A.5 Table des séries de base

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n = 1+u+u^2+u^3+u^4+u^5+\ldots \quad u \in]-1\,;1[$$

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} = 1+\frac{u}{1!}+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\frac{u^4}{4!}+\frac{u^5}{5!}+\ldots \quad u \in]-\infty\,;\infty[$$

$$\sin(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} = u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}-\frac{u^7}{7!}+\frac{u^9}{9!}-\ldots \quad u \in]-\infty\,;\infty[$$

$$\cos(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!} = 1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}-\frac{u^6}{6!}+\frac{u^8}{8!}-\ldots \quad u \in]-\infty\,;\infty[$$

$$\arctan(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{2n+1} = u-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}-\frac{u^7}{7}+\frac{u^9}{9}-\ldots \quad u \in [-1\,;1]$$

$$\ln(1+u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{n+1}}{n+1} = u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\frac{u^5}{5}-\ldots \quad u \in]-1\,;1]$$

$$\begin{aligned}(1+u)^k &= 1+\frac{k}{1!}u+\frac{k(k-1)}{2!}u^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}u^3\\ &\quad +\ldots+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)}{n!}u^n+\ldots \quad u \in]-1\,;1[\end{aligned}$$

Définition 4.8 Une **intégrale impropre de type II** est une intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ dont l'intégrande $f(x)$ possède au moins une discontinuité sur l'intervalle $[a;b]$ et présente une asymptote verticale à cet endroit.Elle est définie par une limite ou une somme de limites.

1. Si f est continue partout sur $[a;b]$ sauf en a, alors l'intégrale impropre est définie par la limite

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx\\ &= \int_{a^+}^b f(x)\,dx \qquad \text{(par abus de notation).}\end{aligned}$$

2. Si f est continue partout sur $[a;b]$ sauf en b, alors l'intégrale impropre est définie par la limite

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx\\ &= \int_a^{b^-} f(x)\,dx \qquad \text{(par abus de notation).}\end{aligned}$$

3. Si f est continue partout sur $[a;b]$ sauf en c (où $a<c<b$), alors l'intégrale impropre est définie par la somme d'intégrales impropres

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\\ &= \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\,dx + \lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)\,dx\\ &= \int_a^{c-} f(x)\,dx + \int_{c^+}^b f(x)\,dx \qquad \text{(par abus de notation).}\end{aligned}$$

L'intégrale impropre est dite convergente si la ou les limites qui la définissent existent (appartiennent à $\mathbb{R}$) et divergente dans le cas contraire.

Si l'intégrande $f(x)$ présente plusieurs asymptotes verticales sur l'intervalle $[a;b]$, on décompose l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ en une somme d'intégrales présentant chacune une seule asymptote verticale en une de leurs bornes d'intégration.

Test du rapport
Soit la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots$$

On calcule le rapport R entre deux termes successifs de la série lorsque $n\to\infty$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$$

et on en conclut que

1. $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge si $R<1$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge si $R>1$
3. on ne peut rien conclure si $R=1$.

Lorsque $R<1$, le test du rapport nous permet de déterminer l'intervalle de convergence d'une série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ où les termes u_n dépendent d'une variable x.

A.4 Table d'intégrales indéfinies

Notez que $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ désignent des variables, $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ désignent des fonctions, $\boldsymbol{a,b,c,n}$ et $\boldsymbol{C}$ désignent des constantes et $\boldsymbol{a > 0}$.

Règles d'intégration

1. $\int c f(u)\,du = c \int f(u)\,du$
2. $\int \big(f(u) + g(u)\big)\,du = \int f(u)\,du + \int g(u)\,du$
3. $\int \big(f(u) - g(u)\big)\,du = \int f(u)\,du - \int g(u)\,du$
4. $\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$ (la règle d'intégration par parties)

Formules d'intégration

1. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C,$ où $n \neq -1$
2. $\int \dfrac{1}{u}\,du = \ln(|u|) + C$
3. $\int e^u\,du = e^u + C$
4. $\int a^u\,du = \dfrac{1}{\ln(a)} a^u + C$ où $a > 0$ et $a \neq 1$
5. $\int \sin(u)\,du = -\cos(u) + C$
6. $\int \cos(u)\,du = \sin(u) + C$
7. $\int \sec^2(u)\,du = \tan(u) + C$
8. $\int \csc^2(u)\,du = -\cot(u) + C$
9. $\int \sec(u)\tan(u)\,du = \sec(u) + C$
10. $\int \csc(u)\cot(u)\,du = -\csc(u) + C$
11. $\int \tan(u)\,du = -\ln(|\cos(u)|) + C$
12. $\int \cot(u)\,du = \ln(|\sin(u)|) + C$
13. $\int \sec(u)\,du = \ln(|\sec(u) + \tan(u)|) + C$
14. $\int \csc(u)\,du = \ln(|\csc(u) - \cot(u)|) + C$
15. $\int \dfrac{1}{u^2+a^2}\,du = \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$
16. $\int \dfrac{1}{a^2-u^2}\,du = \dfrac{1}{2a}\ln\left(\left|\dfrac{u+a}{u-a}\right|\right) + C$
17. $\int \dfrac{1}{u^2-a^2}\,du = \dfrac{1}{2a}\ln\left(\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right|\right) + C$
18. $\int \dfrac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\,du = \ln\left(\sqrt{u^2+a^2} + u\right) + C$
19. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \arcsin\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$
20. $\int \dfrac{1}{\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \ln\left(\left|\sqrt{u^2-a^2} + u\right|\right) + C$

Formules particulières d'intégration

1a. $\int 1\,dx = x + C$

3a. $\int e^{bx}\,dx = \dfrac{e^{bx}}{b} + C$

5a. $\int \sin(bx)\,dx = -\dfrac{\cos(bx)}{b} + C$

6a. $\int \cos(bx)\,dx = \dfrac{\sin(bx)}{b} + C$

A.3 Règles et formules de dérivation

Règles de dérivation

Si ***c* est une constante** et si ***u* et *v* sont des fonctions** de x, alors on a les règles suivantes, où le symbole $'$ désigne la dérivée par rapport à x. Les notations suivantes sont équivalentes:

$$u' \equiv (u)' \equiv u'(x) \equiv (u(x))' \equiv \frac{d(u(x))}{dx} \equiv \frac{du}{dx}$$

1. $(c\,u)' = c\,u'$
2. $(u+v)' = u' + v'$
3. $(u-v)' = u' - v'$
4. $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$
6. $\Big(v\big(u(x)\big)\Big)' = v'\big(u(x)\big)\,u'(x) = v'(u)\;u'(x) = \frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

Formules de dérivation

Si ***u* est une fonction** de x et si ***c*, *n* et *a* sont des constantes**, avec $\boldsymbol{a > 0}$, alors les dérivées par rapport à x sont données par les formules suivantes.

1. $c' = 0$
2. $(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$
3. $(e^u)' = e^u\,u'$
4. $(a^u)' = \ln(a)\,a^u\,u'$
5. $(\ln(u))' = \frac{1}{u}\,u'$
6. $\big(\log_a(u)\big)' = \frac{1}{\ln(a)\,u}\,u'$
7. $(\sin(u))' = \cos(u)\,u'$
8. $(\cos(u))' = -\sin(u)\,u'$
9. $(\tan(u))' = \sec^2(u)\,u'$
10. $(\cot(u))' = -\csc^2(u)\,u'$
11. $(\sec(u))' = \sec(u)\tan(u)\,u'$
12. $(\csc(u))' = -\csc(u)\cot(u)\,u'$
13. $(\arcsin(u))' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,u'$
14. $(\arccos(u))' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\,u'$
15. $(\arctan(u))' = \frac{1}{1+u^2}\,u'$

Définition 4.7 Une **intégrale impropre de type I** est une intégrale dont au moins une des bornes d'intégration est infinie. Elle est définie par une limite ou une somme de limites.

1. Si une seule des bornes est infinie, l'intégrale impropre est définie par une limite de la façon suivante:
$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$
$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx.$$
2. Si les deux bornes d'intégration sont infinies, l'intégrale impropre est définie par une somme de deux intégrales impropres comportant chacune une seule borne infinie:
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^c f(x)\,dx + \lim_{t\to\infty}\int_c^t f(x)\,dx$$
où c désigne n'importe quel nombre réel.

L'intégrale impropre est dite convergente si la ou les limites qui la définissent existent (appartiennent à $\mathbb{R}$) et divergente dans le cas contraire.

Plusieurs formules ci-dessous possèdent des restrictions qui ont été omises afin de ne pas alourdir le texte.

Opérations élémentaires

$a(b+c) = ab + ac$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \quad \frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$ si $k \neq 0$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

$\frac{a/b}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc} \quad \frac{a}{b/c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$

Négatifs

$(-1)a = -a \quad -(-a) = a$

$(-a)b = -ab \quad a(-b) = -ab$

$(-a)(-b) = ab$

$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \quad \frac{-a}{-b} = -\frac{a}{-b} = -\frac{-a}{b} = \frac{a}{b}$

Exposants et radicaux

$a^m a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{mn} \quad (ab)^n = a^n b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \quad a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\sqrt{a^2} = |a|$

Produits remarquables

$A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$	carré parfait, somme
$A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$	carré parfait, différence
$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$	différence de carrés
$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$	somme de cubes
$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$	différence de cubes
$A^2 + B^2$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$	somme de carrés

Équations

$$A = B \Longleftrightarrow A + c = B + c$$

$$A = B \Longleftrightarrow A - c = B - c$$

$$A = B \Longleftrightarrow cA = cB \quad \text{si } c \neq 0$$

$$A = B \Longleftrightarrow \frac{A}{c} = \frac{B}{c} \quad \text{si } c \neq 0$$

Inéquations

$$A < B \Longleftrightarrow A + c < B + c$$

$$A < B \Longleftrightarrow A - c < B - c$$

$$A < B \Longleftrightarrow cA < cB \quad \text{si } c > 0$$

$$A < B \Longleftrightarrow \frac{A}{c} < \frac{B}{c} \quad \text{si } c > 0$$

$$A < B \Longleftrightarrow cA > cB \quad \text{si } c < 0$$

$$A < B \Longleftrightarrow \frac{A}{c} > \frac{B}{c} \quad \text{si } c < 0$$

Valeur absolue

$$|A| = a \Longleftrightarrow A = a \text{ ou } A = -a$$

$$|A| < a \Longleftrightarrow -a < A < a$$

$$|A| > a \Longleftrightarrow A > a \text{ ou } A < -a$$

Quadratique

$x^2 = c$ où c>0 $\Longleftrightarrow x = \sqrt{c}$ ou $x = -\sqrt{c}$

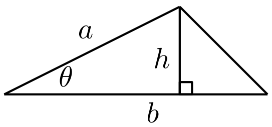
$$ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$b^2 - 4ac = 0$	une solution réelle
$b^2 - 4ac < 0$	aucune solution réelle
$b^2 - 4ac > 0$	deux solutions réelles

Formules de géométrie Aire A, circonférence C et volume V

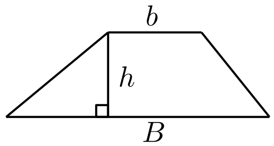
Triangle

$$A = \tfrac{1}{2}bh = \tfrac{1}{2}ab\sin\theta$$



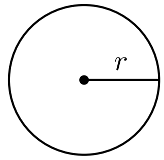
Trapèze

$$A = \tfrac{(b+B)h}{2}$$



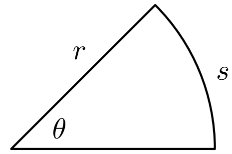
Cercle

$$A = \pi r^2$$
$$C = 2\pi r$$



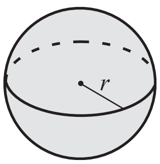
Secteur circulaire

$$A = \tfrac{1}{2}r^2\theta$$
$$s = r\theta \quad \text{où } \theta \text{ est en rad}$$



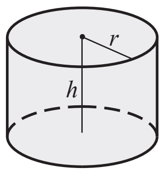
Sphère

$$A = 4\pi r^2$$
$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$



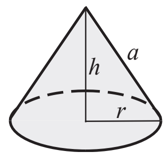
Cylindre droit

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$
$$V = \pi r^2 h$$



Cône

$$A = \pi r^2 + \pi ra$$
$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$



Géométrie dans le plan

On considère deux points $P_1\,(x_1; y_1)$ et $P_2\,(x_2; y_2)$

Distance entre P_1 et P_2 :

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Point milieu du segment $\overline{P_1P_2}$:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Pente de la droite passant par P_1 et P_2 :

$$a = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Équations d'une droite :

Forme **générale** d'une droite $Ax + By = C$

Forme **pente-ordonnée** d'une droite de pente a et d'ordonnée à l'origine b :

$$y = ax + b$$

Forme **pente-point** d'une droite de pente a passant par $P_0\,(x_0; y_0)$:

$$y - y_0 = a\,(x - x_0)$$

Équation canonique du cercle de rayon r, centré en $(h; k)$: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Plusieurs formules ci-dessous possèdent des restrictions qui ont été omises afin de ne pas alourdir le texte.

Quadratique et parabole

$x^2 = c$ où c>0 $\Longleftrightarrow x = \sqrt{c}$ ou $x = -\sqrt{c}$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$b^2 - 4ac = 0$	une solution réelle
$b^2 - 4ac < 0$	aucune solution réelle
$b^2 - 4ac > 0$	deux solutions réelles

Forme **générale :** $y = ax^2 + bx + c$

Forme **canonique :** $y = a(x-h)^2 + k$
où $(h;k)$ est le sommet de la parabole

Forme **factorisée :** $y = a(x - r_1)(x - r_2)$
où r_1 et r_2 sont les zéros de la quadratique

Exponentielles et logarithmes

Cas particuliers : $\log_{10} = \log(x)$ et $\log_e(x) = \ln(x)$

Équivalence : $b^y = x \Longleftrightarrow y = \log_b(x)$

$$a^x a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$
$$(a^x)^y = a^{xy} \qquad (ab)^x = a^x b^x$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

en base b :

$\log_b(1) = 0$ $\qquad \log_b(MN) = \log_b(M) + \log_b(N)$

$\log_b(b) = 1$ $\qquad \log_b\left(\frac{M}{N}\right) = \log_b(M) - \log_b(N)$

$b^{\log_b(x)} = x, x > 0$ $\qquad \log_b(M^p) = p\log_b(M)$

$\log_b(b^x) = x$ $\qquad \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

en base e :

$\ln(1) = 0$ $\qquad \ln(MN) = \ln(M) + \ln(N)$

$\ln(e) = 1$ $\qquad \ln\left(\frac{M}{N}\right) = \ln(M) - \ln(N)$

$e^{\ln(x)} = x, x > 0$ $\qquad \ln(M^p) = p\ln(M)$

$\ln(e^x) = x$ $\qquad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

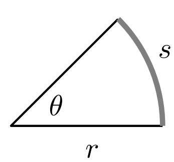
Trigonométrie

Mesure d'un angle

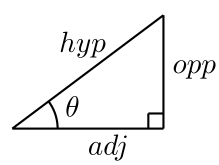
π rad $= 180°$

$1° = \frac{\pi}{180}$ rad et 1 rad $= \frac{180}{\pi}°$

$s = r\theta$ où θ est en radians



Triangle rectangle

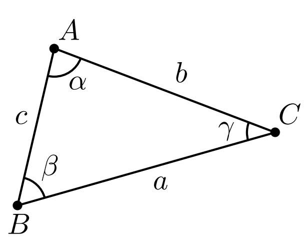


$\sin\theta = \frac{opp}{hyp}$

$\cos\theta = \frac{adj}{hyp}$

$\tan\theta = \frac{opp}{adj}$

Triangle quelconque



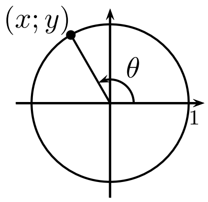
Loi des sinus

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

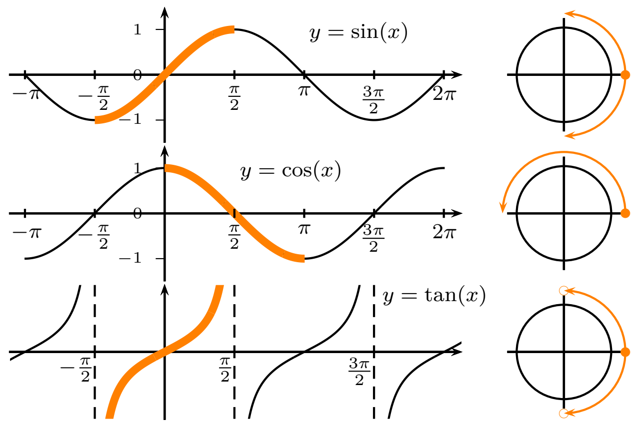
Loi des cosinus

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \end{aligned}$$

Fonctions trigonométriques



$$\sin(\theta) = y$$
$$\cos(\theta) = x$$
$$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

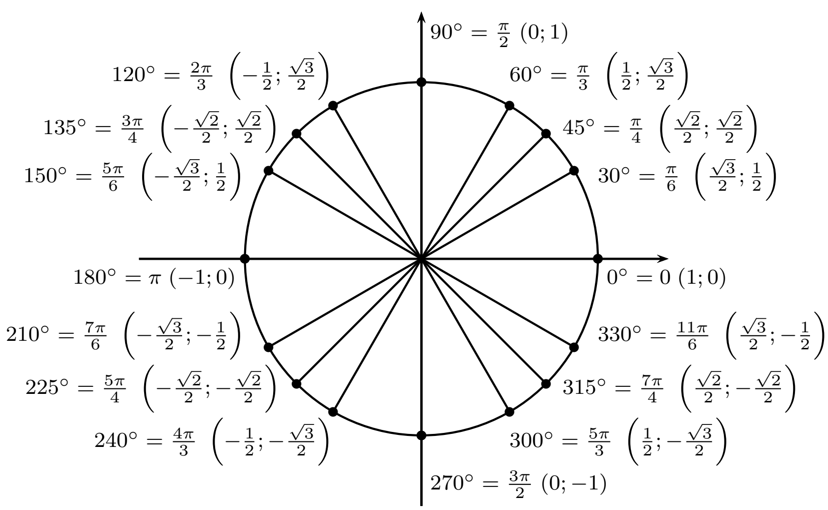


Quelques identités trigonométriques

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$
$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$
$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad 1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$
$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$
$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

Cercle trigonométrique $\quad x^2 + y^2 = 1$



Fonctions réciproques

$$y = \sin(x) \Leftrightarrow \arcsin(y) = x \qquad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } -1 \leq y \leq 1$$
$$y = \cos(x) \Leftrightarrow \arccos(y) = x \qquad 0 \leq x \leq \pi \text{ et } -1 \leq y \leq 1$$
$$y = \tan(x) \Leftrightarrow \arctan(y) = x \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{ et } -\infty < y < \infty$$