Assignment 5

2022 年 10 月 28 日

Question 1: 在电源电压不超过 200V、在 200-240V 和超过 240V 三种情形下，某种电子元件损坏的概率分别为 0.1、0.001 和 0.2，假设电源电压 X 服从正态分布 $N(220, 25^2)$，试求：

(1) 该电子元件损坏的概率 α；

(2) 该电子元件损坏时，是电源电压在 200V-240V 的概率 β.

(1)

$$P(X \leq 200) = P(X > 240) = 1 - \Phi(\frac{240-220}{25}) \approx 0.212$$
$$P(200 < X \leq 240) = 1 - P(X \leq 200) - P(X > 240) \approx 0.576$$

设电子元件损坏为事件 Y，则由全概率公式得

$$\begin{aligned}\alpha &= P(Y|X \leq 200)P(X \leq 200) \\ &+ P(Y|200 < X \leq 240)P(200 < X \leq 240) \\ &+ P(Y|X > 240)P(X > 240) \\ &\approx 0.1 \times 0.212 + 0.001 \times 0.576 + 0.2 \times 0.212 \\ &\approx 0.064\end{aligned}$$

(2) 由贝叶斯公式得

$$\begin{aligned}\beta &= P(200 < X \leq 240|Y) \\ &= \frac{P(Y|200 < X \leq 240)P(200 < X \leq 240)}{P(Y)} \\ &\approx \frac{0.001 \times 0.576}{0.064} \\ &\approx 0.009\end{aligned}$$

Question 2: 某地区成年男子的体重 X(kg) 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$。若已知 $P(X \leq 70) = 0.5$，$P(X \leq 60) = 0.25$。

(1) 求 μ, σ?

(2) 如在该地随机地选择 5 名成年男子，求其中至少有两名体重超过 65kg 的概率?

(1) 由 $P(X \leq 70) = 0.5$，可得 $\mu = 70$，那么

$$P(X \leq 60) = 1 - \Phi(\frac{70-60}{\sigma}) = 0.25,\ \Phi(\frac{10}{\sigma}) = 0.75$$

查表可得

$$\frac{10}{\sigma} \approx 0.67, \sigma \approx 14.93$$

(2) 该地成年男子的体重超过 65kg 的概率为

$$p = P(X > 65) = P(X \leq 75) = \Phi(\frac{75-70}{14.93}) \approx 0.6293$$

设 5 名成年男子中体重超过 65kg 的人数为 Y，服从二项分布 $B(n=5, p=0.6293)$，那么

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y=0) - P(Y=1) \\ &= 1 - C_5^0 p^0 (1-p)^5 - C_5^1 p^1 (1-p)^4 \\ &\approx 0.934 \end{aligned}$$

Question 3: 设随机变量 X 的分布律为

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} & \pi & \frac{3\pi}{2} \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix},$$

求 Y 的分布律：（1）$Y = (2X - \pi)^2$；（2）$Y = \sin(2X - \pi)$.

(1)

Y	0	π^2	$4\pi^2$
$P(Y)$	0.2	0.7	0.1

(2)

Y	0
$P(Y)$	1

Question 4: 随机变量 X 服从 $(0,2)$ 上的均匀分布，试求随机变量 $Y = -2X + 1$ 的概率密度.

由 $X \sim U(0,2)$，可得 X 的概率密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & else \end{cases}$$

因为 $Y = -2X + 1$ 严格单调，且 $x = \frac{1-y}{2} = h(y)$，$|h'(y)| = \frac{1}{2}$，所以

$$f_Y(y) = f_X(h(y))|h'(y)| = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 < h(y) < 2 \\ 0, & else \end{cases}$$

所以 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -3 < y < 1 \\ 0, & else \end{cases}$$

Question 5: 假设随机变量 $X \sim N(0,1)$，求下列随机变量 Y 的概率密度函数：（1）$Y = e^{-X}$；（2）$Y = 2X^2 + 1$；（3）$Y = |X|$.

因为随机变量 $X \sim N(0,1)$，所以 X 的概率密度函数为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

.

(1) 因为 $Y = e^{-X}$ 严格单调，所以

当 $y > 0$（求 $g(x)$ 的值域）时，$x = -\ln y = h(y)$，$|h'(y)| = \frac{1}{y}$，所以

$$f_Y(y) = f_X(h(y))|h'(y)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi} y} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}$$

当 $y \le 0$ 时，$f_Y(y) = 0$.

所以 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi} y} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y > 0 \end{cases}$$

(2)

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(2X^2 + 1 \le y)$$

当 $y \le 0$ 时，有 $f_Y(y) = 0$；

当 $y > 0$ 时，有

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(-\sqrt{\frac{y-1}{2}} \le X \le \sqrt{\frac{y-1}{2}}) \\ &= F_X(\sqrt{\frac{y-1}{2}}) - F_X(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \end{aligned}$$

对其求导（变限积分求导，请自行回顾微积分相关知识），得 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}} e^{-\frac{y-1}{4}}, & y > 1 \end{cases}$$

(3)

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(|X| \le y)$$

当 $y \le 0$ 时，有 $f_Y(y) = 0$；

当 $y > 0$ 时，有

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(-y \le X \le y) \\ &= F_X(y) - F_X(-y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-y}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \end{aligned}$$

对其求导，得 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0\end{cases}$$

Question 6: 设随机变量 X 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，求一单调递增函数 $h(x)$，使得 $Y=h(X)$ 服从参数为 λ 的指数分布。

因为 $X\sim U[0,1]$，所以 X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & else\end{cases}$$

因为 $y=h(x)$ 是单调递增函数，设 $x=h^{-1}(y)=g(y)$，所以当 $0\le g(y)\le 1$ 时，有

$$f_Y(y)=f_X(g(y))|g'(y)|=\begin{cases}g'(y), & 0\le g(y)\le 1\\ 0, & else\end{cases}$$

又因为 Y 服从参数为 λ 的指数分布（$\lambda>0$），有

$$f_Y(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y}, & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

$$g'(y)=\lambda e^{-\lambda y}$$

$$x=g(y)=-e^{-\lambda y}+C$$

$$y=h(x)=-\frac{\ln(C-x)}{\lambda}$$

因为当 $0\le x\le 1$ 时，有 $y\ge 0$，所以

$$C=1,\ h(x)=-\frac{\ln(1-x)}{\lambda}$$

Question 7: 设随机变量 X 在 $(0,1]$ 上取值，其分布函数为 $F(x)$，且对任意的 $0\le x<y\le 1$，$F(y)-F(x)$ 仅与 $y-x$ 有关。求 X 的分布？

设 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ P(0<X\le x), & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

设 $x_1,x_2\in(0,1]$，且 $x_i+\Delta x\in(0,1], i=1,2$，由题可知

$$F(x_1+\Delta x)-F(x_1)=F(x_2+\Delta x)-F(x_2)$$

两边同时除以 Δx 并令 $\Delta x \to 0$，得

$$F'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_2 + \Delta x) - F(x_2)}{\Delta x} = F'(x_2)$$

从而，对于任意 $x \in (0, 1]$，有 $F'(x) = C$，所以 X 服从 $(0, 1]$ 上的均匀分布，即 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$