שיעורי בית 1 בפונקציות מרוכבות

מגיש: ליאל אברהם

תאריך הגשה: 26/03/2025

שאלה 1. פתרו את המשוואות הבאות:

(א) $z^2+\sqrt{32}z-6i=0$.

פתרון. נוסחת השורשים עובדת גם עבור משוואות מרוכבות.

$$z_{1,2}=\frac{-\sqrt{32}\pm\sqrt{32+24i}}{2}=-\sqrt{8}\pm\sqrt{8+6i}=-2x\sqrt{2}\pm\sqrt{|8+6i|}\cdot e^{i\frac{\mathrm{Arg}(8+6i)}{2}}=-2\sqrt{2}\pm\sqrt{10}\cdot e^{i\frac{\arctan\left(\frac{6}{8}\right)}{2}}=$$

$$=-2\sqrt{2}\pm\sqrt{10}\cdot\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{\sqrt{10}}{10}i\right)=-2\sqrt{2}\pm(3+i)$$

$$\boxed{z=0.172+i\vee z=-5.828-i}$$

(ב) $z^2=\overline{z}$.

פתרון. נסמן $z=R\mathrm{cis}\theta$ ונציב במשוואה:

$$z^2=\overline{z}$$

$$R^2\mathrm{cis}2\theta=R\mathrm{cis}-\theta$$

$$R^2=R,\ 2\theta=-\theta+2\pi k$$

$$R=0\vee R=1,\ \theta=\frac{2\pi k}{3}$$

$$\Rightarrow z=0\vee z=\mathrm{cis}\frac{2\pi k}{3}$$

$$\Rightarrow\boxed{z=0\vee z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\vee z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\vee z=1}$$

(ג) $z^2=|z|^2-4$.

פתרון. נסמן $z=x+yi$ ונציב במשוואה:

$$\begin{aligned}x^2-y^2+2xyi&=x^2+y^2-4\\&\Rightarrow 2xyi=0,2y^2=4\\&\Rightarrow y=\pm\sqrt{2},x=0\end{aligned}$$

ולכן הפתרונות של המשוואה הם $\boxed{z=\sqrt{2}i\vee z=-\sqrt{2}i}$.

שאלה 2. הוכיחו.

(א) צריך להוכיח כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי סכום הפתרונות של המשוואה $z^n = 1$ הוא 0.

פתרון. בהרצאה הראנו כי קבוצת הפתרונות של המשוואה הנ"ל היא

$$\Omega_n = \left\{ \cos(\theta) + i\sin(\theta) \,|\exists 0 \le k < n : \theta = \frac{2\pi k}{n} \right\}$$

כעת נחשב פשוט את הסכום של הקבוצה הזאת. נשים לב שקבוצה זאת ניתן לסידור בסדרה כך שהסדרה תהא הנדסית עם איבר ראשון ω_1 והן מנה ω_1 כאשר $\omega_1 := \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ גם זה הוכחנו בכיתה במהלך ההרצאה הראשונה.

$$\sum_{z\in\Omega_n} z = \frac{\omega_1(\omega_1^n - 1)}{\omega_1 - 1} = \frac{\omega_1 \cdot (1-1)}{\omega_1 - 1} = 0$$

לשם הפורמלית, אוכיח שוב שניתן לסדר את הקבוצה Ω_n בסדרה הנדסית שאיברה הראשון ω_1 ומנתה ω_1. הסדרה הזאת היא בדיוק $\{\omega_k\}_{k=1}^n$ ואכן האיבר הראשון הוא ω_1 ולכל $1 \le k < n$ מתקיים

$$\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \frac{\cos\left(\frac{2\pi(k+1)}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi(k+1)}{n}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \omega_1$$

(ב) יהי $Q(z)$ פונקציה רציונלית בעלת מקדמים ממשיים. צריך להוכיח שלכל $z \in \mathbb{C}$ בתחום ההגדרה של הפונקציה מתקיים

$$\overline{Q(z)} = Q(\overline{z})$$

פתרון. נסמן $Q(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ ונסמן $A(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $B(z) = \sum_{k=1}^m b_k z^k$. כעת נשים לב

$$Q(\overline{z}) = \frac{A(\overline{z})}{B(\overline{z})} = \frac{\sum_{k=0}^n a_k \overline{z}^k}{\sum_{k=1}^m b_k \overline{z}^k} \overset{(1)}{=} \frac{\sum_{k=0}^n a_k \overline{z^k}}{\sum_{k=1}^m b_k \overline{z^k}} \overset{(2)}{=} \frac{\sum_{k=0}^n \overline{a_k z^k}}{\sum_{k=1}^m \overline{b_k z^k}} \overset{(3)}{=} \frac{\overline{\sum_{k=0}^n a_k z^k}}{\overline{\sum_{k=1}^m b_k z^k}} \overset{(4)}{=} \overline{\left(\frac{\sum_{k=0}^n a_k \overline{z}^k}{\sum_{k=1}^m b_k \overline{z}^k}\right)} = \overline{Q(z)}$$

ולהלן ההסבר לכל מעבר מסומן:

1. נובע מהעובדה ש $\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{z \cdot w}$ (ניתן להוכיח בקלות ע"י פירוק, הוכח גם בהרצאה וגם בתיכון) - ואז מוכיחים זאת באינדוקציה.
2. נובע מהנתון שכל המקדמים ממשיים (אחרת זה לא היה נכון).
3. נובע מהעובדה ש $\overline{z} + \overline{w} = \overline{z + w}$ - ואז מוכיחים באינדוקציה.
4. ממש כמו (1), מתקיים גם $\frac{\overline{z}}{\overline{w}} = \overline{\left(\frac{z}{w}\right)}$.

כנדרש.

(ג) יהי $P(z)$ פולינום שמקדמיו ממשיים. צריך להוכיח $P(z) = 0 \iff P(\overline{z}) = 0$.

פתרון. נשים לב $P(z) = \frac{P(z)}{1}$ ונתייחס לP בתור פונקציה רציונלית בעלת מקדמים ממשיים. כעת נפעיל את הסעיף הקודם ונקבל

$$P(\overline{z}) = 0 \iff \overline{P(z)} = 0 \iff P(z) = 0$$

כנדרש.

שאלה 3. הוכיחו:

(א) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ לכל $z \in \mathbb{C}$.

פתרון. יהי $z \in \mathbb{C}$, לפי ההגדרה:

$$\overline{e^z} = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{z^n}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{z^n}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = e^{\overline{z}}$$

כלל המעברים זהים לחלוטין למעברים שנימקתי גם בסעיף ב' של שאלה 2. הנימוק החסר הוא הכנסת המשלים אל תוך הטור. זה נובע ממשפט שהוכחנו בהרצאה שאומר שהחלק המדומה של טור שווה לגבול של החלק המדומה של סדרת הסכומים החלקיים שלו (ואותו דבר עבור החלק הממשי) ולכן כשאנו מבצעים משלים על הטור זה כמו להכפיל במינוס 1 את החלק המדומה של הגבול, שזה שקול ללהכפיל את הסס"ח של החלק הדמיוני במינוס 1, אשר שקול ללבצע משלים לכל איבר בסדרה אשר את אבריה סוכמים - בגלל לינאריות פעולת המשלים.

(ב) $\overline{\sinh z} = \sinh \overline{z}$ לכל $z \in \mathbb{C}$.

פתרון. נראה זאת באמצעות סעיף א':

$$\overline{\sinh z} = \overline{\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)} = \frac{\overline{e^z} - \overline{e^{-z}}}{2} = \frac{e^{\overline{z}} - e^{\overline{-z}}}{2} = \frac{e^{\overline{z}} - e^{-\overline{z}}}{2} = \sinh \overline{z}$$

שאלה 4. מצאו את התמונות הבאות:

(א) מה התמונה של $A=\{z\in\mathbb{C}|0<z\leq 1\}$ תחת ההעתקה $f(z)=\frac{1}{z}$?

פתרון. אוכיח כי התמונה היא $f[A]=\{z\in\mathbb{C}|\,|z|\geq 1\}$. יהי $z\in\mathbb{C}$, אזי:

$$z\in\{z\in\mathbb{C}|\,|z|\geq 1\}\iff |z|\geq 1\iff 0<\frac{1}{|z|}\leq 1, f\left(\frac{1}{z}\right)=z\iff \exists w\in A: f(w)=z\iff z\in f[A]$$

(ב) מה התמונה של $B=\{z\in\mathbb{C}|a\leq\Re(z)\leq b\}$ עבור $\mathbb{R}\ni a<b\in\mathbb{R}$ תחת ההעתקה $g(z)=e^z$?

פתרון. נזכור שהחלק הממשי יהפוך להיות המרחק והחלק הדמיוני יהיה הארגומנט. אין מגבלה על החלק הדמיוני ולכן צפוי שהתמונה תהיה קבוצה של מעגלים. אוכיח כי התמונה היא למעשה

$$g[B]=\left\{Re^{i\theta}\in\mathbb{C}|e^a\leq R\leq e^b,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\right\}=\left\{R\cos\theta+iR\sin\theta\in\mathbb{C}|e^a\leq R\leq e^b,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\right\}$$

$$z\in\left\{Re^{i\theta}\in\mathbb{C}|e^a\leq R\leq e^b,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\right\}\iff e^a\leq\Re(z)\leq e^b\iff a\leq\ln\Re(z)\leq b\iff$$
$$\overset{(1)}{\iff} a\leq\Re(\log z)\leq b, f(\log z)=z\iff\exists w\in B: g(w)=z\iff z\in g[B]$$

1. ניתן תמיד להעלים את $f(\log z)=z$ כי הוא תמיד נכון מהגדרת f. המעבר שהחלק הממשי של הלוגריתם המרוכב של מספר שווה ללוגריתם (הממשי) של החלק הממשי של אותו מספר - הוכח בהרצאה וגם מופיע בעמוד 56 בספר "פונקציות מרוכבות" תחת סעיף (17*).

שאלה 5. הוכיחו ופתרו:

(א) הוכיחו כי לכל $c \in \mathbb{C}$ קיים $z \in \mathbb{C}$ המקיים $\sin z = c$. האם אתם יכולים למצוא את הקבוצה $Z \subseteq \mathbb{C}$ המקיימת $\sin(Z) = c$ עבור אותו c?

פתרון. נמצא את הקבוצה Z כפי שתוארה לעיל ונראה שהיא לא ריקה.

$$\forall z \in Z : c = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

נציב $t = e^{iz}$ ונראה ($t \neq 0$):

$$\forall z \in Z : c = \frac{t - \frac{1}{t}}{2i}$$

$$\forall z \in Z : 2ic = t - \frac{1}{t}$$

$$\forall z \in Z : t^2 - 2ict - 1 = 0$$

כעת למשוואה $t^2 - 2ict - 1 = 0$ תמיד יש לפחות פתרון אחד ולכל היותר 2. בנוסף, מתקיים ש־0 הוא לא פתרון אחרת $-1 = 0$ בסתירה. ולכן יש לפחות פתרון אחד שונה מ־0. בנוסף, למשוואה $e^{iz} = t$ עבור $t \neq 0$ יש פתרון כמובן כי הוכחנו שפונקציית הe^z היא על מלבד 0. סך הכל הוכחנו כי Z לא ריק.
כעת נמצא באופן מפורש יותר את Z:

$$t = \frac{2ic \pm \sqrt{-4c^2 + 4}}{2} = ic \pm \sqrt{1 - c^2}$$

$$e^{iz} = ic \pm \sqrt{1 - c^2}$$

$$iz = \log\left(ic \pm \sqrt{1 - c^2}\right) = \mathrm{Log}\left(ic \pm \sqrt{1 - c^2}\right) + 2i\pi k$$

$$z = 2\pi k - i\mathrm{Log}\left(ic \pm \sqrt{1 - c^2}\right)$$

$$Z = \left\{2\pi k - i\mathrm{Log}\left(ic \pm \sqrt{1 - c^2}\right) | k \in \mathbb{Z}\right\}$$

(ב) פתרו: $\cos z = 2$.
נסמן $z = a + bi$:

$$\begin{aligned} 2 + 0i = \cos z = \cos(a + bi) = \cos a \cdot \cosh b + i \sin a \cdot \sinh -b \\ \Rightarrow \sin a = 0 \vee \sinh -b = 0 \end{aligned}$$

- אם $\sinh -b = 0$ אזי $-b = 0$ ולכן $b = 0$ ואז $\cosh b = 1$ ונקבל $2 = \cos a$ בסתירה
- אחרת, $\sin a = 0$ כלומר $a = \pi k$ ואז $2(-1)^k = \cosh b$. כזכור $\cosh$ מקבלת ערכים גדולים שווים 1 (עבור מספרים ממשיים כמובן) ולכן נקבל תוצאה אפשרית רק עבור k זוגי ולכן קבוצת הפתרונות של המשוואה תהיה:

$$\left\{2\pi k + \cosh^{-1} 2 | k \in \mathbb{Z}\right\}$$

(ג) פתרו: $\sin z = 0$.

פתרון. נסמן $z = a + bi$:

$$0 + 0i = \sin z = \sin(a + bi) = \sin a \cdot \cosh b + i \cos a \cdot \sinh b$$
$$\Rightarrow (\sin a = 0 \vee \cosh b = 0) \wedge (\cos a = 0 \vee \sinh b = 0)$$

- $b = 0 \Leftarrow \sinh b = 0 \Leftarrow a = \pi k, \cos a \neq 0 \Leftarrow \sin a = 0$
- $\cosh b = 0 \Leftarrow \sin a \neq 0 \Leftarrow$ סתירה.

סך הכל, קיבלנו שקבוצת הפתרונות של המשוואה הנ"ל היא:

$$\{\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$$

(ד) נגדיר $\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$. פתרו את המשוואה $\tan z = \omega$ עבור ω נתון. מה קורה אם $\omega = \pm i$?

פתרון. נציב את ההגדרות של הפונקציות וננסה למצוא למשוואה פתרון:

$$\omega = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}{\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

נציב כמו מקודם $t = e^{iz}$:

$$\omega = -i \frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}} = -i \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

$$\omega t^2 + \omega = -it^2 + i$$

$$(\omega + i)\, t^2 = i - \omega$$

אם $\omega = -i$ נקבל את המשוואה $0 = 2i$ אשר לה כמובן אין פתרונות.
אם $\omega = i$ נקבל את המשוואה $t^2 = 0$ כלומר $t = 0$ אבל כזכור $t = e^{iz}$ ולמשוואה $e^{iz} = 0$ אין פתרונות.
סך הכל, במקרים $\omega = \pm i$ למשוואה $\tan z = \omega$ אין פתרונות.
עכשיו נמשיך במקרה שבו $\omega \neq \pm i$:

$$t^2 = \frac{i - \omega}{i + \omega}$$

$$e^{2iz} = \frac{i - \omega}{i + \omega}$$

$$2iz = \log\left(\frac{i - \omega}{i + \omega}\right)$$

$$iz = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{i - \omega}{i + \omega}\right| + \frac{1}{2} i \mathrm{Arg}\left(\frac{i - \omega}{i + \omega}\right) + i\pi k$$

$$z = \frac{1}{2} \mathrm{Arg}\left(\frac{i - \omega}{i + \omega}\right) + \pi k - \frac{i}{2} \ln\left|\frac{i - \omega}{i + \omega}\right|$$

ויוצא שמרחב הפתרונות הוא:

$$\left\{\frac{1}{2} \mathrm{Arg}\left(\frac{i - \omega}{i + \omega}\right) + \pi k - \frac{i}{2} \ln\left|\frac{i - \omega}{i + \omega}\right| | k \in \mathbb{Z}\right\}$$

שאלה 6. חשבו את כל הערכים האפשריים של הביטויים הבאים:

(א) $(-1)^{\sqrt{2}}$.

פתרון. נחשב לפי ההגדרה של חזקות מספרים מרוכבים:

$$(-1)^{\sqrt{2}} = e^{\log(-1)\sqrt{2}} = e^{i\pi\sqrt{2}+2\sqrt{2}\pi ki} = \cos\left(\sqrt{2}\pi + 2\sqrt{2}\pi k\right) + i\sin\left(\sqrt{2}\pi + 2\sqrt{2}\pi k\right)$$

$$\boxed{(-1)^{\sqrt{2}} = \left\{\cos\left(\sqrt{2}\pi + 2\sqrt{2}\pi k\right) + i\sin\left(\sqrt{2}\pi + 2\sqrt{2}\pi k\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

(ב) 2^{1-i}.

פתרון. נחשב לפי ההגדרה של חזקות מספרים מרוכבים:

$$2^{1-i} = e^{\log(2)(1-i)} = e^{\ln 2 - i\ln 2 + 2\pi ki + 2\pi k} = 2e^{2\pi k}\cos(\ln 2) - 2e^{2\pi k} i\sin(\ln 2)$$

$$\boxed{2^{1-i} = \left\{2e^{2\pi k}\cos(\ln 2) - 2e^{2\pi k} i\sin(\ln 2) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

(ג) $(\cos i)^i$.

פתרון. נחשב לפי ההגדרה של חזקות מספרים מרוכבים וקוסינוס של מספרים מרוכבים:

$$(\cos i)^i = \left(\frac{e^{i\cdot i} + e^{-i\cdot i}}{2}\right)^i = \left(\frac{\frac{1}{e} + e}{2}\right)^i = e^{\log\left(\frac{\frac{1}{e}+e}{2}\right)i} = e^{\ln\left(\frac{\frac{1}{e}+e}{2}\right)i - 2\pi k} = e^{-2\pi k}\cos\left(\ln\left(\frac{e+\frac{1}{e}}{2}\right)\right) + e^{-2\pi k} i\sin\left(\ln\left(\frac{e+\frac{1}{e}}{2}\right)\right)$$

$$\boxed{(\cos i)^i = \left\{e^{2\pi k}\cos\left(\ln\left(\frac{e+\frac{1}{e}}{2}\right)\right) + e^{2\pi k} i\sin\left(\ln\left(\frac{e+\frac{1}{e}}{2}\right)\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

(ד) 3^2.

פתרון. נחשב לפי ההגדרה של חזקות מספרים מרוכבים (על אף שזה כמובן לא הכרחי ואנחנו כבר יכולים לנחש מה תהיה התוצאה):

$$3^2 = e^{(\log 3)\cdot 2} = e^{2\ln 3 + 2\pi ki} = e^{\ln 9 + 2\pi ki} = 9$$

$$\boxed{3^2 = \{9\}}$$

(ה) $(a+bi)^{(c+di)}$ עבור $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, אפשר להניח $a > 0$. (ובפרט $\sqrt{a^2+b^2} > 0$).

פתרון. נחשב לפי ההגדרה של חזקות מספרים מרוכבים:

$$\begin{aligned}(a+bi)^{(c+di)} &= e^{\log(a+bi)\cdot(c+di)} = e^{\left(\ln\sqrt{a^2+b^2} + i\arg(a+bi)\right)\cdot(c+di)} = e^{c\cdot\ln\sqrt{a^2+b^2} - d\cdot\arg(a+bi) + i\left(d\cdot\ln\sqrt{a^2+b^2} + c\cdot\arg(a+bi)\right)} = \\ &= \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^c e^{-d\cdot\arg(a+bi)}\cos\left(d\cdot\ln\sqrt{a^2+b^2} + c\cdot\arg(a+bi)\right) \\ &+ i\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^c e^{-d\cdot\arg(a+bi)}\sin\left(d\cdot\ln\sqrt{a^2+b^2} + c\cdot\arg(a+bi)\right)\end{aligned}$$