CHAPITRE IV

CINÉMATIQUE DE TRANSLATION

PREMIÈRE PARTIE

MOUVEMENT RECTILIGNE

OBJECTIFS SPECIFIQUES

MAÎTRISER

LES NOTIONS DE POSITION, VITESSE ET ACCÉLÉRATION

DÉTERMINER

LA POSITION, LA VITESSE ET L'ACCÉLÉRATION D'UNE PARTICULE

MÉTHODES ANALYTIQUE ET GRAPHIQUE

PLAN DE COURS

- Introduction
- Mouvement rectiligne
  - La position, le déplacement et la distance
  - Vitesses moyenne et instantanée
  - Accélérations moyenne et instantanée
- Surface sous la courbe du graphique v(t)
- Surface sous la courbe du graphique a(t)
- Mouvement rectiligne uniforme, MRU
- Mouvement rectiligne uniformément accéléré, MRUA
- Chute libre

INTRODUCTION

LA DYNAMIQUE:

La branche de la mécanique classique qui étudie les corps en mouvement:

LA CINÉMATIQUE:

Étudie les corps en mouvement sans s'occuper de la cause du mouvement (vitesse, accélération, temps et déplacement)

LA CINÉTIQUE:

Étudie et prédit les forces qui causent le mouvement (Force, masse et mouvement)

MOUVEMENT RECTILIGNE DE PARTICULES

- Un mouvement est dit rectiligne lorsque le déplacement de la particule s'effectue selon une ligne droite horizontale, verticale ou oblique.

- La position d'une particule est désignée par une lettre majuscule sur la ligne où elle s'y trouve.

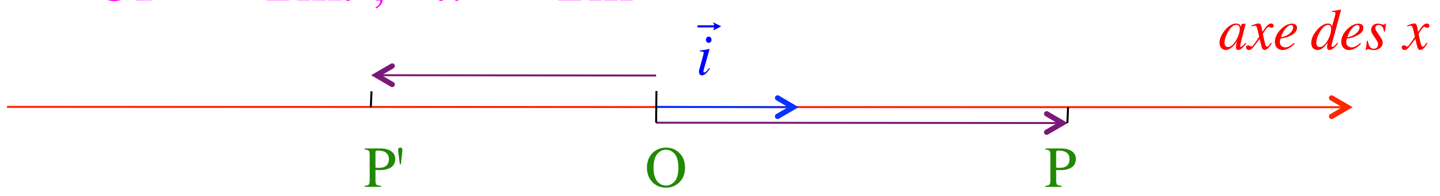
- La position d'une particule est définie à partir de l'origine **d'un axe orienté** (vecteur unitaire). C'est **une grandeur vectorielle.** Elle est appelée **vecteur position**:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$$

- Exemple : axe des x: vecteur unitaire $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OP} = x\vec{i}$

MOUVEMENT RECTILIGNE DES PARTICULES

$$\overrightarrow{OP'} = -2\mathrm{m}\vec{i}\,, \quad x = -2\mathrm{m}$$



$$\overrightarrow{OP} = 3\vec{i}\,, \quad x = +3\mathrm{m}$$

MOUVEMENT RECTILIGNE DE PARTICULES

- La position peut être désignée par une valeur positive ou une valeur négative par respect au sens d'orientation de l'axe.

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 3\mathrm{m}\vec{i}\,, \quad x = +3\mathrm{m}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}} = -2\mathrm{m}\vec{i}\,, \quad x = -2\mathrm{m}$$

- Le mouvement d'une particule est dit défini quand la position x de la particule est connue à chaque instant t.

$$x(t)$$

MOUVEMENT RECTILIGNE DE PARTICULES

- Le vecteur position $\overrightarrow{OP}$ est aussi appelé **vecteur déplacement.**

- **Le vecteur déplacement** est aussi la somme des déplacements de la particule sur l'axe.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OP}=3m\vec{i}\\ \overrightarrow{PA}=-2m\vec{i}\\ \overrightarrow{AB}=6m\vec{i}\\ \overrightarrow{BC}=-4m\vec{i}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\left[3+(-2)+6+(-4)\right]\vec{i}\\ \overrightarrow{OC}=3m\vec{i}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\left[(-2)+6+(-4)\right]\vec{i}\\ \overrightarrow{PC}=\vec{0}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

- Les points P et C sont confondus.

MOUVEMENT RECTILIGNE DE PARTICULES

- La distance parcourue par une particule est la somme des normes de ses déplacements.
- Le symbole de la distance est : d(point initial, Point final)

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OP} = 3\mathrm{m}\vec{i}\\ \overrightarrow{PA} = -2\mathrm{m}\vec{i}\\ \overrightarrow{AB} = 6\mathrm{m}\vec{i}\\ \overrightarrow{BC} = -4\mathrm{m}\vec{i}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{OC} = 3\mathrm{m}\vec{i}\\ d(O,C) = \left[3+|-2|+6+|-4|\right] = 15\\ d(O,C) = 15\mathrm{m}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{PC} = \vec{0}\\ d(P,C) = \left[|-2|+6+|-4|\right] = 12\\ d(P,C) = 12\mathrm{m}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

VITESSE MOYENNE

Si la particule subit un déplacement $\Delta\vec{r}$ pendant un certain intervalle de temps Δt, la particule a une vitesse moyenne:

$$\vec{\bar{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

La vitesse est une grandeur vectorielle. La vitesse de la particule est la **norme du vecteur vitesse** et elle est exprimée en m/s dans le système international.

Si ce déplacement est effectué selon l'axe des x, cette relation s'écrit:

$$\bar{v}_x = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

VITESSE MOYENNE

Si ce déplacement est effectué selon l'axe des y, cette relation s'écrit:

$$\overline{v}_y = \frac{y_f - y_i}{t_f - t_i}$$

Les vitesses $\overline{v}_x$ et $\overline{v}_y$ sont les composantes du vecteur vitesse moyenne. Elles peuvent prendre des valeurs négatives comme positives.

Cette vitesse représente un taux de variation de déplacement dont le signe dépend du sens du mouvement (**positif** s'il se fait dans le sens de l'axe et **négatif** s'il est dans le sens opposé de l'axe de déplacement).

EXEMPLE 4.1
DE CALCUL DE LA VITESSE MOYENNE

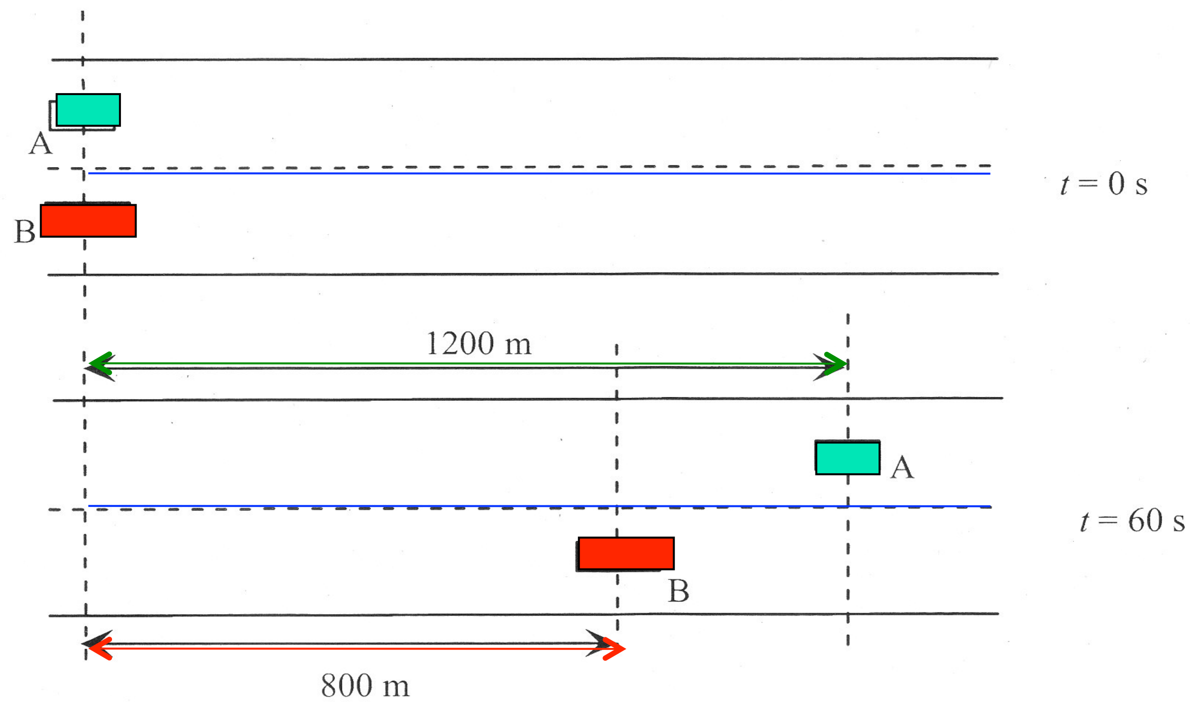


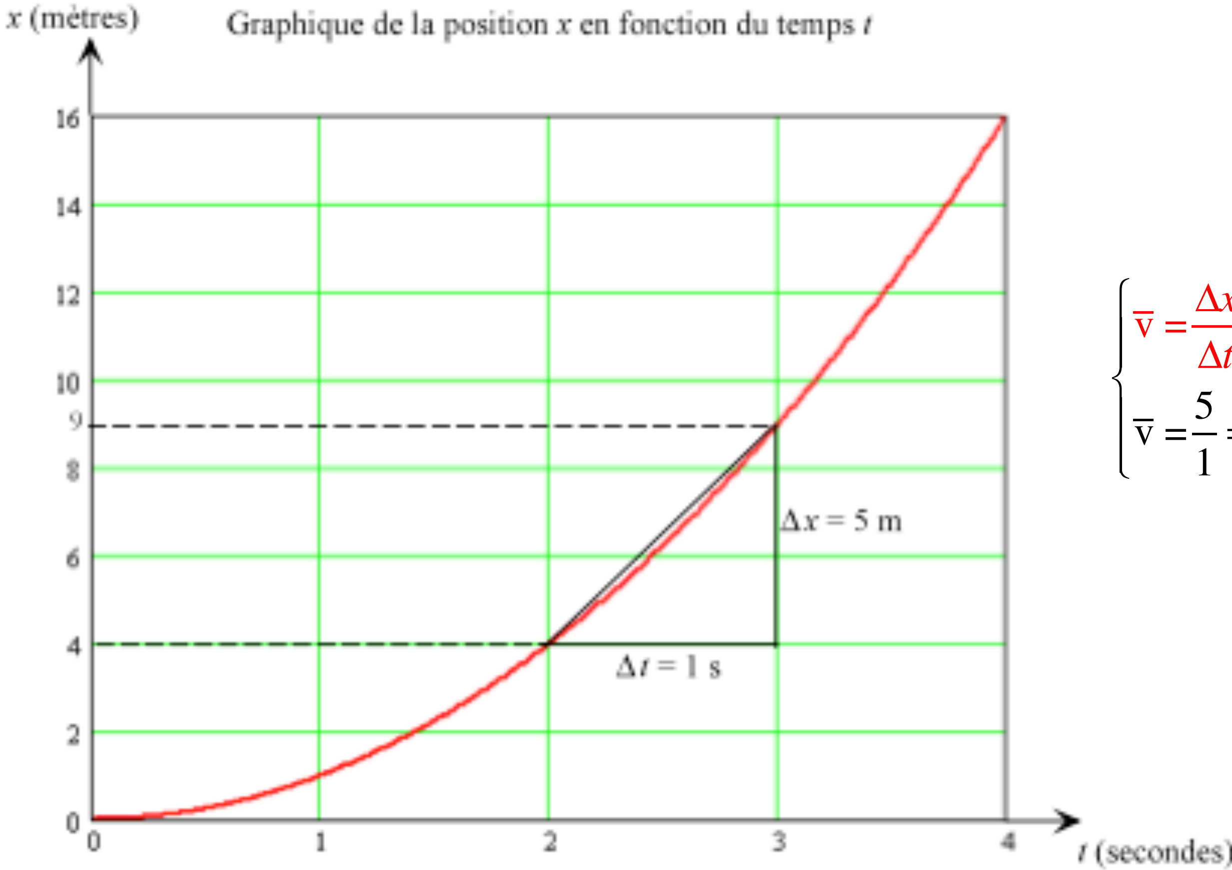
Figure 4.4 : Exemple pour le calcul de la vitesse moyenne.

EXEMPLE 4.1
DE CALCUL DE LA VITESSE MOYENNE

$$\text{voiture A :} \left.\begin{array}{l} \Delta x = 1200\,\text{m} \\ \Delta t = 60\,\text{s} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{\text{v}}_{\text{A},x} = \frac{1200}{60} \Rightarrow \bar{\text{v}}_{\text{A},x} = 20 \text{ m/s}$$

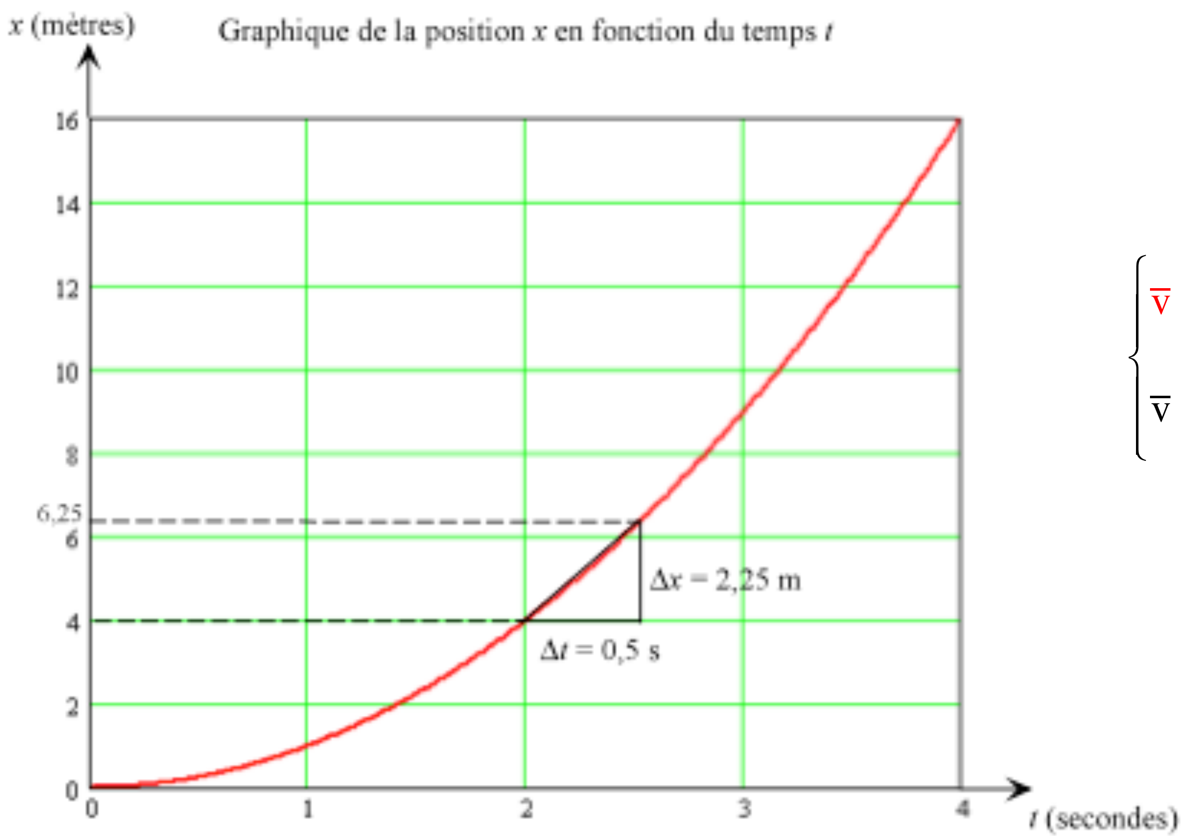
$$\text{voiture B :} \left.\begin{array}{l} \Delta x = 800\,\text{m} \\ \Delta t = 60\,\text{s} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{\text{v}}_{\text{B},x} = \frac{800}{60} \Rightarrow \bar{\text{v}}_{\text{B},x} = 13{,}33 \text{ m/s}$$

GRAPHIQUE DE LA POSITION x EN FONCTION DU TEMPS



$$\begin{cases} \overline{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \\ \overline{v} = \dfrac{5}{1} = 5 \end{cases} \Rightarrow \quad \overline{v} = 5 \text{ m/s}$$

GRAPHIQUE DE LA POSITION x EN FONCTION DU TEMPS



$$\begin{cases} \bar{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \\ \bar{v} = \dfrac{2,25}{0,5} = 4,5 \end{cases} \Rightarrow \quad \bar{v} = 4,5 \text{ m/s}$$

VITESSE INSTANTANÉE

Quand l'intervalle de temps de déplacement de la particule Δt devient de plus en plus petit (tend vers zéro), la vitesse est dite instantanée:

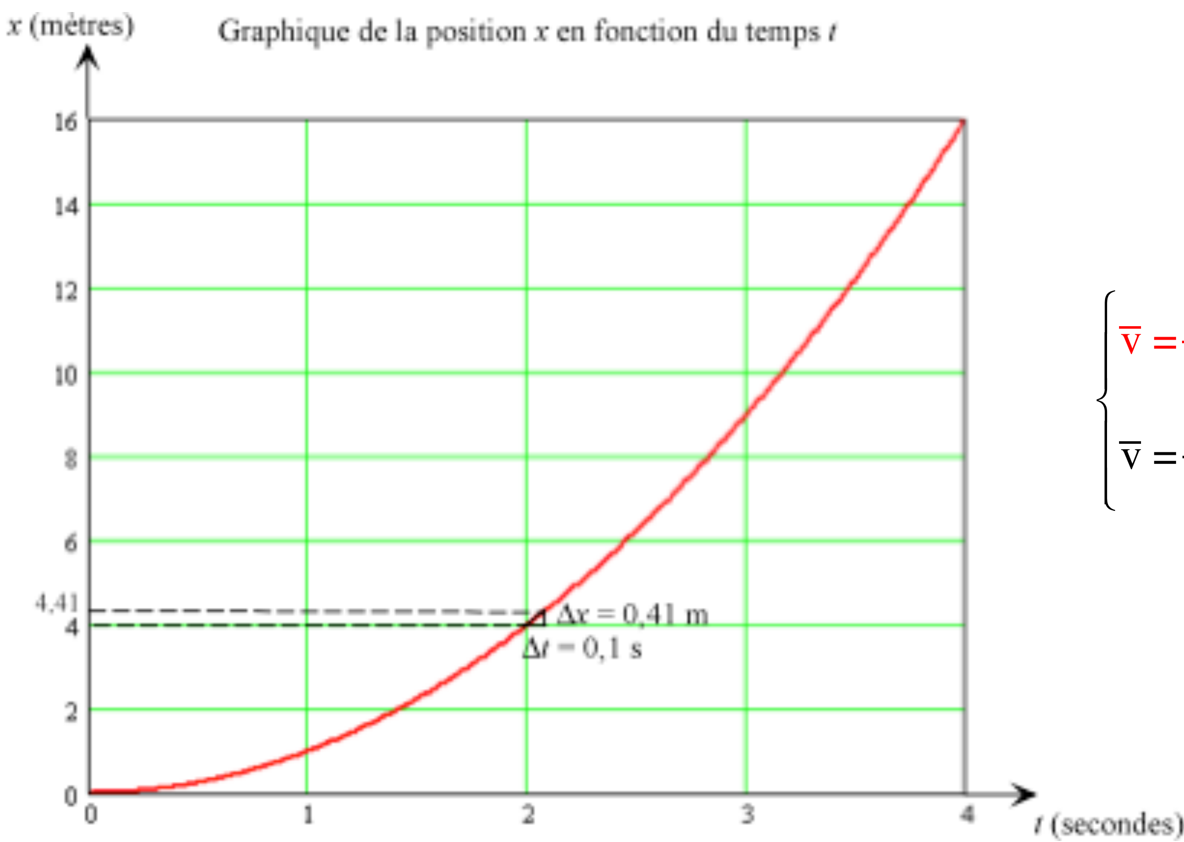
$$\vec{\mathrm{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathrm{r}}}{\Delta t}$$

C'est la vitesse de la particule en un point. C'est aussi **la pente de la tangente à la courbe de la fonction *x(t)* en tout point.**

Si ce déplacement est effectué selon l'axe des x, cette relation s'écrit:

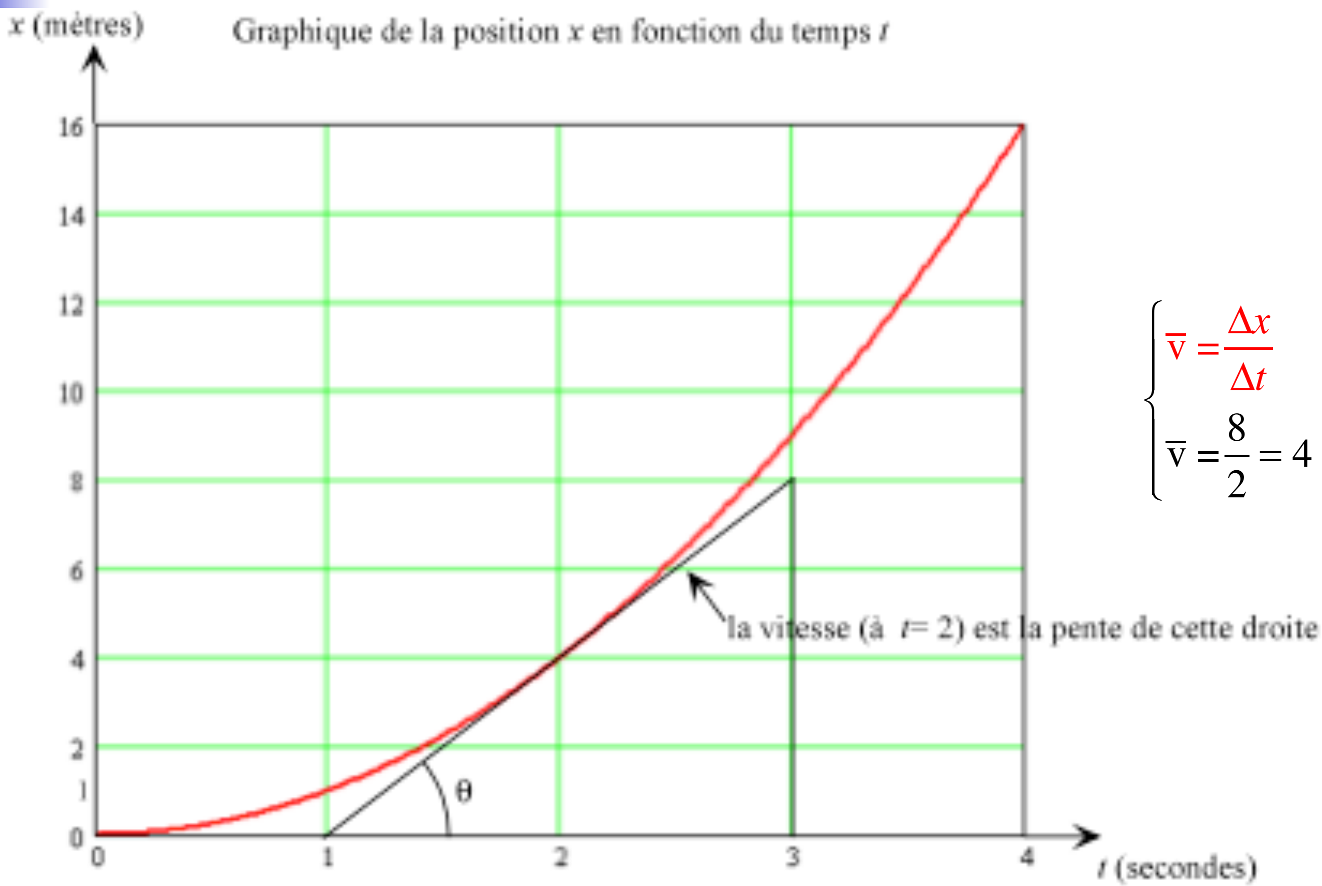
$$\mathrm{v}_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

GRAPHIQUE DE LA POSITION *x* EN FONCTION DU TEMPS



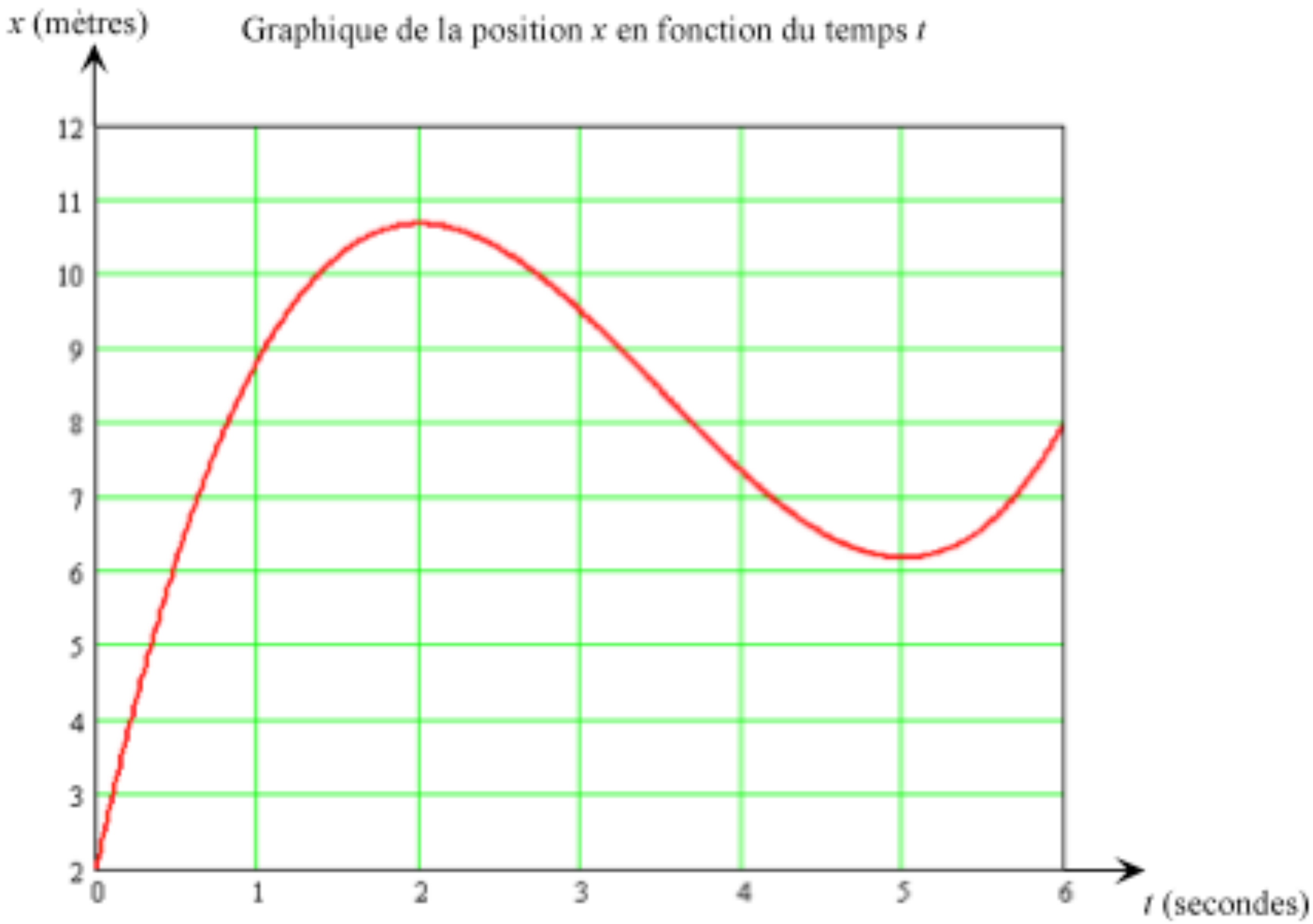
$$\left\{\begin{array}{l} \overline{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \\ \overline{v} = \dfrac{0{,}41}{0{,}1} = 4{,}1 \end{array}\right. \Rightarrow \quad \overline{v} = 4{,}1 \text{ m/s}$$

VITESSE INSTANTANÉE

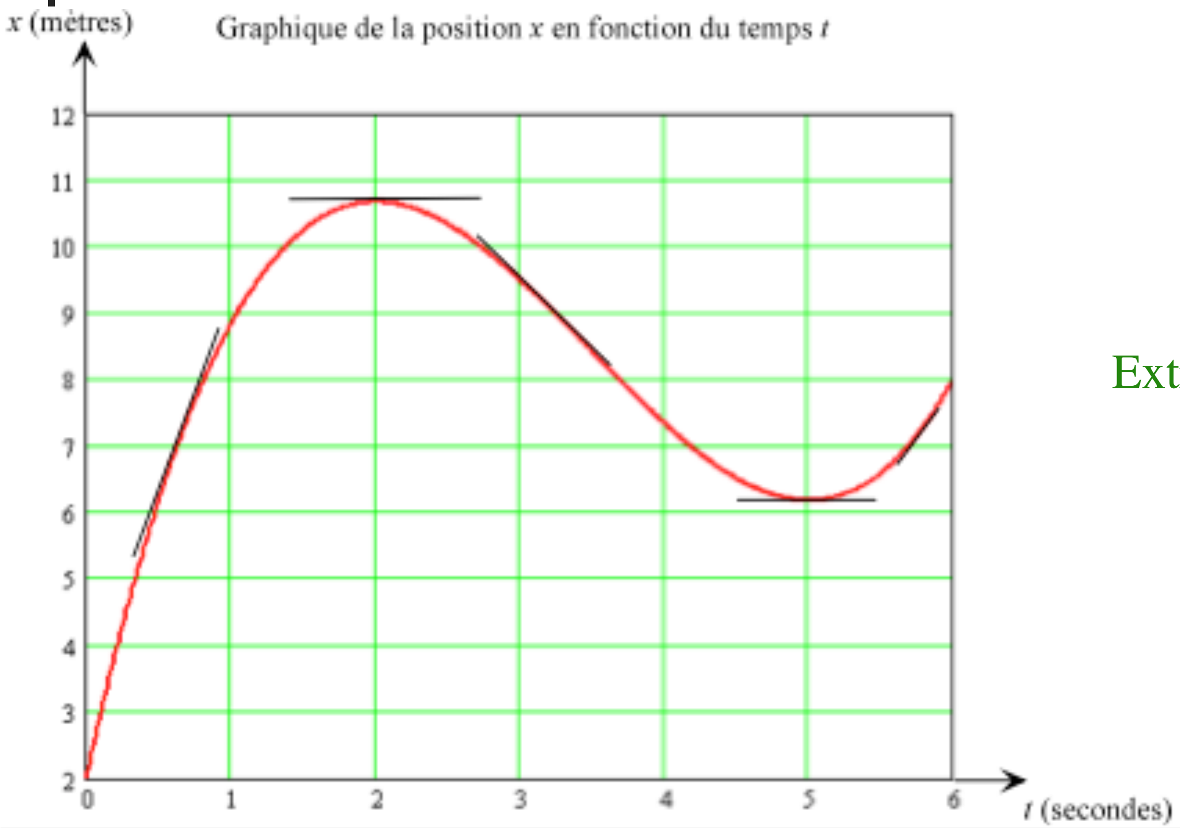


$$\begin{cases} \color{red}{\overline{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}} \\ \overline{v} = \dfrac{8}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad \color{blue}{\overline{v} = 4 \text{ m/s}}$$

VITESSE INSTANTANÉE



VITESSE INSTANTANÉE



Extrémums: $\begin{cases} v(2s) = 0 \text{ m/s} \\ v(5s) = 0 \text{ m/s} \end{cases}$

ACCÉLÉRATION MOYENNE

Si la particule subit un changement de vitesse $\Delta\vec{v}$ pendant un certain intervalle de temps Δt, la particule a une accélération moyenne:

$$\vec{\bar{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

L'accélération est une grandeur vectorielle. L'accélération de la particule est la **norme du vecteur accélération** et elle est exprimée en m/s^2 dans le système international.

Si ce déplacement est effectué selon l'axe des x, entre une position initiale et une position finale, cette relation s'écrit:

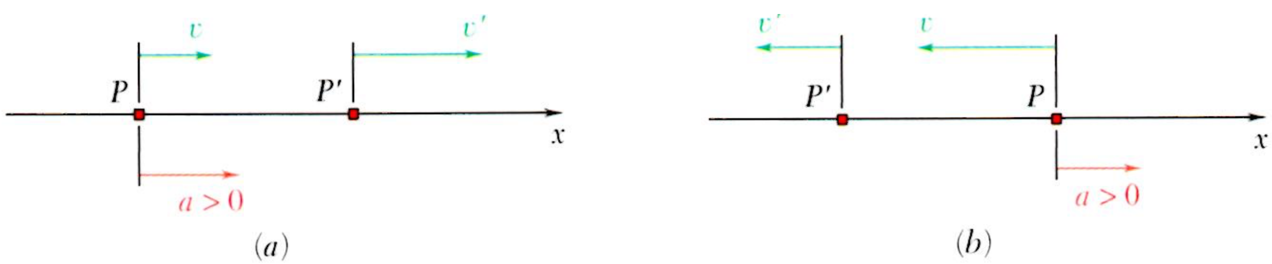
$$\bar{a}_x = \frac{v_{f,x} - v_{i,x}}{t_f - t_i}$$

ACCÉLÉRATION MOYENNE

Si ce déplacement est effectué selon l'axe des y, entre une position initiale et une position finale, cette relation s'écrit:

$$\overline{a}_y = \frac{v_{f,y} - v_{i,y}}{t_f - t_i} \quad \text{avec} \begin{cases} i: \text{ initial} \\ f: \text{ final} \end{cases}$$

Cette accélération représente un taux de variation de vitesse dont le signe dépend du sens du mouvement et de la variation de la grandeur de la vitesse.



ACCÉLÉRATION INSTANTANÉE

Quand la durée du déplacement de la particule Δt devient de plus en plus petit (tend vers zéro), l'accélération est dite instantanée:

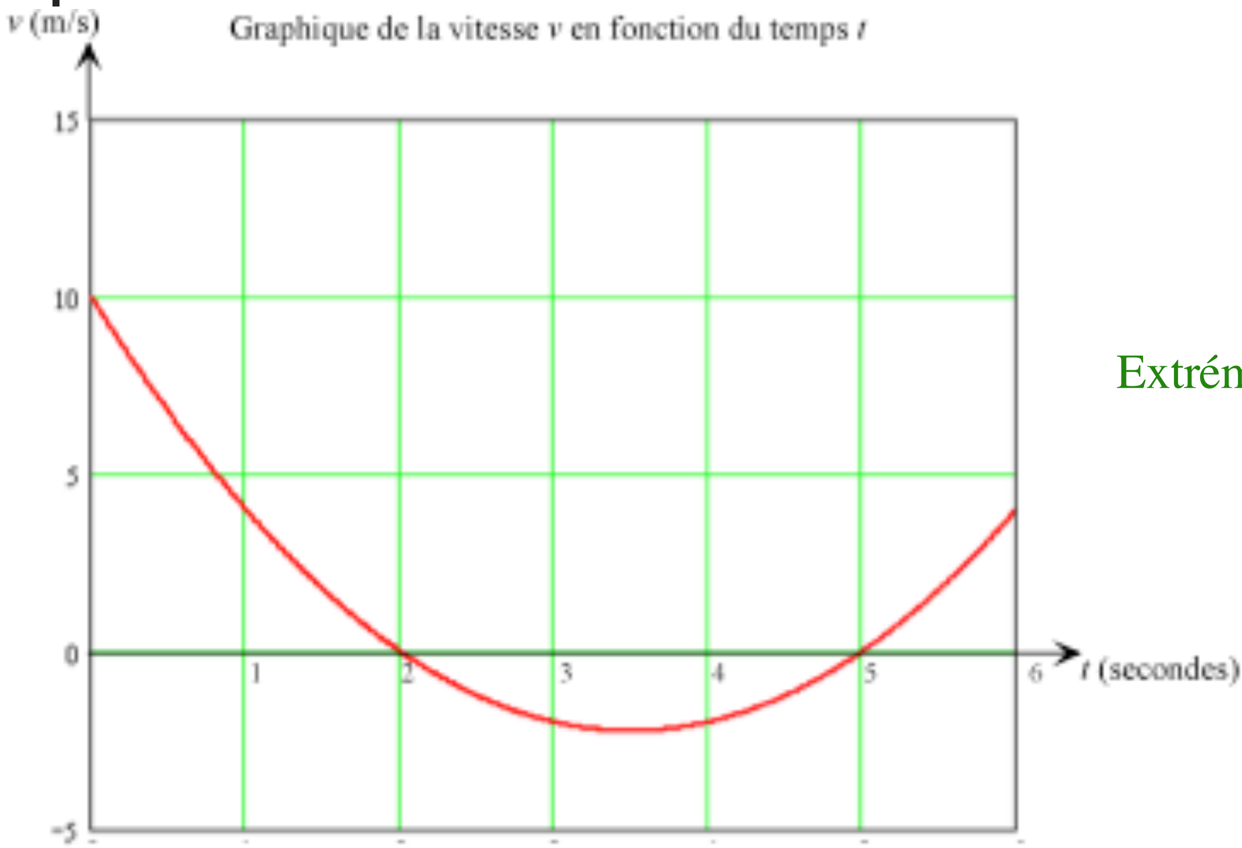
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

C'est l'accélération de la particule en un point. C'est aussi **la pente de la tangente à la courbe de la fonction v*(t)* en tout point.**

Si ce déplacement est effectué selon l'axe des x, cette relation s'écrit:

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$$

ACCÉLÉRATION INSTANTANÉE



Extrémums: $\begin{cases} v(2s) = 0 \text{ m/s} \\ v(5s) = 0 \text{ m/s} \end{cases}$

SIGNE DE L'ACCÉLÉRATION

Accélération **positive**	**La pente** de la vitesse est **positive**
Accélération **négative**	**La pente** de la vitesse est **négative**
Accélération **nulle**	La vitesse est **maximale ou minimale**
L'accélération et la vitesse **de même signe**	**La grandeur** de la vitesse **augmente**
L'accélération et la vitesse **de signes opposés**	**La grandeur** de la vitesse **diminue**

SURFACE SOUS LA COURBE v(t)

Si **la vitesse est constante** **le déplacement** a pour expression:

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{alors} \quad \begin{cases} \Delta x = \bar{v}_x \Delta t \\ x_2 - x_1 = \bar{v}_x (t_2 - t_1) \end{cases}$$

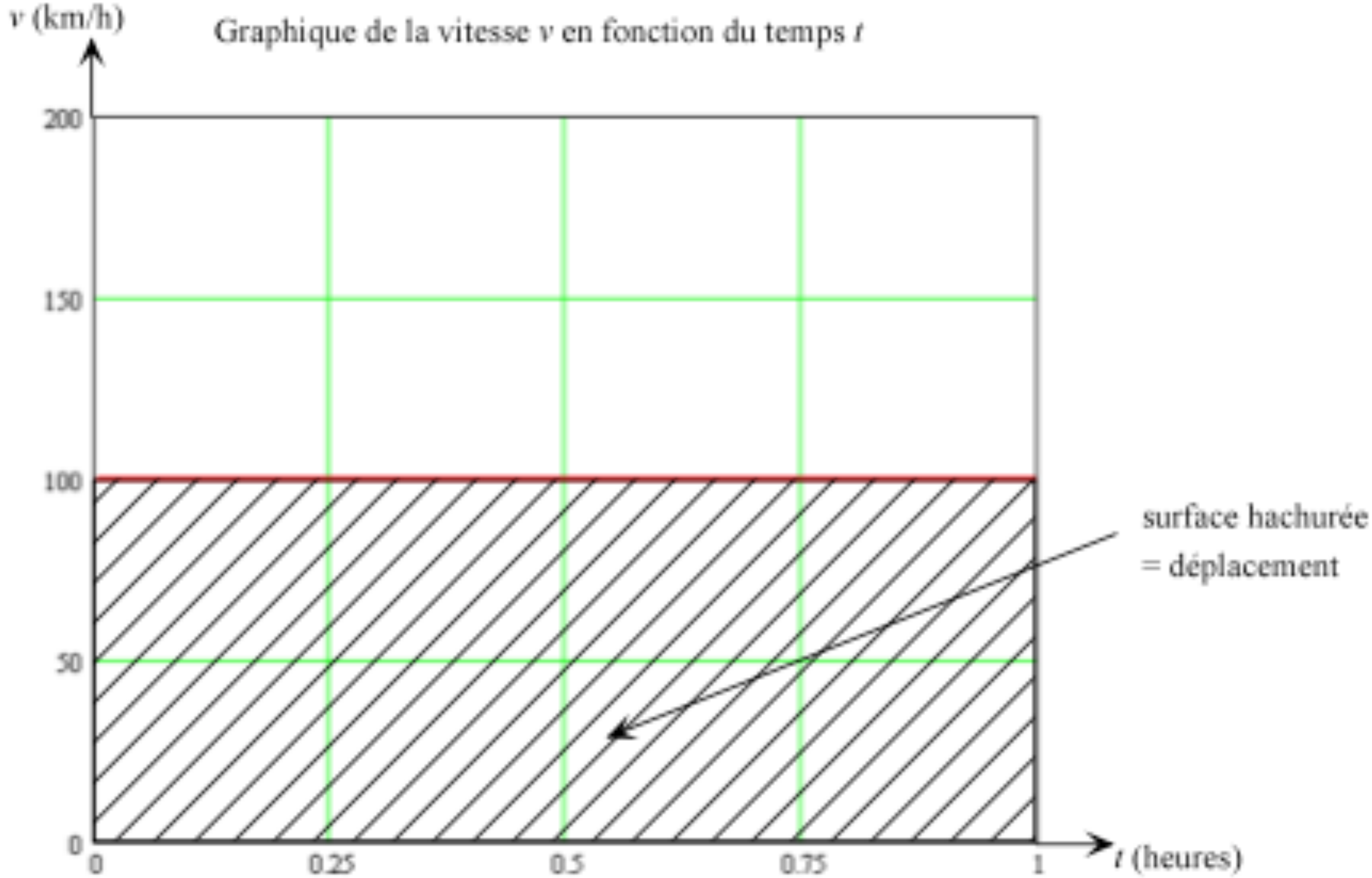
La surface sous la courbe est de forme **rectangulaire**:

Aire (m) : $x_2 - x_1$

Largeur (s) : $t_2 - t_1$

Hauteur (m/s) : $\bar{v}_x$

SURFACE SOUS LA COURBE v(t)



SURFACE SOUS LA COURBE v(t)

Si **la vitesse varie, la surface** sous la courbe est de forme de **trapèze, composée d'un rectangle et d'un triangle.**

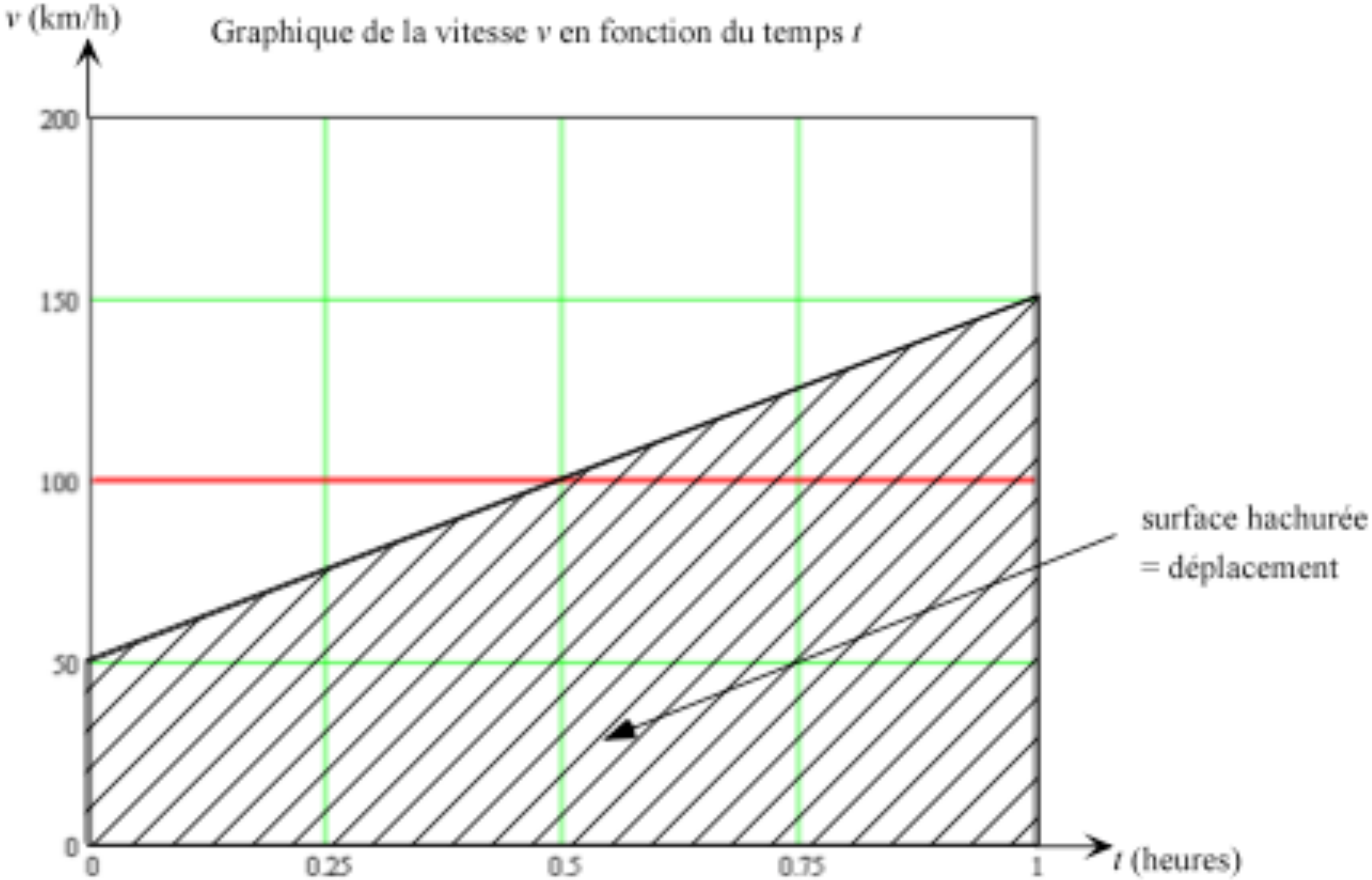
Le déplacement a pour expression:

$$x_2 - x_1 = \text{aire du rectangle} + \text{aire du triangle}$$

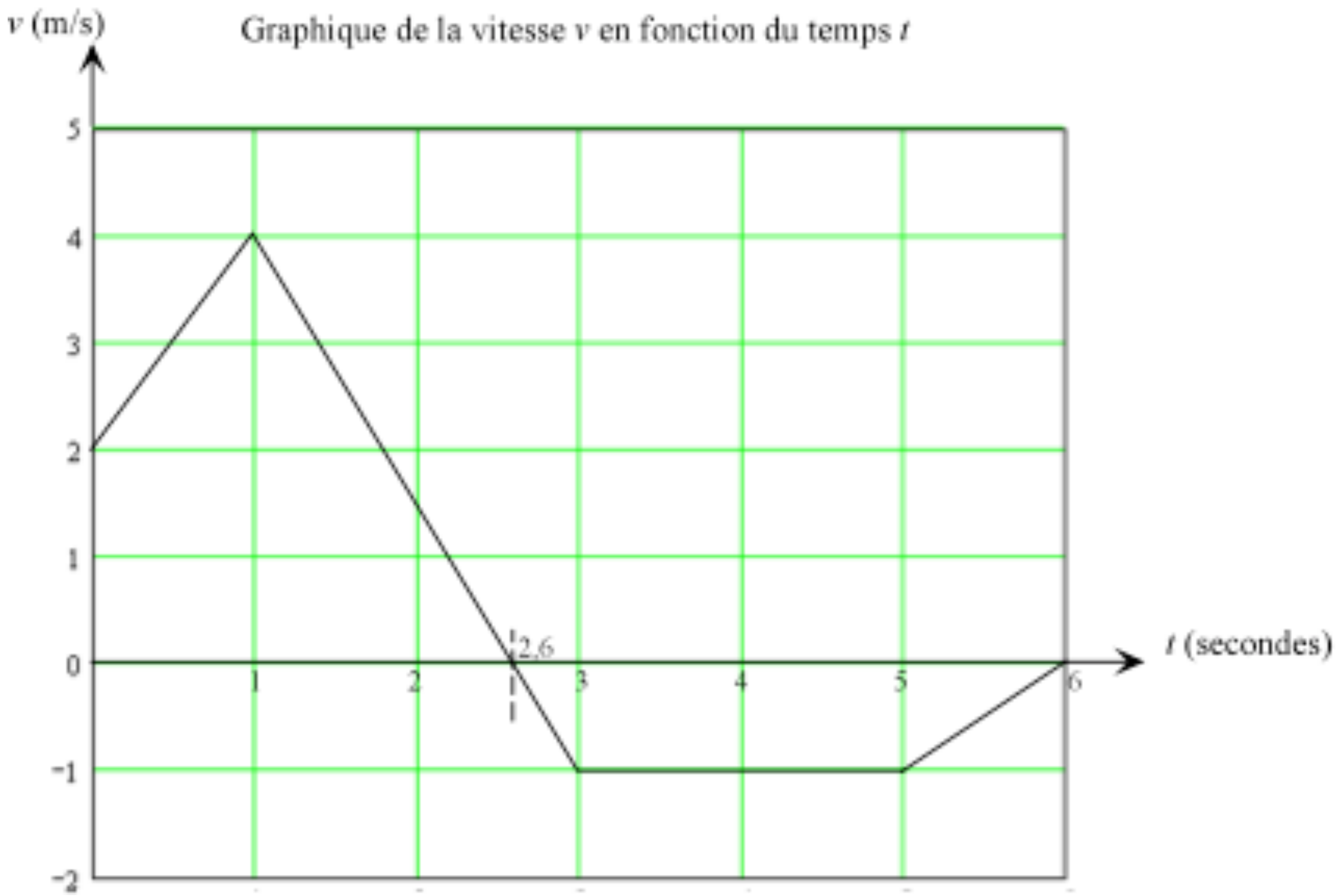
$$x_2 - x_1 = \mathrm{v}_{x,1}\left(t_2 - t_1\right) + \frac{\left(\mathrm{v}_{x,2} - \mathrm{v}_{x,1}\right)\left(t_2 - t_1\right)}{2}$$

$$x_2 - x_1 = \frac{\left(\mathrm{v}_{x,1} + \mathrm{v}_{x,2}\right)\left(t_2 - t_1\right)}{2}$$

SURFACE SOUS LA COURBE v(t)



SURFACE SOUS LA COURBE v(t)



SURFACE SOUS LA COURBE v(t)

t(s)	v(m/s)	Surface	Aire (m^2)	Déplacements (m)
0	2			
1	4	Trapèze	$\frac{(2+4)(1-0)}{2}$	3
2,6	0	Triangle	$\frac{(2,6-1)\times 4}{2}$	3,2
3	-1	Triangle	$\frac{(3-2,6)\times(-1)}{2}$	-0,2
5	-1	Rectangle	$(5-3)\times(-1)$	-2
6	0	Triangle	$\frac{(6-5)\times(-1)}{2}$	-0,5
Déplacement total:	$\Delta x = (3+3,2-0,2-2-0,5)\text{m} = 3,5\text{m}$			

SURFACE SOUS LA COURBE v(t)

Si **la vitesse est constante l'accélération est nulle.**

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad \text{alors} \quad \begin{cases} \Delta v_x = \bar{a}_x \Delta t \\ \Delta v_x = 0\,\text{m/s} \Rightarrow \bar{a}_x = 0\,\text{m/s}^2 \end{cases}$$

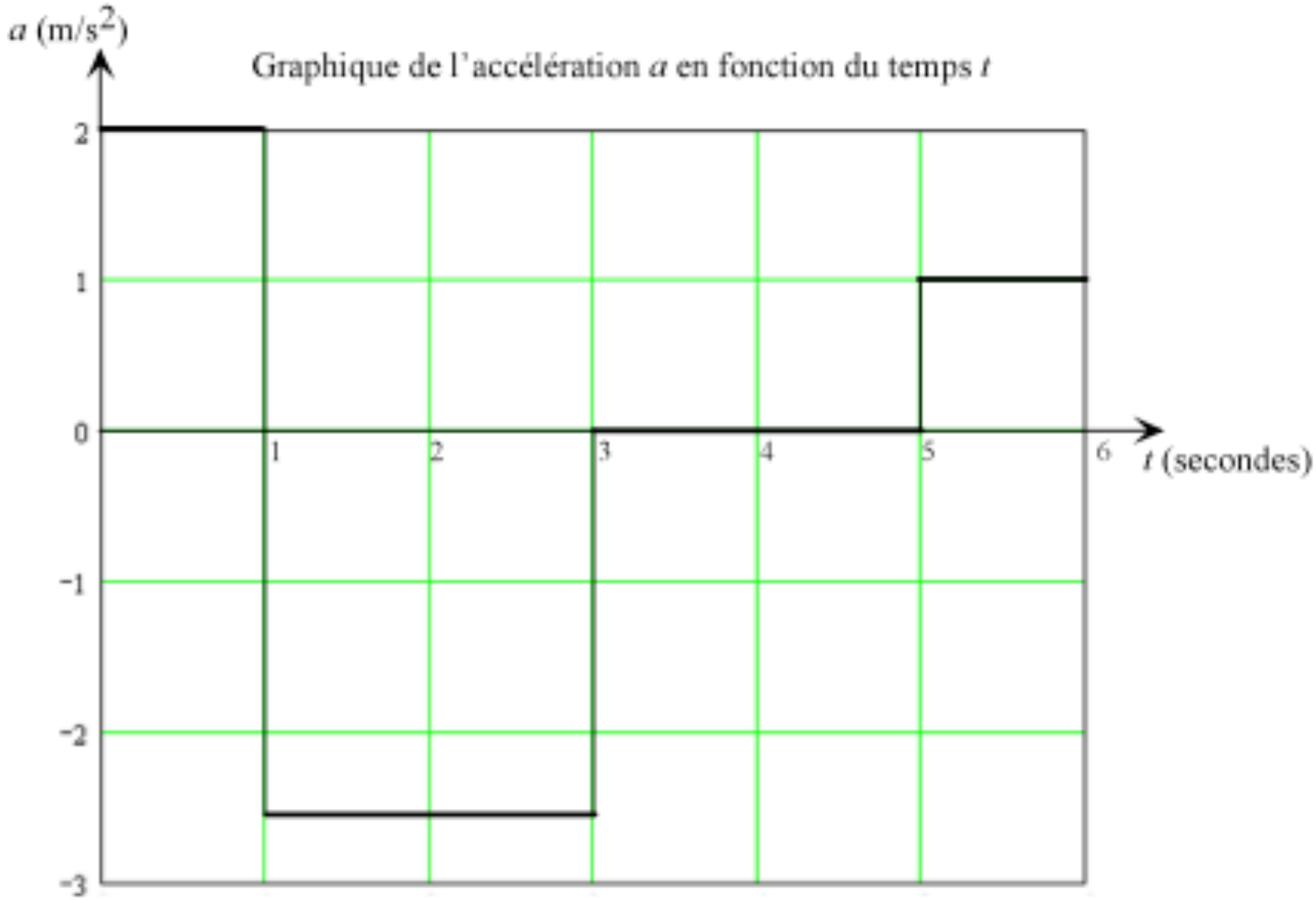
Si **la vitesse varie l'accélération** a pour expression:

$$\bar{a}_x = \frac{v_{x,f} - v_{x,i}}{t_f - t_i} \quad \Rightarrow \quad \text{l'accélération est constante}$$

GRAPHIQUE DE LA COURBE a(t)

t(s)	v(m/s)	a(m/s^2)			
0	2	$\frac{4-2}{1-0}=2$			
1	4		$\frac{-1-4}{3-1}=-2,5$		
3	-1			$\frac{-1-(-1)}{5-3}=0$	
5	-1				$\frac{0-(-1)}{6-5}=1$
6	0				

GRAPHIQUE DE LA COURBE a(*t*)



DÉTERMINATION DU MOUVEMENT D'UNE PARTICULE

Le mouvement d'une particule est défini par la fonction:

$$x = f(t)$$

Où t est en seconde et x en mètres. C'est rare qu'un mouvement est défini par cette fonction.

Le mouvement est souvent exprimé en fonction de son accélération

- ✓ Corps en chute libre défini par : $a = g = 9{,}81\ m/s^2$
- ✓ Corps attaché à un ressort: $a = k\, x$
  l'accélération a est proportionnelle à **l'élongation x.**
  x déformation du ressort à partir de sa position d'équilibre.

MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME

$v = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad a = 0 \text{ m/s}^2$

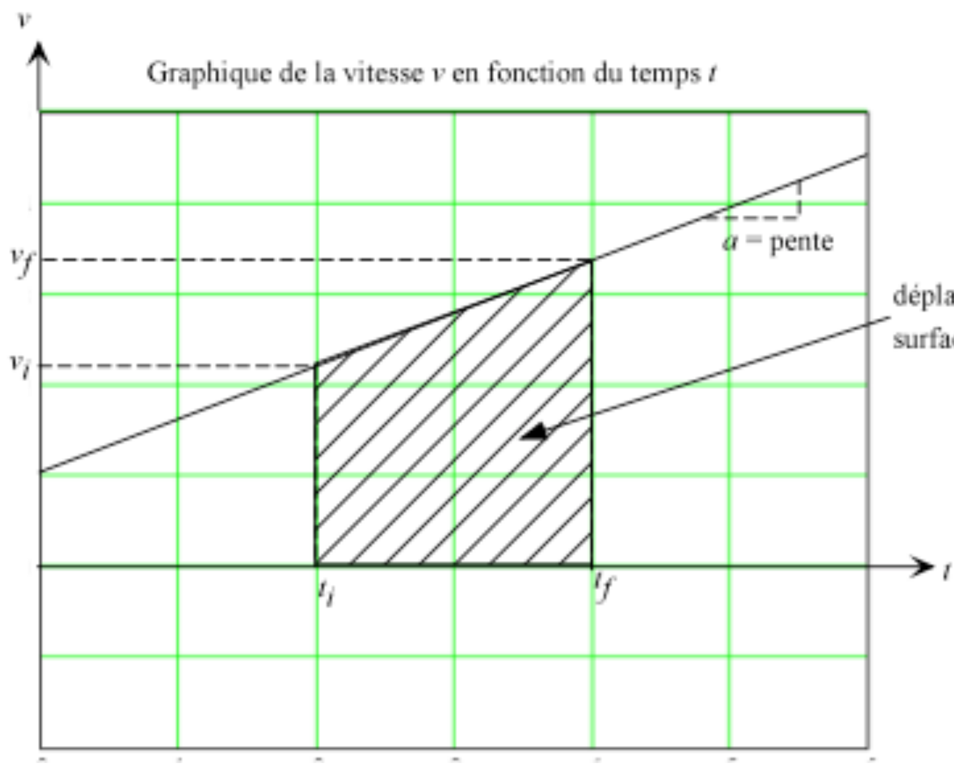
Les caractéristiques d'un mouvement rectiligne uniforme sont:

- Le mouvement s'effectue selon une ligne droite.
- L'accélération du mouvement est nulle: $a = 0$.
- La vitesse est constante durant le mouvement.

$$x_f = v_x\left(t_f - t_i\right) + x_i$$

MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMÉMENT ACCÉLÉRÉ a = constante

Sachant que l'accélération est constante, celle-ci est la pente de la droite v(***t***).



$$v_f = a\left(t_f - t_i\right) + v_i$$

MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMÉMENT ACCÉLÉRÉ   a = constante

Dans un graphique v(t), le déplacement peut s'écrire:

$$x_f - x_i = \text{aire du rectangle} + \text{aire du triangle}$$

$$x_f - x_i = \mathrm{v}_i\left(t_f - t_i\right) + \frac{\left(\mathrm{v}_f - \mathrm{v}_i\right)\left(t_f - t_i\right)}{2}$$

Aussi dans un graphique a(t), la variation de vitesse s'écrit:

$$\mathrm{v}_f - \mathrm{v}_i = \mathrm{a}\left(t_f - t_i\right)$$

MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMÉMENT ACCÉLÉRÉ a = constante

En combinant ces deux relations, on obtient :

$$\left.\begin{aligned} x_f - x_i &= \mathrm{v}_i\left(t_f - t_i\right) + \frac{\left(\mathrm{v}_f - \mathrm{v}_i\right)\left(t_f - t_i\right)}{2} \\ \mathrm{v}_f - \mathrm{v}_i &= \mathrm{a}\left(t_f - t_i\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_f - x_i = \mathrm{v}_i\left(t_f - t_i\right) + \frac{\mathrm{a}\left(t_f - t_i\right)^2}{2}$$

$$x_f = \frac{1}{2}\mathrm{a}\left(t_f - t_i\right)^2 + \mathrm{v}_i\left(t_f - t_i\right) + x_i$$

et

$$\mathrm{v}_f = \mathrm{a}\left(t_f - t_i\right) + \mathrm{v}_i$$

MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMÉMENT ACCÉLÉRÉ   a = constante

En combinant ces deux relations, on obtient :

$$\left.\begin{aligned} x_f - x_i &= v_i\left(t_f - t_i\right) + \frac{\left(v_f - v_i\right)\left(t_f - t_i\right)}{2} \\ v_f - v_i &= a\left(t_f - t_i\right) \Rightarrow \frac{v_f - v_i}{a} = \left(t_f - t_i\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_f - x_i = v_i \frac{v_f - v_i}{a} + \frac{a\left[\dfrac{v_f - v_i}{a}\right]^2}{2}$$

$$x_f - x_i = \frac{v_f - v_i}{a}\left[v_i + \frac{\left(v_f - v_i\right)}{2}\right]$$

et

$$x_f - x_i = \frac{v_f - v_i}{a}\left[\frac{\left(v_f + v_i\right)}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad v_f^2 - v_i^2 = 2a\left(x_f - x_i\right)$$

MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMÉMENT ACCÉLÉRÉ   a = constante

En résumé on obtient:

$$\mathrm{v}_{f,x} = \mathrm{v}_{i,x} + \mathrm{a}_x \left(\boldsymbol{t}_f - \boldsymbol{t}_i \right)$$

$$\boldsymbol{x}_f = \boldsymbol{x}_i + \mathrm{v}_{i,x} \left(\boldsymbol{t}_f - \boldsymbol{t}_i \right) + \frac{1}{2} \mathrm{a}_x \left(\boldsymbol{t}_f - \boldsymbol{t}_i \right)^2$$

$$\mathrm{v}_{f,x}^2 = \mathrm{v}_{i,x}^2 + 2\mathrm{a}_x \left(\boldsymbol{x}_f - \boldsymbol{x}_i \right)$$

MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMÉMENT ACCÉLÉRÉ : CHUTE LIBRE $a = g = 9{,}81\ m/s^2$

Sachant que l'accélération est constante et est dirigée vers le bas. Le mouvement s'effectue alors selon un axe vertical, axe des y. Par conséquent, $a_y = -g$

$$v_{f,y} = v_{i,y} - g(t_f - t_i)$$

$$y_f = y_i + v_{i,y}(t_f - t_i) - \frac{1}{2}g(t_f - t_i)^2$$

$$v^2_{f,y} = v^2_{i,y} - 2g(y_f - y_i)$$

EXEMPLE 4.2

Un camion se déplace à 120 km/h. Voyant un chevreuil sur la route, il met brusquement les freins et décélère de façon constante au rythme de 7,8 m/s^2 Calculez sa distance de freinage ainsi que le temps mis par le camion pour s'arrêter.

1. Données du problème

Camion :

$$\text{Position initiale :}\begin{cases} \overline{\mathrm{v}}_i = 120 \text{ km/h} \\ t_i = 0 \text{ s} \\ x_i = 0 \text{ m} \end{cases} \quad \xrightarrow{\mathrm{a}_x = -7{,}8 \mathrm{m/s}^2} \quad \text{Position finale :} \overline{\mathrm{v}}_f = 0 \text{ m/s}$$

EXEMPLE 4.2

2 Question :

$$a)\quad \left|x_f\right| = \;? \quad \text{et} \quad b)\quad t_f = ?$$

3 Développement :

$$\boldsymbol{x}_f = \boldsymbol{x}_i + \mathrm{v}_{i,y}\left(\boldsymbol{t}_f - \boldsymbol{t}_i\right) + \frac{1}{2}\mathrm{a}_x\left(\boldsymbol{t}_f - \boldsymbol{t}_i\right)^2$$

$$\mathrm{v}_{f,y}^2 = \mathrm{v}_{i,y}^2 + 2\mathrm{a}_x\left(\boldsymbol{x}_f - \boldsymbol{x}_i\right)$$

EXEMPLE 4.2

4. Application numérique

Calcul de la distance:

$$0^2 = \left(\frac{120000}{3600}\right)^2 + 2\times(-7{,}8)\left(\boldsymbol{x}_f - \boldsymbol{x}_i\right) \Rightarrow \left(\boldsymbol{x}_f - \boldsymbol{x}_i\right) = \mathrm{d} = 71{,}225 \text{ m}$$

Calcul de le temps final :

$$\begin{cases} 71{,}225 = 0 + \dfrac{120000}{3600}\left(\boldsymbol{t}_f - 0\right) + \dfrac{1}{2}(-7{,}8)\left(\boldsymbol{t}_f - 0\right)^2 \\ 3{,}9\boldsymbol{t}_f^2 - \dfrac{100}{3}\boldsymbol{t}_f + 71{,}225 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{t}_f = 4{,}27 \text{ s}$$

EXEMPLE 4.3

Deux voitures A et B sont, au temps t = 0 s, distant de 1000m et de vitesses respectives 40 m/s et 10 m/s de déplacement opposés. La voiture A décélère au rythme constant de 0,5 m/s^2 et la voiture B accélère au rythme constant de 1 m/s^2 . Où et quand se croiseront-elles.

1. Données du problème

$$\text{Voiture A :}\begin{cases} \overline{\mathrm{v}}_{\mathrm{A},i} = 40 \text{ m/s} \\ t_i = 0 \text{ s} \\ x_{\mathrm{A},i} = 0 \text{ m} \\ \mathrm{a}_{\mathrm{A},x} = -0{,}5 \mathrm{m/s}^2 \end{cases} \qquad \text{Voiture B :}\begin{cases} \overline{\mathrm{v}}_{\mathrm{B},i} = -\,10 \text{ m/s} \\ t_i = 0 \text{ s} \\ x_{\mathrm{B},i} = 1000 \text{ m} \\ \mathrm{a}_{\mathrm{B},x} = -1 \mathrm{m/s}^2 \end{cases}$$

EXEMPLE 4.3

2 Question :

$$a)\quad x_{A,f} = x_{B,f} = ? \quad \text{et} \quad b)\quad t_f = ?$$

3 Développement :

$$\boldsymbol{x}_f = \boldsymbol{x}_i + \mathrm{v}_{i,y}\left(\boldsymbol{t}_f - \boldsymbol{t}_i\right) + \frac{1}{2}\mathrm{a}_x\left(\boldsymbol{t}_f - \boldsymbol{t}_i\right)^2$$

$$\mathrm{v}_{f,y}^2 = \mathrm{v}_{i,y}^2 + 2\mathrm{a}_x\left(\boldsymbol{x}_f - \boldsymbol{x}_i\right)$$

EXEMPLE 4.3

4. Application numérique

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{\mathrm{A},\boldsymbol{f}} = 0 + 40\left(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{f}} - 0\right) + \frac{1}{2}(-0{,}5)\left(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{f}} - 0\right)^2 \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{B},\boldsymbol{f}} = 1000 - 10\left(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{f}} - 0\right) + \frac{1}{2}(-1)\left(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{f}} - 0\right)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x}_{\mathrm{A},\boldsymbol{f}} = 40\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{f}} - \frac{1}{4}\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{f}}^2 \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{B},\boldsymbol{f}} = 1000 - 10\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{f}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{f}}^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 40\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{f}} - \frac{1}{4}\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{f}}^2 = 1000 - 10\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{f}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{f}}^2 \\ \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{f}}^2 + 200\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{f}} - 4000 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{f}} = 18{,}32\ \mathrm{s} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{A},\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{x}_{\mathrm{B},\boldsymbol{f}} = 648{,}9\ \mathrm{m} \end{cases}$$

EXEMPLE 4.4

Une voiture A est arrêtée sur une route de campagne. Au temps t = 0 s, un tracteur B passe à côté de A et voyage à une vitesse constante de 50 km/h. Après 10 s, la voiture A démarre et accélère à 3 m/s^2 . À quelle distance de son point de départ sera la voiture lorsqu'elle dépassera le tracteur ?

1. Données du problème

$$\text{Voiture A :}\begin{cases}\begin{cases}\overline{\mathrm{v}}_{\mathrm{A},i} = 0\ \mathrm{m/s}\\ t_i = 0\ \mathrm{s}\\ x_{\mathrm{A},i} = 0\ \mathrm{m}\end{cases}\\ \begin{cases}t = 10\ \mathrm{s}\\ \mathrm{a}_{\mathrm{A},x} = 3\mathrm{m/s}^2\end{cases}\end{cases} \qquad \text{Tracteur B :}\begin{cases}\overline{\mathrm{v}}_{\mathrm{B},i} = 50\ \mathrm{km/h}\\ t_i = 0\ \mathrm{s}\end{cases}$$

EXEMPLE 4.4

2 Question :

$$x_{\mathrm{A},f} = \ ? \quad \text{tel que} \quad x_{\mathrm{A},f} = x_{\mathrm{B},f}$$

3 Développement :

$$\boldsymbol{x}_f = \boldsymbol{x}_i + \mathrm{v}_{i,y}\left(\boldsymbol{t}_f - \boldsymbol{t}_i\right) + \frac{1}{2}\mathrm{a}_x\left(\boldsymbol{t}_f - \boldsymbol{t}_i\right)^2$$

$$\mathrm{v}_{f,y}^2 = \mathrm{v}_{i,y}^2 + 2\mathrm{a}_x\left(\boldsymbol{x}_f - \boldsymbol{x}_i\right)$$

EXEMPLE 4.4

4. Application numérique
   Calcul de le temps final :

$$\begin{cases} x_{A,f} = 0 + 0\times\left(t_f - 10\right) + \frac{1}{2}3\left(t_f - 10\right)^2 \\ x_{B,f} = \frac{50000}{3600}\left(t_f - 0\right) + 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A,f} = \frac{3}{2}\left(t_f - 10\right)^2 \\ x_{B,f} = \frac{125}{9} t_f \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}\left(t_f - 10\right)^2 = \frac{125}{9} t_f \\ t_f^2 - \frac{790}{27} t_f + 100 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_f = 25{,}31 \text{ s} \\ x_{A,f} = x_{B,f} = 351{,}6 \text{ m} \end{cases}$$

EXEMPLE 4.5

Une est lancée verticalement vers le haut par garçon, d'une hauteur de 1,5 m. Elle touche la terre 4 s plus tard. Sachant que l'accélération de la balle est constante et égale à 9,81 m/s^2 vers le bas. Calculez :

a) la vitesse initiale de la balle;
b) la hauteur maximale de la balle par rapport au sol .

1. Données du problème

$$\text{Balle : Position initiale :}\begin{cases} y_i = 1{,}5 \text{ m} \\ t_i = 0 \text{ s} \end{cases} \xrightarrow{a_y = -9{,}81 \text{m/s}^2} \text{Position finale :}\begin{cases} y_f = 0 \text{ m} \\ t_f = 4 \text{ s} \end{cases}$$

EXEMPLE 4.5

2 Question :

$$a)\quad v_i = ? \quad \text{et} \quad b)\quad y_{max} = ?$$

3 Développement :

$$y_f = y_i + v_{i,y}\left(t_f - t_i\right) - \frac{1}{2}g\left(t_f - t_i\right)^2$$

$$v_{f,y}^2 = v_{i,y}^2 - 2g\left(y_f - y_i\right)$$

EXEMPLE 4.5

4. Application numérique

   Calcul de la vitesse initiale:

$$0 = 1{,}5 + v_i(4 - 0) - \frac{1}{2} \times 9{,}81(4 - 0)^2 \quad \Rightarrow \quad v_i = 19{,}245 \text{ m/s}$$

   Calcul de la hauteur maximale:

   La hauteur maximale correspond à une vitesse nulle.

$$\begin{cases} v_{f,y} = 0 \text{ m/s} \\ 0^2 = 19{,}245^2 - 2 \times 9{,}81(y_{max} - 1{,}5) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_{max} = 20{,}38 \text{ m}$$

EXEMPLE 4.6

À t = 0 s, on laisse tomber une balle, qui est à 20 m au dessus d'une plate-forme, qui monte avec une vitesse constante de 3 m/s. À quel instant la balle touchera t-elle la plate forme.

1. Données du problème:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Balle : Position initiale :}\begin{cases} y_{B,i} = 20 \text{ m} \\ v_{B,i} = 0 \text{ m/s} \quad \xrightarrow{\text{MRUA : Chute libre}} \\ t_i = 0 \text{ s} \end{cases} \\ \text{Plate-forme : Position initiale :}\begin{cases} v_{P\text{-}F,i} = 3 \text{ m/s} \quad \xrightarrow{\text{MRU}} \\ t_i = 0 \text{ s} \end{cases}\end{array}\right\} \text{Position finale : } y_{B,f} = y_{P\text{-}F,f}$$

EXEMPLE 4.6

2. Question :

$$t_f = ?$$

3. Développement :

M.R.U.A de la balle :

Chute libre; $y_{B,f} = y_{B,i} + v_{B,i,y}(t_f - t_i) - \frac{1}{2}g(t_f - t_i)^2$

M.R.U. de la Plate-forme:

$$y_{P\text{-}F,f} = y_{P\text{-}F,i} + v_{P\text{-}F,i,y}(t_f - t_i)$$

EXEMPLE 4.6

4. Application numérique

   Équation horaire de la balle; MRUA:

$$y_{B,f} = 20 + 0 \times (t_f - 0) - \frac{1}{2} \times 9{,}81 (t_f - 0)^2 \Rightarrow y_{B,f} = -4{,}905 t_f^2 + 20$$

   Équation horaire de la plate-forme; MRU :

$$y_{P\text{-}F,f} = 0 + 3 \times (t_f - 0) \Rightarrow y_{P\text{-}F,f} = 3 t_f$$

   Temps final :

$$y_{B,f} = y_{P\text{-}F,f} \Rightarrow -4{,}905 t_f^2 + 20 = 3 t_f \Rightarrow \begin{cases} 4{,}905 t_f^2 + 3 t_f - 20 = 0 \\ t_f = 1{,}74 \text{ s} \end{cases}$$