Sprawozdanie – laboratorium nr 9

Aproksymacja w bazie wielomianów Grama

Kinga Pyrek, 12.05.2020

# 1. Wstęp teoretyczny

*Aproksymacja liniowa* funkcji *f(x)* polega na wyznaczeniu współczynników $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ funkcji aproksymującej podanej wzorem:

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_m\varphi_m(x),$$

Gdzie wyrazy $\varphi_i(x)$ są bazowymi funkcjami *(m+1)*-wymiarowej podprzestrzeni liniowej $X_{m+1}(X_{m+1} \in X)$.

Żądane jest, aby funkcja *F(x)* spełniała warunek:

$$\left|\left|f(x) - F(x)\right|\right| = minimum$$

Wybieramy podprzestrzeń i bazę zależnie od rodzaju problemu:

1) Podprzestrzeń funkcji trygonometrycznych z bazą – 1, sin(x), cos(x), sin(2x), cos(2x),..., sin(kx), cos(kx)
2) Podprzestrzeń wielomianów stopnia m z bazą- $1, x, x^2, x^3, \dots, x^m$ (lub wielomiany ortogonalne)
3) Podprzestrzeń funkcji, o własnościach ściśle związanych z własnościami rozważanego problemu (np. $\exp(-ax^2 + bx + c)$.

***Definicja aproksymacji średniokwadratowej w bazie wielomianów:***

Mamy funkcje *f(x)* i *g(x)*, są one ortogonalne na pewnym dyskretnym zbiorze punktów $x_1, x_2, \dots, x_n$ jeżeli

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i) = 0$$

Oraz funkcje *f(x)* i *g(x)* spełniają następujące warunki:

$$\sum_{i=0}^{n} [f(x_i)]^2 > 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} [g(x_i)]^2 > 0.$$

Ciąg funkcyjny $\{\varphi_m(x)\} = \varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ stanowi bazę ortogonalną dla węzłów aproksymacji $x_1, x_2, \dots, x_n$ jeżeli narzucimy warunek

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i) \qquad j \neq k$$

oraz, że nie wszystkie węzły są zerami wielomianów:

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_j^2(x_i) > 0.$$

Przy aproksymacji wielomianami ortogonalnymi macierz układu normalnego jest macierzą diagonalną

$$D^T D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

$$d_{jj} = \sum_{i=0}^{n} \varphi_j^2(x_i).$$

Macierz układu ma jedno rozwiązanie i jest dobrze uwarunkowana.

Aby znaleźć wielomiany ortogonalne, zakładamy, że węzły są równoodległe

$$x_i = x_0 + i * h, \qquad i = 0,1,2,\dots,n.$$

Przekształcamy:

$$q = \frac{x - x_0}{h}, \quad x_i \longrightarrow q_i.$$

Znajdujemy ciąg wielomianów $\left\{F_i^{(n)}(q)\right\} = F_0^{(n)}(q), F_1^{(n)}(q), .., F_m^{(n)}(q)$ postaci$F_k^{(n)}(q) = a_0 + a_1 q + a_2 q(q-1) + \cdots + a_k q(q-1) \dots (q-k+1)$ spełniające warunek ortogonalności $\sum_{i=0}^{n} F_j^{(n)}(i) F_k^{(n)}(i) = 0 \Leftrightarrow j \neq k$.

Korzystamy z postaci wielomianu czynnikowego

$$q^{[k]} = q(q-1)\dots(q-k+1)$$

$$F_k^{(n)}(q) = a_0 + a_1 q^{[1]} + a_2 q^{[2]} + \cdots + a_k q^{[k]}.$$

Następnym krokiem jest normowanie wielomianów

$$\hat{F}_k^{(n)}(0) = 1, \qquad k = 0,1,2,\dots,m$$

$$\hat{F}_k^{(n)}(q) = 1 + b_1 q^{[1]} + b_2 q^{[2]} + \dots + b_k q^{[k]}.$$

Poszukiwane wielomiany ortogonalne są wielomianami Grama:

$$\hat{F}_k^{(n)}(q) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s}\binom{k+s}{s}\frac{q^{[s]}}{n^{[n]}}.$$

Możemy teraz znaleźć funkcję aproksymującą *F(x)*

$$F(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{c_k}{s_k}\hat{F}_k^{(n)}(q) = \sum_{k=0}^{m} \frac{c_k}{s_k}\hat{F}_k^{(n)}\left(\frac{x-x_0}{h}\right), \quad m \le n.$$

Współczynniki dane są wzorem:

$$s_k = \sum_{q=0}^{n} [\hat{F}_k^{(n)}(q)]^2 \qquad\qquad c_k = \sum_{i=0}^{n} y_i \hat{F}_k^{(n)}(x_i).$$

# 2. Zadanie do wykonania

## 2.1. Opis problemu

Naszym zadaniem jest aproksymacja funkcji $f_{szum}(x) = f(x) + C_{rand}(x)$ z użyciem wielomianów Grama w przedziale $x \in [x_{min}, x_{min}]$ na siatce równoodległych węzłów. Funkcja *f(x)* jest zdefiniowana następująco:

$$f(x) = \sin\left(\frac{14\pi x}{x_{max} - x_{min}}\right)\left(\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{(x+x_0)^2}{2\sigma^2}\right)\right).$$

$C_{rand}$ jest zaburzeniem stochastycznym zdefiniowanym jako $C_{rand} = \frac{Y-0.5}{5}$, gdzie $Y \epsilon [0,1]$ i jest pseudolosową liczbą o rozkładzie równomiernym.

W zadaniu przyjęliśmy:

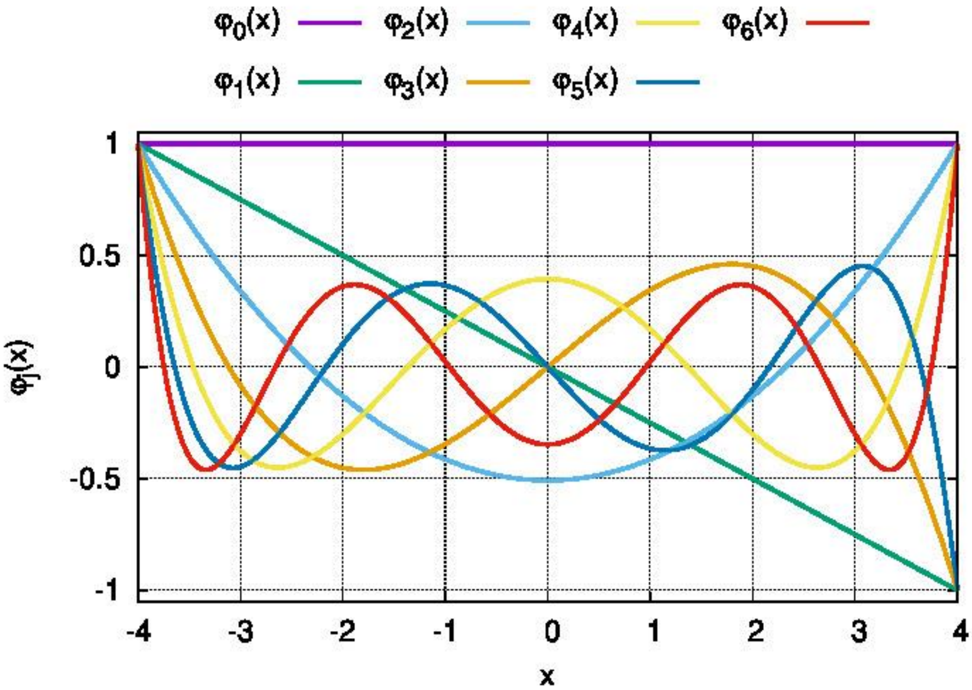
- liczbę węzłów $n = 201$
- $x_{min} = -4$
- $x_{max} = 4$
- $\sigma = \frac{x_{max} - x_{min}}{16}$
- $x_0 = 2$

- wagę w(x)=1.

Aproksymację przeprowadzono dla m=10,30,50.

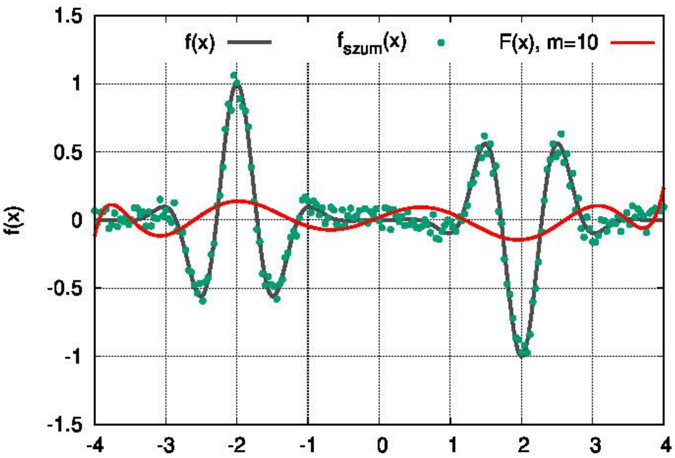
## 2.2. Wyniki

Napisany program oraz skrypt *Gnuplota* pozwoliły na wygenerowanie wykresów przedstawiających wyniki aproksymacji.

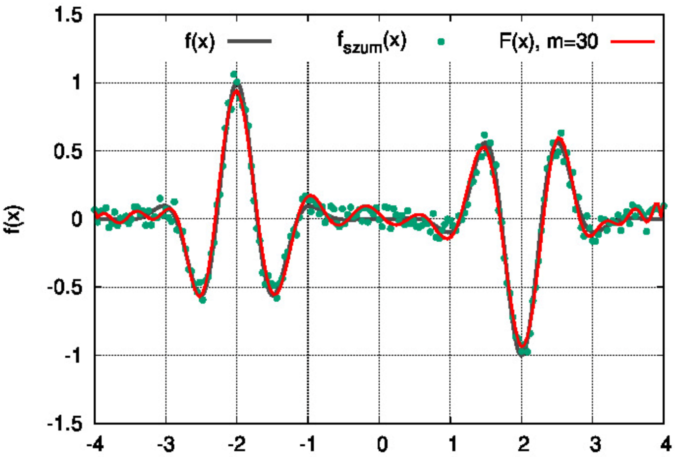



*Rysunek 1: Wykres siedmiu pierwszych wielomianów Grama*

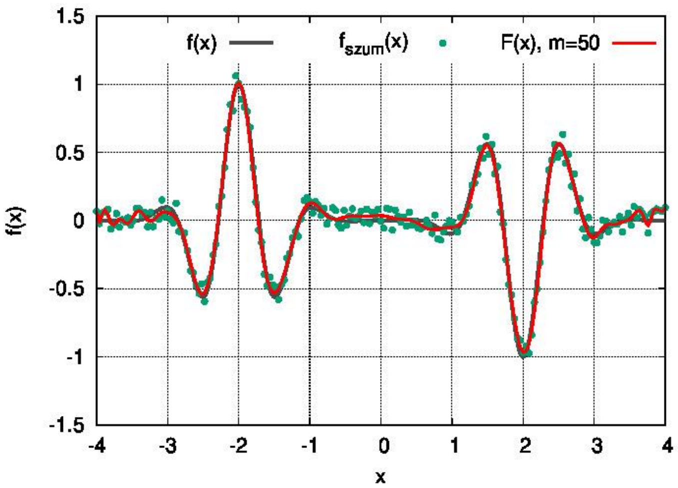
Możemy zauważyć, że po drugim przebiegu funkcja ma kształt sinusoidalny, może być to spowodowane przez wartości początkowe $\varphi_{-1}(x) = 0, \varphi_0(x) = 1$.




*Rysunek 2: m=10*



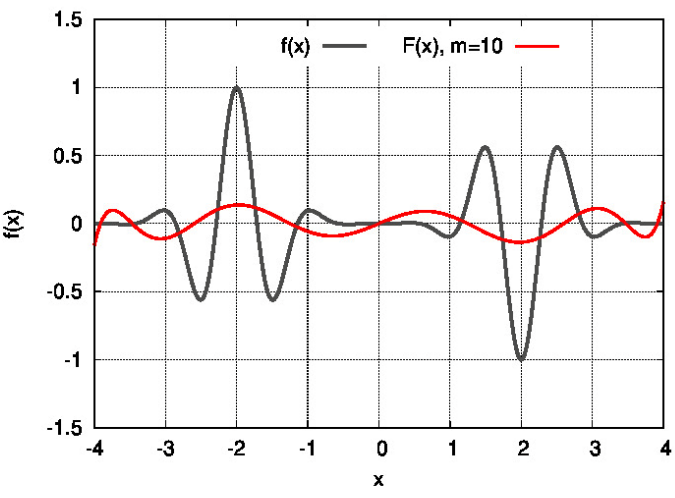

*Rysunek 3: m=30*



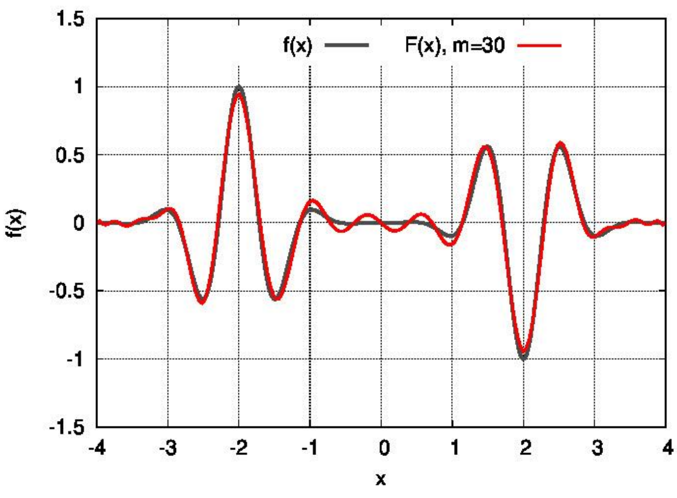

*Rysunek 4: m=50*

Powyższe trzy rysunki przedstawiają wyniki aproksymacji według danych $f_{szum}(x)$ dla 201 węzłów przy pomocy różnej liczby wielomianów Grama; użyto *m+1* wielomianów.

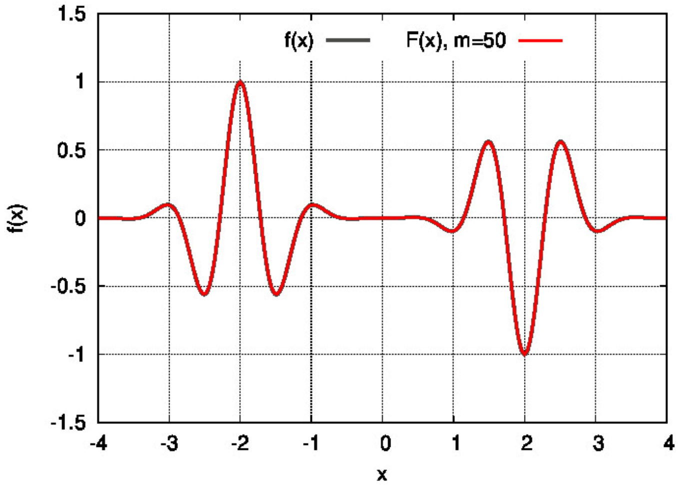
Możemy wywnioskować, że wraz ze wzrostem liczby użytych wielomianów występuje polepszenie funkcji aproksymującej. Dla *m=10* widać, że wykres funkcji aproksymującej znacznie dobiega od *f(x)*. Dla *m=30* widać znaczną poprawę, funkcje są dużo bardziej zbliżone do siebie, jednak w miejscach, gdzie jest większe zagęszczenie punktów funkcji aproksymowanej są widoczne oscylacje. Taka sama sytuacja występuje, gdy *m=50*, nie widać już tak znacznej poprawy w porównaniu z *m=30*, jak w przypadku *m=10* i *m=30*.




*Rysunek 5: m=10*




*Rysunek 6: m=30*




*Rysunek 5: m=50*

Powyższe trzy rysunki przedstawiają wyniki aproksymacji według danych $f(x)$ dla 201 węzłów przy pomocy różnej liczby wielomianów Grama(ponieważ zielone punkty *f(x)szum* pokrywały się z *f(x)*, nie przedstawiono ich na powyższych wykresach); użyto m+1 wielomianów(bez szumu).

Dla porównania przeprowadziliśmy aproksymację bez szumu. Tak jak przedtem, wraz ze wzrostem *m* polepsza się jakość aproksymacji. Jednak nie ma znacznej różnicy pomiędzy przypadkiem z szumem, a bez losowego szumu.

# 3. Wnioski

Napisany program pozwolił nam skutecznie wykonać aproksymację w bazie wielomianów Grama. W każdym przypadku, wraz ze wzrostem używanych wielomianów *m* wykres funkcji aproksymującej pokrywał się coraz bardziej z wykresem funkcji aproksymowanej. Niewielką poprawę widać w przypadku niezaszumionej funkcji, wtedy dla m=50 funkcje pokrywają się całkowicie(rysunek 7), podczas gdy w przypadku zaszumienia funkcja aproksymująca lekko oscylowała(rysunek 4). Dzięki dobrze dobranym *m* i braku szumu jesteśmy w stanie uzyskać niemal idealne wyniki.

Źródła:


1.Wstęp teoretyczny był wzorowany na wykładzie autorstwa dr hab. inż. Tomasza Chwieja pt. „Aproksymacja”.