Sprawozdanie – laboratorium nr 2

Odwracanie macierzy, obliczanie wyznacznika i wskaźnika uwarunkowania macierzy przy użyciu rozkładu LU

Kinga Pyrek, 07.03.2020

1. Wstęp teoretyczny

Metoda rozkładu LU jest metodą rozwiązywania układów równań. **L** w nazwie pochodzi od „lower”, czyli dolnej macierzy trójkątnej, wykorzystywanej w tej metodzie, a **U** od „upper” – górnej macierzy trójkątnej. Dzięki rozkładowi LU możemy także łatwo wyliczyć wyznacznik macierzy. Metoda ta polega na rozłożeniu oryginalnej macierzy **A** na macierz **L** i **U** w poniższy sposób:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} * \mathbf{U}.$$

Macierz **L** i **U** mają postać:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & u_{4n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{5n} \end{pmatrix}.$$

1.1 Rozwiązywanie układów równanie przy użyciu LU

Posiadając macierze **L** i **U** możemy rozwiązać układ równań:

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

$$\mathbf{LU}\vec{x} = \vec{b} \qquad\qquad \mathbf{L}\,\underbrace{(\mathbf{U}\vec{x})}_{y} = \vec{b}$$

poprzez rozwiązanie dwóch równań:

$$\mathbf{L}\vec{y} = \vec{b}$$

$$\mathbf{U}\vec{x} = \vec{y}.$$

Rozwiązanie tak rozłożonego układu jest dużo prostsze, dzięki wygodnym właściwościom macierzy trójkątnych(np. wyznacznik to iloczyn elementów na diagonali). Liczba wykonanych mnożeń do obliczenia wektora $\vec{x}$ wynosi n^2, dodawań $n^2 - n$, podczas gdy metoda Gaussa wykonuje aż $\frac{n^3}{2}$ operacji mnożenia.

1.2 Obliczanie wyznacznika

Stosując poniższe twierdzenie, wyliczymy bardzo łatwo wyznacznik macierzy rozłożonej na macierz **L** i **U**:

$$\det(AB) = \det(A) * \det(B).$$

Ponieważ wyznacznik macierzy trójkątnej i iloczyn jej elementów na diagonali oraz macierz **L** na diagonali ma same jedynki (więc wyznacznik macierzy **L** wynosi 1), możemy zapisać:

$$\det(A) = \det(L) * \det(U) = \det(U) = \sum_{i=1}^{n} u_{ii}.$$

1.3 Wyznaczenie macierzy odwrotnej stosując rozkład LU

Macierz odwrotną znajdujemy rozwiązując n układów równań

$$\mathbf{LU}\vec{x}^{(i)} = \vec{e}^{(i)} \qquad \text{i=1,2,…,n,}$$

$$\vec{e}^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{LU}\underbrace{\left[x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}\right]}_{X} = \underbrace{\left[e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)}\right]}_{I}$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{LUX} = \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A^{-1}}.$$

Kolumny macierzy odwrotnej $\mathbf{A^{-1}}$ składają się kolejno z rozwiązań układów równań $\vec{x}^{(i)}$.

1.4 Wskaźnik uwarunkowania macierzy

Wskaźnik uwarunkowania macierzy służy do określenia jaki wpływ na wynik końcowy ma macierz wejściowa. Jeżeli wskaźnik ten jest niski mówimy, że problem jest dobrze uwarunkowany, jeśli natomiast jest wysoki, to problem ten jest źle uwarunkowany. Wskaźnik liczymy ze wzoru:

$$\kappa_A = \|A\| * \|A^{-1}\|,$$

gdzie normę liczymy jako :

$$\|A\|_{1,\infty} = \max_{1 \le i,j \ll n} |a_{i,j}|.$$

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Macierz **A** jest kwadratową macierzą o wymiarze *nxn*, przyjmijmy za *n*=4.
Macierz tą wypełniamy zgodnie ze wzorem

$$a_{i,j} = \frac{1}{i+j+\delta},$$

gdzie $\delta = 2$.

Pierwszym zadaniem jest **znalezienie rozkładu LU macierzy A**. Stosujemy funkcję **int gsl_linalg_LU_decomp(gsl_matrix *a, gsl_permutation *p, int *signum)**, gdzie

- *A*- macierz układu,
- $\vec{p}$- wektor permutacji macierzy,
- *signum* – określa parzysta lub nieparzystą liczbę permutacji.

Następnie wyznaczyliśmy **elementy diagonalne macierzy U**. Rozkład LU tak naprawdę jest zapisywany w macierzy **A**, w taki sposób ze elementy na diagonali i ponad nią tworzą macierz U, która poniżej diagonali jest wypełniona zerami, a elementy pod diagonalą nadpisanej macierzy A są elementami macierzy U, która dodatkowo na diagonali ma jedynki, a powyżej jej zera. Z tego wynika, że elementy diagonalne **U** to elementy diagonalne macierzy **A** po wywołaniu **gsl_linalg_LU_decomp** na niej.

Z podpunktu **1.2** możemy wywnioskować, że wyznacznik macierzy **A**, będzie po prostu wyznacznikiem macierzy **U** (det(**L**)=1), który ponieważ macierz **U** jest trójkątna jest równy iloczynowi elementów diagonalnych.

W celu znalezienia **macierzy odwrotnej $\boldsymbol{A^{-1}}$** rozwiązujemy 4 układy równań (*n=4*) z wektorami wyrazów wolnych:

$$\vec{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \vec{b}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \quad \vec{b}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \vec{b}_4 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Do rozwiązania układów wykorzystujemy **int gsl_linalg_LU_solve(gsl matrix *A, gsl permutation *p, gsl vector *b, gsl vector *x)**, gdzie $\mathbf{b}$ to wektor wyrazów wolnych a **x** to wektor rozwiązań.

Następnym zadaniem było obliczenie $\mathbf{AA^{-1}}$. W tym celu tworzymy macierz **C**, która będzie wynikiem tego mnożenia. Poszczególne elementy macierzy **C** obliczymy ze wzoru:

$$C_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} A_{i,j} \cdot {A^{-1}}_{k,j}.$$

Wyliczyliśmy również wskaźnik uwarunkowania macierzy korzystając ze wzorów

$$\kappa_A = \|A\| * \|A^{-1}\|,$$

$$\|A\|_{1,\infty} = \max_{1 \le i,j \ll n} |a_{i,j}|.$$

2.2. Wyniki

Na zajęciach otrzymaliśmy następujące wyniki

- Macierz **A** z pierwotnymi współczynnikami

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3333 & 0.25 & 0.2 \\ 0.3333 & 0.25 & 0.2 & 0.166667 \\ 0.25 & 0.2 & 0.166667 & 0.142857 \\ 0.2 & 0.166667 & 0.142857 & 0.125 \end{pmatrix}$$

- Macierz **L** (część macierzy **A** po wykonaniu **gsl_linalg_LU_decomp**)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0.66667 & 0.833333 & 1 & 0 \\ 0.4 & 1 & -0.857143 & 1 \end{pmatrix}$$

- Macierz **U** (część macierzy A po wykonaniu **gsl_linalg_LU_decomp**)

$$U = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.333333 & 0.25 & 0.2 \\ 0 & 0.0333333 & 0.0416667 & 0.0428571 \\ 0 & 0 & -0.00138889 & -0.00238095 \\ 0 & 0 & 0 & 0.000102041 \end{pmatrix}$$

- Wyznacznik macierzy **A**

$$\det(A) = 2.36206e - 09$$

- Odwrócona macierz **A**

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 200 & -1200 & 2100 & -1120 \\ -1200 & 8100 & -15120 & 8400 \\ 2100 & -15120 & 29400 & -16800 \\ -1120 & 8400 & -16800 & 9800 \end{pmatrix}$$

- Iloczyn macierzy **A** i macierzy $\mathbf{A^{-1}}$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2.27374e - 13 & 0 & 0 \\ -2.84217e - 14 & 1 & 4.54747e - 13 & 0 \\ 0 & -2.27374e - 13 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Norma macierzy **A** i norma macierzy $\mathbf{A^{-1}}$ oraz wskaźnik uwarunkowana macierzy wyliczony ze wzoru w podpunkcie **1.4**

$$\|A\|_{1,\infty} = 0.50000$$

$$\|A^{-1}\|_{1,\infty} = 2940.000000$$

$$\kappa_A = 14700.000000.$$

3. Wnioski

Dzięki rozkładowi LU mogliśmy bardzo łatwo obliczyć wyznacznik macierzy **A**, który jest iloczynem elementów diagonalnych macierzy **U** i **L**, ale ponieważ wyznacznik macierzy **L** jest równy 1, wystarczy obliczyć wyznacznik macierzy **U**. Obliczyliśmy również wskaźnik uwarunkowania, którego wartość wskazuje na to, że macierz A jest źle uwarunkowana. Szczególnie jest to widoczne w otrzymanym wyniku $\mathbf{AA^{-1}}$. Z zasad algebry wynika, że powinnyśmy otrzymać w wyniku macierz jednostkową, mimo że nasza macierz ma co prawda jedynki na diagonali, to niektóre z wartości są zaburzone. Świadczy to, o źle dobranych współczynnikach macierzy **A** na wejściu. Podsumowując, metoda LU jest wydajna i szybka, jednak nie we wszystkich przypadkach działa, co widać w naszych wynikach, że złe uwarunkowanie może spowodować niepoprawne numeryczne rozwiązanie.