# Algorytmy Optymalizacji Dyskretnej

**Laboratorium**

**Lista 2**

Kinga Majcher
272354

Listopad 2024

## 1 Zadanie 1

### 1.1 Treść zadania

Przedsiębiorstwo lotnicze musi podjąć decyzję o zakupie paliwa do samolotów odrzutowych, mając do wyboru trzech dostawców. Samoloty tankują paliwo regularnie na czterech lotniskach, które obsługują.
Firmy paliwowe poinformowały, że mogą dostarczyć następujące ilości paliwa w nadchodzącym miesiącu: Firma 1 – 275 000 galonów, Firma 2 – 550 000 galonów i Firma 3 – 660 000 galonów. Niezbędne ilości paliwa na poszczególnych lotniskach są odpowiednio równe: na lotnisku 1 – 110 000 galonów, na lotnisku 2 – 220 000 galonów, na lotnisku 3 – 330 000 galonów i na lotnisku 4 – 440 000 galonów. Koszt jednego galonu paliwa w $ (z uwzględnieniem kosztów transportu) dostarczonego przez poszczególnych dostawców na każde z lotnisk przedstawia poniższa tabela.

| | **Firma 1** | **Firma 2** | **Firma 3** |
|---|---|---|---|
| **Lotnisko 1** | 10 | 7 | 8 |
| **Lotnisko 2** | 10 | 11 | 14 |
| **Lotnisko 3** | 9 | 12 | 4 |
| **Lotnisko 4** | 11 | 13 | 9 |

Wyznacz plan zakupu i dostaw paliwa na lotniska, który minimalizuje koszty. Następnie na jego podstawie odpowiedz na poniższe pytania.

(a) Jaki jest minimalny łączny koszt dostaw wymaganych ilości paliwa na wszystkie lotniska?

(b) Czy wszystkie firmy dostarczają paliwo?

(c) Czy możliwości dostaw paliwa przez firmy są wyczerpane?

## 1.2 Opis modelu

- $n$ - liczba firm paliwowych (dostawców)
- $m$ - liczba lotnisk (odbiorców)
- $d_j$ - zapotrzebowanie na paliwo na lotnisku $j$
- $s_i$ - maksymalna ilość paliwa dostępna od dostawcy $i$
- $c_{ij}$ - koszt dostarczenia galonu paliwa od dostawcy $i$ na lotnisko $j$

## 1.3 Zmienne decyzyjne

Definiujemy zmienną decyzyjną $x_{ij}$, która reprezentuje ilość paliwa dostarczoną przez firmę $i$ na lotnisko $j$.

## 1.4 Ograniczenia

- Dostarczona ilość paliwa przez firmę $i$ na lotnisko $j$ musi być nieujemna:

$$\forall_{i,j}\ x_{ij} \geq 0$$

- Zapotrzebowanie lotnisk na paliwo musi być zaspokojone:

$$\forall_j \ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j$$

- Każdy dostawca ma ograniczoną ilość paliwa, którą może dostarczyć:

$$\forall_i \ \sum_{j=1}^{n} \leq s_i$$

## 1.5 Funkcja celu

Chcemy zminimalizować koszt zakupu i dostarczenia paliwa. Funkcja celu:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

gdzie $c_{ij}$ to koszt dostarczenia galonu paliwa przez dostawcę $i$ na lotnisko $j$, a $x_{ij}$ to ilość paliwa dostarczona przez dostawcę $i$ na lotnisko $j$.

## 1.6 Dane

| $i$ | **Firma 1** | **Firma 2** | **Firma 3** |
|---|---|---|---|
| $s_i$ | 275 000 | 550 000 | 660 000 |

Tabela 1: Maksymalna ilość paliwa dostępna od firmy $i$

| $j$ | **Lotnisko 1** | **Lotnisko 2** | **Lotnisko 3** | **Lotnisko 4** |
|---|---|---|---|---|
| $d_j$ | 110 000 | 220 000 | 330 000 | 440 000 |

Tabela 2: Zapotrzebowanie na paliwo na lotnisku $j$

| $c_{ij}$ | **Firma 1** | **Firma 2** | **Firma 3** |
|---|---|---|---|
| **Lotnisko 1** | 10 | 7 | 8 |
| **Lotnisko 2** | 10 | 11 | 14 |
| **Lotnisko 3** | 9 | 12 | 4 |
| **Lotnisko 4** | 11 | 13 | 9 |

Tabela 3: Koszt dostarczenia galonu paliwa od dostawcy $i$ na lotnisko $j$

## 1.7 Rozwiązanie

Znalezione optymalne rozwiązanie:

| $x_{ij}$ | **Firma 1** | **Firma 2** | **Firma 3** |
|---|---|---|---|
| **Lotnisko 1** | 0 | 110 000 | 0 |
| **Lotnisko 2** | 165 000 | 55 000 | 0 |
| **Lotnisko 3** | 0 | 0 | 330 000 |
| **Lotnisko 4** | 110 000 | 0 | 330 000 |

Tabela 4: Optymalna liczba galonów paliwa dostarczana przez dostawcę $i$ na lotnisko $j$

(a) Jaki jest minimalny łączny koszt dostaw wymaganych ilości paliwa na wszystkie lotniska?

Minimalny łączny koszt dostaw wymaganych ilości paliwa na wszystkie lotniska wynosi 8 525 000 \$.

(b) Czy wszystkie firmy dostarczają paliwo?

Tak, wszystkie firmy dostarczają paliwo, każda z nich na dwa lotniska.

(c) Czy możliwości dostaw paliwa przez firmy są wyczerpane?

Możliwości dostaw paliwa przez firmy są wyczerpane dla Firmy 1 oraz Firmy 3.

# 2 Zadanie 2

## 2.1 Treść zadania

Zakład może produkować cztery różne wyroby $P_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$, w różnych kombinacjach. Każdy z wyrobów wymaga pewnego czasu obróbki na każdej z trzech maszyn. Czasy te są podane w poniższej tabeli (w minutach na kilogram wyrobu). Każda z maszyn jest dostępna przez 60 godzin w tygodniu. Produkty $P_1, P_2, P_3$ i $P_4$ mogą byą sprzedane po cenie, odpowiednio, 9, 7, 6 i 5 \$ za kilogram. Koszty zmienne (koszty pracy maszyn) wynoszą, odpowiednio, 2 \$ za godzinę dla maszyn $M_1$ i $M_2$ oraz 3 \$ za godzinę dla maszyny $M_3$. Koszty materiałowe wynoszą 4 \$ na każdy kilogram wyrobu $P_1$ i 1 \$ na każdy kilogram wyrobu $P_2, P_3$ i $P_4$. W tabeli podany jest także maksymalny tygodniowy popyt na każdy z wyrobów (w kilogramach).

| **Produkt** | **Maszyna** | | | **Maksymalny popyt** |
|---|---|---|---|---|
| | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | **tygodniowy** |
| $P_1$ | 5 | 10 | 6 | 400 |
| $P_2$ | 3 | 6 | 4 | 100 |
| $P_3$ | 4 | 5 | 3 | 150 |
| $P_4$ | 4 | 2 | 1 | 500 |

Wyznacz optymalny tygodniowy plan produkcji poszczególnych wyrobów i oblicz zysk z ich sprzedaży.

## 2.2 Opis modelu

- $m$ - liczba wyrobów, które może produkować zakład
- $n$ - liczba maszyn
- $p_i$ - cena po jakiej może być sprzedany kilogram wyrobu $P_i$
- $m_i$ - wartość kosztów materiałowych na kilogram wyrobu $P_i$
- $d_i$ - maksymalny popyt na wyrób $P_i$ (w kilogramach)
- $a_j$ - tygodniowy dostępny czas pracy dla maszyny $M_j$ w godzinach
- $c_j$ - wartość kosztów zmiennych dla maszyny $M_j$ za minutę
- $t_{ij}$ - czas obróbki wyrobu $P_i$ na maszynie $M_j$ (w minutach na kilogram wyrobu)

## 2.3 Zmienne decyzyjne

Definiujemy zmienną decyzyjną $x_i$, która reprezentuje liczbę kilogramów produktu $P_i$, która należy wyprodukować.

## 2.4 Ograniczenia

- Wyprodukowana ilość wyrobu $P_i$ musi być nieujemna:

$$\forall_i \; x_i \geq 0$$

- Każda z maszyn $M_j$ ma ograniczony tygodniowy czas pracy $a_j$:

$$\forall_j \; \sum_{i=1}^{n} t_{ij} \cdot x_i \leq a_j$$

- Na każdy z produktów $P_i$ jest ograniczony popyt:

$$\forall_i \; x_i \leq d_i$$

## 2.5 Funkcja celu

Chcemy zmaksymalizować zysk, czyli różnicę między przychodem ze sprzedaży produktów, a kosztami ich wyprodukowania. Funkcja celu:

$$\max \left( \sum_{i=1}^{m} (p_i - m_i) x_i - \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \sum_{i=1}^{m} t_{ij} \cdot x_i \right)$$

## 2.6 Dane

| **Wyrób** $i$ | **Cena za kg (w $)** $p_i$ | **Wartość kosztów materiałowych (w $)** $m_i$ | **Popyt tygodniowy (w kg)** $d_i$ |
|---|---|---|---|
| $P_1$ | 9 | 4 | 400 |
| $P_2$ | 7 | 1 | 100 |
| $P_3$ | 6 | 1 | 150 |
| $P_4$ | 5 | 1 | 500 |

Tabela 5: Dane dotyczące wyrobów $P_i$

| $t_{ij}$ | **Maszyna 1** | **Maszyna 2** | **Maszyna 3** |
|---|---|---|---|
| $P_1$ | 5 | 10 | 6 |
| $P_2$ | 3 | 6 | 4 |
| $P_3$ | 4 | 5 | 3 |
| $P_4$ | 4 | 2 | 1 |

Tabela 6: Czas obróbki wyrobu $P_i$ na każdej z maszyn $M_j$ (w minutach)

| **Maszyna** $i$ | **Dostępność w tygodniu (w minutach)** $a_j$ | **Koszt pracy (w \$ na h)** $c_j$ |
|---|---|---|
| $M_1$ | 3600 | 2 |
| $M_2$ | 3600 | 2 |
| $M_3$ | 3600 | 3 |

Tabela 7: Dane dotyczące maszyn $M_j$

### 2.7 Rozwiązanie

Znalezione optymalne rozwiązanie:

| | **Wyrób 1** | **Wyrób 2** | **Wyrób 3** | **Wyrób 4** |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 125 | 100 | 150 | 500 |

Tabela 8: Optymalna liczba kilogramów wyrobu $P_i$, którą należy wyprodukować dla osiągnięcia największego zysku

Maksymalny zysk wynosi 3632.50 \$.

# 3 Zadanie 3

### 3.1 Treść zadania

W trybie normalnej produkcji pewna firma wytwarza maksymalnie 100 jednostek towaru w każdym z $K$ następujących po sobie okresów, gdzie koszt produkcji jednej jednostki towaru w okresie $j \in \{1, \ldots, K\}$ wynosi $c_j$ \$. Firma może również uruchomić produkcję ponadwymiarową w wielkości do $a_j$ dodatkowych jednostek towaru w okresie $j$ przy koszcie jednostkowym $o_j$ \$. Zapotrzebowanie na towar w okresie $j$ wynosi $d_j$ jednostek. Dane dla $K = 4$ kolejnych okresów przedstawia poniższa tabela.

| $j$ | $c_j$ | $a_j$ | $o_j$ | $d_j$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 000 | 60 | 8 000 | 130 |
| 2 | 4 000 | 65 | 6 000 | 80 |
| 3 | 8 000 | 70 | 10 000 | 125 |
| 4 | 9 000 | 60 | 11 000 | 195 |

Ponadto firma może przechować w magazynie do 70 jednostek towaru z jednego okresu na kolejny po koszcie 1 500 $ za każdą magazynowaną jednostkę przez jeden okres. Początkowo w magazynie znajduje się 15 jednostek towaru.

Wyznacz plan produkcji i magazynowania wytwarzanego towaru, który spełnia zapotrzebowania w każdym okresie i minimalizuje łączny koszt. Następnie na jego podstawie odpowiedz na poniższe pytania.

(a) Jaki jest minimalny łączny koszt produkcji i magazynowania towaru?

(b) W których okresach firma musi zaplanować produkcję ponadwymiarową?

(c) W których okresach możliwości magazynowania towaru są wyczerpane?

## 3.2 Opis modelu

- $K$: liczba okresów
- $c_j$: koszt produkcji w trybie podstawowym w okresie $j$
- $o_j$: koszt produkcji w trybie dodatkowym w okresie $j$
- $k$: koszt magazynowania towaru przez jeden okres
- $b_j$: maksymalna produkcja w trybie podstawowym w okresie $j$
- $a_j$: maksymalna produkcja w trybie dodatkowym w okresie $j$
- $d_j$: zapotrzebowanie w okresie $j$
- $s_0$: początkowy stan magazynu
- $S$: maksymalna pojemność magazynu

## 3.3 Zmienne decyzyjne

Definiujemy następujące zmienne decyzyjne:

- $x_j$: liczba jednostek wyprodukowanych w okresie $j$ w trybie podstawowym
- $y_j$: liczba jednostek wyprodukowanych w okresie $j$ w trybie dodatkowym
- $s_j$: liczba jednostek towaru przechowywanych w magazynie na koniec okresu $j$

## 3.4 Ograniczenia

- Liczba jednostek wyprodukowanych w okresie $j$ w trybie podstawowym musi być nieujemna:
$$\forall_j \ x_j \geq 0$$
- Liczba jednostek wyprodukowanych w okresie $j$ w trybie dodatkowym musi być nieujemna:
$$\forall_j \ y_j \geq 0$$
- Liczba jednostek towaru przechowywanych w magazynie na koniec okresu $j$ musi być nieujemna:
$$\forall_j \ s_j \geq 0$$
- Liczba jednostek wyprodukowanych w okresie $j$ musi być mniejsza niż maksymalna możliwa produkcja w trybie podstawowym:
$$\forall_j \ x_j \geq b_j$$
- Liczba jednostek wyprodukowanych w okresie $j$ musi być mniejsza niż maksymalna możliwa produkcja w trybie dodatkowym:
$$\forall_j \ y_j \geq a_j$$
- Liczba jednostek przechowywanych w magazynie na koniec okresu musi być nie większa niż jego pojemność:
$$\forall_j \ s_j \leq S$$
- Do magazynu na okres $j+1$ można oddać tylko tyle jednostek ile zostało po całkowitym zaspokojeniu zapotrzebowania w okresie $j$:
$$\forall_j \ s_{j+1} = x_j + y_j + s_j - d_j$$
- Nie ma sensu magazynowania jakichkolwiek jednostek na koniec ostatniego okresu, gdyż jest to płatne:
$$s_{K+1} = 0$$
- W pierwszym okresie stan magazynu jest taki jak stan początkowy, bo do magazynu można odkładać dopiero na końcu okresu:
$$s_1 = s_0$$

## 3.5 Funkcja celu

Chcemy zminimalizować łączne koszty produkcji i magazynowania jednostek:

$$\min \sum_{j=1}^{K} (c_j x_j + o_j y_j + k s_j)$$

## 3.6 Dane

| $j$ | **maksymalna produkcja podstawowa** $c_j$ | **koszt produkcji podstawowej** $b_j$ | **maksymalna produkcja dodatkowa** $a_j$ | **koszt produkcji dodatkowej** $o_j$ | **zapotrzebowanie** $d_j$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 6 000 | 60 | 8 000 | 130 |
| 2 | 100 | 4 000 | 65 | 6 000 | 80 |
| 3 | 100 | 8 000 | 70 | 10 000 | 125 |
| 4 | 100 | 9 000 | 60 | 11 000 | 195 |

$S = 70$ - pojemność magazynu

$s_0 = 15$ - stan magazynu na początku pierwszego okresu

$k = 1500$ - koszt magazynowania jednostki towaru przez jeden okres

## 3.7 Rozwiązanie

Znalezione optymalne rozwiązanie:

| **Okres** | **Wyprodukowane jednostki w trybie podstawowym** | **Wyprodukowane jednostki w trybie dodatkowym** | **Stan magazynu na początku okresu** |
|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 15 | 15 |
| 2 | 100 | 50 | 0 |
| 3 | 100 | 0 | 70 |
| 4 | 100 | 50 | 45 |

Tabela 9: Optymalne wielkości produkcji i stany magazynu

(a) Jaki jest minimalny łączny koszt produkcji i magazynowania towaru?

Minimalny łączny koszt produkcji i magazynowania towaru wynosi 3 865 000 $.

(b) W których okresach firma musi zaplanować produkcję ponadwymiarową?

Firma musi zaplanować produkcję ponadwymiarową w okresach 1, 2 oraz 4.

(c) W których okresach możliwości magazynowania towaru są wyczerpane?

Możliwości magazynowania towaru są wyczerpane w okresie 3.

# 4 Zadanie 4

## 4.1 Treść zadania

Dana jest sieć połączeń między miastami reprezentowana za pomocą skierowanego grafu $G = (N, A)$, gdzie $N$ jest zbiorem miast (wierzchołków), a $A$ jest zbiorem połączeń między miastami (łuków). Dla każdego połączenia z miasta $i$ do miasta $j, (i, j) \in A$, dane są koszt przejazdu $c_{ij}$ oraz czas przejazdu $t_{ij}$. Dane są również dwa miasta $i^\circ, j^\circ \in N$.
Celem jest znalezienie połączenia (ścieżki) od miasta $i^\circ$ do miasta $j^\circ$, którego całkowity koszt jest najmniejszy i całkowity czas przejazdu nie przekracza z góry zadanego czasu $T$.

(a) Rozwiąż poniższy egzemplarz problemu (wygenerowany we współpracy z Microsoft Copilot :) ).
$N = 1, \ldots, 10, i^\circ = 1, j^\circ = 10, T = 15$. Kolejne krawędzie podane są w postaci $(i, j, c_{ij}, t_{ij})$:
$(1,2,3,4), (1,3,4,9), (1,4,7,10), (1,5,8,12), (2,3,2,3), (3,4,4,6), (3,5,2,2), (3,10,6,11), (4,5,1,1), (4,7,3,5), (5,6,5,6), (5,7,3,3), (5,10,5,8), (6,1,5,8), (6,7,2,2), (6,10,7,11), (7,3,4,6), (7,8,3,5), (7,9,1,1), (8,9,1,2), (9,10,2,2)$.

(b) Zaproponuj własny egzemplarz problemu i rozwiąż go. Graf ma mieć co najmniej $n \geq 10$ wierzchołków, najtańsza ścieżka spełniająca ograniczenia na czas przejazdu ma mieć $\geq 3$ krawędzie i mieć większy koszt niż najtańsza ścieżka w wersji bez ograniczeń (ta ma mieć $\geq 2$ krawędzie).

(c) Czy ograniczenie na całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych jest potrzebne? Jeśli nie, to uzasadnij dlaczego. Jeśli tak, to zaproponuj kontrprzykład, w którym po usunięciu ograniczeń na całkowitoliczbowość (tj. mamy przypadek, w którym model jest modelem programowania liniowego) zmienne decyzyjne w rozwiązaniu optymalnym nie mają wartości całkowitych.

(d) Czy po usunięciu ograniczenia na czasy przejazdu w modelu bez ograniczeń na całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych i rozwiązaniu problemu otrzymane połączenie zawsze jest akceptowalnym rozwiązaniem? Uzasadnij odpowiedź.

## 4.2 Opis modelu

- $N$: zbiór miast
- $A$: zbiór połączeń między miastami
- $c_{ij}$: koszt przejazdu między miastami $i$ i $j$
- $t_{ij}$: czas przejazdu między miastami $i$ i $j$

- $T$: maksymalny dopuszczalny czas przejazdu
- $i^\circ$: miasto początkowe
- $j^\circ$: miasto końcowe

## 4.3 Zmienne decyzyjne

Definiujemy zmienną decyzyjną $x_{ij}$, która przyjmuje wartość 1, jeśli krawędź $(i, j, c_{ij}, t_{ij})$ należy do optymalnej ścieżki, a 0 w przeciwnym przypadku.

## 4.4 Ograniczenia

- Jeśli nie istnieje połączenie między $i$ i $j$, to wartość $x_{ij}$ jest ustalona i wynosi 0:
$$\forall_{(i,j)\notin A}\ x_{ij} = 0$$
- Z miasta początkowego $i^\circ$ wychodzi dokładnie jedno połączenie, ścieżka zaczyna się w nim i nie ma rozgałęzień:
$$\sum_{j:(i^\circ,j)\in A} x_{i^\circ j} = 1$$
$$\sum_{j:(j,i^\circ)\in A} x_{ji^\circ} = 0$$
- Do miasta docelowego $j^\circ$ dochodzi dokładnie jedno połączenie, ścieżka kończy się w nim i nie ma rozgałęzień:
$$\sum_{i:(i,j^\circ)\in A} x_{ij^\circ} = 1$$
$$\sum_{j:(j^\circ,i)\in A} x_{j^\circ i} = 0$$
- Każde miasto poza $i^\circ$ i $j^\circ$ ma tyle samo połączeń wchodzących co wychodzących:
$$\forall_{k\in N\setminus\{i^\circ,j^\circ\}} \sum_{j:(k,j)\in A} x_{kj} = \sum_{i:(i,k)\in A} x_{ik}$$
- Całkowity czas przejazdu nie może być większy niż $T$:
$$\sum_{(i,j)\in A} t_{ij}x_{ij} \leq T$$

## 4.5 Funkcja celu

Chcemy zminimalizować całkowity koszt przejazdu:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

## 4.6 Dane

(a)

| $i$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $j$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 3 | 4 | 5 | 10 | 5 | 7 | 6 | 7 | 10 | 1 | 7 | 10 | 3 | 8 | 9 | 9 | 10 |
| $c_{ij}$ | 3 | 4 | 7 | 8 | 2 | 4 | 2 | 6 | 1 | 3 | 5 | 3 | 5 | 5 | 2 | 7 | 4 | 3 | 1 | 1 | 2 |
| $t_{ij}$ | 4 | 9 | 10 | 12 | 3 | 6 | 2 | 11 | 1 | 5 | 6 | 3 | 8 | 8 | 2 | 11 | 6 | 5 | 1 | 2 | 2 |

$$N = \{1, 2, \dots, 10\}$$

$$i^\circ = 1$$

$$j^\circ = 10$$

$$T = 15$$

(b)

| $i$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $j$ | 2 | 3 | 4 | 7 | 5 | 6 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 |
| $c_{ij}$ | 3 | 5 | 8 | 2 | 2 | 4 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 6 | 7 | 1 | 5 | 2 |
| $t_{ij}$ | 4 | 6 | 7 | 10 | 3 | 6 | 2 | 4 | 2 | 5 | 3 | 5 | 3 | 10 | 6 | 3 |

$$N = \{1, 2, \dots, 10\}$$

$$i^\circ = 1$$

$$j^\circ = 10$$

$$T = 18$$

## 4.7 Rozwiązanie

(a) Wykorzystane krawędzie:

| $i$ | $j$ | $c_{ij}$ | $t_{ij}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 5 | 2 | 2 |
| 5 | 7 | 1 | 1 |
| 7 | 9 | 1 | 1 |
| 9 | 10 | 2 | 2 |

$$\text{Czas} = 15$$

$$\text{Koszt} = 13$$

(b) Wykorzystane krawędzie:

| $i$ | $j$ | $c_{ij}$ | $t_{ij}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 2 | 10 |
| 7 | 9 | 7 | 3 |
| 9 | 10 | 2 | 3 |

$$\text{Czas} = 16$$

$$\text{Koszt} = 11$$

(c) Czy ograniczenie na całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych jest potrzebne? Jeśli nie, to uzasadnij dlaczego. Jeśli tak, to zaproponuj kontrprzykład, w którym po usunięciu ograniczeń na całkowitoliczbowość (tj. mamy przypadek, w którym model jest modelem programowania liniowego) zmienne decyzyjne w rozwiązaniu optymalnym nie mają wartości całkowitych.

Tak, ograniczenie na całkowitoliczbowość jest potrzebne. Weźmy model z tego zadania i dane:

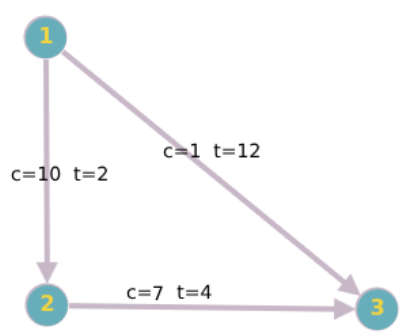
| $i$ | 1 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|
| $j$ | 2 | 3 | 3 |
| $c_{ij}$ | 10 | 7 | 1 |
| $t_{ij}$ | 2 | 4 | 12 |

$$N = \{1, 2, 3\}$$

$$i^\circ = 1$$

$$j^\circ = 3$$

$$T = 10$$



Wówczas dla zmiennej $x_{ij}$ z ograniczeniem na całkowitoliczbowość, model znalazł rozwiązanie:

$$x_{12} = 1$$

$$x_{13} = 0$$

$$x_{23} = 1$$

$$\text{Koszt} = 17$$

Dla zmiennej $x_{ij}$ bez ograniczenia na całkowitoliczbowość, model znalazł rozwiązanie:

$$x_{12} = \frac{1}{3}$$

$$x_{13} = \frac{2}{3}$$

$$x_{23} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Koszt} = 6\frac{1}{3}$$

Jak widać, znaleziona ścieżka faktycznie ma mniejszy koszt, ale nie może być zaakceptowana, gdyż posiada ona rozgałęzienia, co nie ma sensu w kontekście tego problemu.

(d) Czy po usunięciu ograniczenia na czasy przejazdu w modelu bez ograniczeń na całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych i rozwiązaniu problemu otrzymane połączenie zawsze jest akceptowalnym rozwiązaniem? Uzasadnij odpowiedź.

Po usunięciu ograniczeń na całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych i czas przejazdu, problem można sprowadzić do znalezienia wszystkich ścieżek z wierzchołka $i^\circ$ do $j^\circ$ i wybraniu tej o najmniejszej sumie wag. Rozgałęzianie tych ścieżek nie ma sensu. Weźmy dowolne dwa wierzchołki $i, j$ i weźmy dla uproszczenia dwie jedyne ścieżki między nimi (dowód można uogólnić na dowolną ilość ścieżek), o sumarycznej wadze krawędzi odpowiednio $a$ i $b$. Skoro są to jedyne ścieżki między tymi wierzchołkami to $x_a + x_b = 1$. Bez utraty ogólności załóżmy, że $a \geq b$. Dla $a$ $x_a = f,$ gdzie $f \in (0, 1]$, więc dla $b$ $x_b = (1 - f)$. Wówczas $x_a \cdot a + x_b \cdot b = f \cdot a + (1 - f) \cdot b = f \cdot a + b - f \cdot b = b + f \cdot (a - b)$. Wiemy, że $a \geq b$, więc wartość takiej rozgałęzionej ścieżki zawsze będzie większa bądź równa wartości ścieżki o najmniejszej wadze. Nie ma więc sensu rozgałęziać ścieżek w kwestii tego problemu. Jeśli nie ma ograniczenia maksymalnego czasu to model będzie zwracał sensowne rozwiązania nawet dla zmiennej decyzyjnej która nie ma ograniczenia całkowitoliczbowości.

# 5 Zadanie 5

## 5.1 Treść zadania

Policja w małym miasteczku ma w swoim zasięgu trzy dzielnice oznaczone jako $p_1, p_2$ i $p_3$. Każda dzielnica ma przypisaną pewną liczbę radiowozów. Policja pracuje w systemie trzyzmianowym. W tabelach 10 i 11 podane są minimalne i maksymalne liczby radiowozów dla każdej zmiany.

| | **zmiana 1** | **zmiana 2** | **zmiana 3** |
|---|---|---|---|
| $p_1$ | 2 | 4 | 3 |
| $p_2$ | 3 | 6 | 5 |
| $p_3$ | 5 | 7 | 6 |

Tabela 10: Minimalne liczby radiowozów dla każdej zmiany i dzielnicy

| | **zmiana 1** | **zmiana 2** | **zmiana 3** |
|---|---|---|---|
| $p_1$ | 3 | 7 | 5 |
| $p_2$ | 5 | 7 | 10 |
| $p_3$ | 8 | 12 | 10 |

Tabela 11: Maksymalne liczby radiowozów dla każdej zmiany i dzielnicy

Aktualne przepisy wymuszają, że dla zmiany 1, 2 i 3 powinno być dostępnych, odpowiednio, co najmniej 10, 20 i 18 radiowozów. Ponadto dzielnice $p_1, p_2$ i $p_3$ powinny mieć przypisane, odpowiednio, co najmniej 10, 14 i 13 radiowozów. Policja chce wyznaczyć przydział radiowozów spełniający powyższe wymagania i minimalizujący ich całkowitą liczbę.

## 5.2 Opis modelu

- $n$: liczba zmian
- $m$: liczba dzielnic
- $rMIN_{ij}$: minimalna liczba radiowozów dla $i$-tej dzielnicy i $j$-tej zmiany
- $rMAX_{ij}$: maksymalna liczba radiowozów dla $i$-tej dzielnicy i $j$-tej zmiany
- $d_i$: minimalna liczba radiowozów dla $i$-tej dzielnicy
- $z_j$: minimalna liczba radiowozów dla $j$-tej zmiany

## 5.3 Zmienne decyzyjne

Definiujemy zmienną decyzyjną $x_{ij}$, która reprezentuje liczbę radiowozów przydzielonych do $i$-tej dzielnicy na $j$-tą zmianę.

## 5.4 Ograniczenia

- Liczba radiowozów przydzielonych do $i$-tej dzielnicy na $j$-tą zmianę musi być nieujemna:
$$\forall_{i,j}\ x_{ij} \geq 0$$

- Dla każdej $j$-tej zmiany musi być dostępne więcej radiowozów niż minimalna liczba radiowozów dla tej zmiany:
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq z_j$$

- Dla każdej $i$-tej dzielnicy musi być dostępne więcej radiowozów niż minimalna liczba radiowozów dla tej dzielnicy:
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geq d_i$$

- Dla każdej $i$-tej dzielnicy i $j$-tej zmiany dostępna liczba radiowozów nie może być mniejsza niż wymagana minimalna liczba i większa niż wymagana maksymalna liczba:
$$\forall_{i,j}\ rMIN_{ij} \geq x_{ij} \geq rMAX_{ij}$$

## 5.5 Funkcja celu

Chcemy zminimalizować całkowitą liczbę potrzebnych radiowozów:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

## 5.6 Dane

| $rMIN_{ij}$ | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| **1** | 2 | 4 | 3 |
| **2** | 3 | 6 | 5 |
| **3** | 5 | 7 | 6 |

| $rMAX_{ij}$ | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| **1** | 3 | 7 | 5 |
| **2** | 5 | 7 | 10 |
| **3** | 8 | 12 | 10 |

| | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| $d_i$ | 10 | 14 | 13 |

| | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| $z_j$ | 10 | 20 | 18 |

$$n = 3$$

$$m = 3$$

### 5.7 Rozwiązanie

| $x_{ij}$ | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| **1** | 2 | 5 | 5 |
| **2** | 3 | 7 | 5 |
| **3** | 5 | 8 | 8 |

Tabela 12: Optymalne liczby radiowozów dla dzielnic $i$ oraz zmian $j$

Minimalna liczba radiowozów to 48.

## 6 Zadanie 6

### 6.1 Treść zadania

Firma przeładunkowa składuje na swoim terenie kontenery z cennym ładunkiem. Teren podzielony jest na $m \times n$ kwadratów. Kontenery składowane są w wybranych kwadratach. Jeden kwadrat może być zajmowany przez co najwyżej jeden kontener. Firma musi rozmieścić kamery, żeby monitorować kontenery. Każda kamera może obserwować $k$ kwadratów na lewo, $k$ kwadratów na prawo, $k$ kwadratów w górę i $k$ kwadratów w dół. Kamera nie może być umieszczona w kwadracie zajmowanym przez kontener.
Zaplanuj rozmieszczenie kamer w kwadratach tak, aby każdy kontener był monitorowany przez co najmniej jedną kamerę oraz liczba użytych kamer była jak najmniejsza.
Rozwiąż własny egzemplarz powyższego problemu z parametrami $m, n \geq 5$. Podaj rozwiązania dla co najmniej dwóch różnych wartości parametru $k$.

### 6.2 Opis modelu

- $C_{ij}$ - macierz $m \times n$ reprezentująca pozycje kontenerów. Jeśli w kwadracie $(i, j)$ znajduje się kontener to $C_{ij} = 1$, w przeciwnym przypadku $c_{ij} = 0$.
- $m$: liczba wierszy terenu

- $n$: liczba kolumn terenu
- $k$: zasięg obserwacji kamery w każdą stronę

## 6.3 Zmienne decyzyjne

Definiujemy zmienną decyzyjną $x_{ij}$, która przyjmuje wartość 1, jeśli w kwadracie $(i, j)$ znajduje się kamera, w przeciwnym przypadku przyjmuje wartość 0.

## 6.4 Ograniczenia

- Kamery mogą być umieszczane jedynie w pustych kwadratach:

$$\forall_{(i,j):C_{ij}=1}\, x_{ij} = 0$$

- Każdy kwadrat z kontenerem musi być monitorowany przez co najmniej jedną kamerę w jej zasięgu:

$$\forall_{(i,j):C_{ij}=1} \sum_{a=max(1,i-k)}^{min(i+k,m)} x_{aj} + \sum_{b=max(1,j-k)}^{min(j+k,n)} x_{ib} \geq 1$$

## 6.5 Funkcja celu

Chcemy zminimalizować liczbę kamer:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

## 6.6 Dane

(a) $k = 2$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tabela 13: Rozmieszczenie kontenerów w terenie

(b) $k = 4$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tabela 14: Rozmieszczenie kontenerów w terenie

## 6.7 Rozwiązanie

(a) $k = 2$
Minimalna liczba kamer: 5

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | K | 0 | 1 | 0 | K |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | K | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| K | 0 | 1 | 0 | K | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tabela 15: Rozmieszczenie kontenerów i kamer w terenie, kontenery oznaczono cyfrą 1, a kamery literą K

(b) $k = 4$
Minimalna liczba kamer: 3

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | K |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | K | 1 | 0 | 0 | 0 |
| K | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tabela 16: Rozmieszczenie kontenerów i kamer w terenie, kontenery oznaczono cyfrą 1, a kamery literą K