Sprawozdanie – laboratorium nr 1

Rozwiązywanie układu równań liniowych metodami bezpośrednimi

Kinga Pyrek, 29.02.2020

# 1. Wstęp teoretyczny

Jedną z metod bezpośrednich jest **metoda eliminacji Gaussa**, która jest najczęściej stosowana do rozwiązywania układów równań liniowych oraz do obliczania rzędu macierzy, macierzy odwrotnej, wartości wyznacznika i do wyznaczenia rozkładu LU. Metoda eliminacji Gaussa polega na doprowadzeniu macierzy głównej, dzięki operacjom elementarnym na wierszach macierzy, do postaci, gdzie na przekątnej są same jedynki, a pozostałe miejsca są wypełnione zerami.

Przystępując do rozwiązywania układu równań liniowych tworzymy macierz główną A, wektor niewiadomych $\vec{x}$ oraz wektor wyrazów wolnych $\vec{b}$. Robimy to w następujący sposób:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + \cdots + a_{4n}x_n = b_4 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} & \mathrm{a}_{13} & & \mathrm{a}_{1n} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} & \mathrm{a}_{23} & \cdots & \mathrm{a}_{2n} \\ \mathrm{a}_{31} & \mathrm{a}_{32} & \mathrm{a}_{32} & & \mathrm{a}_{3n} \\ \mathrm{a}_{41} & \mathrm{a}_{42} & \mathrm{a}_{42} & & \mathrm{a}_{4n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathrm{a}_{n1} & \mathrm{a}_{n2} & \mathrm{a}_{n3} & \cdots & \mathrm{a}_{nn} \end{bmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \\ \mathrm{x}_4 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_n \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} \mathrm{b}_1 \\ \mathrm{b}_2 \\ \mathrm{b}_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ \mathrm{b}_4 \end{bmatrix}$$

PRZYKŁAD: (metoda eliminacji Jordana- zupełnej)

Mamy przykładowy układ równań:

$$\begin{cases} x + 2y = 9 \\ -x + 2 = 7 \end{cases}$$

Tworzymy macierz główną (składającą się z współczynników stojących przy zmiennych) oraz wektor wyrazów wolnych:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Pierwszy wiersz macierzy A i wektora b dzielimy przez współczynnik:

$$w_1 = a_{11} = 1$$

Czyli w naszym przypadku A i b pozostają bez zmian.

Następnie od i-tego wiersza (i=2,3,…,n, w naszym przypadki nasze n=2) odejmujemy wiersz pierwszy pomnożony przez współczynnik:

$w_{1i} = a_{i1}$, czyli w naszym przypadku

$$w_{12} = a_{21} = -1.$$

Po tym przekształceniu otrzymujemy :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Następnie przechodzimy do drugiego wiersza i teraz powtarzamy procedurę, drugi wiersz macierzy A i wektora b dzielimy przez współczynnik:

$$w_2 = a_{22} = 4$$

Otrzymujemy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Następnie od i-tego wiersza (i=1,3,…,n, w naszym przypadki nasze n=2, więc pozostaje tylko i=1) odejmujemy wiersz drugi pomnożony przez współczynnik:

$w_{2i} = a_{i2}$, czyli w naszym przypadku

$w_{21} = a_{12} = 2$.

Otrzymujemy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Z tej postaci możemy już wyznaczyć niewiadome:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

# 2. Zadanie do wykonania

## 2.1. Opis problemu

Za zadanie mamy rozwiązać równanie różniczkowe ruchu oscylatora harmonicznego, które możemy rozwiązać za pomocą metody eliminacji Gaussa.

Z drugiej zasady dynamiki Newtona otrzymujemy:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t) \text{ , gdzie:} \qquad (1)$$

- $x(t)$ to położenie w zależności od czasu,
- $\omega$ to częstość kołowa drgań oscylatora,
- *k*-stała sprężystości,
- *m*- masa.

Drugą pochodną położenia *x* po czasie *t* możemy przybliżyć następującym ilorazem różnicowym:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \approx \frac{x(t+\Delta t)-2x(t)+x(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2}, \qquad (2)$$

oraz przyjmujemy oznaczenia : $\Delta t = h$, $x_i = x(ih)$. Wówczas z pierwszego i drugiego równania otrzymujemy wzór iteracyjny na wyznaczenie $x_{i+1}$, potrzebujemy wtedy tylko znać dwa poprzednie położenia $x_i, x_{i-1}$:

$$x_{i+1} + (\omega^2 h^2 - 2)x_i + x_{i-1} = 0. \qquad (3)$$

Do rozwiązania potrzebujemy jeszcze tylko warunków początkowych: $x_0 = A$, $\frac{(x_1-x_0)}{h} = v_0$, gdzie *A* jest początkowych wychyleniem z równowagi, a $v_0$ początkową wartością prędkości ciała (*h* przyjmujemy jako krok całkowania). $(\omega^2 h^2 - 2)$ przyjmujemy za współczynnik $\alpha$.

Przyjmujemy następujące wartości dla zmiennych:

| | |
|---|---|
| *k/m* | 1 |
| $v_0$ | 0 |
| *A* | 1 |
| *h* | 0.1 |
| *N(liczba pomiarów, czyli też wymiar macierzy)* | 400 |

Teraz układ równań możemy zapisać za pomocą macierzy:

$$\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}$$

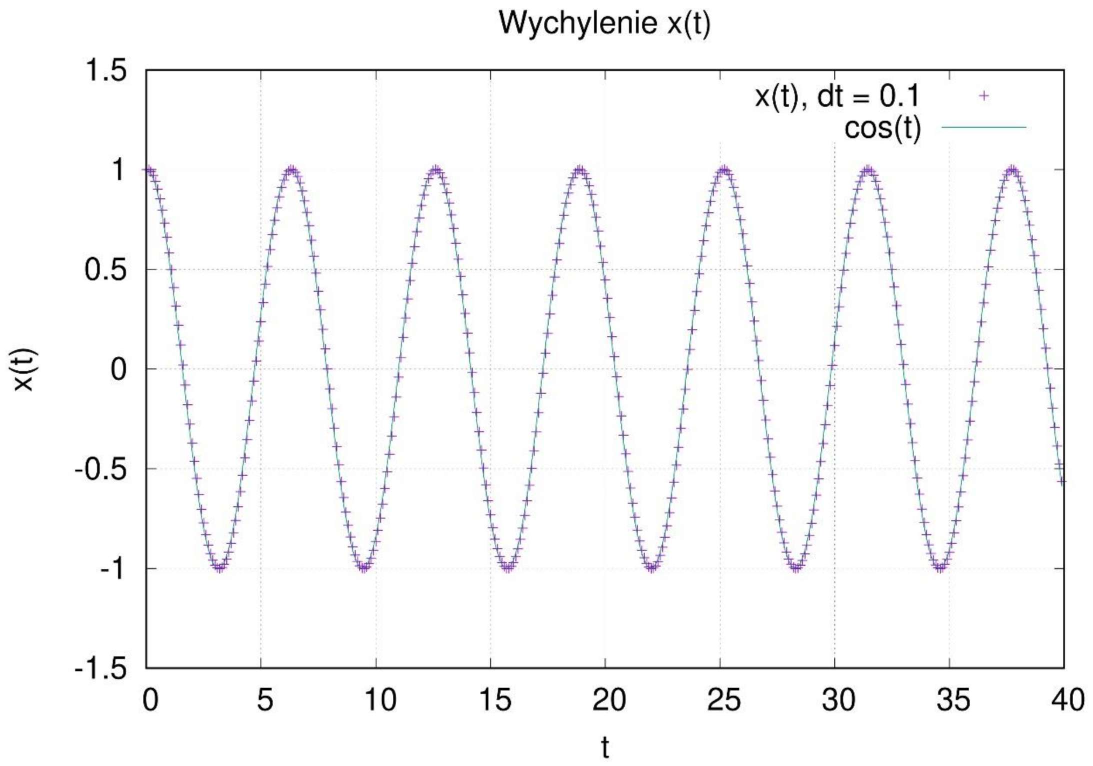
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ v_0 \Delta t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wektor niewiadomych $\vec{x}$ znajdziemy właśnie dzięki metodzie eliminacji Gaussa-Jordana. Posłuży nam do tego gotowa funkcja **gaussj**, która za argument przyjmuje macierz *nxn*, wektor wyrazów wolnych $\vec{b}$ i zapisuje w nim wynik.

Jej działanie polega na utworzeniu macierzy głównej z dopisaną kolumną wyrazów wolnych, następnie macierz ta jest sprowadzana do macierzy jednostkowej poprzez wykonywanie operacji elementarnych na jej wierszach. Na koniec kolumna z wyrazami wolnymi jest rozwiązaniem.

## 2.2. Wyniki

Aby uzyskać graficzną analizę problemu, w programie dopisaliśmy kolumnę z czasem (od *t*=0s z krokiem czasowym 0.1 aż do 39.9s) i wyeksportowaliśmy do pliku, na podstawie którego przy pomocy skryptu gnuplot wygenerowaliśmy poniższy wykres zależności położenia *x(t)* od czasu *t*:




*Rysunek 1: Graficzne przedstawienie wyników - punkty wychylenie wraz z nałożonym wykresem cos(t)*

Na wykresie przedstawiliśmy również wykres cos(t), który jest analitycznym rozwiązaniem równania różniczkowego (1). Widzimy, że punkty położenia x(t) od t nakładają się z wykresem cos(t).

## 3. Wnioski

Po przeanalizowaniu wyników, możemy wysnuć następujące wnioski:

- ✓ metody bezpośrednie rozwiązywania układów równań dają bardzo dokładne wyniki, jednocześnie nie są bardzo skomplikowane
- ✓ im mniejszy krok całkowania h tym bardziej dokładne wyniki, jednak trzeba pamiętać, że wzrasta wtedy liczba obliczeń
- ✓ punkty położenia nakładają się z wykresem cos(t), czyli analitycznym rozwiązaniem równania (1), świadczy to o poprawności wykonania zadania.