Sprawozdanie – laboratorium nr 10

Poszukiwanie minimum wartości funkcji metodą symulowanego wyżarzania

Kinga Pyrek, 18.05.2020

1. Wstęp teoretyczny

Algorytm symulowanego wyżarzania został opisany w 1953 roku przez Nicholasa Metropolis. Nazwa algorytmu pochodzi od analogii w metalurgii. W procesach ochładzania cieczy i stygnięcia metali zaobserwowano, że przy stopniowym ochładzaniu, cząsteczki oddając energię rozkładają się bardziej systematycznie tworząc równomierne struktury. Jeżeli spadek temperatury jest zbyt gwałtowny, to cząsteczki rozłożą się bardzo chaotycznie. W algorytmie tym w kolejnych iteracjach możemy wybrać także „gorsze” przybliżenia co odróżnia nasz algorytm od algorytmów iteracyjnych. Prawdopodobieństwo akceptacji „gorszego” rozwiązania

$$P = \exp\left(-\frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{T}\right). \tag{1}$$

Zależy od parametru *T*- temperatury. Kiedy jest *T* jest duże wartość wykładnika jest wtedy bliska zeru, więc $P \to 1$, a gdy *T* jest małe wykładnik jest dużą ujemną liczbą, więc $P \to 0$.

Prosty algorytm symulowanego wyżarzania-iteracyjny

Na początku wybieramy punkt startowy x_0 i określamy wartość funkcji celu $f(x_0)$ dla danego wędrowca, ustalamy temperaturę *T* i ilość kroków *M* jaką ma wędrowiec wykonać.

1) Generatorem liczb pseudolosowych losujemy przemieszczenie Δx i określamy $f(x_i + \Delta x)$
2) Akceptujemy nowe położenie z prawdopodobieństwem P równym 1 jeśli
$$f(x_i + \Delta x) \leq f(x_i) \Rightarrow x_{i+1} = x_i + \Delta x$$
w przypadku kiedy $f(x_i + \Delta x) > f(x_i)$ określamy prawdopodobieństwo jak we wzorze (1) oraz losujemy liczbę $X \in U(0,1)$ i akceptujemy nowe położenie z prawdopodobieństwem *P*, jeśli $X < P$

3) Co *M* iteracji obniżamy temperaturę T: $T_{new} = C * T_{old}, C < 1$, co pozwala efektywnie zmniejszyć prawdopodobieństwo wybrania położenia o wyższej funkcji kosztu.

Kroki 1-3 powtarzamy *M* razy dla każdego wędrowca. Po zakończeniu wyszukujemy wędrowca o najniższej funkcji celu.

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

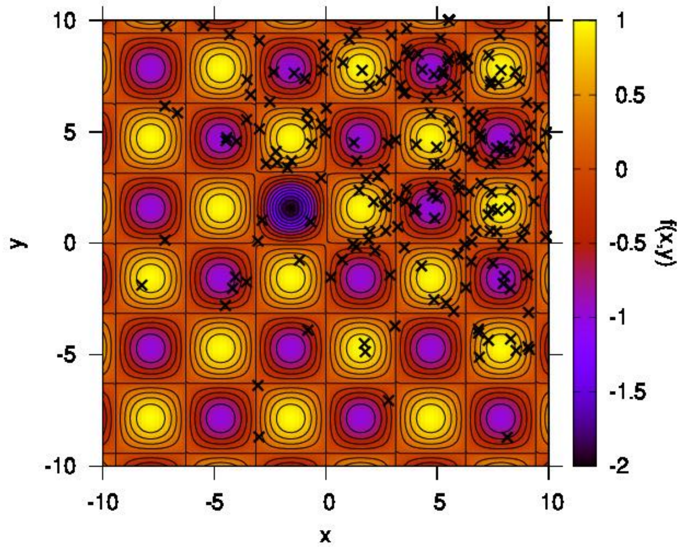
Naszym zadaniem jest znalezienie minimum funkcji

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y) - \exp\left(-\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(y+\frac{\pi}{2}\right)^2\right).$$

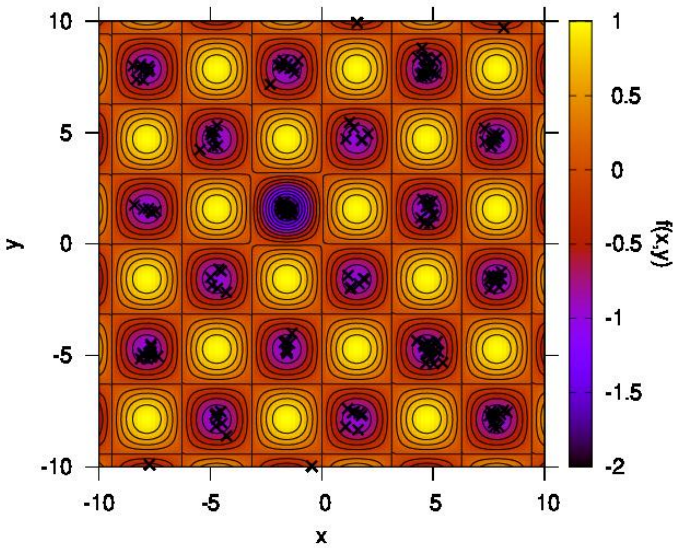
Posłuży nam do tego metoda symulowanego wyżarzania ze zmienną temperaturą *T* dla *N* wędrowców. Metoda ta jest algorytmem typu Monte Carlo, czyli polega na wielokrotnym losowaniu położeń wędrowców. Tak jak w opisanym algorytmie we wstępie teoretycznym, jeśli w nowym położeniu wędrowca funkcja f przyjmuje wartość mniejszą, to stare położenie nadpisujemy nowym położeniem wędrowca. W przeciwnym wypadku nowe położenie przyjmujemy z prawdopodobieństwem P, zadanym przez rozkład Boltzmanna. Jeśli temperatura *T* jest wysoka to prawdopodobieństwo wybrania „gorszego" rozwiązania jest duże, jeśli jest niska to prawdopodobieństwo jest małe. Algorytm programujemy dla *N=200* wędrowców, ich położenie początkowe to $(x_0, y_0) = (5,5)$. Minimum funkcji szukamy w przedziale $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}] = [-10,10] \times [-10,10]$. Wykonujemy 100 kroków błądzenia dla każdego wędrowca. Przy losowaniu $\Delta x, \Delta y$ uważamy, aby $(x + \Delta x), (y + \Delta y)$ nie wyszły poza zakres, jeśli wyjdą losujemy $\Delta x, \Delta y$ do skutku.

2.2. Wyniki

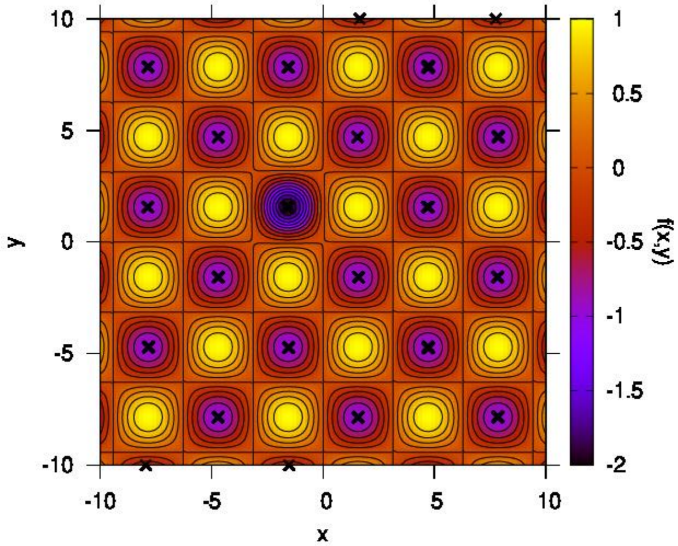
Za pomocą napisanego programu oraz skryptu Gnuplota wygenerowane zostały wykresy.



Rysunek 1: IT=0, T=10



Rysunek 2: IT=7, T=0.078125

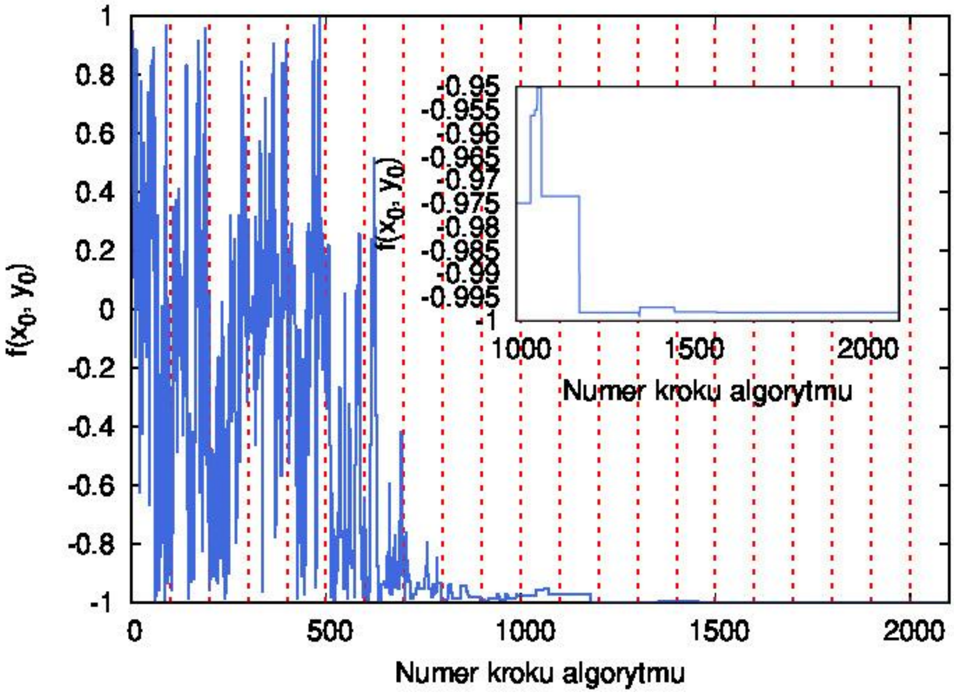


Rysunek 3: IT=20, T=0.000010

Powyższe trzy rysunki przedstawiają położenia wszystkich wędrowców w trakcie działania algorytmu po zakończeniu błądzenia dla danej iteracji IT.

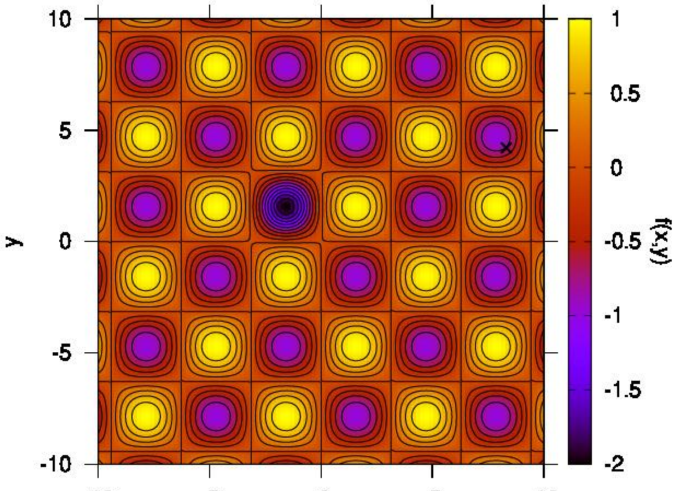
Znaleziono minimum globalne w -1.999923 w punkcie (-1.573380, 1,564102).

Z powyższych rysunków możemy wywnioskować, że wraz ze spadkiem temperatury coraz lepiej są wyodrębniane minima (zaznaczone iksami). W ostatnim przypadku, gdy IT=20 i T jest już bardzo niskie widzimy, że iksy - minima pokrywają się z teorią (niebieskimi obszarami). Jedno z tych minimów jest naszym znalezionym minimum globalnym. Na rysunku 1 widzimy, że iksy są rozłożone chaotycznie, może to wynikać z za dużego T, wtedy prawdopodobieństwo wybrania „gorszego” rozwiązania jest większe. Na drugim rysunku coraz położenia wędrowców są bliżej niebieskich obaszarów.

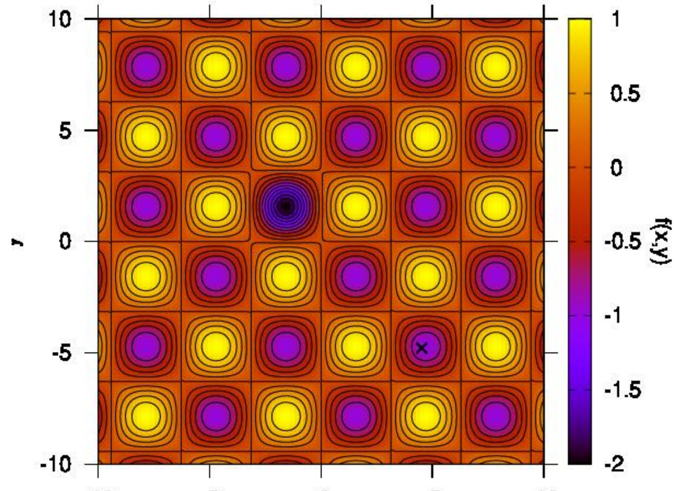


Rysunek 4: Wartości funkcji f(x,y) dla wszystkich położeń pierwszego wędrowca. Czerwone linie to miejsca zmiany temperatury co 100 kroków. Wykres w środku to zbliżenie na ostatnie kroki

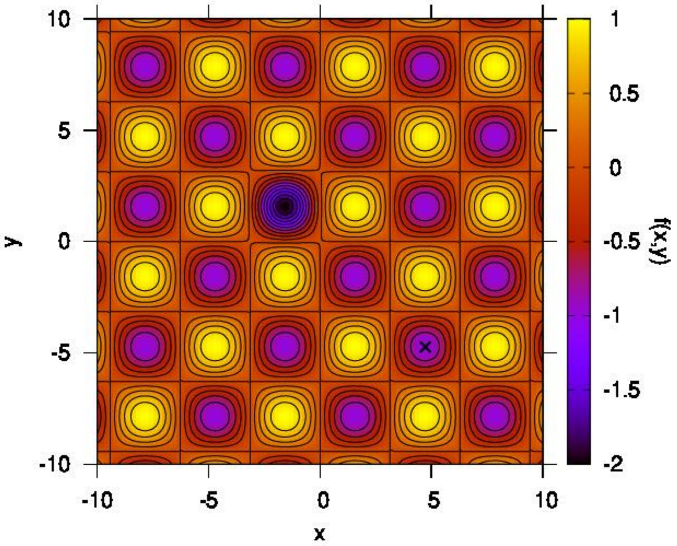
Z powyższego wykresu możemy wywnioskować, że wraz ze krokiem obniżana jest temperatura i są znajdywane minima - przy końcowych krokach wartość f(x,y) stabilizuje się.



Rysunek 5: IT=0, T=10, N=1



Rysunek 6: IT=7, T=0.078125, N=1



Rysunek 7: IT=20, T=0.000010, N=1

Powyższe trzy rysunki przedstawiają wyniki w przypadku, kiedy mamy tylko jednego wędrowca – N=1. Widzimy, że jest znajdowane tylko jedno minimum, co nie jest pełnowartościowym rozwiązaniem naszego problemu.

3. Wnioski

Napisany program pozwolił nam na znalezienie minimum wartości funkcji

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y) - \exp\left(-\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(y+\frac{\pi}{2}\right)^2\right)$$

metodą symulowanego wyżarzania. Otrzymane przez nas minimum -1.999923 w punkcie (-1.573380, 1,564102) jest globalne, ponieważ wybraliśmy je jako najniższe spośród minimów lokalnych. Znalezione minimum globalne w przybliżeniu zgadza się z teoretycznym położeniem minimum $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. W metodzie tej duże znaczenie ma temperatura, im niższa tym lepsze wyniki uzyskujemy, co widać na rysunkach 1-3. W przypadku zmniejszania liczby wędrowców do jednego, nie jesteśmy w stanie wskazać minimum globalnego, ponieważ znalezione zostało tylko jedno minimum lokalne(rysunki 5-7). Możemy wywnioskować, że zmniejszenie temperatury i zwiększenie liczby wędrowców wpływa na poprawę skuteczności tej metody.

Źródła

1.Wstęp teoretyczny był wzorowany na wykładzie autorstwa dr hab. inż. Tomasza Chwieja pt. „Minimalizacja” oraz na prezentacji dostępnej pod linkiem http://155.158.112.25/~algorytmyewolucyjne/materialy/algorytm_symulowanego_wyzarzania.pdf.