Sprawozdanie – laboratorium nr 7

Interpolacja Newtona z optymalizacją położeń węzłów

Kinga Pyrek, 25.04.2020

1. Wstęp teoretyczny

Interpolacja jest metodą, która polega na wyznaczeniu w danym przedziale funkcji interpolacyjnej z zadanymi jej wartościami w punktach, zwanymi **węzłami**. W przedziale $[a, b]$ mamy dane $n + 1$ różnych punktów $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, które są węzłami interpolacji, oraz wartości funkcji $y = f(x)$ w tych węzłach:

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2, \dots, f(x_n) = y_n.$$

W interpolacji wyznaczamy wartości funkcji, w punktach nie będącymi węzłami oraz szacujemy błąd przybliżonych wartości. Zatem problem sprowadza się do znalezienia **funkcji interpolującej *F(x)*,** która w węzłach przyjmuje takie same wartości jak **funkcja interpolowana**. Interpolacja jest szczególnym przypadkiem aproksymacji.

Ilorazy różnicowe są przydatne w interpolacji. Mamy daną funkcje *f(x)*, która przyjmuje w punktach x_i, gdzie i=0, 1, …, n, $x_i \neq x_j$ wartości $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$. Przy założeniu, że różnice $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ nie mogą być stałe, definiujemy ilorazy różnicowe:

- Pierwszego rzędu

$$f(x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

- Drugiego rzędu

$$f(x_{n-2}, x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_{n-1}; x_n) - f(x_{n-2}; x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}}$$

- N- tego rzędu

$$f(x_i, x_{i+1}; \dots;; x_{i+n}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}; \dots; x_{i+n}) - f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+n-1})}{x_{i+n} - x_i}.$$

W metodzie Newtona zakładamy, że odległości między węzłami mogą być różne

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \qquad i = 0,1,2, \dots$$

Szukany jest wielomian w postaci:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)}.$$

Wielomian ten musi spełniać warunek w węzłach interpolacji:

$$W_n(x_i) = f(x_i), \qquad i=0,\ 1,\ \dots,\ n.$$

Poszukiwany wielomian interpolacyjny można zapisać jako:

$W_n(x) = W_0(x) + [W_1(x) - W_0(x)] + [W_2(x) - W_1(x)]$+….+$[W_n(x) - W_{n-1}(x)]$,

gdzie $[W_k(x) - W_{k-1}(x)]$ są wielomianami zdefiniowanymi jako:

$$W_k(x) - W_{k-1}(x) = A_k(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}),$$

gdzie $A_k = const$.

Ostatecznie wielomian interpolacyjny można zapisać wykorzystując ilorazy różnicowe:

$$W_n(x) = f(x_0) + f(x_0; x_1)\omega_0 + f(x_0; x_1; x_2)\omega_1 + \cdots + f(x_0; x_1; \dots; x_n)\omega_{n-1}(x).$$

Jest to **wzór interpolacyjny Newtona dla nierównych odstępów argumentów**.

W innej metodzie optymalne położenia węzłów są zerami ***wielomianów Czebyszewa***. Wielomiany te są układem wielomianów ortogonalnych tworzących bazę przestrzeni wielomianów. Definicja rekurencyjna:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x$$

$$T_n(x) = 2x \cdot T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n \geq 2.$$

Rozwiązanie tej rekurencji można policzyć ze wzoru:

$$T_n(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n}{2}.$$

Wielomian Czebyszewa w przedziale $[-1, 1]$ posiada *k* zer dane wzorem:

$$x_j = \cos\left(\frac{2j - 1}{2k} \cdot \pi\right).$$

Efekt Rungego jest to zjawisko pogorszenia się interpolacji wielomianowej, pomimo zwiększenia liczby węzłów. NA początku przy wzroście liczby węzłów *n* można zauważyć poprawę przybliżenia, jednak przy dalszym wzroście *n*, przybliżenie pogarsza się, co jest w szczególności widoczne na krańcach przedziałów. Jest to typowe dla interpolacji za pomocą wielomianów o wysokim stopniu przy równoodległych węzłach. W celu uniknięcia efektu Rungego stosuje się wyżej wyjaśnioną metodę, gdzie węzłami interpolacji są zera wielomianów Czebyszewa.

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Naszym zadaniem jest przeprowadzenie interpolacji wielomianowej Newtona dla funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Wzór interpolacyjny ma postać:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(x_0) \cdot \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i),$$

gdzie $f^{(j)}(x_0)$ jest ilorazem rzędu *j* liczonym dla węzła x_0, a x_i to położenia węzłów. Badamy przedział $[x_{MIN}, x_{MAX}]$, w naszym zadaniu przyjęto $x_{MIN} = -5$, $x_{MAX} = 5$. Dla porównania zadanie najpierw wykonane dla równomiernie rozłożonych węzłów, a potem dla tych będących zerami wielomianu Czebyszewa danych wzorem:

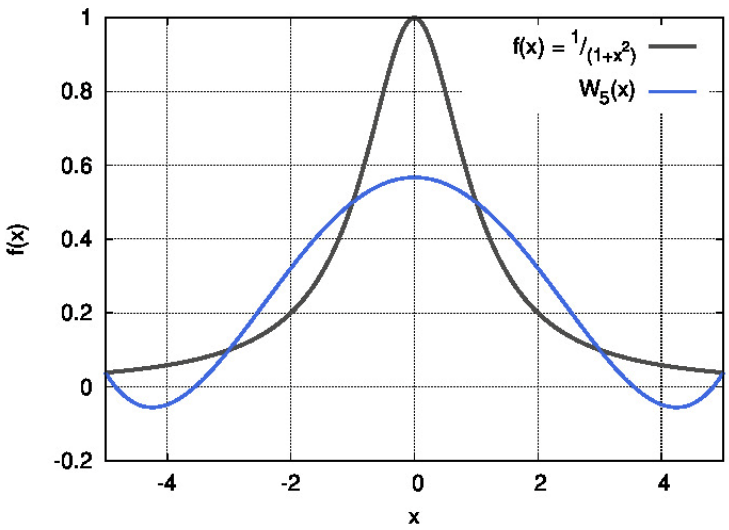
$$x_i = \frac{1}{2}\left[(x_{min} - x_{max})\cos\left(\pi\frac{2i+1}{2n+2}\right) + (x_{min} + x_{max})\right], \qquad i = 0,1,\dots,n,$$

Gdzie *i* to numery węzłów, obliczenia wykonujemy dla *n*=5, 10, 15, 20.

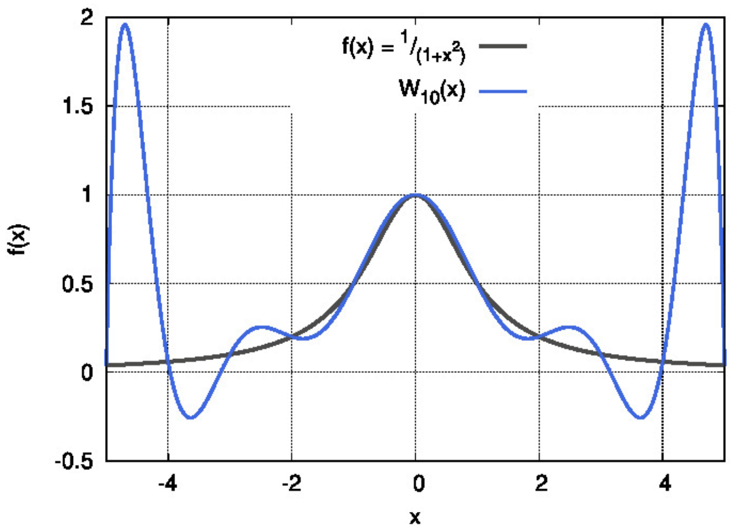
2.2. Wyniki

Za pomocą skryptu Gnuplota otrzymaliśmy graficzne przedstawienie wyników interpolacji.

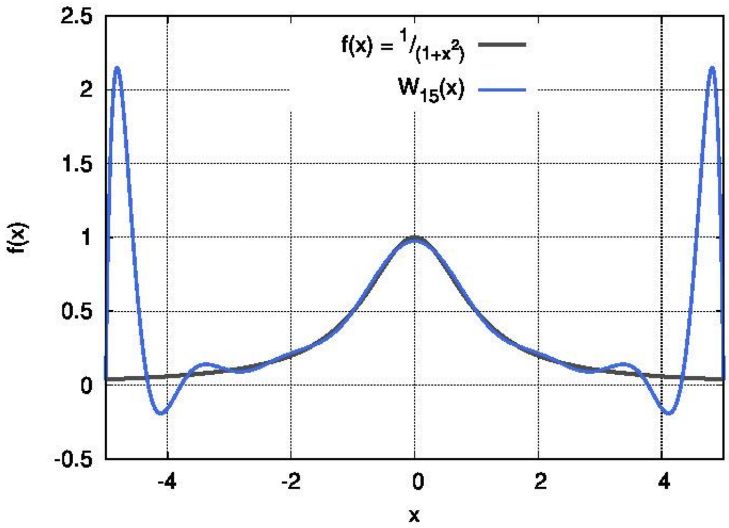
Wyniki interpolacji wielomianem Newtona Wn(x) z równoodległymi węzłami, gdzie liczba węzłów: n + 1:



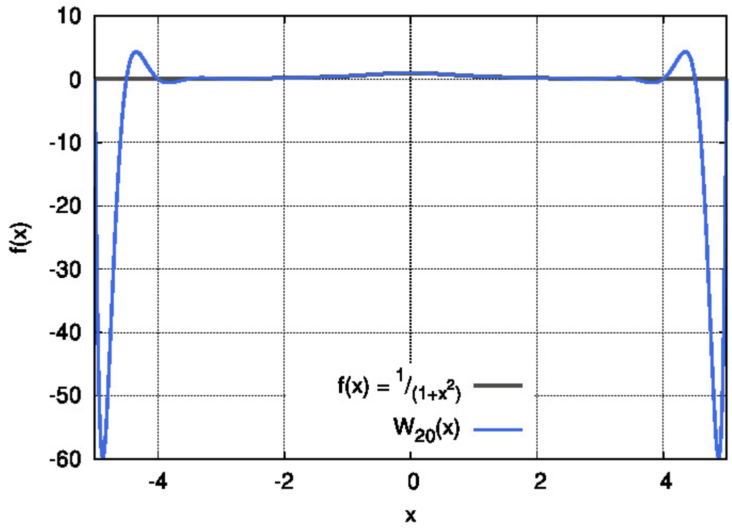
Rysunek 4: n=5 $\Longrightarrow \Delta x=2$



Rysunek 3: n=10 $\Longrightarrow \Delta x=1$

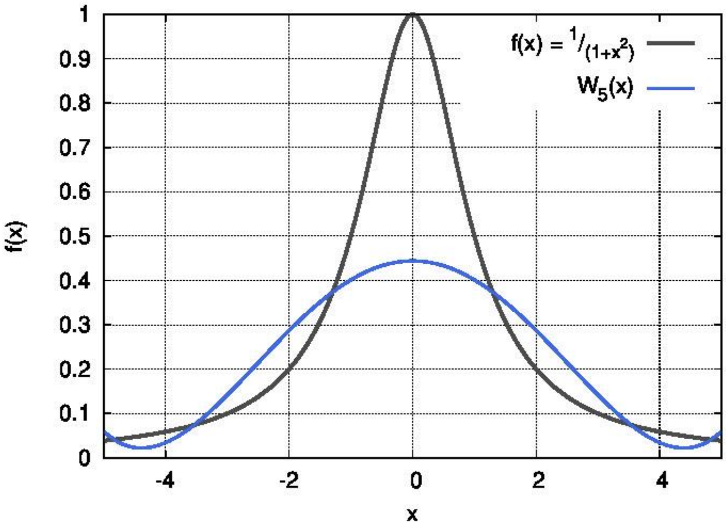


Rysunek 2: n=15 $\Longrightarrow \Delta x=\frac{2}{3}$

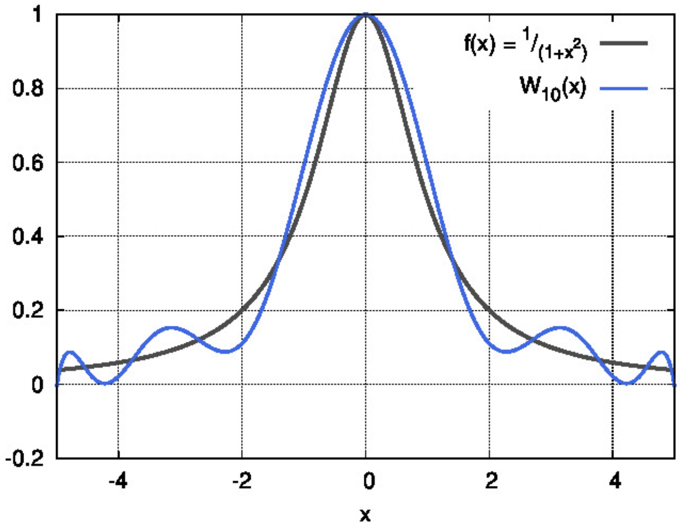


Rysunek 1: n=20 $\Longrightarrow \Delta x=\frac{1}{2}$

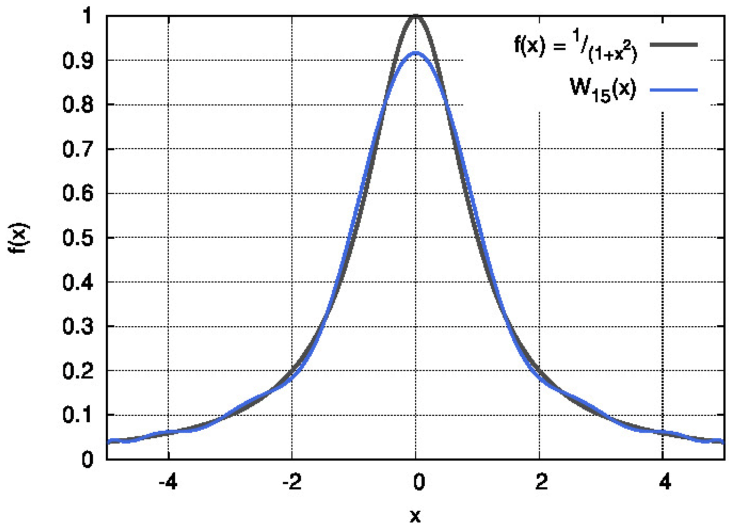
Wyniki interpolacji wielomianem Newtona Wn(x) z węzłami, których współrzędne są wyznaczone przez miejsca zerowe wielomianów Czebyszewa, gdzie liczba węzłów: n + 1:



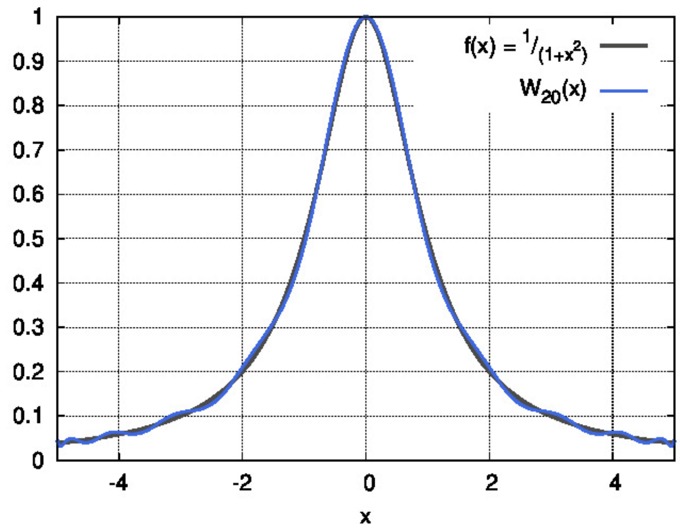
Rysunek 5: n=5



Rysunek 6: n=10



Rysunek 7: n=15



Rysunek 8: n=20

Możemy zauważyć znaczną różnicę między pierwszą metodą a metodą z zerami Czebyszewa. Na pierwszych czterech rysunkach widzimy, że wraz ze wzrostem *n* jakość przybliżenia wcale się nie poprawia, szczególnie widoczne jest to na krańcach, gdzie funkcja znacznie odbiega od wzoru. Natomiast na rysunkach 5-8 zauważalna jest znaczna poprawa, dla n=5 nie jest to bardzo widoczne, ale dla większych *n* widzimy, że przybliżenie zachowuje się znacznie lepiej niż w poprzednim przypadku, szczególnie na krańcach przedziału funkcja jest dużo lepiej dopasowana.

3. Wnioski

Za pomocą metody Newtona i metody z wielomianami Czebyszewa otrzymaliśmy wyniki interpolacji. Na podstawie graficznego przedstawienia interpolacji możemy zauważyć efekt Rungego, na pierwszych czterech rysunkach widzimy jak przybliżenie znacznie odbiega od ideału, szczególnie na krańcach. Aby zniwelować ten efekt użyliśmy zer wielomianów Czebyszewa, przedstawione tego wyniki na rysunkach 5-8 potwierdzają skuteczność tej metody. Przybliżenie pokrywa się już z funkcja, wraz ze wzrostem *n* przybliżenie jest coraz dokładniejsze- przy n=20 przybliżenie praktycznie pokrywa się z funkcją. Jak widzimy dużo lepsze było zastosowanie metody Newtona wraz z doborem węzłów metodą zer Czebyszewa.