose $u = x^2$ où $\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = 2x\,dx$

$\int e^{x^2} 2x\, dx = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2} + C$

ex

Calculer $\int x e^{x^2} dx = \int e^{x^2} x\,dx$ $u = x^2 \Leftrightarrow du = 2x\,dx$

$= \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du$

$= \frac{1}{2} e^u + C$

$= \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

ex 1re façon $\int_2^3 2x e^{x^2} dx = F(3) - F(2)$ où $F = \int 2x e^{x^2} dx$

or $F = e^{x^2}$

$F \Rightarrow F(3) - F(2) = e^9 - e^4$

2ème façon on pose $u = x^2 \Leftrightarrow du = 2x\,dx$

$\int_2^3 2x e^{x^2} dx$

$= \int_4^9 e^u du = [e^u]_4^9 = e^9 - e^4$

trouvons d'abord $\int \frac{6x}{x^2+3} dx$

exemple 4,14 p55

$u = x^2 + 3 \Leftrightarrow du = 2x\,dx$

$\int_1^4 \frac{6x}{x^2+3} dx$

d'où $\int \frac{6x\,dx}{x^2+3} = \int \frac{3 \cdot 2x\,dx}{x^2+3} = \int \frac{3\,du}{u}$

$= 3\ln|u| + C$

$= 3\ln|x^2+3| + C$

Ainsi $\int_1^4 \frac{6x}{x^2+3} dx = [3\ln|x^2+3|]_1^4$

$3\ln 19 - 3\ln 4$

$= 3\ln \frac{19}{4}$

ex $\int 25x \cos(5x^2+1)\, dx$

$u = 5x^2 + 1 \Leftrightarrow du = 10x$

$\int \cos(5x^2+1)\, 25x\, dx$

$= \int \cos(5x^2+1) \frac{25}{10} \cdot 10x\,d$

$= \frac{25}{10} \int \cos(5x^2+1)\, 10x\,dx = \frac{25}{10} \int \cos u\, du$

$= \frac{25}{10} \sin u + C$

Retour à x

(I) $= \frac{25}{10} \sin(5x^2+1) + C$

exercices

4,43

c) $\int (\sin(x)^4)(\cos(x))\,dx$

$u = \sin x \iff du\ \cos x\,dx$

$\int u^4\,du = \frac{u^5}{5} + c$

Rep:

$\frac{\sin(x)^5}{5} + c$

h) $\int e^{x^3} x^2\,dx$

$u = x^3 \iff du\ 3x^2\,dx = \frac{du}{3}$

$= \int e^{x^3} \frac{3}{3} x^2\,dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3} 3x^2\,dx$

$= \int e^{x^3} x^2\,dx = \int e^u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int e^u\,du$

$= \frac{1}{3} e^u + c$

Rép $= \frac{1}{3} e^{x^3} + c$

i) $\int \frac{4\sin 5x}{2+\cos 5x}\,dx$

$u = 2+\cos 5x \iff du = -5\sin 5x\,dx \iff \sin 5x\,dx = -\frac{du}{5}$

$= 4\int \frac{\sin 5x\,dx}{2+\cos x} = 4\int \frac{\frac{-du}{5}}{u} = -\frac{4}{5}\int \frac{du}{u}$

$= -\frac{4}{5}\ln|u| + c$

$= -\frac{4}{5}\ln|2+\cos 5x| + c$

$= -\frac{4}{5}$

4.44

c) $\frac{\cos x}{4+\sin^2 x}\,dx$

$u = \sin x \iff du = \cos x\,dx$

$\int \frac{du}{4+u^2}$ R15 $a^2 = 4$

$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{u}{2}\right) + c$

$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sin x}{2}\right) + c$

g) $\int_2^8 \frac{16}{\sqrt{20-2t}}\,dt$

si $t=2$ $u_1 = 16$

si $t=8$ $u_2 = 4$

$u = 20-2t \iff du = -2\,dt \iff \frac{du}{(-2)}$

2e façon

$= \int_{16}^{4} \frac{16}{\sqrt{u}}\frac{du}{(-2)} = -8\int_{16}^{4} u^{-1/2}\,du$

$= -8\left[\frac{u^{1/2}}{1/2}\right]_{16}^{4} = -16\left[2-4\right]$

$= 32$ □

1re façon: $\int \frac{16}{\sqrt{20-2t}}$

$u = 20-2t$

$\Rightarrow du = -2dt$

$= \int \frac{16}{\sqrt{20-2t}}\,dt$

$= \int -8\,u^{-1/2} = 16u^{1/2} + c$

$= -16(20-2t)^{1/2} + c$

d'où $\int_2^8 \frac{16}{\sqrt{20-2t}} = \left[-16\sqrt{20-2t}\right]_2^8$

$= -16(2-4)$

$= 32$

Complétion au carré

La technique de la complétion au carré est utilisée surtout pour les fractions

Ainsi on se ramène à l'utilisation de

* substitution

ou

* Règle 15, (16, 17), 18, 19 et 20

Théorème

fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$ = qu'on fait la division polynomiale

Si $d^0 P(x) > d^0 Q(x)$ $P(x) = Q(x)\cdot D(x) + R(x)$

où $d^0\ d^0 R(x) < d^0 Q(x)$

Ainsi $\frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$

où $d^0 R(x) < d^0 Q(x)$

Ex $\displaystyle\int \frac{6x+1}{x^2+3x+4}\,dx$

$(x^2+3x+4)'$
$2x+3$ Or on a $6x+1 = 3(2x+3)-8$

Donc
$$= \int \frac{3(2x+3)-8}{x^2+3x+4} = \int \frac{3(2x+3)dx}{x^2+3x+4} - \int \frac{8\,dx}{x^2+3x+4}$$

$$= \int \frac{3(2x+3)dx}{x^2+3x+4} = \frac{3\,du}{u} = 3\ln|u|$$
$u = x^2+3x+4 \quad du = 2x+3\,dx$
$$= 3\ln(x^2+3x+4)+C$$

$$= \int \frac{8}{x^2+3x+4} \to \text{compl carré}$$
$x^2+3x = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$
$$= \int \frac{8}{(x+3/2)^2-\frac{9}{4}+4}dx = \int \frac{8}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} \quad R15$$

$$= 8\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} \quad u = x+\frac{3}{2} \Rightarrow du = dx \quad a^2 = \frac{7}{4} \Rightarrow a\ \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$= 8\int \frac{du}{u^2+a^2} = 8\,\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(u\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\right)+C$$
$$= \frac{16}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right)+C$$

$$= \ln|x^2+3x+4| - \frac{16}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+C$$

example $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{2x^2+6x+13}}$

x^2+6x
$= \left(x+\frac{6}{2}\right)-\frac{6^2}{4}$

$\frac{u'}{\sqrt{u}}$

$(2x^2+6x+13)' = 4x+6$

On a $2x^2+6x+13$
$= 2(x^2+3x)+13$
$= 2\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}+13$
$= 2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+13$
$= 2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{17}{2}$

$$= \int \frac{5}{\sqrt{2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{17}{2}}}$$

$$= \int \frac{5}{\sqrt{2\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{17}{4}\right\}}}dx$$

$$= \frac{5}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)+\frac{17}{4}}}dx$$

$$= \frac{5}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+\frac{17}{4}}} \quad R.18$$

$u = x+\frac{3}{2}$

$$= \frac{5}{\sqrt{2}}\left(\ln\left|\sqrt{u^2+\frac{17}{4}}+u\right|+C\right)$$

Retro
$$\frac{5}{\sqrt{2}}\left(\ln\left|\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{17}{4}}+x+\frac{3}{2}\right|\right)$$

4.5a
c) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2-8x+20}\,dx$

$x^2+8x+20$
$x^2+6x = \left(x+\frac{6}{2}\right)^2-\frac{6^2}{4}$
$x+\frac{8}{2}-\frac{8^2}{4}+20$
$(x+4)^2-16+20$
$=(x-4)^2+4$

donc $3\displaystyle\int \frac{dx}{(x-4)^2+4}$

$u = x-4$
$du = dx$
$$= 3\int \frac{du}{u^2+4} \quad R.15 \quad a^2 = 4$$

Retro
$$= 3/2\,\arctan\frac{u}{2}+C$$
$$= \frac{3}{2}\arctan\frac{x-4}{2}+C$$

5) Intégration par partie

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\int f(x)' = f$$

$$\int (uv)' = \int u'v + \int v'u$$

La formule de l'intégration par partie

$$\boxed{uv = \int u'v + \int v'u}$$

$$\int u'v = u.v - \int u.v'$$

Le choix à donner à u' c'est la fonction la moins complexe

et le choix à donner à v est la fonction la plus complexe au sens de la dérivation

ex: $\int x e^x dx = uv - \int u'v$
$\quad u \; v'$

d'où $u' = 1$ et $v = e^x$

$= xe^x - \int 1 e^x$

$= xe^x - \int e^x$

$= xe^x - e^x + C$

ex:

e^x

$\sin x \; \cos x$

x^n

$\ln x$

$\arcsin \; \arccos$

⊖ complexe

⊕ complexe au sens de la dérivation

$$\int x e^x = uv - \int u v'$$

$x \to v \to 1$, $e^x \to u' \to u = e^x$

$= x \cdot e^x - \int e^x \cdot 1$

$= x \cdot e^x - e^x + C$

ex

$$\int x \cos x$$

$v = x \to 1$, $u' = \cos x \to \sin x$

$= x \sin x - \int 1 \sin x$

$= x \sin x + \cos(x) + C$

$$\int 1 \ln x$$

$u' = 1 \to x$, $v = \ln x \to v' = \frac{1}{x}$

$= x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx$

$= x \ln x - x + C$

$$\int x^2 \ln x$$

$u' = x^2$

$u = \frac{x^3}{3}$ $\quad v' = \frac{1}{x}$

$\int \frac{x^3}{3} \ln x) - \int \frac{x^2}{3} dx$

$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$

$$\int_0^{2\pi} x \sin(x) dx$$

$x \to v \to 1$, $\sin(x) \to u' \to -\cos x$

$\int_0^{2\pi} v u' dx = [uv]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} u v'$

$= [-x \cos x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-\cos x) 1 dx$

$= [(-2\pi \cos 2\pi) - (-0 \cos 0)] + \int_0^{2\pi} \cos dx$

$= -2\pi + [\sin x]_0^{2\pi}$

$= -2\pi + (0 - 0)$

$= -2\pi$ □

a

$$\int 5 e^{3x} x^2 \, dx$$

$$= 5 \int \underset{u'}{e^{3x}} \underset{v}{x^2} \, dx$$

$u = \frac{1}{3} e^{3x}$

$v' = 2x$

$$= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \int \frac{1}{3} e^{3x} 2x \, dx$$

$$= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \int e^{3x} x \, dx$$

$$= e^{3x} x \, dx$$

$u' = e^{3x}$ $v = x$

$u = \frac{1}{3} e^{3x}$ $v' = 1$

$$= \int u'v \qquad = \frac{1}{3} x e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} 1 \, dx$$

$$= uv - \int uv' \qquad = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x}$$

$$= 5 \left(\frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} \right) \right) \square$$

ex 4,53

1) $\int 2x \cos 3x \, dx$

$u' = \cos 3x \Rightarrow u = \frac{\sin 3x}{3}$

$v = 2x \Rightarrow v' = 2$

$$\int u'v$$

$$= uv - \int uv'$$

$$= \frac{2}{3} x \sin 3x - \int \frac{\sin 3x}{3} 2 \, dx$$

$$= \frac{2}{3} x \sin 3x - \frac{2}{3} \int \sin 3x \, dx$$

$$= \frac{2}{3} x \sin 3x - \frac{2}{3} \left(\frac{-\cos 3x}{3} \right) + 3$$

$$= \frac{2}{3} x \sin 3x + \frac{2}{9} \cos 3x + C$$

$$= \frac{2}{3} \sin 3x + \frac{2}{3} x \, 3 \cos 3x - \frac{2}{3} \sin 3x$$