概统 Assignment 2 & 3 答案

李屹

2022 年 9 月 30 日

A2Q1.

进行一轮，A 队获胜的概率为 $P_A = P_1(1-P_2)$，B 队获胜的概率为 $P_B = (1-P_1)P_2$，其余为两者平的情况，不妨设概率为 $P_3 = 1 - P_A - P_B$。

若 $P_3 = 1$，即 $P_1 = P_2 = 0$ 或 $P_1 = P_2 = 1$，则比赛永远不会结束，A 队最终获胜的概率为 0.

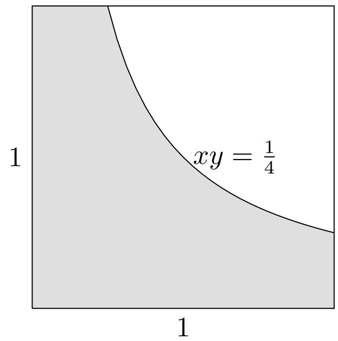
否则，A 队最终获胜的概率为

$$P = \sum_{i=0}^{\infty} P_3^i P_A = \frac{P_A}{1-P_3} = \frac{P_1(1-P_2)}{P_1(1-P_2)+(1-P_1)P_2}$$

■

A2Q2.

设所取的两个数为 (x, y)，样本空间如下图正方形所示，其中阴影部分代表所求事件。样本空间面积为 1，所求概率即为阴影部分面积。

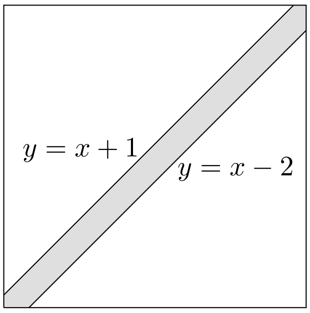


$$P = \frac{1}{4} + \int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{4x} = \frac{1}{4} + \frac{\ln 2}{2}$$

■

A2Q3.

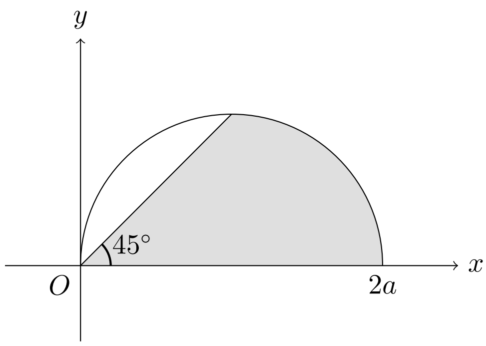
设两船到达的时间为 (x,y)（按小时记），需要等待的条件为 $x<y<x+1$ 或 $y<x<y+2$，样本空间如下图正方形所示，其中阴影部分代表所求事件。样本空间面积为 24^2。



阴影部分面积为 $24^2-\dfrac{1}{2}(23^2+22^2)=69.5$，所求事件概率 $P=\dfrac{69.5}{24^2}$。

■

A2Q4.



如图，阴影部分为满足条件的区域。

$$P=\frac{\frac{1}{4}\pi a^2+\frac{1}{2}a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{\pi+2}{2\pi}$$

■

A2Q5.

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)+P(B)-P(A\cup B)}{P(A)}\geq\frac{P(A)+P(B)-1}{A}=1-\frac{\bar{B}}{A}$$

■

A2Q6. 设事件 A 为活到十岁，B 为活到十二岁，显然 $B\subset A$ 即 $P(AB)=P(B)$，$P(B|A)=\dfrac{P(B)}{P(A)}=0.7$. ■

A2Q7. 设四种方式为 $A_i\quad i=1,2,3,4$，迟到为 B，显然 A_i 为完备事件组

1. $P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(B|A_i)P(A_i)=0.15$

2. $P(A_1|B)=\dfrac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)}=0.5$

■

A2Q8. 设事件 A、B 分别为 A、B 厂生产，D 为次品，显然 A、B 为完备事件组

- $P(D)=P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)=1.4\%$
- $P(A|D)=\dfrac{P(D|A)P(A)}{P(D)}=\dfrac{3}{7}$

■

A2Q9. 由定义可知

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$
$$P(A|\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$$

在 $0<P(B)<1$ 时，上面两式相等等价于 $P(AB)=P(A)P(B)$. ■

A3Q1. 设射手的命中率为 p，$P(\text{没有一次命中})=(1-p)^4=1-\dfrac{80}{81}$，即 $p=\dfrac{2}{3}$. ■

A3Q2. 设事件 A 的发生概率为 p，$P(\text{四次没有一次发生})=(1-p)^4=1-0.5904$，可得 $p=0.2$，故 $P(\text{三次发生一次})=C_3^1p(1-p)^2=0.384$. ■

A3Q3.

- $P=1-(1-0.6)^2=0.84$
- 设需要 n 架，$P=1-(1-0.6)^n\geq 99\%$，可得 n 至少应为 6

■

A3Q4. 考虑直接出厂和经过调试，设一台机器最终能出厂的概率为 p，有 $p=0.7+0.3*0.8=0.94$.

1. 由 Bernoulli 概型知，$P=0.94^n$.

2. 同上，$P=C_n^2\times 0.94^{n-2}\times 0.06^2$.

3. 考虑除去全部能出厂和只有一件不能出厂即可，$P=1-0.94^n-n\times 0.06\times 0.94^{n-1}$.

■

A3Q5. X 基本上服从 $p=\dfrac{1}{2}$ 的几何分布，但还要考虑到路口一共只有 3 个，$X=3$ 也包括了三次均未遇到红灯的情况

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= p = \frac{1}{2} \\
P(X=1) &= p(1-p) = \frac{1}{4} \\
P(X=2) &= p(1-p)^2 = \frac{1}{8} \\
P(X=3) &= (1-p)^3 = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

■

A3Q6.

1. $\sum_{k=1}^{5} P(X=k) = \dfrac{C}{3} = 1 \Rightarrow C = 3.$
2. $P(1 \leq X \leq 3) = P(X=1,2,3) = \dfrac{3}{5}.$
3. $P(0.5 \leq X \leq 2.5) = P(X=1,2) = \dfrac{2}{5}.$

■

A3Q7.

X	$P(X)$
-1	0.4
1	0.4
3	0.2

$$\begin{aligned}
P(x<1) &= P(X=-1) = 0.4 \\
P(0<x<3) &= P(X=1) = 0.4
\end{aligned}$$

■