Question 1: (P8)为保证设备的正常运行，必须配备一定数量的维修人员。现有同类设备180台，且各台工作相互独立，任意时刻发生故障的概率都是0.01，假设一台设备的故障需一人进行修理，问

1)至少应配备多少名修理工人，才能保证设备发生故障后能得到及时维修的概率不小于0.99?

2)比较以下两个方案的优劣：一是由3人共同维修180台，二是4人，每人承包45台维修。

将机器损坏视为一个伯努利实验，则180台机器可以视为一个n=180，p=0.01的多重伯努利概型，以X表示同时损坏的机器数，则

X B(180,0.01) 可以使用泊松近似(np=1.8)

(1) 假设需要a名工人，即找出最小a值满足

$$P(X \le a) \ge 0.99$$

即

$$P(X \ge a+1) \le 0.01$$

查表可知$P(X \ge 6) > 0.01$, $P(X \ge 7) < 0.01$ 因此$a+1=7$

$a=6$

(2) 三人同时维修出现无法维修的概率为

$$P(X \ge 4) \simeq 0.11$$

一人承修45台，机器损坏的个数可以使用泊松近似(np=0.45)

$$\begin{aligned} P(X \ge 2) &= 1 - P(X=0) - P(X=1) \\ &= 1 - 0.99^{45} - \frac{0.45}{1!}e^{-0.45} \\ &\simeq 0.077 \end{aligned}$$

4人出现无法维修的概率为

$$P = 1 - (1-0.077)^4 \simeq= 0.27$$

因此3人维修的效率更高

Question 2: (P12) 设随机变量X服从泊松分布，且已知$P(X = 1) = P(x = 2)$， 求$P(X = 4)$?

$P(x=1)=\lambda e^{-\lambda}$ $\qquad$ $P(x=2)=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$

$\because p(x=1)=p(x=2)$

$\therefore \lambda=2$

$P(x=4)=\frac{2}{3}e^{-2}$

Question 3: （P13）若每条蚕的产卵数服从参数为λ 的泊松分布，而每个卵变成虫的概率为p，且各卵是否变成虫相互独立。求每蚕养活k个小蚕的概率。

设产卵数为X

$$P(X=n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$$

设存活数为Y

$$P(Y=k|X=n)=\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)p^k(1-p)^{n-k}$$

根据全概率公式

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)p^k(1-p)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda}(\lambda p)^k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-k}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)(1-p)^{n-k}}{n!} \\
&= e^{-\lambda}(\lambda p)^k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-k}(1-p)^{n-k}}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!}
\end{aligned}$$

令$\lambda(1-p)=a, n-k=m$ 则$a>0, m\geq 0$

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{a^m}{m!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}e^m \\
&= \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}e^{\lambda(1-p)} \\
&= \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Question 4: (P15)设连续型随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} a+be^{-x^2/2}, & x\geq 0 \\ 0, x<0 \end{cases}$$

（1）求常数a和b；　（2）求随机变量X的概率密度函数.

(1)因为X为连续型随机变量

$$\begin{aligned} & F(0)=F(0-0) \\ \Rightarrow\quad & a+b=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to+\infty} F(x)=1 \\ \Rightarrow\quad & a=1 \\ \Rightarrow\quad & b=-1 \end{aligned}$$

条件写全

(2)

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ xe^{-\frac{x^2}{2}} & x\geq 0 \end{cases}$$

Question 5: (P16)已知随机变量X的概率密度函数$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, -\infty < x < \infty$，求$X$的分布函数。

1. $x \le 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$
$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{t}dt$$
$$= \frac{1}{2}e^{t}\Big|_{-\infty}^{x}$$
$$= \frac{1}{2}e^{x}$$

2. $x > 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt$$
$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{t}dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}e^{-t}dt$$
$$= \frac{1}{2}e^{t}\Big|_{-\infty}^{0} + (-1)*\frac{1}{2}e^{-t}\Big|_{0}^{x}$$
$$= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$\therefore \quad F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & x \le 0 \\ 1-\frac{1}{2}e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

Question 6: (P19)某型号的飞机雷达发射管的寿命X（单位：h）服从参数为$\frac{1}{200}$的指数分布，求下列事件的概率，（1）发射管的寿命不超过100h；（2）发射管的寿命超过300h.

分布函数为

$$F(X) = 1 - e^{-\frac{X}{200}}$$

(1)

$$P = F(100) = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$$

(2)

$$P = 1 - F(300) = e^{-\frac{3}{2}}$$

Question 7: (P21)假设设备开机后无故障工作的时间T 服从参数为λ 的指数分布，若设备在2h内出现故障就自动关机；在无故障的情况下，工作到2h关机。求该设备每次开机后无故障工作时间X的分布函数？

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1-e^{-\lambda x} & 0\le x<2 \\ 1 & x\ge 2 \end{cases}$$