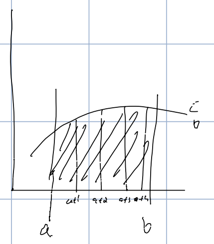


Calculons l'air entre la courbe C_f ; $\Delta : x = a$, $\Delta_2 : x = 6$ et l'axe $x'Ox$

On peut estimer cette surface en la subdivisant en petite rectangle

Somme à gauche G : La longueur des rectangle et déterminée par l'image de la fontion du côté gauche

Somme à droite D : La longueur du rectangle est déterminée par l'image de la fonction du côté droit

Si $\Delta x \to 0$ on aura $G \simeq D$ = surface

$D : [f(a+1)\cdot 1) + (f(a+2)\cdot 1) + (f(a+3)\cdot 1) + (f(a+4)\cdot 1) + (f(6)\cdot 1)$

$G = (f(a)\cdot 1) + [f(a+1)\cdot 1) + (f(a+2)\cdot 1) + (f(a+3)\cdot 1) + (f(a+4)\cdot 1)$

n : nb partitions

$\Delta x = \frac{6-a}{n}$

$x_0 = a$

$x_i = a + i\,\frac{(6-a)}{n} > 0$

$x_n = a + n\,\frac{6-a}{n} = 6$

$$G = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(6-a)}{n} \cdot f\left(a + i\,\frac{(6-a)}{n}\right)$$

$$D = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{6-a}{n}\right) \cdot f\left(a + i\,\frac{6-a}{n}\right)$$

Ex : $f(x) = x^2$ $a = 1$ $b = 3$
G D
lorsque $n = 10$

ti
$f(x) := x^2$

$G(n) := \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2}{n} \cdot f\left(1 + i \cdot \frac{2}{n}\right)\right)$

$d(n) := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{n} \cdot f\left(1 + i \cdot \frac{2}{n}\right)\right)$

$g(10)$ $\frac{147}{25}$

$d(10)$ $\frac{197}{25}$

$\int_1^3 x^2\,dx$ $8,\overline{66}$: vrai valeur

Relation de chasles :

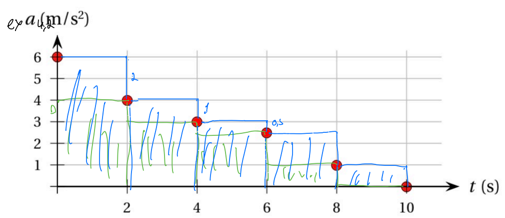
$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

$\int_a^a f(x)\,dx = 0$, car $\Delta x = 0$

$\vec{AB} = -\vec{BA}$

$\int_a^6 f(x)\,dx = -\int_6^a f(x)\,dx$



Théorème 4.1 Si f et g sont des fontions continues sur l'intervalle I contenant a, b et c, alors

1. $\displaystyle\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ où $k \in \mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$
4. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
5. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) + g(x))\,dx$

Ces propriétés découlent directement de la définition d'intégrale définie. Leur démonstration est laissée au lecteur.

$D_s = 2 \cdot \overset{\text{image}}{4} + \overset{\text{Largeur}}{2} \cdot \overset{\text{image}}{3} + 2 \cdot 2{,}5 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0$

$G_s = 2\cdot 6 + 2\cdot 4 + 2\cdot 3 + 2{,}5 + 2\cdot 1$

L'intégrale

$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} D_n$

$= \lim_{n\to\infty} G_n$

C'est algébrique : si la courbe est au dessus de l'axe Ox

$\int_a^b f\,dx > 0$

si la courbe est au dessous de l'axe Ox

$\int_a^b f\,dx < 0$

unité $\int_a^b f(t) = \lim_{n \to \infty} D_n = \sum_{i=1}^{n} \underset{\text{unité}}{h}\, f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right)$

ex :

$\int_4^{20} \underset{\text{intens}}{P(t)}\, \underset{\text{temps}}{dt}$

ex :

$Q(t) = $ débit L/min

t : no minute

$\int_{30}^{180} \underset{L/\min}{Q(t)}\, \underset{\min \Rightarrow L}{dt} =$ en L

fonction	Primitif	Primitives
x	$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$	$\frac{x^2}{2} + C$

Soit F et G sont deux primitif de f alors $F = G + C$

On a si F est une primitive de f sur $]a, b[$
alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Soit $f(t)$ une fonction continue
sur $]a, \infty[$

alors $\int_a^x f(t)\,dt = g(x)$

C'est une primitive de f qui vérifie $g(a) = 0$

ex :
soit $f(t) = t^3$

$\int_1^x f(t)\,dt = g(x)$

qui vérifie $g(1) = 0 = \int_1^1 f(t)\,dt$

et $g'(x) = f(x) = x^3$

$g(x) = \int_1^x t^3\,dt = \left[\frac{t^4}{4}\right]_1^x = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}$

ex

$\int_2^{10} x\,dx$

$\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^{10} = \frac{1}{2}\left(10^2 - 2^2\right)$ □

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

$[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0$

$1 - 0$
$= 1$ □

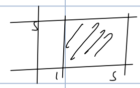
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx$

$\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[\sin \pi - \sin 0\right]$

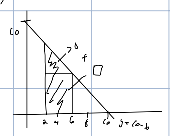
$= 0$ □ autant dessus que dessous

4,11

a)



b)



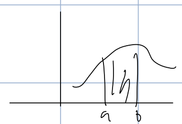
ex $\int_1^2 \sqrt{x}\,dx$

$= \int_1^2 x^{1/2}\,dx$

$\left[\frac{x^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_1^2 = \frac{2x^{3/2}}{3}$

$= \frac{2}{3}\left(2^{3/2} - 1\right) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{8} - 1\right)$ □

$f_{moy} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,dx$



On cherche un rectangle
de dimension $(b-a)$ et f_{moy}
tel que sa surface = surface hachurée

Exercise

4,1

a) $a = -5 \quad b = 10 \quad n = 5$

ona $\frac{b-a}{n} \quad \frac{10--5}{5} = 3$, le pas

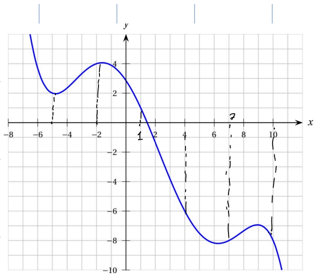
n	x_i	$f(x_i)$
0	-5	2
1	-2	4
2	1	1
3	4	-6
4	7	-8
5	10	-8

$G5 = \sum_{i=0}^{4} f(x_i)\Delta x$

ona $\Delta x = 3$

donc $G_5 = (2+4+1-6-8)\cdot 3$

$= -21$



$Gn = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$

$Dn = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

par $DS = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

$= (4+1-8-8)\cdot 3$

$= -51$

$x_i = x_0 + i\cdot\Delta x$

(ou $x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$

b) on a $21 \leq V(10) - V(0) \leq 33$

c) si $V(0) = 20$ m/s

on a $21 \leq V(10) - V(0) \leq 33$

4,5 $G(n) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(f\left(a+i\,\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}\right)$

$D(n) = \sum_{i=1}^{n}\left(f\left(a+i\,\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}\right)$

d) $\lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} D(n) = 42.6667$ (aire)

4,2

$a = 0,\ b = 10,\ n = 5 \quad \frac{b-a}{n} = \frac{10-0}{5} = 2$

n	x_i	$f(x_i)$
0	0	6
1	2	4
2	4	3
3	6	2,5
4	8	1
5	10	0

$G_5 = \sum_{i=0}^{4} f(x_i)\Delta x$

$\Delta x = 2$

$G5 = (6+4+3+2{,}5+1)\cdot 2 = 33$

$D5 = \sum_{i=1}^{5} f(x_i)\Delta x$

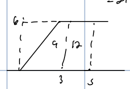
$= (4+3+2{,}5+1+0)\cdot 2 = 21$

4,8

$x(5) - x(0) = \int_0^5 V(t)\,dt$

$= \frac{3\cdot 6}{2} + (5-3)\cdot 6$

$= 21$



$x(9) - x(0) = \int_0^9 V(t)\,dt = 9+12+6-1{,}5-3 = 22{,}5$

c) $a(t) = v'(t)$

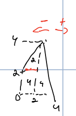
$a(2) = 2$

$a(4) = 0$

$a(6) = -3$

d) $\underbrace{x(t^*) - x(0)}_{=0} = \int_0^{t^*} v(t)\,dt$

4,9



e) $\int_4^6 f(x)\,dx = -\int_0^4 f(x)\,dx$

$= -10$

4,10

$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c = \int_a^c f(x)\,dx$

c) $\int_0^{10} f(x)\,dx + \int_{10}^{5} f(x)\,dx = \int_0^5 f(x)\,dx$

b) $\int^{10}$

J8

4,16

a) $\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln(x)\Big]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$

b) $\int_0^\pi \sin(x)dx = -\cos(x)\Big]_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = 2$

4,17 $v_{moy} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

a) $v_{moy} = \frac{1}{2-1}(\ln 2) = \ln(2)$

b) $v_{moy} = \frac{1}{\pi-0}(2) = \frac{2}{\pi}$

4,18

a) $\int 8dx = 8x + c$

e) $\int (2x^3 - 4x + 9)dx = 2\cdot\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^2}{2} + 9\frac{x}{1} + c$

$= \frac{x^4}{2} - 2x^2 + 9x + c$

c) $\int (e^x - \cos(x))dx = e^x - \sin(x) + c$

i) $\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{1/3}dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{x^{4/3}}{4/3} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$

4,19

a) $\int_2^6 e^x dx = e^x\Big]_2^6$

$= e^6 - e^2$

c) $\int_0^4 (3x^2 + 2x - 2)dx = 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 2x\Big]_0^4$

$= x^3 + x^2 - 2x\Big]_0^4$

$= 72$

d) $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^9 x^{-1/2}dx = \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1}\Big]_1^9 = 2\sqrt{x}\Big]_1^9$

$= 2(\sqrt{9} - \sqrt{1}) = 4$

e) $\int_0^{2\pi} \sin(x)dx = -\cos(x)\Big]_0^{2\pi}$

$= -(\cos 2\pi - \cos(0))$

$= 0$

4,20

b) $f'(x) = 2x + 5 \Rightarrow f(x) = \int f'(x)dx$

$= 2\cdot\frac{x^2}{2} + 5x + c$

$= x^2 + 5x + c$

avec $f(2) = 10 \Rightarrow (2)^2 + 5(2) + c = 10$

$c = 4$

d'ou $f(x) = x^2 - 5x - 10$

4,19

d) $f''(x) = -\sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x) + c_1$

on a $f'(0) = 6$ donc $\cos(0) + c_1 = 6$

d'ou $c_1 = 5$

On a $f'(x) = \cos(x) + 5 \Rightarrow f(x) = \sin x + 5x + c_2$

On a $f(0) = 3 \Rightarrow \sin(0) + 5(0) + c_2 = 3$

$\Rightarrow c_2 = 3$

d'ou $f(x) = \sin x + 5x + 3$

f)

$f''(x) = 36x^2,\ f(0) = 2,\ f(1) = 10$

$f''(x) = 36x^2 \Rightarrow f'(x) = 36\cdot\frac{x^3}{3} + c_1$

$\Rightarrow f'(x) = 12x^3 + c_1$

$f'(x) = 12x^3 + c_1 \Rightarrow f(x) = 12\frac{x^4}{4} + c_1x + c_2$

$\Rightarrow f(x) = 3x^4 + c_1x + c_2$

On a $\begin{cases} f(0)=2 \\ f(1)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2=2 \\ 3+c_1+c_2=6 \end{cases} \Leftrightarrow c_1=5,\ c_2=2$

D'où $f(x) = 3x^4 + 5x + 2$