Sprawozdanie – laboratorium nr8

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

Kinga Pyrek, 04.05.2020

1. Wstęp teoretyczny

Funkcja sklejana to metoda, w której wykorzystuje się funkcje zdefiniowane jako wielomiany niskiego stopnia dla każdego odcinka pomiędzy sąsiednimi węzłami z osobna. Wielomiany są tak dobierane, aby cała funkcja była funkcją o odpowiedniej regularności. W przedziale $[a, b]$ mamy $n + 1$ punktów

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

Punkty te wyznaczają podział $[a, b]$ na n podprzedziałów $[x_i, x_{i+1}]$. Funkcja sklejana *s(x)* to dowolna funkcja określona w przedziale $[a, b]$ stopnia $m, m \geq 1$, która

- Na każdym podprzedziale $[x_i, x_{i+1}]$ jest wielomianem stopnia co najwyżej *m* (i=0, 1, …, n-1)
- Jest ciągła i jej pochodne rzędu *1, 2, … ,m-1* również są ciągłe dla wszystkich argumentów *x* w przedziale $[a, b]$.

Punkty x_j to węzły funkcji sklejanej. $s(x)$ można przedstawić:

$$s_i(x) = c_{im}x^m + c_{im-1}x^{m-1} + \cdots + c_{i1}x + c_{i0},$$

gdzie $x \in (x_i, x_{i+1})$.

Funkcja interpolująca jest kombinacją liniową elementów bazy $\{s_i(x)\}$

$$s(x) = \sum_{i=0}^{i=n-1} c_i s_i(x), \qquad x \in [a, b].$$

Najczęściej stosowane są funkcje trzeciego stopnia. Jeżeli

$$s(x_i) = f(x_i) = y_i, \qquad i = 0,1, \ldots, n; n \geq 2$$

to funkcja *s(x)* jest interpolacyjną funkcją sklejaną trzeciego stopnia dla funkcji f(x). Aby określić funkcję *s(x)* stopnia trzeciego musimy wyznaczyć *n+3* parametrów. Ilość węzłów wynosi *n+1*, więc pozostają dwa stopnie swobody.

Dlatego nakładamy dwa dodatkowe warunki, ich rodzaj zależy od funkcji *f(x)* lub od znajomości jej zachowania w pobliżu końców przedziału *[a, b]*:

- I pochodna: $s^{(1)}(a+0) = \alpha_1, s^{(1)}(b-0) = \beta_1,$
- II pochodna : $s^{(2)}(a+0) = \alpha_2, s^{(2)}(b-0) = \beta_2,$
- Trzeci rodzaj warunku – dla funkcji okresowych (warunek na 1 i 2 pochodną)

$$s^i(a+0) = s^i(b-0), i = 1,2.$$

Możemy również dokonać interpolacji funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenia wartości drugich pochodnych w węzłach. Oznaczmy

$$M_j = s^{(2)}(x_j), \quad j = 0,1,\dots,n.$$

Druga pochodna funkcji *s(x)* jest ciągła i liniowa w każdym z podprzedziałów $[x_{i-1}, x_i]$:

$$s_{i-1}^{(2)}(x) = M_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i}$$

$$x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$h_i = x_i - x_{i-1.}$$

Dwukrotnie całkujemy powyższe wyrażenie, otrzymujemy

$$s_{i-1}(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_j} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i.$$

Korzystając z warunku interpolacji wyznaczamy stałe A_i, B_i:

$$s_{i-1}(x_{i-1}) = M_{i-1}\frac{h_i^2}{6} + B_i = y_{i-1}$$

$$s_{i-1}(x_i) = M_i\frac{h_i^2}{6} + A_i h_i + B_i = y_i$$

$$\Downarrow$$

$$B_i = y_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}$$

$$A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1}).$$

Pochodna w punkcie x_i musi być ciągła:

$$s_{i-1}^{(1)}(x_i) = s_i^{(1)}(x_i), \quad i = 1,2,\dots,n$$

$$\Downarrow$$

$$s_{i-1}^{(1)}(x_i - 0) = \frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{h_i}{3} M_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$$

$$s_i^{(1)}(x_i + 0) = -\frac{h_{i+1}}{3} M_i - \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}.$$

Porównując prawe strony dwóch ostatnich równań dla każdego węzła dostaniemy *(n-1)* równań. Możemy je zapisać w postaci:

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 1,2,\dots,n-1$$

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \quad \mu_i = 1 - \lambda_i$$

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) = 6f(x_{i-1}; x_i; x_{i+1}).$$

Musimy również dołączyć dwa równania wynikające z dodatkowych warunków opisanych wcześniej.

- Dla warunków z I pochodną

$$2M_0 + M_1 = d_0 \qquad d_0 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \alpha_1\right)$$

$$M_{n-1} + 2M_n = d_n \qquad d_n = \frac{6}{h_i}(\beta_1 - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n})$$

- Dla warunków z II pochodną

$$M_0 = \alpha_2 \qquad M_n = \beta_2.$$

Otrzymujemy końcowy układ równań w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}.$$

Funkcję sklejaną wyznaczamy ze wzoru:

$$s_{i-1}(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_j} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i.$$

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Naszym zadaniem jest dokonanie wyżej opisanej interpolacji z wykorzystaniem funkcji sklejanej i pochodnych drugiego rzędu dla funkcji:

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$f_2(x) = \cos(2x).$$

Warunki na drugie pochodne na brzegach przyjmujemy:

$$m_1 = \alpha, \qquad m_n = \beta.$$

Wprowadzamy warunki brzegowe do układu równań:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Przyjęto $\alpha, \beta = 0$, przedział interpolacji $[-5{,}5]$, liczbę węzłów *n=5,8,21*.

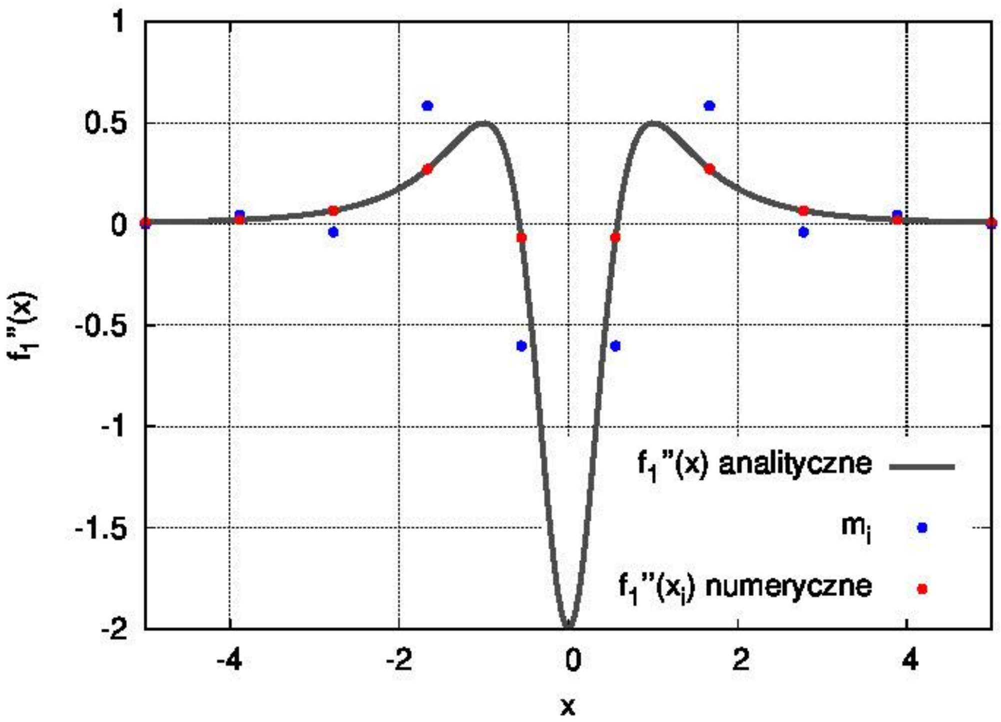
Dodatkowo dla *n=10* i $f_1(x)$ wyznaczymy wartości drugich pochodnych i porównamy z dokładniejszymi wynikami ze wzoru:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{f(x - \Delta x) - 2f(x) + f(x + \Delta x)}{(\Delta x)^2}.$$

Przyjmujemy $\Delta x = 0{,}01$.

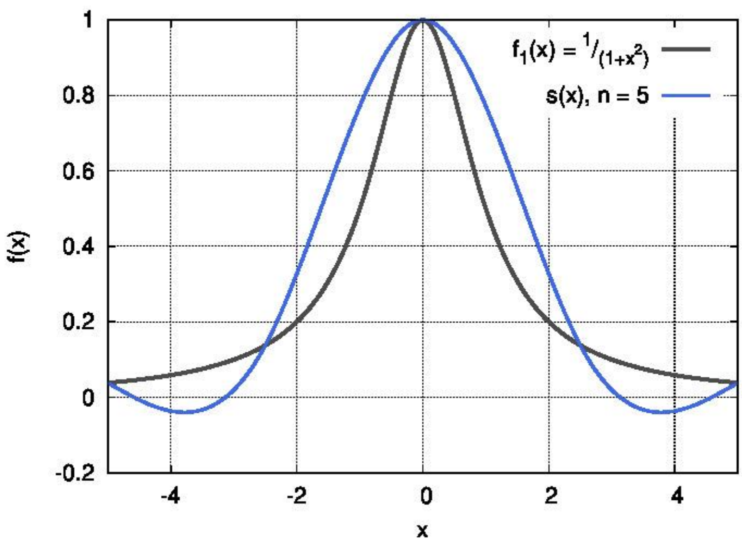
2.2. Wyniki

W programie wykorzystaliśmy procedurę *void gaussj(float **a, int n, float **b, int m)* z biblioteki *Numerical Recipies*. Posłużyła nam ona do eliminacji Gaussa-Jordana. Za pomocą skryptu *Gnuplota* otrzymaliśmy graficzne przedstawienie wyników.

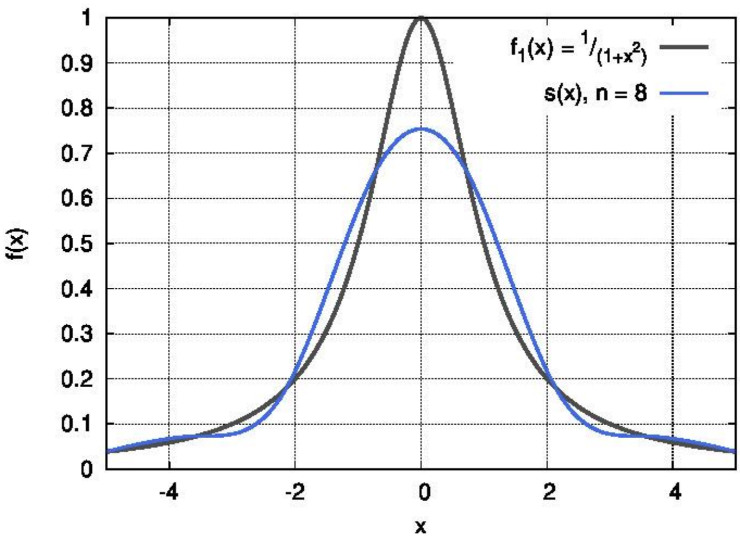


Rysunek 1: Wartości drugich pochodnych wyznaczone algorytmem interpolacji funkcji f1 kubicznymi funkcjami sklejanymi przy n=10, porównane z wartościami wynikającymi z ilorazu różnicowego oraz pochodną wyprowadzoną analitycznie.

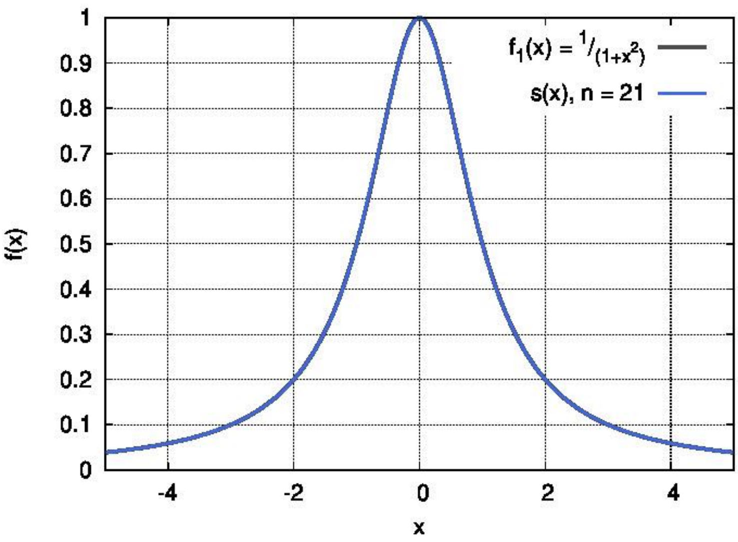
Na rysunku 1 możemy zauważyć, że wartości drugich pochodnych wyznaczane numerycznie pokrywają się z wartościami wyprowadzonymi analitycznie, natomiast punkty wyznaczane w interpolacji tylko na krańcach się pokrywają, w pozostałej części odbiegają od wartości dokładnych.



Rysunek 3: n=5 -> h=2.5



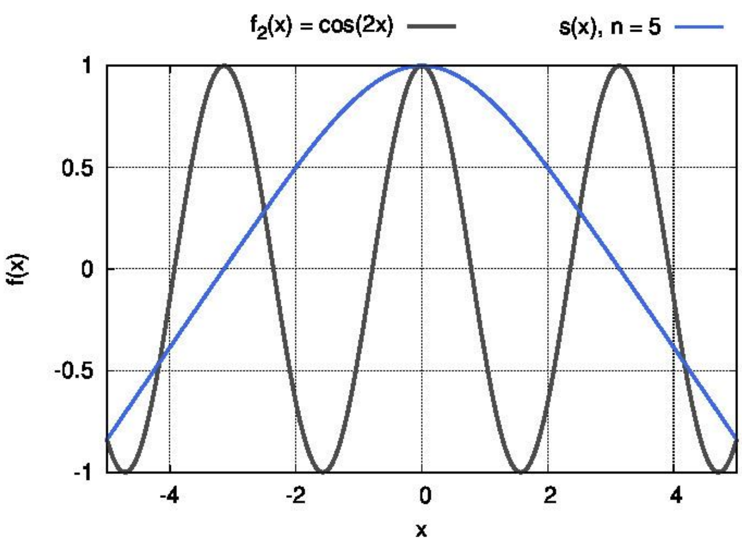
Rysunek 2: n=8 -> h=$\frac{10}{7}$



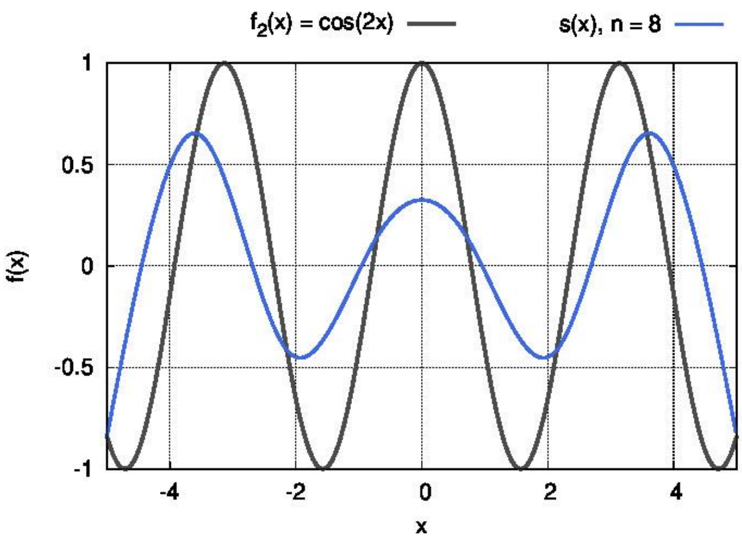
Rysunek 4: n=21 -h=0.5

Powyższe trzy rysunki przedstawiają wyniki interpolacji funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ kubicznymi funkcjami sklejanymi dla *n* węzłów.

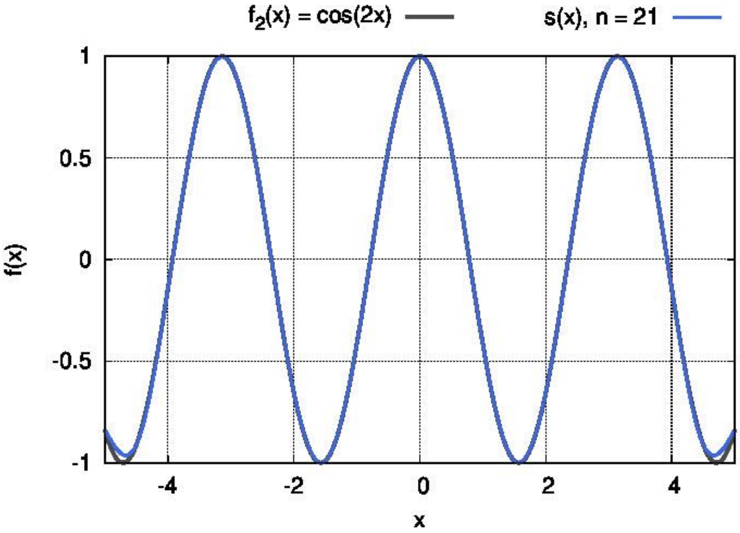
Z wykresów możemy wywnioskować, że wraz ze wzrostem *n* poprawia się jakość interpolacji. Dla *n=5 i n=8* wykres funkcji interpolującej znacznie odbiega od wykresu funkcji interpolowanej. Dla *n=21* widzimy, że wykresy te pokrywają się. Dodatkowa dla nieparzystego *n* ekstrema tych funkcji zgadzają się, natomiast dla *n=8* ekstremum funkcji interpolującej znacznie odbiega od teorii.



Rysunek 5: n=5 -> h=2.5



Rysunek 6:n=8 -> h=10/7



Rysunek 7: n=21 -h=0.5

Powyższe trzy wykresy przedstawiają wyniki interpolacji funkcji $f_2(x) = \cos(2x)$ kubicznymi funkcjami sklejanymi dla *n* węzłów.

Tak jak dla poprzedniej funkcji, wraz ze wzrostem *n* poprawia się jakość interpolacji. Mimo, że poprawa jest znaczna, to dla *n=21* nadal funkcje nie pokrywają się idealnie, widać to na krańcach.

3. Wnioski

Za pomocą interpolacji funkcjami sklejanymi z wykorzystaniem wartości drugich pochodnych w węzłach otrzymaliśmy satysfakcjonujące wyniki. Już przy *n=21* uzyskaliśmy w obu przypadkach niemal idealne wyniki, a dla funkcji okresowych, takich jak nasza druga funkcja moglibyśmy je polepszyć poprzez zwiększenie *n*. Porównując wyniki z wynikami z poprzednich laboratoriów możemy zauważyć, że wyniki są dużo bardziej dokładne, i nie musimy stosować już interpolacji z wykorzystaniem zer Czebyszewa, aby uniknąć efektu Rungego.

Źródła:

1.Wstęp teoretyczny był wzorowany na wykładzie autorstwa dr hab. inż. Tomasza Chwieja pt. „Interpolacja”.