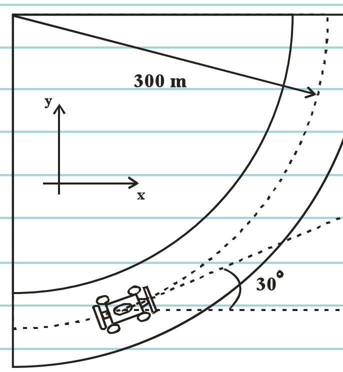
direction
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_c}{a_t}\right)$

CHAPITRE VI - 2ème PARTIE
CINÉMATIQUE DE ROTATION : MOUVEMENT CIRCULAIRE
PROBLÈMES SUGGÉRÉS

Mouvement circulaire – accélération centripète et tangentielle

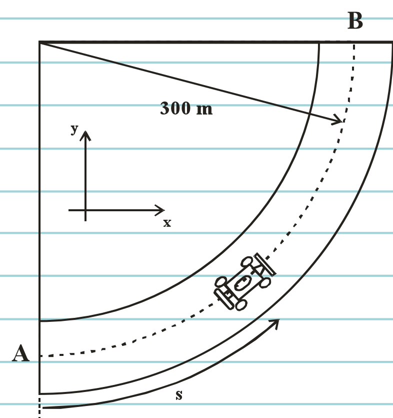
Problème N° 6.6

Une auto se déplace dans une courbe dont le rayon de courbure est de 300 m. À l'instant correspondant à la figure 1, la vitesse est de 20 m/s et la grandeur de cette vitesse augmente au rythme de 2 m/s^2. Calculez l'accélération (grandeur et direction) de cette auto.



Problème N° 6.7

L'automobile ci-dessous change sa vitesse de façon constante entre A et B (v_A = 15 m/s, v_B = 20 m/s). Calculez son accélération centripète et son accélération tangentielle lorsque s = 100 m.



Problème N° 6.8

Dans une machine tournante de rayon 50 cm, démarrant à partir du repos et accélérant à un rythme de 3 rad/s^2, après combien de temps l'accélération totale d'un point sur la paroi de la machine sera-t-elle de 4 m/s^2?

6.6

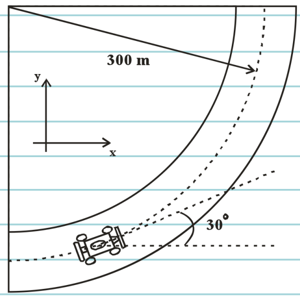
① Donnés

- une auto
- Mouvement circulaire

$R = 300\,m$

* Figure 1: $\begin{cases} t \\ v_t = 20\,m/ \\ a_t = 2\,m/s^2 \end{cases}$

$\beta = 30^0$



② Question

$\vec{a} \begin{cases} a = ? \\ \theta_D = ? \\ \theta_x = ? \end{cases}$

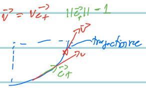
③ Dev

$a_c = \frac{v^2}{R}$

$\vec{a} = a_t \vec{e}_t + a_c \vec{e}_n \Rightarrow \vec{a} = \underbrace{\left(\frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}\right)}_{\text{la grandeur de la vitesse varie}} \vec{e}_t + \underbrace{\frac{v^2}{R}}_{\text{l'orientation de la vitesse varie}} \vec{e}_n$

$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$

$\vec{v} = v\vec{e}_t \quad \|\vec{e}_t\| = 1$

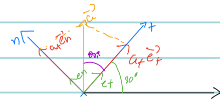


$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2}$

$\theta_{D,t} = \left\| \tan^{-1}\left(\frac{a_c}{a_t}\right) \right\|$

$\theta_{D,x} = \theta_{D_t} + 30^0$

$\theta_x =$



④ app numérique

$a_t = 2\,m/s^2$

$a_c = \frac{20^2}{30} = 1,33\,m/s^2$

$a = \sqrt{2^2 + (4/3)^2} = 2,4037\,m/s^2$

$\theta_{D_t} = \left\| \tan^{-1}\left(\frac{1,33}{2}\right) \right\| = 33,69^0$

$\theta_D = \theta_x = 63,69^0$

6.7

①

auto $\begin{cases} v_A = 15\,m/s \\ v_B = 20\,m/s \end{cases} \Big| R = 300\,m$

a change de grandeur de façon cst

②

$a_c = ?$
$a_t = ?$ | $s = 100\,m$

$a_{c,s=100} \stackrel{?}{=}$

$a_{t,s=100\,m} \stackrel{?}{=}$

③ $a_{c,s=100\,m} = \frac{v^2_{s=100\,m}}{R}$

$v^2_{s=100\,m} = v_A^2 + 2a_t(100 - 0)$

$S = R\theta$

$a_t = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$

$\underbrace{v_f}_{v_B}{}^2 = \underbrace{v_i}_{v_A}{}^2 + 2\,a_t\,(\underbrace{s_f}_{s_B} - \underbrace{s_i}_{s_A})$

$\frac{v_B^2 + v_A^2}{2\left(\frac{2\pi R}{4}\right)} = \frac{v_B^2 + v_A^2}{2(R\cdot\theta)} = \frac{v_B^2 + v_A^2}{2\left(R\frac{\pi}{2}\right)}$

④

$a_t = \frac{20^2 - 15^2}{300 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2} \simeq 0,186\,m/s^2$

$v_{s=100} = \sqrt{15^2 + 2 \cdot 0,186 \cdot 100} = 16,14\,m/s$

$a_{c_{100m}} = \frac{16,141^2}{300} = 0,87\,m/s^2$

6.8

①

* machine tournante
* mouvement circulaire

$R = 50\,cm$

position initiale — position finale

$t_i = 0\,s$ — t_f

$\theta_i \xrightarrow{\alpha = 3\,rad/s^2} \theta_f$

$\omega_i = 0\,rad/s$ — ω_f

②

$\begin{cases} \Delta t = ? \text{ ou } t_f = ?, \text{car } t_i = 0\,s \\ a = 4\,m/s^2 \end{cases}$

③ $\theta_f = \frac{1}{2}\alpha(t_f - t_i)^2 + \omega_i(t_f - t_i) + \theta_i$

$\omega_f = \alpha(t_f - t_i) + \omega_i$

$a_t = R\alpha$

$v_f = a_t \cdot t_f$

$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2}$

$a_c = \frac{v^2}{R}$

④ $4 = \sqrt{(0,5 \cdot 3)^2 + \frac{v^4}{0,5^2}}$

$v = 1,362\,m/s$

$1,362 = 0,5 \cdot 3\,t_f$

$t_f = 0,908\,s$

Cinématique de rotation : Relation entre paramètres linéaire et angulaire

Problème N° 6.9

La figure 1 nous montre le bras de lecture d'un tourne-disque, avec l'aiguille qui se trouve à une distance de 145 mm de l'axe de rotation, au moment où la pièce musicale du disque (tournant à 33 rpm) vient tout juste de commencer.
Lorsque la pièce musicale se termine, l'aiguille se trouve alors à une distance de 68 mm de l'axe de rotation.
Déterminez la grandeur de la vitesse de glissement de l'aiguille par rapport au disque :

a) au début de la pièce musicale ;
b) à la fin de la pièce musicale.

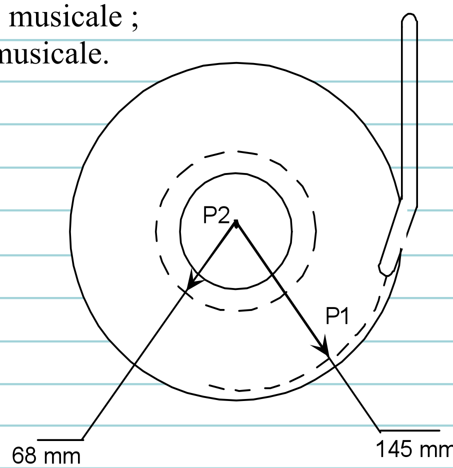


Figure 1

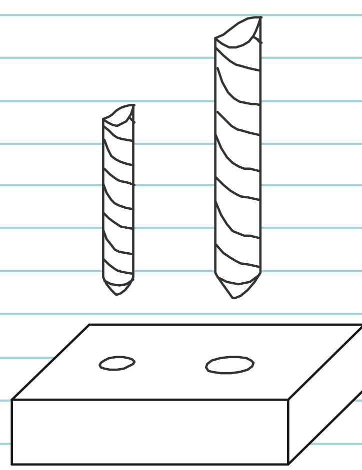
Problème N° 6.10

Un bricoleur possède une perceuse à vitesse de rotation variable (0 à 1200 rpm) pour percer 2 trous dans une pièce de métal, trous dont les diamètres sont respectivement de 6 mm et 12 mm, voir la figure 2.

Sachant que la vitesse de coupe du métal doit être de 16 cm/sec, déterminez la vitesse angulaire de rotation (en rpm) de la mèche, dans chaque cas.

N.B. Pour le perçage, la vitesse de coupe représente la vitesse de la circonférence de la mèche.

Figure 2



6.9

$r_i = 145mm \rightarrow 0{,}145m$

$v = 33\,rpm \rightarrow \omega \cdot \frac{2\pi}{60}\,rad/s^2 = 33 \cdot \frac{2\pi}{60} = \frac{11\pi}{10}\,rad/s$

$r_f = 68\,mm \rightarrow 0{,}068m$

$V_i = R\omega = 0{,}145 \cdot \frac{11\pi}{10} = 0{,}5\,m/s$

$V_f = R \cdot \omega = 0{,}068 \cdot \frac{11\pi}{10} = 0{,}235\,m/s$

6,10

$v = 16\,cm/s \Rightarrow 0{,}16\,m/s$

$r_1 = 0{,}006m$

$m_a = 0{,}012\,m$

$v = r \cdot \omega$

$\omega = \frac{v}{r} \qquad \omega = \frac{0{,}16}{0{,}003} = 53{,}33\,rad/s$

$RPM = 53{,}33 \cdot \frac{60}{2\pi} = 509\,RPM$

$\omega_2 = \frac{0{,}16}{0{,}006} = 26{,}67\,rad/s$

$RPM = 26{,}67 \cdot \frac{60}{2\pi} = 255\,RPM$

Problème N° 6.11

La figure 3 montre un système de poulies montées à l'avant d'un moteur d'automobile.

M : poulie du moteur
G : poulie du générateur
E : poulie de la pompe à eau

On donne les diamètres suivants pour les poulies :

$D_M = 20$ cm $\quad\quad D_G = 8$ cm

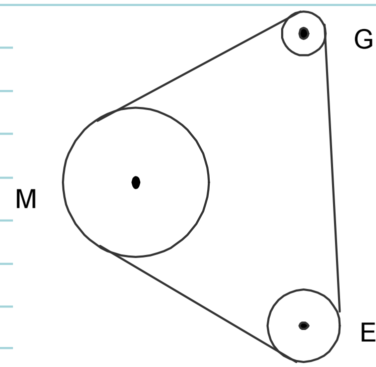


Figure 3

À l'instant t = 0 seconde lu sur un chronomètre, le régime du moteur est de 3000 rpm. On pèse sur la pédale de l'accélérateur et on note alors que, à l'instant t = 4 s, le régime du moteur est de 4000 rpm.
On considère que le glissement des courroies sur les poulies est négligeable.

a) Déterminez le diamètre de la poulie de la pompe à eau, sachant qu'elle tourne toujours 2 fois plus vite que celle du moteur ;
b) en supposant que l'arbre du moteur effectue un mouvement circulaire uniformément accéléré entre les instants 0 seconde et 4 secondes, déterminez :

1- l'accélération linéaire de la courroie (cm /sec^2) ;
2- la vitesse linéaire (cm/sec) de la courroie à l'instant t = 3 s ;
3- la vitesse angulaire de chaque poulie (en rpm) à t = 3 s ;
4- le nombre de révolutions effectuées par la poulie de la pompe à eau entre les instants 0 et 3 secondes.

Problème N° 6.12

On donne les diamètres des poulies, comme illustré à la figure 4 :

$D_A = 80$ mm $\quad D_B = 160$ mm $\quad D_E = 80$ mm $\quad D_H = 120$ mm

Dans ce problème, le glissement des courroies sur les poulies sera considéré négligeable.
Sachant que l'arbre du moteur électrique tourne à 1725 rpm, déterminez les vitesses angulaires de rotation (en rpm) des poulies A et H.

6.11 *

① Données

M : Poulie du moteur : $D_m = 20cm$

G : Poulie du générateur : $D_G = 8cm$

B : Poulie de la pompe à eau : $D_B = ?$

② Question

a) $D_E = ?$ | $\omega_B = 2\omega_M$ → 2x plus vite

b) 6.1) $a = ?$ cm/s^2

6.2) $v(3s) = ?$ cm/s

6.3) $\omega_m(3s) = ?$ rpm

$\omega_G = ?$ $\omega_E = ?$

6.4) $\theta_{eau[0,3s]} = ?$ rev

③

a) $D_E = 2R_E$

$v_E = R_B \cdot \omega_E$

$2\omega_m$

$v_E = v_m$

$\cancel{v_E} = R_B \cdot 2 \cdot \frac{v_m}{R_m} \leftarrow \frac{v_m}{R_m}$

↳ $R_m = 2 \cdot R_B$

↳ $D_B = R_M$

$D_B = 10cm$ □

$\omega_E = 2\omega_m$

$\frac{v_E}{R_E} = 2\frac{v_m}{R_m}$ | $v_B = v_m$

$\frac{1}{R_B} = \frac{2}{R_m} \Rightarrow R_m = 2R_B = D_B$

b)

1-

$a_T = R_m \alpha_m$

$\alpha_m = \frac{\omega_{m,4s} - \omega_{m,0s}}{t_f - t_i}$

$\alpha = \frac{4000 \cdot \frac{2\pi}{60} - 3000 \cdot \frac{2\pi}{60}}{4-0} = 26,18$ rad/s²

$a_T = 0,1 \cdot 26,18 = 2,618$

$a_T = 2,618 m/s^2 \Rightarrow 261,8 cm/s^2$ □

P_i → P_f

$t_i = 0s$; $t_f = 4s$

$\theta_i = 0rad$ $\xrightarrow{\alpha}$ $\theta_f =$

$\omega_i = 3000rpm$; $\omega_f = 4000rpm$

2-

$v(t) = a_T(t_f - t_i) + v_i$

$v_i \to R \cdot \omega_i$

$v(3) = 2,618(3-0) + (0,1 \cdot 3000 \frac{2\pi}{60})$

$= 39,27$ m/s

$= 3927$ cm/s □

3-

$\omega_{m(3s)} = \frac{v}{R_m} = \frac{39,27}{0,1} = 392,7$ rad/s $\Rightarrow$ Ans$/2\pi \cdot 60 = 3750$ rpm

$\omega_G(3s) = \frac{v}{R_G} = \frac{39,27}{0,04} = 981,748$ rad/s $\Rightarrow$ Ans$/2\pi \cdot 60 \approx 9375$ rpm

$\omega_E(3s) = 2\omega_m(3s) = 2\left(\frac{39,27}{0,1}\right) = 785,4$ rad/s $\Rightarrow$ Ans$/2\pi \cdot 60 \approx 7500$ rpm

4-

$\theta_{f,B} = \frac{1}{2}\alpha_E(t_f - t_i)^2 + \omega_{i_E}(t_f - t_i) + \theta_i$

$\omega_B = \omega_M$

$\omega_{E_i} = 2 \cdot 3000 \cdot \frac{2\pi}{60} = 628,32$ rad/s

$a_T = R_B \cdot \alpha_B$

$\alpha_B = \frac{a_T}{R_B}$

$= \frac{2,618}{0,05} = 52,36$ rad/s²

$\theta_{f,B} = \frac{1}{2} \cdot 52,36(3-0)^2 + 628,32(3-0)$

$= 2120,58$ rad □

Ans$/2\pi = 337,5$ rev

↳ 1 tour complet en angle

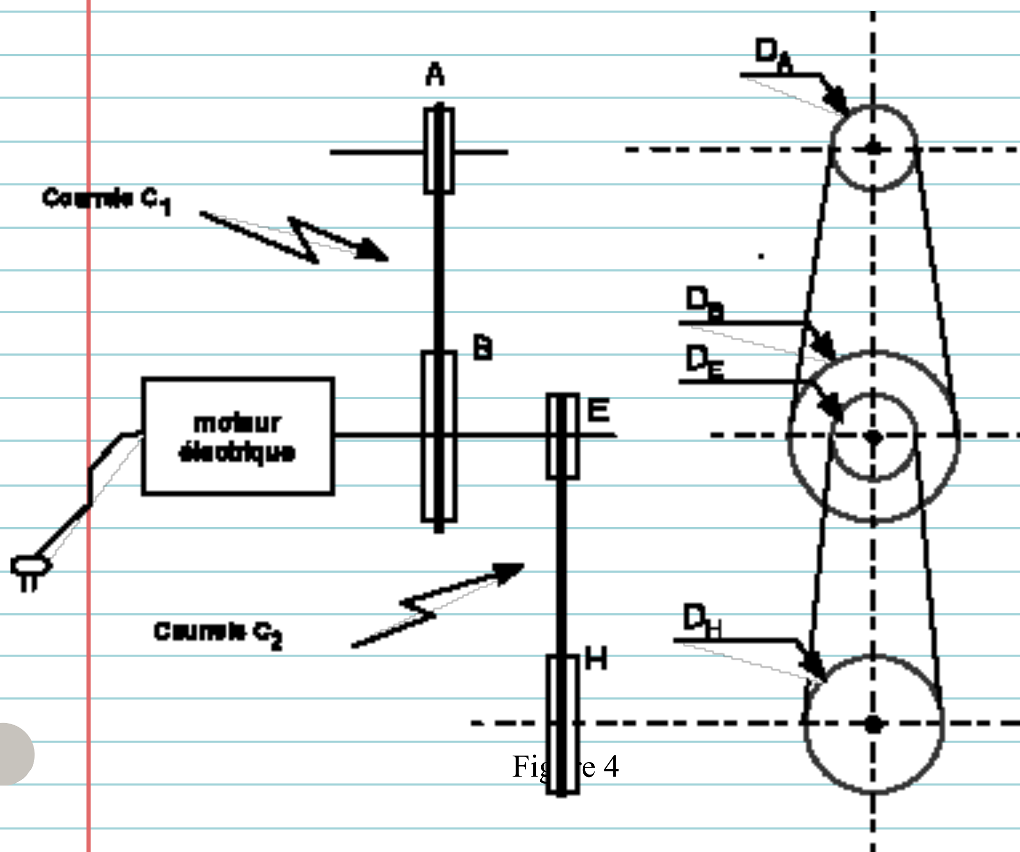


Figure 4

CHAPITRE VI- 2ème PARTIE

CINÉMATIQUE DE ROTATION : MOUVEMENT CIRCULAIRE

RÉPONSES DES PROBLÈMES SUGGÉRÉS

Problème N° 6.6 : **Rép. :**

$a_c = 1{,}333 \text{ m/s}^2$

$a = 2{,}40 \text{ m/s}^2$

$\theta_D = \theta_s = 63{,}7°$

Problème N° 6.7 : **Rép. :**

$a_t = 0{,}186 \text{ m/s}^2$

Problème N° 6.8 : **Rép. :**

$\Delta t = 0{,}908 \text{ s}$

Problème N° 6.9 : **Rép. :**

$v_i = 0{,}501 \text{ m/s}$

$v_f = 0{,}235 \text{ m/s}$

Problème N° 6.10 : **Rép. :**

$\omega_1 = 509 \text{ rpm}$

$\omega_2 = 255 \text{ rpm}$

Problème N° 6.11 : **Rép. :**

a) $D_E = 10 \text{ cm}$

b) $1-\alpha = 26{,}18 \text{ rad/s}^2 \Rightarrow \begin{cases} a_t = 2{,}618 \text{ m/s}^2 \\ a_t = 261{,}8 \text{ cm/s}^2 \end{cases}$

2- $\begin{cases} v_C = 39{,}27 \text{ m/s} \\ v_C = 3927 \text{ cm/s} \end{cases}$

3- $\begin{cases} \omega_{M,3s} = 3750 \text{ rpm} \\ \omega_{E,3s} = 7500 \text{ rpm} \\ \omega_{G,3s} = 9375 \text{ rpm} \end{cases}$

4- $\theta_{t=3s} = 337{,}5 \text{ rév}$

Problème N° 6.12 : **Rép. :**

a) $\omega_A = 3450 \text{ rpm}$

b) $\omega_H = 1150 \text{ rpm}$