

Sprawozdanie – laboratorium nr 3

Iteracyjne rozwiązywanie układu równań liniowych metodą Jacobiego

Kinga Pyrek, 23.03.2020

1. Wstęp teoretyczny

Jedną z metod iteracyjnego(przybliżonego) rozwiązywania układu równań liniowych jest metoda Jacobiego. Przyjmujemy w niej pewien dowolny wektor \vec{x} i tworzymy ciąg wektorów $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)}, \dots, \vec{x}^{(n)}$, aby wektor $\vec{x}^{(n+1)}$ lepiej przybliżał rozwiązanie od $\vec{x}^{(n)}$. Rozwiązanie jest otrzymywane za pomocą kolejnych aproksymacji, proces ten jest powtarzany, dopóki warunek zbieżności nie jest spełniony. Mamy układ n równań liniowych $\mathbf{A}\mathbf{x} = \vec{b}$, który możemy przedstawić macierzowo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Macierz \mathbf{A} możemy rozłożyć na składniki $\mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}$, gdzie \mathbf{D} jest macierzą złożoną z elementów diagonalnych macierzy \mathbf{A} , \mathbf{L} z elementów pod diagonalą, \mathbf{U} z elementów ponad diagonalą:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} + \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie otrzymujemy iteracyjnie ze wzoru:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(b - (L + U)x^{(k)}),$$

gdzie $x^{(k)}$ jest k-tym przybliżeniem. Możemy również zapisać :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

W metodzie tej obliczamy kolejno wszystkie składowe nowego przybliżenia wektora rozwiązań.

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Naszym zadaniem jest rozwiązanie równania różniczkowego:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - \beta V + F_0 \sin(\Omega t), \quad (1)$$

opisującego ruch ciała poddanego działaniu siły sprężystości ($-\omega^2 x$), siły tarcia ($-\beta V$), zależnej od prędkości ciała oraz sile powodującej ruch ($F_0 \sin(\Omega t)$).

Wprowadzamy siatkę, gdzie węzłami są kolejne chwile czasowe:

$$t = t_i = i * h, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

(h to krok czasowy na siatce). Rozwiązanie $x(t)$ będzie określone dla położen węzłowych $x(t) = x_{ti} = x_i$.

Drugą pochodną po czasie możemy zamienić na symetryczny trójpunktowy iloraz różnicowy:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}}{h^2}.$$

Z fizyki wiemy, że prędkość jest pierwszą pochodną położenia po czasie, więc prędkość możemy zastąpić niesymetrycznym dwupunktowym ilorazem różnicowym:

$$V_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{h}.$$

Wstawiamy go do równania różniczkowego i otrzymujemy:

$$\frac{x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}}{h^2} = -\omega^2 x_i - \beta V_i + F_0 \sin(\Omega h i).$$

Zamieniając prędkość na iloraz różnicowy, na lewą stronę równania przenosimy wyrazy z niewiadomymi x_i , a na prawą wyrazy wolne:

$$x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1} + \omega^2 h^2 x_i + \beta h(x_{i+1} - x_i) = \frac{F_0 \sin(\Omega h i)}{h^2}.$$

Co możemy symbolicznie zapisać:

$$a_1 x_{i-1} + a_2 x_i + a_3 x_{i+1} = b_i, \text{ gdzie}$$

- $a_1 = 1$
- $a_2 = \omega^2 h^2 - 2 - \beta h$
- $a_3 = 1 + \beta h$
- $b_i = F_0 \sin(\Omega h i) h^2$

W ten sposób dostaliśmy układ równań $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$.

Do ostatecznego rozwiązania potrzebujemy jeszcze warunków początkowych:

- na wychylenie $x(t = 0) = x_0 = 1$
- na prędkość początkową $V(t = 0) = V_0 = \frac{x_{i-1} - x_i}{h} = 0$.

Dołączamy te dwa dodatkowe równania i otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix}$$

Dzięki temu, że macierz \mathbf{A} jest macierzą rzadką, nie musimy tworzyć w naszym programie całej macierzy \mathbf{A} . Możemy ją przechowywać w trzech wektorach:

$$d_0 = [1, 1, a_3, a_3, \dots, a_3] \quad d_1 = [0, -1, a_2, a_2, \dots, a_2] \quad d_2 = [0, 0, a_1, a_1, \dots, a_1]$$

Z poniższego wzoru będziemy obliczać kolejne i -te elementy ($x_n[i]$) nowego przybliżenia, korzystając z przybliżenia poprzedniej iteracji (x_s):

$$x_n[i] = \frac{1}{d_0[i]} (b[i] - d_1[i]x_s[i-1] - d_2[i]x_s[i-2]) \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n,$$

gdzie n oznacza wymiar macierzy \mathbf{A} .

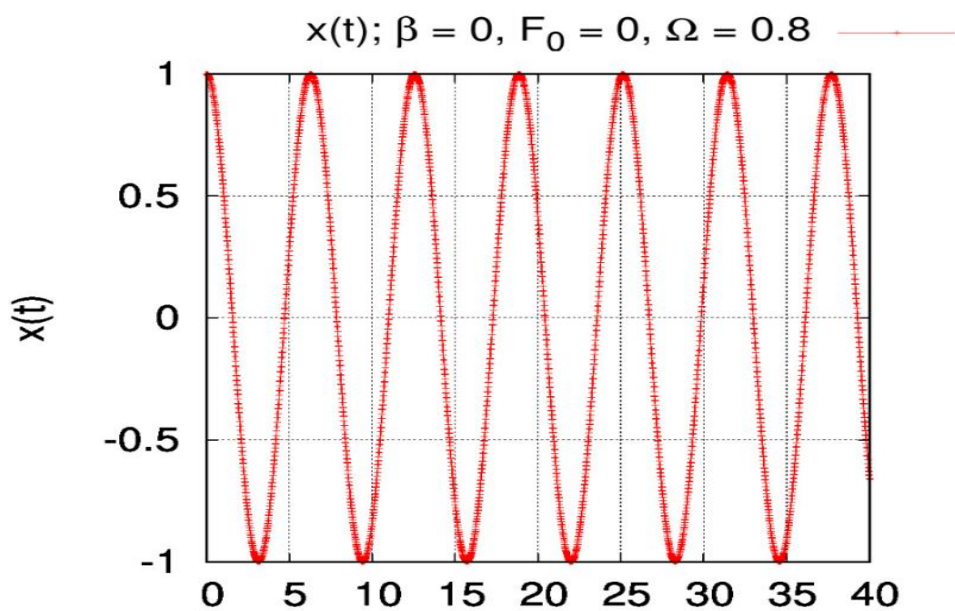
Dla $i=0, i=1$ składniki wektora x_s zastępujemy dowolnymi wartościami, ponieważ dla tych iteracji wektor x_s ma ujemne indeksy. Dowolne wartości wektora nie wpływają na poprawność wykonania zadania, w następnych iteracjach wartości te zostaną nadpisane.

W celu ostatecznego rozwiązania równania (1) przyjmujemy parametry:

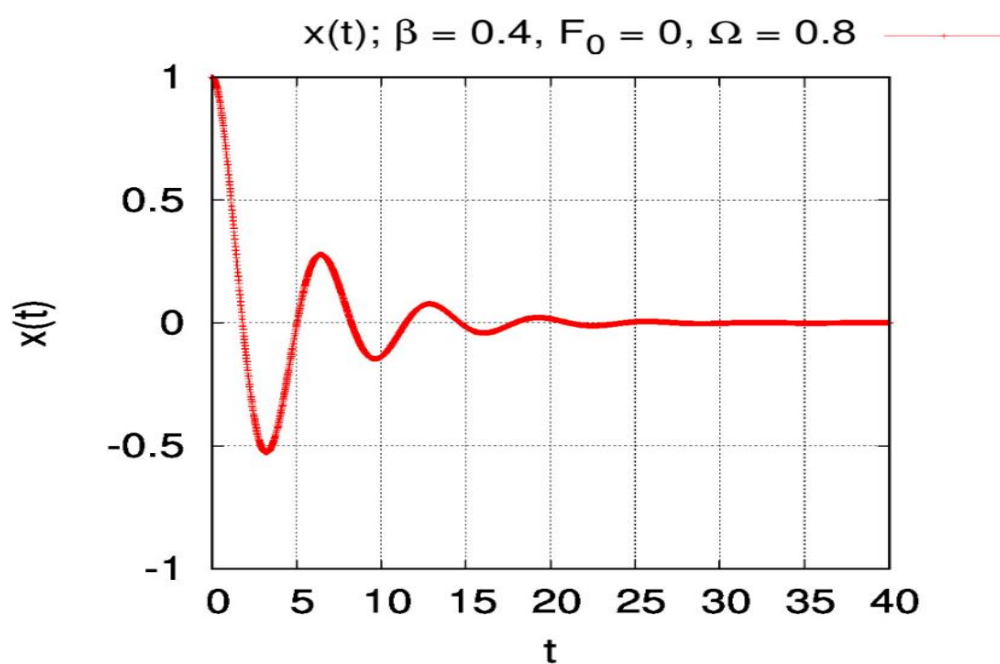
- $V_0 = 0$,
- $x_0 = 1$,
- $\omega = 1$,
- $n = 2001$,
- $h = 0.02$.

2.2. Wyniki

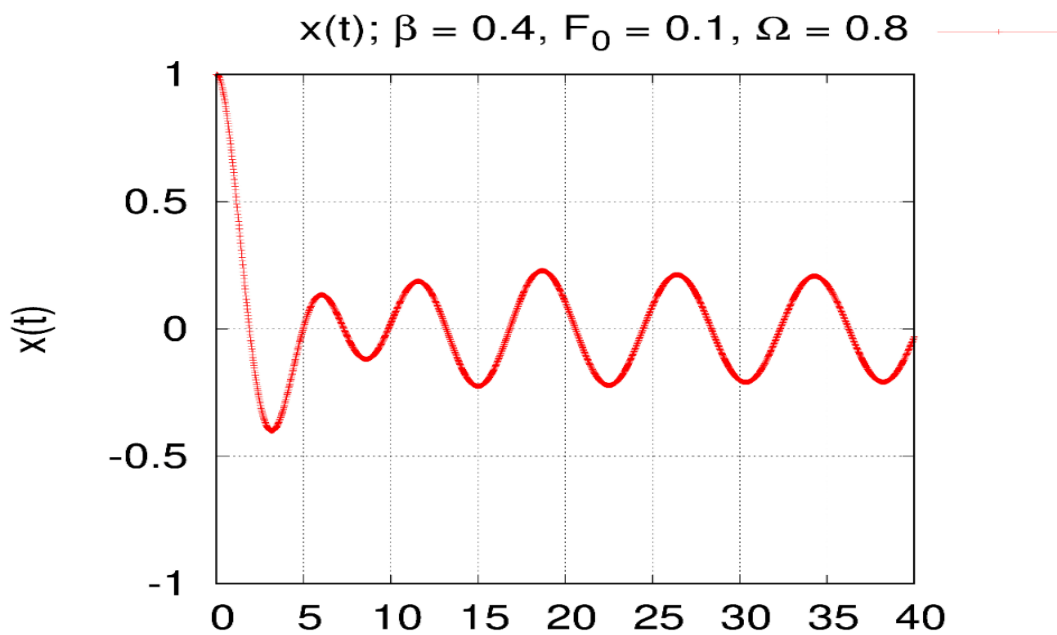
Wyniki przedstawiliśmy za pomocą wykresów. Rozpatrywaliśmy trzy przypadki dla zmieniających się parametrów β - tłumienie i F_0 - wymuszenie, opisanych nad wykresem.



Rysunek 1: Wychylenie $x(t)$ dla $\beta=0, F_0=0, \Omega=0.8$.



Rysunek 2: Wychylenie $x(t)$ dla $\beta=0.4, F_0=0, \Omega=0.8$.



Rysunek 3: Wychylenie $x(t)$ dla $\beta=0.4, F_0=0.1, \Omega=0.8$.

Nasz program we wszystkich przypadkach potrzebował wykonać 2001 iteracji w celu osiągnięcia zbieżności. Program kończy działanie, kiedy zawartość wektora wynikowego nie zmienia się znacząco w kolejnych iteracjach. Wynik był uznawany za zbieżny, gdy spełniona była nierówność $|s_n - s_s| < 10^{-6}$, gdzie

- $s_n = \sum_i (x_n[i])^2$,
- $s_s = \sum_i (x_s[i])^2$.

3. Wnioski

Metoda iteracyjna Jacobiego jest prostą w implementacji metodą pozwalającą na rozwiązanie układu równań. Jeśli macierz **A** jest macierzą rzadką (posiada wiele zer), to metoda ta jest wydajniejsza, dzięki możliwości zapisu macierzy **A** za pomocą trzech wektorów. W celu rozwiązania równania (1) zostało wykonanych 2001 iteracji. Dla porównania w metodzie Gaussa- Seidla, która korzysta tylko z jednego wektora, ilość iteracji wynosi tylko 2. Widzimy więc, że istnieją lepsze i wydajniejsze metody do rozwiązywania układów równań od metody Jacobiego.