Série entière :

Déf : On appelle série $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n = S_n$

ex :

$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = S_n$

On dit que S_n converge ssi $\lim_{n \to \infty}$ existe sinon elle diverge

ex :

$\sum_{n=0}^{N} r^n = \frac{1-r^{N+1}}{1-r}$ est appelé série géométrique, converge pour $|r| < 1$ vers $\frac{1}{1-r}$

Théorème d'Alembert :

La série $\sum_{n=n_0}^{n} a_n$ converge ssi $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$

Condition de convergence :

Si la série $\sum_{n=n_0}^{N} a_n = S_n$ converge $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

ex :

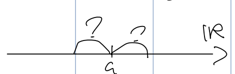
$\sum_{n=1}^{n} n = S_n$ $\quad \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} n = +\infty \neq 0$

S_n n'est pas convergente

ex : $S_N = \sum_{n=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)$ On $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, mais S_n diverge, car

C'est une série harmonique

Soit $S_n = \sum_{n=0}^{n} c_n (x-a)^n$ est appelé série entière centré en a



pour $x = a$ S_n converge

La question qui se pose est de combien je peux m'éloigner de a et ma série resterait convergente ?

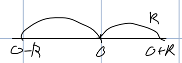
C'est équivalent à : R est égale à quoi ? pour que $\forall x \in]a-R, a+R[$ série S_n est convergent

R est appelé rayon de convergence de la série $S_n(x)$

On calcule R en utilisant d'Alembert c-à-d on résoud quand est ce que $\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| < 1$?

ex: Trouver le rayon de convergence de la série $\sum \frac{n x^n}{2^n} = \sum c_n(x-a)$ | $a = 0$, $c_n = \frac{n}{2^n}$

La série est centrée sur 0 ; $a=0$



$a_n(x) = \frac{n x^n}{2^n}$

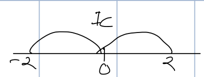
$a_{n-1}(x) = \frac{(n+1)x^{n-1}}{2^{n+1}}$

$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{(n+1)x^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n x^n}$

$= \frac{n+1}{n} \cdot \frac{x}{2}$

On a $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1\left|\frac{x}{2}\right|$; On résout $\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \iff |x| < 2$

$\iff -2 < x < 2$



D'où $I_c =]-2, 2[$ et $R_c = 2$ □

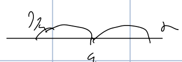
ex: Trouver I_c et R_c de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(3x-1)^n}{5^n}$

$a_n(x) = \frac{(n+2)(3x-1)}{5^n}$ $\qquad a_{n+1}(x) = \frac{(n+3)(3x-1)^{n+1}}{5^{n+1}}$

$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{(n+1)(3x-1)^{n+1}}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{(n+2)(3x-1)^n} = \frac{(n+3)(3x-1)}{5(n+2)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \left(\frac{3x-1}{5}\right)$

On converge $\left|\frac{3x-1}{5}\right| < 5 \Rightarrow |3x-1| < 5 \Rightarrow -5 < 3x-1 < 5$

$\Rightarrow -4 < 3x < 6$



$R_c = \frac{2-(-4/3)}{2}$ $\qquad \Rightarrow -4/3 < x < 2$ □

$a = 2 - \frac{10}{6}$ $\qquad R_c = \frac{10}{6}$ $\qquad I_c =]-4/3, 2[$ □

$= \frac{1}{3}$

$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ trouvez I_c et R_c

$a_n(x) = \frac{x^n}{n!}$

$a_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ $\quad \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{x\, n!}{(n+1)!} = \frac{x}{n+1}$ $\quad \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = 0$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$ $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = 0 < 1$

$I_c = \mathbb{R}$ et $R_c = \infty$

Soit la série

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $\quad a_n(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $\quad a_{n+1}(x) = \frac{x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ $\quad \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{x^{2n}} = \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}$

$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = 0$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$ on a $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| < 1$ D'où $I_c = \mathbb{R}$

et $R_c = \infty$

Série alternée

Déf : $S_n = \sum_{n=n_0}^{N} (-1)^n a_n$ avec $a_n \geq 0$ est dite série alternée ses termes change de signe

ou $\sum_{n=n_0} (-1)^{n+1} a_n$ avec $a_n \geq 0$

Série alterner Converge ssi

① $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Et

② a_n décroissante à partir d'un rang k De plus, $\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n - \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n+1} a_n \right| < a_{k+1}$

Soit f fonction infiniment dérivable, alors au voisinage de $x = a$

le polynome de Taylor de degré N est

$$T(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad \text{et} \quad T_\infty(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

On a $f(x) \approx T_n(x)$ $\quad f(x) = T_\infty(x)$

Soit $f(x) = (1+x)^{1/2}$

au voisinage de $a=0$ Donner $T_3(x)$

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k$$

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)x^3}{3!}$$

$$T_3(x) = 1 + x/2 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24}$$

$f(x) = (1+x)^{1/2} \Rightarrow f(0) = 1$

$\Rightarrow f'(x) = 1/2(1+x)^{-1/2} \Rightarrow f'(0) = 1/2$

$\Rightarrow f''(x) = (1/2)(-1/2)(1+x)^{-3/2} \Rightarrow f''(0) = \frac{-1}{4}$

$f'''(x) = (-1/4)(-3/2)(1+x)^{-5/2} \Rightarrow f'''(0) - 3/8$

$\sqrt{1.2} = \sqrt{1+0{,}2} = f(0{,}2) \simeq T_3(0{,}2)$

$\simeq 1 + \frac{0{,}2}{2} + \frac{(0{,}2)^2}{8} + \frac{(0{,}2)^3}{16}$

$\simeq 1{,}0955$

T_i $f(x) := \sqrt{1+x}$

taylor$(f(x), x, 3)$

$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$

ex: 6,3

$T_4(x) = 15 + 2x - 2x^2 + \frac{x^4}{8}$

$f(0) = 15$ $\frac{f^{4}(0)}{24} = 1/8$

$f'(0) = 2$

$\frac{f''(0)}{2} = -2$

$\frac{f^{(3)}}{6} = 0$

Par déf

$$T_4(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{4}(0)}{4!}(x-0)^4$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4$$

$f(0) = 15$ $f^{(3)}(0) = 0$

$f''(0) = 2$ $f^{(4)}(0) = 3$

Dévellappement en série

Donner le dévellappement en série de

$f(x) = \frac{x}{1-3x} \Rightarrow f(x) = x \cdot \frac{1}{1-3x}$ Or, $\frac{1}{1-3x} = \frac{1}{1-u}$ où $u = 3x$

et $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$

d'où $\frac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n$ Donc $x \frac{1}{1-3x} = x \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x x^n$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1}$

$I_c : u \in]-1,1[$ $\quad -1 < u < 1$

$-1 < 3x < 1$

$-1/3 < x < 1/3$

I_c de f est $]-1/3, 1/3[$

$R_c = 1/3 = \frac{\text{Largeur de } I_c}{2}$

ex

$g(x) = \frac{x^2}{4+5x}$? On a $g(x) = x^2 \left(\frac{1}{4+5x}\right)$

$= x^2 \left(\frac{1}{4(1+\frac{5}{4}x)}\right) = \frac{x^2}{4} \left(\frac{1}{1+\frac{5}{4}x}\right) = \frac{x^2}{4} \left(\frac{1}{1-\left(\frac{-5x}{4}\right)}\right)$

On $\frac{1}{1-\left(-\frac{5}{4}x\right)} = \frac{1}{1-u}$ ou $u = -\frac{5}{4}x$ $\quad = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-5}{4}\right)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^n} x^n$

$g(x) = \frac{x^2}{4} \left(\frac{1}{1-\left(\frac{-5}{4}x\right)}\right) = \frac{x^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+1}} x^{2+n}$

$-1 < u < 1$

$-1 < -\frac{5}{4}x < 1$

$\cdot 4 \big\{ -4 < 5x < 4$

$\div 5 \big\{ \frac{-4}{-5} > x > \frac{4}{-5}$

$\frac{4}{5} > x > -\frac{4}{5}$

$I_c =]-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}[$ $\quad R_c = \frac{4}{5}$

$h(x) = x^2 \ln(1-x)$ On a $\ln(1-x)$

On a $\ln(1+u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ $u = -x$

$\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1) \frac{x^{n+1}}{n+1} \Rightarrow x^2 \ln(1-x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1) \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1) x^{n+3}}{n+1}$

$T_4(x)$ de $h(x)$

$h(x) = \underbrace{-\frac{x^3}{1} - \frac{x^4}{2}} \cancel{- \frac{x^5}{3}}$ $u = -1$ $-1 < u < 1$

$-1 \left(\begin{array}{l} -1 < -x < 1 \\ 1 > x > 1_D \end{array} \right.$

Dans I_C

Pour $\int$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n(x)$$

Dans I_c si $f(x) = \sum a_n(x)$

on a $f'(x) = \sum a_n'(x)$

$f(x) = x^2 e^{-x^2}$ $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$

$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$ $\underline{\underline{I_c = \mathbb{R}}}$

d'où

$x^2 e^{-x^2} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n!}$ sur $\mathbb{R}$ $u = -x^2$

$\int_0^{0,4} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{0,4} x^{2n+2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^{0,4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(0,4)^{2n+3}}{2n+3}$

$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$ si $|r| < 1$

6.32

a) $10 + 5 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{2^k} = 15 + 5 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 15 + 5 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} - 5$

$= 10 + 5 \frac{1}{1 - 1/2}$

Somme de Reiman

à droite et à gauche $\quad$ D : G

$f : [a, b] \quad \int_a^b f$

Devellopement en série de $2x e^{x^2}$

$(2x e^{x^2}) = (e^{x^2})'$

Or $e^{x^2} = e^u$ avec $u = x^2$ $\quad$ Donc $e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!}$ $I_c = \mathbb{R}$

$(e^{x^2})' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2n}}{n!}\right)'$ $\qquad 2x e^{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \frac{x}{n!}$