Sprawozdanie – laboratorium nr 11

Odszumianie sygnału przy użyciu FFT - splot funkcji

Kinga Pyrek, 25.05.2020

1. Wstęp teoretyczny

FFT (z ang. Fast Fourier Transform), czyli szybka transformacja Fouriera to algorytm służący do wyznaczania dyskretnej transformaty Fouriera oraz transformaty do niej odwrotnej.

Dyskretna transformata Fouriera jest określona wzorem:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}nk} \qquad k = 0, \dots, N-1,$$

gdzie $x_0, \dots, x_{N-1}$ są liczbami zespolonymi.

Najpopularniejsza wersja algorytmu FFT jest algorytm radix-2. Zakładamy, że całkowita liczba węzłów jest potęgą 2.

$$x_j = \frac{2\pi}{N} j \qquad j = 0,1, \dots, N-1 \tag{1}$$

$$N = 2^r \quad r \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Współczynniki oznaczamy:

$$c_k =< E_k, f \geq=$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} E_k^*(x_j) f(x_j) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \exp(-I x_j k) = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \exp\left(-I \frac{2\pi}{N} jk\right). \tag{3}$$

Grupujemy osobno składniki parzyste $j = 2m$ i nieparzyste $j = 2m + 1$:

$$c_k = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m} \exp\left(-I \frac{2\pi}{N} (2m)k\right) + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m+1} \exp\left(-I \frac{2\pi}{N} (2m+1)k\right) \tag{4}$$

oraz nieparzyste $j = 2m + 1$:

$$c_k = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m} \exp\left(-I \frac{2\pi}{\frac{N}{2}} mk\right) +$$

$$+exp\left(-I\frac{2\pi}{N}k\right)\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m+1}\exp\left(-I\frac{2\pi}{N/2}mk\right). \quad (5)$$

Możemy zapisać

$$c_k = p_k + \varphi_k q_k,$$

gdzie

$$p_k = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m}\exp\left(-I\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}mk\right) \quad (6)$$

$$\varphi_k = \ exp\left(-I\frac{2\pi}{N}k\right) \quad (7)$$

$$q_k = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m+1}\exp\left(-I\frac{2\pi}{N/2}mk\right). \quad (8)$$

Korzystając z okresowości p_k i q_k nie musimy wyznaczać wszystkich współczynników, tylko połowę:

$$p_{k+\frac{N}{2}} = p_k \quad (9)$$

$$q_{k+N/2} = q_k. \quad (10)$$

Natomiast czynnik fazowy ma własność:

$$\varphi_{k+\frac{N}{2}} = \exp\left(-I\frac{2\pi}{N}\left(k+\frac{N}{2}\right)\right) = \exp\left(-I\frac{2\pi}{N}k\right)\exp\left(-I\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}\right)$$

$$= -\exp\left(-I\frac{2\pi}{N}k\right) = -\varphi_k. \quad (11)$$

Współczynniki możemy obliczyć dzięki DFT nakładem $O(\frac{N}{2})^2 = O(\frac{N^2}{4})$ oraz oszczędzamy czas wyznaczając współczynniki tylko dla $k < \frac{N}{2}$, ponieważ

$$c_k = \begin{cases} p_k + \varphi_k q_k & k < \frac{N}{2} \\ p_{k-\frac{N}{2}} - \varphi_k q_{k-\frac{N}{2}} & k \geq \frac{N}{2} \end{cases} \quad (12)$$

Następnie dzielimy sumy w p_k, q_k na sumy posiadające tylko elementy parzyste i nie parzyste, tym sposobem w powstałych sumach mamy dwa razy mniej elementów niż w elemencie macierzystym. Proces podziału rekurencyjnego kończymy, gdy liczba elementów równa jest 1.

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Splot dwóch funkcji możemy zdefiniować jako

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau, \tag{13}$$

Gdzie funkcja $f(t)$ oznacza sygnał, a funkcja $g(t)$ wagę. Splot obu funkcji traktujemy jako uśrednienie funkcji f pewną ustaloną funkcją wagową g. Wykorzystamy to w wygładzeniu zaszumionego sygnału. Do obliczeń wykorzystamy FFT:

$$FFT\{f(t) * g(t)\} = FFT\{f\} \cdot FFT\{g\} = f(k) \cdot g(k) \tag{14}$$

$$f * g = FFT^{-1}\{f(k) \cdot g(k)\}. \tag{15}$$

Przyjmujemy $f(t) = f_0(t) + \Delta$ jako sygnał, gdzie

$$f_0(t) = \sin(1 \cdot \omega t) + \sin(2 \cdot \omega t) + \sin(3 \cdot \omega t) \tag{16}$$

Jest sygnałem niezaburzonym. Przyjmujemy pulsację $\omega = \frac{2\pi}{T}$, okres T, Δ jako liczbę pseudolosową z zakresu [-0.5, 0.5]. Jako funkcję wagową przyjmujemy

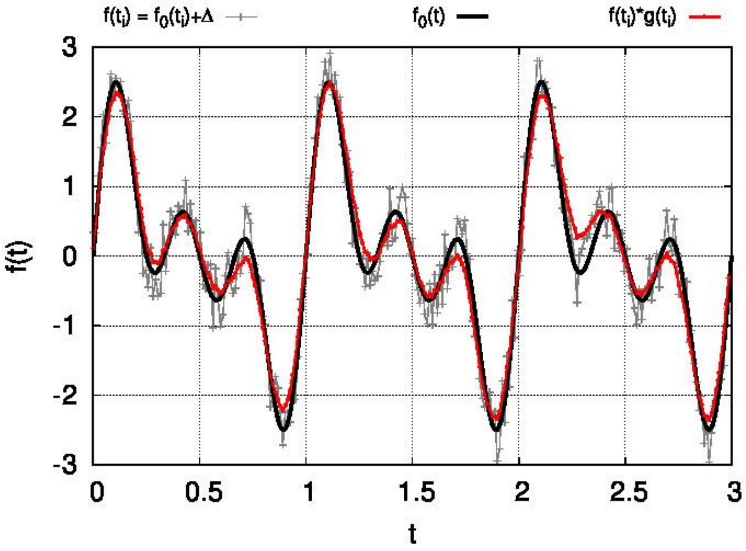
$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right). \tag{17}$$

Przyjmujemy parametry:

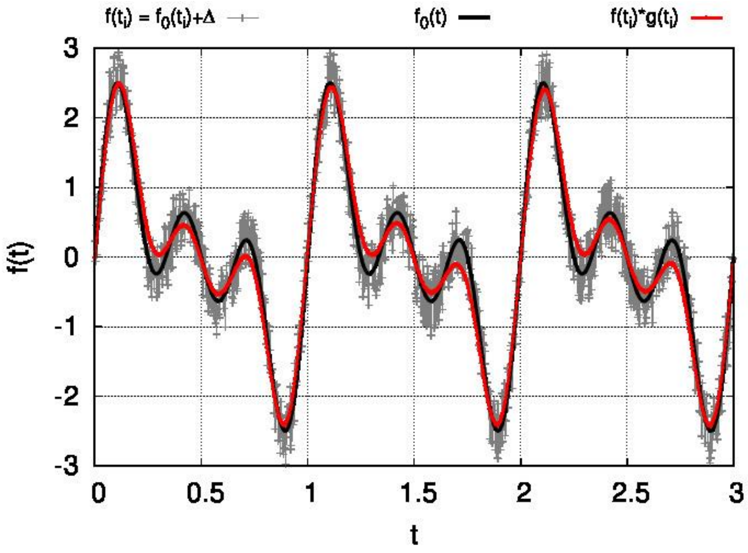
- Całkowita liczba węzłów $N = 2^k, \quad k = 8,10,12$
- Okres T=1
- Maksymalny okres czasu rejestru sygnału $t_{max} = 3T$
- Krok czasowy $dt = \frac{t_{max}}{N}$
- $\sigma = T/20$

2.2. Wyniki

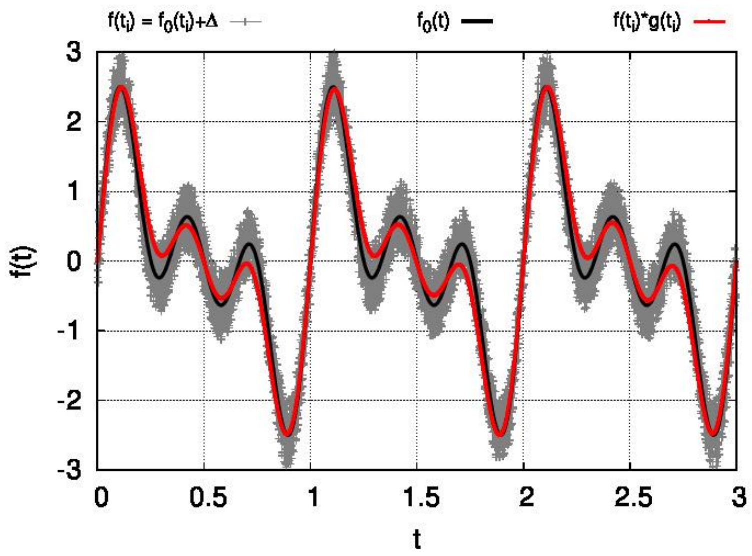
Dzięki napisanemu programowi oraz skryptowi Gnuplota wygenerowaliśmy wykresy przedstawiające wyniki odszumiania. W programie do wyznaczania transformat wykorzystano funkcje ***gsl_fft_complex_radix2_forward*** oraz ***gsl_fft_complex_radix2_backward*** z biblioteki ***GSL***.



Rysunek 1: k=8 $\Longrightarrow N_k = 2^8$ *próbek wejściowych*



Rysunek 2: k=10 $\Longrightarrow N_k = 2^{10}$ *próbek wejściowych*



Rysunek 3: k=12 $\Longrightarrow N_k = 2^{12}$ *próbek wejściowych*

Powyższe rysunki przedstawiają wyniki odszumiania sygnału przy użyciu FFT, gdzie $f_0(t)$ to oryginalny, niezaburzony sygnał, $f(t) = f_0(t) + \Delta$ to sygnał zaburzony, a $f(t) * g(t)$ to sygnał wygładzony, odszumiony (splot funkcji).

Na pierwszym wykresie możemy zauważyć, że splot funkcji nie jest gładki i nie pokrywa się całkowicie z niezaburzoną funkcją, chociaż kształtem ją przypomina. Na rysunku 2, gdzie zwiększona liczbę wejściowych próbek, widzimy że splot funkcji jest dużo gładszy, szczególnie w ekstremach. Na rysunku 3 splot funkcji jest już gładki, jednak jego kształt nadal odbiega od niezaszumionej funkcji.

3. Wnioski

Odszumianie funkcji przy użyciu FFT nie dało nam idealnych wyników. Co prawda, zwiększenie ilości próbek wejściowych znacznie poprawiło gładkość splotu funkcji, jednak nawet przy największej ilości próbek splot funkcji nie pokrywał się idealnie z niezaburzoną funkcją. Przy mniejszym *k* zaobserwowaliśmy, że splot funkcji nie jest gładki. Jednak metoda ta pozwoliła nam na szybkie odszumienie sygnału i uzyskanie przybliżonej funkcji niezaszumionej. Przyczyną tego, że nie dla każdego t_i wykresy pokrywają się jest parametr σ- odchylenie standardowe funkcji gaussowskiej *g(t)* (wzór 17). Ponieważ mamy splot $f(t) * g(t)$ to również σ odpowiada za kształt wykresu *f(t).*

Źródła

1.Wstęp teoretyczny był wzorowany na wykładzie autorstwa dr hab. inż. Tomasza Chwieja pt. „Szybka transformacja Fouriera" oraz na stronie https://pl.wikipedia.org/wiki/Szybka_transformacja_Fouriera