二分搜索算法

- 看似简单，写对很难
- 变形很多
- 在面试中常用来考察code能力

贪婪算法

- 是一种比较直观的算法
- 难以证明它的正确性

二分搜索 / Binary Search

力扣 LeetCode

定义

- 二分搜索也称折半搜索，是一种在有序数组中查找某一特定元素的搜索算法

运用前提

- 数组必须是排好序的
- 输入并不一定是数组，也可能是给定一个区间的起始和终止的位置

优点

- 二分搜索也称对数搜索，其时间复杂度为 $O(lgn)$，是一种非常高效的搜索

缺点

- 要求待查找的数组或区间是排好序的

- 若要求对数组进行动态地删除和插入操作并完成查找，平均复杂度会变为 $O(n)$
- 采取自平衡的二叉查找树
  - 可在 $O(nlogn)$ 的时间内用给定的数据构建出一棵二叉查找树
  - 可在 $O(logn)$ 的时间内对数据进行搜索
  - 可在 $O(logn)$ 的时间内完成删除和插入的操作

当：输入的数组或区间是有序的，且不会常变动，要求从中找出一个满足条件的元素 ⟶ 采用二分搜索 👍

```java
int binarySearch(int[] nums, int target, int low, int high) {
  if (low > high) {
    return -1;
  }

  int middle = low + (high - low) / 2;

  if (nums[middle] == target) {
    return middle;
  }

  if (target < nums[middle]) {
    return binarySearch(nums, target, low, middle - 1);
  } else {
    return binarySearch(nums, target, middle + 1, high);
  }
}
```

递归的写法

- 二分搜索函数的定义中，
  不仅要指定数组 `nums` 和目标查找数 `target`，
  还要指定查找区间的起点 `low` 和终点位置 `high`。
- 为避免无限循环，开始时要判断一下：
  如果起点位置大于终点位置，表明这是一个非法区间；
  或者说，已尝试了所有的搜索区间还是没找到结果。
  返回 `-1`。
- 接下来，取正中间那个数的下标 `middle`。
- 判断一下正中间的那个数是不是要找的目标数 `target`。
  如果是，就返回下标 `middle`。
- 如果发现目标数在左边，
  那么就递归地从左半边进行二分搜索。
- 否则从右半边递归地进行二分搜索。

```java
int binarySearch(int[] nums, int target, int low, int high) {
  if (low > high) {
    return -1;
  }

  int middle = low + (high - low) / 2;

  if (nums[middle] == target) {
    return middle;
  }

  if (target < nums[middle]) {
    return binarySearch(nums, target, low, middle - 1);
  } else {
    return binarySearch(nums, target, middle + 1, high);
  }
}
```

- **三个关键点**

- 计算 `middle` 下标时，
  不能简单地用 `(low + high) / 2`，
  这样可能会导致溢出。
- 取左半边和右半边的区间时，
  左半边是 `[low, middle - 1]`，
  右半边是 `[middle + 1, high]`，这是两个闭区间。
  我们确定了 `middle` 点不是我们要找的，
  因此没有必要再把它加入到左、右半边了。
- 对于一个长度为奇数的数组，例如：`{1, 2, 3, 4, 5}`，
  按照 `low + (high - low) / 2` 来计算的话，
  `middle` 就是正中间的那个位，
  对于一个长度为偶数的数组，例如：`{1, 2, 3, 4}`，
  `middle` 就是正中间靠左边的一个位置。

```java
int binarySearch(int[] nums, int target, int low, int high) {
  if (low > high) {
    return -1;
  }

  int middle = low + (high - low) / 2;

  if (nums[middle] == target) {
    return middle;
  }

  if (target < nums[middle]) {
    return binarySearch(nums, target, low, middle - 1);
  } else {
    return binarySearch(nums, target, middle + 1, high);
  }
}
```

- **时间复杂度分析**

假设要对长度为 n 的数组进行二分搜索，
$T(n)$ 是执行时间函数，我们可以得到：

$$T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1$$

代入公式法得：$a = 1, b = 2, f(n) = 1$
因此 $O(n^{log_b a}) = O(n^0) = 1$ 等于 $O(f(n))$
时间复杂度为：

```java
int binarySearch(int[] nums, int target, int low, int high) {
  while (low <= high) {
    int middle = low + (high - low) / 2;

    if (nums[middle] == target) {
      return middle;
    }

    if (target < nums[middle]) {
      high = middle - 1;
    } else {
      low = middle + 1;
    }
  }

  return -1;
}
```

非递归的写法

- 在 while 循环中，判断一下搜索的区间是否有效。
- 计算正中间数的下标。
- 判断一下正中间的那个数是不是要找的目标数 `target`。
  如果是，就返回下标 `middle`。
- 如果发现目标数在左边，
  调整搜索区间的终点为 `middle - 1`。
- 否则，调整搜索区间的终点为 `middle + 1`。
- 如果超出了搜索区间，表明无法找到目标数，返回 `-1`。

二分搜索的核心

- 确定搜索的范围和区间
- 取中间的数判断是否满足条件
- 如果不满足条件，判定应该往哪个半边继续进行搜索

找确定的边界

- 边界分为上边界与下边界，有时也称为左边界和右边界
- 确定的边界，指边界的数值等于要找的目标数

34. 最长子序列的长度

给定一个按照升序排列的整数数组 nums，
和一个目标值 target。
找出给定目标值在数组中的开始位置和结束位置。

返回：[3, 4]

说明

你的算法时间复杂度必须是 $O(logn)$ 级别。
如果数组中不存在目标值，返回 [-1, -1]。

- 第一次出现的地方叫下边界 (lower bound)
- 最后一次出现的地方叫上边界 (upper bound)

两个成为 8 的下边界的条件

- 该数必须是 8
- 该数的左边一个数必须不是8
  - 8 的左边有数，那么该数必须小于 8
  - 8 的左边没有数，即 8 是数组的第一个数

两个成为 8 的上边界的条件

- 该数必须是 8
- 该数的右边一个数必须不是8
  - 8 的右边有数，那么该数必须大于 8
  - 8 的右边没有数，即 8 是数组的最后一个数

```
int searchLowerBound(int[] nums, int target, int low, int high)
{
  if (low > high) {
    return -1;
  }

  int middle = low + (high - low) / 2;

  if (nums[middle] == target && (middle == 0 || nums[middle -
1] < target)) {
    return middle;
  }

  if (target <= nums[middle]) {
    return searchLowerBound(nums, target, low, middle - 1);
  } else {
    return searchLowerBound(nums, target, middle + 1, high);
  }
}
```

递归 - 寻找下边界

- 判断是否是下边界时，
  先看看 `middle` 的数是否为 `target`，
  并判断该数是否已为数组的第一个数，
  或者，它左边的一个数是不是已经比它小，
  如果都满足，即为下边界。
- 不满足时，如果该数等于 `target`，需向左继续查找

```
int searchUpperBound(int[] nums, int target, int low, int high)
{
  if (low > high) {
    return -1;
  }

  int middle = low + (high - low) / 2;

  if (nums[middle] == target && (middle == nums.length - 1 ||
nums[middle + 1] > target)) {
    return middle;
  }

  if (target < nums[middle]) {
    return searchUpperBound(nums, target, low, middle - 1);
  } else {
    return searchUpperBound(nums, target, middle + 1, high);
  }
}
```

递归 - 寻找上边界

- 判断是否是上边界时，
  先看看 `middle` 的数是否为 `target`，
  并判断该数是否已为数组的最后一个数，
  或者，它右边的数是不是比它大，
  如果都满足，即为上边界。
- 不满足时，需判断搜索方向

找模糊的边界

- 二分搜索可以用来查找一些模糊的边界
- 模糊的边界，即边界的值不等于目标的值，而是大于或小于目标的值

例题分析

从数组 {-2, 0, 1, 4, 7, 9, 10} 中找到第一个大于6的数。第一个大于6的数，在这道题里面，答案是7。

如何在有序数组中判断一个数是不是第一个大于 6 的数?

- 这个数要大于 6
- 这个数有可能是数组里的第一个数，或者它之前的一个数比 6 小

```
Integer firstGreaterThan(int[] nums, int target, int low, int high) {
  if (low > high) {
    return null;
  }

  int middle = low + (high - low) / 2;

  if (nums[middle] > target && (middle == 0 || nums[middle - 1] <= target)) {
    return middle;
  }

  if (target < nums[middle]) {
    return firstGreaterThan(nums, target, low, middle - 1);
  } else {
    return firstGreaterThan(nums, target, middle + 1, high);
  }
}
```

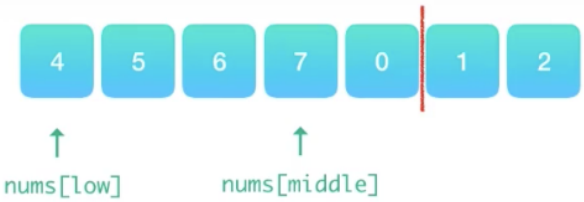
- 判断 middle 指向的数
  是否为第一个比 target 大的数时，
  须同时满足两个条件：
  - middle 这个数必须大于 target
  - middle 要么是第一个数，
    要么它之前的数小于或者等于 target

当不满足条件，而 middle 的数等于 target 时怎么办?

33. 旋转过的排序数组

给定一个经过旋转了的排序数组，判断一下某个数是否在里面。

例如，给定数组为{4, 5, 6, 7, 0, 1, 2}，target等于0，答案是4，即0所在的位置下标是4。



- **如何判断左边是不是排好序的那个部分呢?**
- 只要比较nums[low]和nums[middle]即可
  - 若nums[low] <= nums[middle]，则左边这部分一定是排好序的，否则右边是排好序的
- **判定出某一边是排好序的有什么用呢?**
  - 若nums[low] <= target && target < nums[middle]，则目标值在这个区间，反之在另一边

```
int binarySearch(int[] nums, int target, int low, int high) {
  if (low > high) {
    return -1;
  }

  int middle = low + (high - low) / 2;
   if (nums[middle] == target) {
    return middle;
  }

  if (nums[low] <= nums[middle]) {
    if (nums[low] <= target && target < nums[middle]) {
      return binarySearch(nums, target, low, middle - 1);
    }
    return binarySearch(nums, target, middle + 1, high);
  } else {
    if (nums[middle] < target && target <= nums[high]) {
      return binarySearch(nums, target, middle + 1, high);
    }
    return binarySearch(nums, target, low, middle - 1);
  }
}
```

- 判断是否已超出了搜索范围，是则返回-1
- 取中位数
- 判断中位数是否为要找的数
- 判断左半边是不是排好序的
- 是则，判断目标值是否在左半边
- 是则，在左半边继续进行二分搜索
- 否则，在右半边进行二分搜索
- 若右半边是排好序的那一半，判断目标值是否在右边
- 是则，在右半边继续进行二分搜索
- 否则，在左半边进行二分搜索

不定长的边界

有一段不知道具体长度的日志文件，里面记录了每次登陆的时间戳，已知日志是按顺序从头到尾记录的，没有记录日志的地方为空。那么，当前日志的长度是多少?

{ 2019-01-14, 2019-01-17, … , 2019-08-04, …. , null, null, null …}

直观做法

- 顺序遍历这个数组，一直遍历下去
- 当发现第一个null的时候，我们就知道了日志的总数量了

二分搜索做法

- 一开始设置low = 0, high = 1
- 只要logs[high]不为null，high * 2
- 当logs[high]为null的时候，可以在区间[0, high]进行普通的二分搜索了

```
int getUpperBound(String[] logs, int high) {
  if (logs[high] == null) {
    return high;
  }
  return getUpperBound(logs, high * 2);
}
```

```
int binarySearch(String[] logs, int low, int high) {
  if (low > high) {
    return -1;
  }

  int middle = low + (high - low) / 2;
  if (logs[middle] == null && logs[middle - 1] != null) {
    return middle;
  }
  if (logs[middle] == null) {
    return binarySearch(logs, low, middle - 1);
  } else {
    return binarySearch(logs, middle + 1, high);
  }
}
```

- 先通过getUpperBound函数不断地去试探在什么位置会出现空的日志
- 运用二分搜索的方法去寻找日志的长度

贪婪 / Greedy

力扣 LeetCode × 拉勾 LAGOU

定义

- 贪婪是一种在每一步选中都采取在当前状态下最好或最优的选择，从而希望导致结果是最好或最优的算法。

优点

- 对于一些问题，贪婪算法非常的直观有效

缺点

- 往往，它得到的结果并不是正确的
- 贪婪算法容易过早地做出决定，从而没有办法达到最优解

贪婪算法的反例

有一些物品，每个物品都有一定的价值和重量，现在有一个背包，背包能够承受的总重量一定，要求在不超过背包总承受总量的前提下，尽可能让装入背包中的物品总价值最大，问怎么装?

有三种不同的贪婪策略

- 选取价值最大的物品
- 选择重量最轻的物品
- 选取价值/重量比最大的物品

选取价值最大的物品策略

- 贪婪物品有：A B C
- 重量分别是：25, 10, 10
- 价值分别是：100, 80, 80

- 根据策略，首先选取物品A，接下来就不能再去选其他物品了
- 但是，如果选取B和C，结果会更好

选择重量最轻的物品策略

- 贪婪物品有：A B C
- 重量分别是：25, 10, 10
- 价值分别是：100, 5, 5

- 根据策略，首先选取物品B和C，接下来就不能选A了

选取价值/重量比最大的物品策略

- 贪婪物品有：A B C
- 重量分别是：25, 10, 10
- 价值分别是：25, 10, 10

- 根据策略，三种物品的价值/重量比都是一样
- 如果选A，答案就不对了。应该选B和C

贪婪的弊端

- 总是做出在当前看来是最好的选择
- 不从整体的角度去考虑，仅对局部的最优解感兴趣

什么问题适用贪婪算法

- 只有当那些局部最优策略能产生全局最优策略的时候

253.会议室II

有给定一系列会议的起始时间和结束时间，求最少需要多少个会议室就可以让这些会议顺利召开。

最暴力的做法

- 把所有的会议组合找出来
- 从最长的组合开始检查，看看各个会议之间有没有冲突，直到发现一组会议没有冲突
- 很明显，这样的解法是非常没有效率的

贪婪做法

- 会议都是按照它们的起始时间顺序进行的
- 要给新的就要开始的会议找会议室时，先看当前有无空会议室
- 有则在空会议室开会，无则开设一间新会议室

```
int minMeetingRooms(Interval[] intervals) {
  if (intervals == null || intervals.length == 0)
    return 0;

  Arrays.sort(intervals, new Comparator<Interval>() {
    public int compare(Interval a, Interval b) { return a.start - b.start; }
  });

  PriorityQueue<Interval> heap = new
PriorityQueue<Interval>(intervals.length, new Comparator<Interval>() {
    public int compare(Interval a, Interval b) { return a.end - b.end; }
  });

  heap.offer(intervals[0]);
  for (int i = 1; i < intervals.length; i++) {
    Interval interval = heap.poll();
    if (intervals[i].start >= interval.end) {
      interval.end = intervals[i].end;
    } else {
      heap.offer(intervals[i]);
    }
    heap.offer(interval);
  }
  return heap.size();
}
```

- 将输入的一系列会议按照会议的起始时间排序
- 用一个最小堆来维护目前开辟的所有会议室，最小堆里的会议室按照会议的结束时间排序
- 让第一个会议在第一个会议室里举行
- 从第二个会议开始，每个会议都从最小堆里取出一个会议室
- 若当前要开的会议可以等会议室被腾出才开始，那么就可以重复利用这个会议室
- 否则，开辟一个新的会议室
- 接下来，把旧的会议室也放入到最小堆里
- 最小堆里的会议室个数就是最少的会议个数

为什么贪婪算法在此处成立

- 每当遇到一个新的会议时，总是贪婪地从所有会议室里找出最先结束会议的那个

为什么这样可以产生最优结果

- 若选择的会议室中会议未结束，则意味着需要开辟一个新会议室，这已经不是当前的最优解了