Sprawozdanie – laboratorium nr 5

Wyznaczanie wartości i wektorów własnych macierzy symetrycznej

metodą potęgową z redukcją Hotellinga

Kinga Pyrek, 05.04.2020

1. Wstęp teoretyczny

Metoda potęgowa stosowana jest do znajdowania wartości własnej o największym module i odpowiadającego jej wektora własnego. Metoda ta polega na wykonaniu ciągu mnożeń wektora startowego przez macierz, której wartości własnej szukamy.

Mamy macierz A, załóżmy, że ma ona *n* liniowo niezależnych wektorów własnych stanowiących bazę przestrzeni liniowej

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n.$$

Wtedy dla dowolnego wektora v_0:

$$v_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Wówczas jeśli przez λ_i oznaczymy wartości własne macierzy A, to

$$Av_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i x_i$$

$$v_m = A^m v_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i^m x_i.$$

Załóżmy, że wartości własne tworzy ciąg:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Wtedy jeśli λ_1 jest dominująca wartością własną macierzy A i wektor v_0 ma składową w kierunki x_1, to

$$\lim_{m\to\infty} \frac{A^m v_0}{\lambda_1^m} = a_1 x_1.$$

Z tego wynika, że wartość własną można obliczyć z poniższego wzoru

$$\lambda_1 = \lim_{m\to\infty} \frac{y^T v_{m+1}}{y^T v_m}$$

dla dowolnego wektora **y**, który nie jest ortogonalny do x_1**.** Przeważnie **y** na pozycji elementu o największym module ma 1, v_{m+1} ma *a*, a na pozostałych zera.

Ze wzoru

$$v_m = \lambda_1^m [a_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^m a_i x_i]$$

możemy wywnioskować, że zbieżność metody zależy od $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^m$ oraz a_i, czyli od wyboru v_0. Ciąg nie jest zbieżny, jeżeli wartość własna o największym module jest zespolona.

Wektor własny x_1 wyznaczamy w następujący sposób. Ponieważ $v_m \approx \lambda_1^m a_1 x_1$, to unormowany wektor ma postać $x_1 = \frac{v_m}{|v_m|}$.

Oprócz wyznaczenia wartości własnej o największym module, przy jej wykorzystaniu, możemy także wyznaczyć pozostałe kolejne wartości własne stosując **redukcje Hotellinga**.

W **redukcji Hotellinga** przyjmujemy za wektor **v** lewy wektor własny przynależny do wartości własnej λ_1, ale przeważnie nie znamy wektorów lewych. Więc metoda ta jest tylko skuteczna dla macierzy symetrycznych, dla których lewe i prawe wektory są takie same

$$v = x_1$$

$$W_1 = A - \lambda_1 x_1 x_1^T$$

lub też rekurencyjnie

$$W_0 = A$$

$$W_i = W_{i-1} - \lambda_1 x_i x_i^T \qquad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

W tej metodzie redukcji występuje **iloczyn diadyczny**- jest to iloczyn wektora kolumnowego **u** z wektorem wierszowym $\mathbf{v}^T$ o tym samym wymiarze:

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix}.$$

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Naszym zadaniem jest znalezienie wartości własnych macierzy symetrycznej **A** o wymiarze *n=7,o* wyrazach zadanych wzorem

$$A_{i,j} = \sqrt{i+j} \qquad\qquad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Ponieważ macierz jest symetryczna, to wszystkie jej wartości własne i składowe jej wektorów własnych są rzeczywiste.

Wykonamy to zadanie dwoma sposobami. Najpierw za pomocą funkcji z biblioteki Numerical Recipies, tak jak robiliśmy to na poprzednich zajęciach, a następnie nowo poznaną metodą iteracyjną.

Metoda z poprzednich zajęć

Po wypełnieniu macierzy **A**, następnym krokiem jest redukcja macierzy do postaci trójdiagonalnej (**A→T**) przy użyciu metody ***tred2*** z biblioteki *Numerical Recipies*: **tred2(A, n, d,e)**, gdzie

- **A** to macierz, która diagonalizujemy,
- *n* to wymiar macierzy **A**,
- **d** to wektor elementów diagonali macierzy **A**,
- **e** to wektor elementów poddiagonali macierzy **A.**

Macierz **A** przekształciliśmy do postaci:

$$T = P^{-1}AP,$$

gdzie **P** to macierz przekształcenia.

Następnie w celu znalezienia wartości własnych używamy procedury ***tqli*** z biblioteki *Numerical Recipies*: **tqli(d, e, n, Z)**, gdzie

- **d** to wektor elementów diagonali macierzy **T**,
- **e** to wektor elementów poddiagonali macierzy **T**,
- *n* to rozmiar macierzy,
- **Z** to macierz, którą inicjalizujemy jako macierz jednostkową, wymiaru *n x n* po procedurze jej kolumny przechowują wektory własne macierzy **T**.

Metoda iteracyjna

Teraz wyznaczamy wartości własne korzystając z metody potęgowej. Robimy to następująco:

- Ustalamy numer poszukiwanej wartości własnej *k=1, 2, …, n*
- Dla danego *k* ustalamy wektor startowy $x_0 = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$,
- W każdej iteracji, dla ustalonego k obliczamy, kolejno

$$x_{i+1} = W_k x_i$$

$$\lambda_i = \frac{x_{i+1}^T x_i}{x_i^T x_i}$$

$$x_{i+1} = \frac{x_{i+1}}{\|x_{i+1}\|_2}$$

$$x_i = x_{i+1}.$$

  Wykonujemy 8 iteracji.
- Po zakończeniu iteracji, wykonujemy redukcje Hotellinga:

$$W_{k+1} = W_k - \lambda_k x_k x_k^T.$$

  Gdzie **W** to oryginalna macierz **A.**

2.2. Wyniki

Macierz **A**, po jej wypełnieniu ma postać:

$$A = \begin{bmatrix} 1.41421 & 1.73205 & 2 & 2.23607 & 2.44949 & 2.64575 & 2.82843 \\ 1.73205 & 2 & 2.23607 & 2.44949 & 2.64575 & 2.82843 & 3 \\ 2 & 2.23607 & 2.44949 & 2.64575 & 2.82843 & 3 & 3.16228 \\ 2.23607 & 2.44949 & 2.64575 & 2.82843 & 3 & 3.16228 & 3.31662 \\ 2.44949 & 2.64575 & 2.82843 & 3 & 3.16228 & 3.31662 & 3.4641 \\ 2.64575 & 2.82843 & 3 & 3.16228 & 3.31662 & 3.4641 & 3.60555 \\ 2.82843 & 3 & 3.16228 & 3.31662 & 3.4641 & 3.60555 & 3.74166 \end{bmatrix}.$$

Obliczone wartości własne dwoma metodami przedstawione są w poniższej tabeli.

Tabela 1: Obliczone wartości własne dwoma metodami, w metodzie iteracyjnej są to wyniki ostatnich iteracji.

Wartość własna	Metoda I	Metoda II (iteracyjna)
λ_1	-4.02198e-07	19.7862
λ_2	4.43579e-07	-0.712341
λ_3	-7.10793e-06	-0.0133172
λ_4	-0.00033598	-0.000335581
λ_5	-0.0133178	-6.55765e-06
λ_6	-0.712341	8.71798e-07
λ_7	19.7862	-5.77264e-08

Jeśli w wykonaniu zadania pominiemy etap normalizowania wektora, czyli

$$x_{i+1} = \frac{x_{i+1}}{\|x_{i+1}\|_2},$$

to tylko pierwsza wartość własna zostanie poprawnie obliczona.

Jeśli ilość iteracji zwiększymy np. do 1000, to kolejne wartości własne wynoszą:

Tabela 2: Otrzymane wartości własne w metodzie iteracyjnej, przy 1000 iteracjach.

Wartość własna	Metoda iteracyjna przy 1000 iteracjach
λ_1	19.7862
λ_2	-0.71234
λ_3	-0.0133172
λ_4	-0.00033558
λ_5	-6.56634e-06
λ_6	8.76976e-07
λ_7	-5.48971e-08

3. Wnioski

Metoda iteracyjna okazała się szybka w przypadku naszego zadania. Dzięki redukcji Hotellinga mogliśmy wyznaczyć nie tylko dominującą wartość własne, ale też pozostałe. Widać jednak, że kolejne wartości własne coraz bardziej różnią się od tych uzyskanych metodą pierwszą, która jest bardziej precyzyjna. Pominięcie normalizowania wektora w każdej iteracji spowoduje, że tylko pierwsza wartość własna zostanie poprawnie obliczona, następne będą wynosić -*nan*. Możemy również zauważyć, że w metodzie tej nie potrzeba wiele iteracji do uzyskania zbieżności. Zwiększenie iteracji z ośmiu do tysiąca nie spowodowało większej różnicy w wynikach(tabela2). Metoda ta jednak nie jest tak dokładna, jak wyznaczenie wartości własnych za pomocą funkcji bibliotecznych.