概统 Assignment 7 & 8 答案

李屹

2022 年 11 月 9 日

A7Q1.

1.

$$f_X(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x 24y(1-x)\,\mathrm{d}y = 12x^2(1-x) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_y^1 24y(1-x)\,\mathrm{d}x = 12y(y-1)^2 & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{2y}{x^2} & 0 \le y \le x \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (0 < x < 1)$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{2(1-x)}{(y-1)^2} & y \le x \le 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (0 < y < 1)$$

2.

$$f_X(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{1}{2x^2y}\,\mathrm{d}y=\frac{\ln x}{x^2} & x>1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\displaystyle\int_{y}^{\infty}\frac{1}{2x^2y}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2y^2} & y\geq 1\\ \displaystyle\int_{\frac{1}{y}}^{\infty}\frac{1}{2x^2y}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2} & 0<y<1\\ 0 & y\leq 0\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2y\ln x} & \dfrac{1}{x}<y<x\\ 0 & \text{else}\end{cases}\quad (x>1)$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\begin{cases}\dfrac{y}{x^2} & x>y\\ 0 & x\leq y\end{cases} & y\geq 1\\ \begin{cases}\dfrac{1}{x^2y} & x>\dfrac{1}{y}\\ 0 & x\leq\dfrac{1}{y}\end{cases} & 0<y<1\end{cases}$$

■

A7Q2.

1.

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}} & 0<x<1\text{且}y>0\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

2. 有实根的条件是 $\Delta=\sqrt{4X^2-4Y}\geq 0\Rightarrow X^2\geq Y$，积分区域如图 2中阴影所示

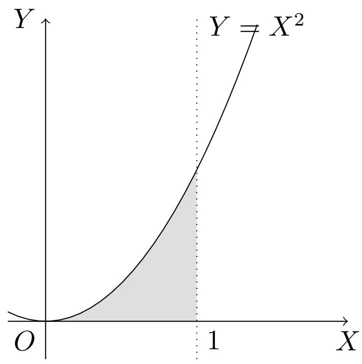

图 1: Question4.2

$$
\begin{aligned}
&P(a\ \text{有实根}) \\
=&\int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
=&\int_0^1 (1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}})\,\mathrm{d}x \\
=&1-\sqrt{2\pi}(\Phi(1)-0.5) \\
\approx&0.144
\end{aligned}
$$

■

A7Q3.

按定义，$f(x,y)=\begin{cases}\lambda & (x,y)\in \mathrm{D} \\ 0 & \text{else}\end{cases}$，由 $\int_1^{\mathrm{e}^2}\int_0^{\frac{1}{x}}\lambda\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=2\lambda=1$ 得 $\lambda=\frac{1}{2}$，故 $f_X(x)=\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2x}$，$f_X(2)=\frac{1}{4}$. ■

A7Q4.

1. $f(x,y)=\begin{cases}0.25\mathrm{e}^{-0.5(x+y)} & x\geq 0\wedge y\geq 0 \\ 0 & \text{else}\end{cases}$,显然 $f(x,y)$ 可写为 $g(x)h(y)$ 的形式，设 $\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\,\mathrm{d}x=a$，$\int_{-\infty}^{\infty}h(y)\,\mathrm{d}y=b$，由概率密度函数和边缘密度函数的定义易得 $f_X(x)=\frac{g(x)}{a}$，$f_Y(y)=\frac{h(y)}{b}$ 且 $ab=1$，故 X、Y 互相独立。

2. $P(X>0.1\wedge Y>0.1)=F(+\infty,+\infty)-F(+\infty,0.1)-F(0.1,+\infty)+$

$F(0.1, 0.1) = \mathrm{e}^{-0.1} \approx 0.9048$

■

A7Q5.

1. 由题意可知 $P(X_1 \neq 0 \wedge X_2 \neq 0) = 0$ 即 $P(X_1 = -1, X_2 = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = 0$，剩余部分由边缘分布计算即可，最后得到联合分布如表 2所示。

$P(X_1, X_2)$ \ X_2 \ X_1	-1	0	1	$P(X_2)$
0	0.25	0	0.25	0.5
1	0	0.5	0	0.5
$P(X_1)$	0.25	0.5	0.25	1

表 1: Question7

2. 边缘分布里没有 0，但是联合分布里有 0，显然不独立。

■

A7Q6.

1. $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \lambda\mu \mathrm{e}^{-(\lambda x+\mu y)} & x > 0 \text{且} y > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

2. $P(X > Y) = \int_0^\infty \int_0^x \lambda\mu \mathrm{e}^{-(\lambda x+\mu y)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$，故

$$Z \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{pmatrix}, \quad F(Z \le z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 \le z < 1 \\ 1 & z \ge 1 \end{cases}$$

■

A7Q7. 神秘失踪了 ■

A7Q8.

	0	1	2	3
U	0	0.12	0.37	0.51
V	0.4	0.44	0.16	0

表 2: Question1

见表 2。■

A8Q1.

$$f_Z(z)=\int_{z-\pi}^{z+\pi}\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\left[\Phi(\frac{z-\mu+\pi}{\sigma})-\Phi(\frac{z-\mu-\pi}{\sigma})\right]$$

■

A8Q2.

$$f_S(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x,\frac{s}{x})}{|x|}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln 2 & 0\le s\le 1\\ \int_s^2\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln 2-\ln s & 1<s<2\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

■

A8Q3.

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x,(z-x)/2)}{2}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^z\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}x=z\mathrm{e}^{-z} & z>0\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}f_Z(z)\,\mathrm{d}z=\begin{cases}1-(z+1)\mathrm{e}^{-z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

■

A8Q4.

设 $Z = \dfrac{X}{Y}$，

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|y|}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(z^2+1)y^2} \,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi(z^2+1)}$$

■

A8Q5.

只是想尝试一下不同的做法，传统做法请参考书本例 3.7.3

由连续型随机变量的性质，对于任意的 $i \neq j$，$P(X_i = X_j) = 0$，因此不妨设 $\{X_i\}$ 互不相同。设 Y_i 表示 $\{X_i\}$ 从大到小排序后第 i 大的数，对于 1 到 n 的一个排列 p，记 $C(p)$ 表示条件"$\{X_i\}$ 中第 i 大的数在第 $p(i)$ 位"，显然 $C(p)$ 互不相交，且 $\{X_i\}$ 在 $C(p)$ 指定的区域内与 $\{Y_i\}$ 有双射，直接计算可得每个区域内成立 $\left|\dfrac{\partial(\{Y_i\})}{\partial(\{X_i\})}\right| = 1$。因此，$\{Y_i\}$ 的联合概率密度函数

$$f^*(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{cases} \sum\limits_p f(y_{p(1)}, .., y_{p(n)}) = \dfrac{n!}{\theta^n} & \theta \geq y_1 > \cdots > y_n \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

上式应该也可以通过考虑意义得到。所求 M 概率密度即为

$$f^*(y_1) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{y_1} \mathrm{d}y_2 \cdots \int_0^{y_{n-1}} \mathrm{d}y_n \frac{n!}{\theta^n} = \frac{ny_1^{n-1}}{\theta^n} & 0 < y_1 \leq \theta \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

所求 N 概率密度即为

$$f^*(y_n) = \begin{cases} \displaystyle\int_{y_n}^{\theta} \mathrm{d}y_{n-1} \cdots \int_{y_2}^{\theta} \mathrm{d}y_1 \frac{n!}{\theta^n} = \frac{n(\theta - y_n)^{n-1}}{\theta^n} & 0 \leq y_n < \theta \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

■

A8Q6.

不妨设灯泡的损坏是独立事件，设 4 个灯泡在时刻 t 之前全部没有损坏的概率为 $p(t)$ 且 $0 < p(t) < 1$，则 24 个灯泡在时刻 t 之前全部没有损坏的概率为 $p(t)^6 < p(t)$，因此在每个时刻所有灯泡都还没有损坏的概率都下降，感觉上更容易坏了。■

A8Q7.

由连续型随机变量的性质,对于任意的 $i \neq j$,$P(X_i = X_j) = 0$,因此不妨设 $\{X_i\}$ 互不相同。$\{X_i\}$ 独立同分布,由对称性知 $P\left(\max\limits_{1\leq i\leq n} X_i = X_j\right)$ 对所有 $1 \leq j \leq n$ 为定值,且对所有 j 的和为 1,即 $P\left(X_n > \max\{X_1, ..., X_{n-1}\}\right) = P\left(\max\limits_{1\leq i\leq n} X_i = X_n\right) = \dfrac{1}{n}$。 ■

A8Q8.

1. $x = uv$,$y = u(1-v)$,在 $x > 0$,$y > 0$ 时,可得 $u > 0$,$0 < v < 1$,且两者间存在双射,故

$$f^*(u,v) = f(x)f(y)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{cases} u\mathrm{e}^{-u} & u > 0,\ 0 < v < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

.

2. 可以直接验证 $f^*_U(u) = \begin{cases} u\mathrm{e}^{-u} & u > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$,$f^*_V(v) = \begin{cases} 1 & 0 < v < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$,且成立 $f^*(u,v) = f^*_U(u)f^*_V(v)$,显然独立。

■