考研数学线性代数基础讲义

主讲：张宇

张宇：新东方在线名师，博士，全国著名考研数学辅导专家，教育部“国家精品课程建设骨干教师”，全国畅销书《高等数学 18 讲》、《考研数学题源探析经典 1000 题》作者，高等教育出版社《全国硕士研究生入学统一考试数学考试参考书（大纲解析）》编者之一，2007 年斯洛文尼亚全球可持续发展大会受邀专家（发表 15 分钟主旨演讲）。首创“题源教学法”，对考研数学的知识结构和体系有全新的解读，对考研数学的命题与复习思路有极强的把握和预测能力，让学生轻松高效夺取高分。

目　录

第一讲　基础篇

行列式与矩阵

一、从行列式讲起

1. 行列式的本质定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = S_{▱}$$

二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 是由两个 2 维向量组成，其结果为以这两个向量为邻边的平行四边形▱的面积.

三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 是由三个 3 维向量 (a_{11}, a_{12}, a_{13})，(a_{21}, a_{22}, a_{23})，(a_{31}, a_{32}, a_{33}) 组成，其结果为以这三个向量为邻边的平行六面体的体积.

$D_n = |A_{n\times n}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 是由 n 个 n 维向量组成，其结果为以这 n 个向量为邻边的 n 维图形的 n 维体积.

2. 行列式的性质

（1）如果行列式中某一行（列）元素全为零，则行列式等于零；

（2）如果行列式中某两行（列）元素对应成比例，则行列式等于零；

（3）（互换）互换行列式中某两行（列）元素的位置，行列式的值只改变正负号；

（4）（倍乘）常数 k 乘以行列式，即行列式的某行（列）元素分别乘以 k；

（5）（倍加）将行列式的某一行（列）的所有元素都乘以数 k 后加到另一行（列）对应位置的元素上，行列式的值不变；

（6）（单行可拆（加）性）如果行列式中某行（列）的每个元素都是两个数的和，则这个行列式可以拆成两个行列式的和；

（7）行列式与它的转置行列式相等，即 $D = D^T$.

3. ★**重要观点**：行列式由向量组成

（1）如果行列式不等于零，那么组成行列式的向量**全独立**；

（2）如果行列式等于零，那么组成行列式的向量中**至少有一个多余**.

【注】二、三阶行列式的计算：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

二、矩阵的本质是什么？

1. 表面上，矩阵表达系统信息.

2. 本质上，设矩阵 $A_{m\times n}$，满足： $\Rightarrow r(A)=k$

$$\left\{\begin{array}{l} ①存在 k 阶子式不为 0 ， \\ ②任给 (k+1) 阶子式全为 0，则秩 r(A)=k. \end{array}\right. \Rightarrow r(A)=k$$

$$\left\{\begin{array}{l} ①存在 k 阶子式不为 0 ，\Rightarrow 存在 k 个独立向量 \\ ②任给 (k+1) 阶子式全为 0，\Rightarrow 任给 (k+1) 个向量中至少有一个多余 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$ 有且仅有 k 个独立向量 $\Leftrightarrow$ $r(A)=k$.

★重要观点：

矩阵 $A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 是由向量组成.

从行上看：m 个 n 维行向量；从列上看：n 个 m 维列向量.

其本质为秩 $r(A)=$ 组成 A 的独立向量的个数.

1）“台阶数=秩”

2）化矩阵 A 为行（最简）阶梯形矩阵

①若矩阵 A 满足：1）若有零行全在矩阵下方；2）从行上看，自左边起，出现连续零的个数自上而下严格单增.称为**行阶梯形矩阵**.

②若矩阵 A 还满足：3）台角位置元素为 1；4）台角正上方元素全为零.称为**行最简阶梯形**

矩阵.

3）**初等变换法**——互换、倍乘、倍加

【例 1】化矩阵 $A=\begin{pmatrix}5 & 7 & 0\\4 & 9 & 0\\3 & 6 & 0\end{pmatrix}$为行最简阶梯形矩阵.

【例 2】化矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\-2 & 5 & 4\\0 & -1 & 1\\3 & 0 & 2\end{pmatrix}_{4\times 3}$ 为行最简阶梯形矩阵.

第二讲　核心篇

向量组与方程组

【综述】

方程组求解$\Leftrightarrow$一个向量与一组向量的关系

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \Leftrightarrow x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$$

★重要观点：

方程组的**解**就是描述一个向量与一组向量之间关系的表示**系数**.

一、定性研究

①相关性问题（有没有多余向量）

②表示性问题（如何表示多余向量）

③代表性问题（极大线性无关组）

④等价性问题（两个向量组之间的关系）

1. 相关性问题

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中有没有多余的向量$\begin{cases} \text{有} \\ \text{没有} \end{cases}$

第 1 章　行列式$\Leftrightarrow\begin{cases} |\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s|=0, \\ |\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s|\neq 0 \end{cases}$　　（局限于方形）

第 2 章　矩阵$\Leftrightarrow\begin{cases} r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s, \\ r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s \end{cases}$

第 3 章　向量组

$\Leftrightarrow$如果存在一组不全为 0 的数$x_1,x_2,\cdots,x_s$，使得$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$成立，称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为线性相关.（多余）

若$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$成立，必须要求$x_1=x_2=\cdots=x_s=0$，称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为线

性无关.（独立）

第 4 章　方程组

$\Leftrightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}=0$ 有非零解.（齐次）

$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}=0$ 只有零解.

【注】学会挖掘各充要条件之间的关系.

【应用】

①第一组定理

1）若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性**相关**，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$ 线性**相关**；

若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性**相关**，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性相关性**不确定**.

2）若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性**无关**，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$ 线性相关性**不确定**；

若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性**无关**，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性**无关**.

②第二组定理

3）若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性**相关**，则向量组 $\beta_1=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$，$\cdots$，$\beta_s=\begin{pmatrix} \alpha_s \\ \gamma_s \end{pmatrix}$ 线性相关性**不确定**；

若向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性**相关**，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性**相关.**

4）若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性**无关**，则向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性**无关**；

若向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性**无关**，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关性**不确定**.

【总结】部分相关$\Rightarrow$整体相关；整体无关$\Rightarrow$部分无关；原来相关$\Rightarrow$缩短相关；**原来无关$\Rightarrow$延长无关**.

2. 表示性问题

β能否由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示$\begin{cases}\text{能}\\ \text{不能}\end{cases}$

第 1 章　行列式$\begin{cases}\Rightarrow\left|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta\right|=0,\\ \Leftarrow\left|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\right|\neq 0\end{cases}$　（反推均不成立）　（局限于方形）

第 2 章　矩阵$\begin{cases}\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\\ \Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)+1\end{cases}$

第 3 章　向量组

$\Leftrightarrow$如果存在一组数$x_1,x_2,\cdots,x_s$，使得$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=\beta$成立，则称$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示.

不存在任何一组数$x_1,x_2,\cdots,x_s$，使得$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=\beta$成立，则称$\beta$不可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示.

第 4 章　方程组

$\Leftrightarrow\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_s\end{pmatrix}=\beta$有解.（非齐次）

$\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_s\end{pmatrix}=\beta$无解.

3. 代表性问题——极大线性无关组

①定义：从向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中取出向量组$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}(r\le s)$，若其满足

1）线性无关；2）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任一向量$\alpha_i$均可由其表示.

则称向量组$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的一个极大线性无关组.

②应用——若$Ax=0$有无穷多个解向量，一般用基础解析来表示.

★重要观点： $Ax=0$的无穷多解的极大无关组$\Leftrightarrow$ $Ax=0$的基础解析.

注：基础解析的定义：

设$\xi_1,\xi_2\cdots\xi_s$，若其满足：

1）是$A_{m\times n}x=0$的解；

2）线性无关；

3） $Ax=0$的任一解均可由其表示；

则称$\xi_1,\xi_2\cdots\xi_s$为$Ax=0$的一个基础解系，其中$s=n-r(A)$.

4.等价性问题——研究一组向量与一组向量之间的关系（在定量描述中讲解）

设（I） $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$（II） $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$

若①$\begin{cases}\alpha_1=k_{11}\beta_1+k_{12}\beta_2+\cdots+k_{1t}\beta_t\\ \alpha_2=k_{21}\beta_1+k_{22}\beta_2+\cdots+k_{2t}\beta\\ \cdots\cdots\\ \alpha_s=k_{s1}\beta_1+k_{s2}\beta_2+\cdots+k_{st}\beta\end{cases}$，则称（I）可由（II）线性表示.

若②$\begin{cases}\beta_1=l_{11}\alpha_1+l_{12}\alpha_2+\cdots+l_{1s}\alpha_S\\ \beta_2=l_{21}\alpha_1+l_{22}\alpha_2+\cdots+l_{2s}\alpha_S\\ \cdots\cdots\\ \beta_t=l_{t1}\alpha_1+l_{t2}\alpha_2+\cdots+l_{ts}\alpha_S\end{cases}$，则称（II）可由（I）线性表示.

二、定量描述

1.解$Ax=0$（齐次方程组）

当$r(A)=n\Rightarrow Ax=0$只有 0 解；

当$r(A)<n\Rightarrow Ax=0$有非 0 解（无穷多解）

则其求解步骤为：

①写出系数矩阵A，化A为行（最简）阶梯形矩阵，求出$r(A)$；

②按列找出一个秩为$r(A)$的子矩阵，则剩余位置的变量即为自由变量；

③按照基础解系的定义反着走③$\to$②$\to$①

④全部解（通解）$=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$

【例】求$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+4x_4-3x_5=0\\2x_1+x_2+3x_3+5x_4-5x_5=0\\x_1-x_2+3x_3-2x_4-x_5=0\\3x_1+x_2+5x_3+6x_4-7x_5=0\end{cases}$的全部解

2.解$Ax=\beta$（非齐次）

若ξ为$Ax=0$的任一解，η^*为$Ax=\beta$的某一特解，则$A\xi=0,A\eta^*=\beta\Rightarrow A(\xi+\eta^*)=\beta$；

故$Ax=\beta$的全部解$=Ax=0$的全部解$+$ $Ax=\beta$的一个特解；

即全部解（通解）$=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s+\eta^*$.

【例】$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a\\ \qquad x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2\end{cases}$，当$a,b$为何值时，方程组有解，并求出全部解.

（等价性问题的内容见前面）

第三讲 应用篇

特征值与二次型

引例

（1）给出 $x^2+xy+y^2=1$，通过某正交变换，变成：$\dfrac{x'^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}+\dfrac{y'^2}{\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2}=1$

（2）二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$

矩阵形式：$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$，其中：

$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}$;其中，只含平方项的二次型，称为二次型的标准形.

化二次型为标准形，也就是"化 $A\to\Lambda$"成为关键：

①若存在可逆矩阵 C，使得 $C^{-1}AC=B$，则称 A 与 B 相似.

②若存在可逆矩阵 D，使得 $D^{-1}AD=\Lambda$，则称 A 相似于 Λ.

注：若存在非零向量 ξ_i，使得 $A\xi_i=\lambda_i\xi_i$，则称 λ_i 为矩阵 A 的特征值，ξ_i 为 λ_i 对应的特征向量.

【练习】若 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$，求 A 的特征值 λ_i 与对应的特征向量 ξ_i.

③若存在正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$，则称 A 相似于 Λ.

注：若矩阵 P 满足 $PP^T=E$，则称矩阵 P 为正交矩阵，且有 $P^{-1}=P^T$.

则： $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=(Py)^TA(Py)=y^TP^TAPy=y^T\Lambda y$

【总结】**正交变换法：**

1°把二次型表示为矩阵形式 x^TAx；

2°求出 A 的全部互异特征值 λ_i，设 λ_i 是 n_i 重根；

3°对每个特征值 λ_i，解齐次线性方程组 $(\lambda_i E-A)x=0$，求得基础解系，即属于 λ_i 的特征向量；

4°将 A 的属于同一个特征值的特征向量正交化；

5°将全部向量单位化；

6°将正交单位化后向量为列,且按 λ_i 在对角矩阵的主对角线上的位置构成正交矩阵 P；

7°令 $x=Py$，得 $x^TAx=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$.