2020 计算机学院概率论与数理统计–期中考试

1 填空题（每题各 4 分，共 40 分）

1. 设 A, B 为两个随机事件, 已知 $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.4$, 求 $P(AB)$ 的最大值为 $\underline{0.4}$

2. 把 n 个 “0” 和 m 个 “1” $(m \leq n+1)$ 随机的排列, 没有两个 “1” 连在一起的概率为 $\underline{\binom{n+1}{m}/\binom{m+n}{m}}$

3. 设 A, B 为两个随机事件, 已知 $P(A) = P(B) = 1/3$, $P(A|B) = 1/6$, 则 $P(\bar{A}|\bar{B}) = \underline{7/12}$

4. 进行重复独立试验, 设每次试验成功的概率为 p $(0 < p < 1)$, 将试验进行到出现 r 次成功为止, 以 X 表示所需的试验次数, 则 X 的分布律为 $\underline{p(x=k) = \binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}, k = r, r+1, r+2...}$

5. 设随机变量 X 服从 (0,1) 上的均匀分布则 $Y = -2lnX$ 的概率密度函数为 $\underline{f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y/2} & y > 0 \\ 0 & else \end{cases}}$

6. 已知随机变量 $X \sim N(3,3)$, Y 服从标准正态分布, 且 X, Y 相互独立, 令 $Z = 2X - 3Y$, 则随机变量 Z 的概率密度函数的峰值是 $\underline{1/\sqrt{42\pi}}$

7. 设 X 和 Y 为两个随机变量, 且 $P(X \geq 0, Y \geq 0) = 2/7, P(X \geq 0) = P(Y \geq 0) = 3/7$, 则 $P(max\{X,Y\} \geq 0) = \underline{4/7}$

8. 已知随机变量 X 服从参数 $\mu = 3$ 的正态分布, $P(3 < X \leq 5) = 0.3$, 若随机变量 Y 表示对 X 的三次独立观察中事件 $(X < 1)$ 出现的次数, 则 $P(Y = 1) = \underline{0.384}$

9. 盒子里装有 3 个黑球、2 个红球、2 个白球, 从中任取 4 个, 以 X 表示取到黑球的个数, 以 Y 表示取到红球的个数, 则 P(X=Y)= $\underline{9/35}$

10. 设随机变量 X 服从 $B(5, 0.1)$ 的二项分布，Y 服从 $B(8, 0.1)$ 的二项分布，则 $X + Y = 4$ 的概率是 $\underline{\binom{13}{4}0.1^4 * 0.9^9}$

2 解答题

1.（8 分）解：记得分为 X，有输球为事件 A，计算出线概率 $P(X >= 4)$，则 X 可取 4，5，6，7，9。
$P(X=4)=\frac{1}{2}C_3^1 \times \frac{1}{3}C_2^1 \times \frac{1}{6}C_1^1 = \frac{1}{6}$
$P(X=5)=\frac{1}{2}C_3^1 \times \frac{1}{3}C_2^2 = \frac{1}{6}$
$P(X=6)\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}C_3^2 \times \frac{1}{6}C_1^1 = \frac{1}{8}$
$P(X=7)=\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}C_3^2 \times \frac{1}{3}C_1^1 = \frac{1}{4}$
$P(X=9)=\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
$P(X >= 4) = \frac{5}{6}$
$P(X >= 4 \ and \ A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}$
$P(A|X >= 4) = \frac{7}{20}$

2.（8 分）解：事件 A_k 为药效显著、药效一般，无效 $(k=1,2,3)$，事件 B 为一年患两次感冒

$$\begin{aligned}
P(A_1|B) =& \frac{P(A_1) * P(B|A_1)}{\sum_{k=1}^{3} P(A_k) * P(B|A_k)} \\
=& \frac{0.22 * \frac{1}{2}e^-1}{0.22 * \frac{1}{2}e^{-1} + 0.37 * \frac{2}{9}e^{-3} + 0.41 * \frac{16}{2}e^{-4}} \\
=& \frac{22e^3}{22e^3 + 333e + 656} \\
=& 0.2206
\end{aligned}$$

3. (1) $\iint_{0\le x\le y\le 1} kxy = 1 \Rightarrow \int_0^1 dx \int_x^1 kxy\,dy = 1 \Rightarrow k = 8$

(2) ① 当 x 或 $y \le 0$ 时 $F(x,y) = 0$

② 当 $x, y \ge 1$ 时 $F(x,y) = 1$

③ 当 $0<x<1,\ y>1$ 时 $F(x,y) = \int_0^x du \int_u^1 8uv\,dv = 2x^2 - x^4$

④ 当 ~~$0<x<1$~~ ~~$x<y$~~ $y \le x$ $0<y<1$ 时 $F(x,y) = \int_0^y dv \int_0^1 8uv\,du = 4y^4$

⑤ 当 $0<x\le y\le 1$ 时 $F(x,y) = \int_0^x du \int_u^y 8uv\,dv = 2x^2y^2 - x^4$

(3) $P(X+Y\ge 1) = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{1-y}^y 8xy\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 8y(y-\frac{1}{2})dy = \frac{5}{6}$

(4) $P(X=Y) = 0$

(5) 当 $0\le x\le 1$ 时 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 8xy\,dy = \int_x^1 8xy\,dy = 4x - 4x^3$

当 $x<0$ 或 $x>1$ 时 $f_X(x) = 0$

$\therefore f_X(x) = \begin{cases} 4x - 4x^3, & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

当 $0\le y\le 1$ 时 $f_Y(y) = f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} 8xy\,dx = \int_0^y 8xy\,dx = 4y^3$.

当 $y<0$ 或 $y>1$ 时 $f_Y(y) = 0$

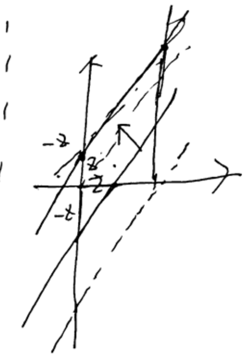
$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} 4y^3 & 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

$f_X(x) f_Y(y) \ne f(x,y)$ 因此不独立.

4. $f_X(x) = 1 \quad x \in [0,1]$ $\quad f_Y(y) = e^{-y} \quad y \in [0, +\infty)$

$$\Rightarrow f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & x \in [0,1],\ y \in [0,+\infty) \\ 0 & else. \end{cases}$$

1) 设 $Z = 2X - Y$ $\quad F_Z(z') = \iint_{2x-y \le z'} f(x,y)\,dx\,dy$



①当 $-z$ 小于2时 即 $z > 2$ 时 $F(z) = 1$.

当 $z \le 0$ 时 $F_Z(z) = \int_0^1 dx \int_{2x-z}^{2x-z} e^{-y}\,dy$

$= 1 - \frac{1}{2}e^{z-2} + \frac{1}{2}e^{z} = 1 + \frac{1}{2}e^{z}(1 - e^{-2})$

当 $0 < z \le 2$ 时.

② 当 $z' \le 0$ 时 $F_Z(z') = \int_0^1 dx \int_{2x-z'}^{+\infty} e^{-y}\,dy$

$= \frac{1}{2}e^{z'}(1 - e^{-2})$

③ 当 $0 < z' \le 2$ 时. $F_Z(z') = \int_0^{+\infty} dy \int_0^{\frac{z'}{2}} e^{-y}\,dx + \int_{\frac{z'}{2}}^1 dx \int_{2x-z'}^{+\infty} e^{-y}\,dy$.

$= \frac{z'}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - e^{z'-2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{z'-2} + z'\right)$

$$\Rightarrow f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - e^{-2})e^{z}, & z \le 0 \\ \frac{1}{2}(1 - e^{z-2}) & 0 < z \le 2 \\ 0 & z > 2 \end{cases}$$

2) 设 $Z = \frac{X}{Y}$. $F_Z(z') = \iint_{\frac{x}{y} \le z'} f(x,y)\,dx\,dy$

当 $z' \le 0$ $F_Z(z') = 0$

当 $z' > 0$ 时 $F_Z(z') = \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{z'}}^{+\infty} e^{-y}\,dy = \int_0^1 e^{-\frac{x}{z'}}\,dx = z' - z' e^{-\frac{1}{z}}$

$$\Rightarrow f(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{z}}\left(1 + \frac{1}{z}\right) & z > 0. \end{cases}$$

5\. 1) 当 $x,y>0$ 时 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dy=\int_0^{x} 6e^{-2x-3y}\,dy=2e^{-2x}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx=\int_0^{y} 6e^{-2x-3y}\,dx=3e^{-3y}$

$\Rightarrow f(x,y)=f_Y(y)f_X(x)$ X, Y 相互独立，且服从参数为2、3的指数分布。因此 $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-2x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ $F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-3y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

$Z=\max(X,Y)$

① 当 $z\le 0$ 时 $F_Z(z)=0$

② 当 $z>0$ 时 $P(\max(X,Y)\le z)=F_X(z)F_Y(z)$

$=(1-e^{-2z})(1-e^{-3z})$

$$\Rightarrow F_Z(z)=\begin{cases}(1-e^{-2z})(1-e^{-3z}) & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

2) ① 当 $z\le x$ 时，显然 $P(Z\le z\mid X>x)=0$. $\Rightarrow \hat{F}_Z(z)=0$.

记 $\hat{F}_Z(z)$ 为 ~~X~~ $X>x$ 条件下Z的分布函数.

② 当 $z>x$ 时

$P(X>x,Z\le z)=P(x<X\le z,\ Y\le z)$

$=P(x<X\le z)P(Y\le z)$

$=(e^{-2x}-e^{-2z})(1-e^{-3z})$

$\therefore \hat{F}_Z(z)=P(Z\le z\mid X>x)=\dfrac{P(X>x,Z\le z)}{P(X>x)}=\dfrac{(e^{-2x}-e^{-2z})(1-e^{-3z})}{e^{-2x}}$

$$\Rightarrow \hat{F}_Z(z)=\begin{cases}(1-e^{2(x-z)})(1-e^{-3z}) & z>x,\ x>0\\ 0 & z\le x,\ x>0.\end{cases}$$