考研数学高等数学基础讲义

主讲：张宇

张宇：新东方在线名师，博士，全国著名考研数学辅导专家，教育部"国家精品课程建设骨干教师"，全国畅销书《高等数学 18 讲》、《考研数学题源探析经典 1000 题》作者，高等教育出版社《全国硕士研究生入学统一考试数学考试参考书（大纲解析）》编者之一，2007 年斯洛文尼亚全球可持续发展大会受邀专家（发表 15 分钟主旨演讲）。首创"题源教学法"，对考研数学的知识结构和体系有全新的解读，对考研数学的命题与复习思路有极强的把握和预测能力，让学生轻松高效夺取高分。

目　录

第一讲　极限

核心考点概述

1.极限的定义

2.极限的性质

3.极限的计算

4.连续与间断

内容展开

一、极限的定义

1. $\lim\limits_{x\to \bullet}$ **是什么？** $\lim\limits_{n\to\infty}$ **是什么？**

（1）$\lim\limits_{x\to \bullet}$ 的情况：

①“$x\to\bullet$”代表六种情形：$x\to x_0, x\to x_0^+, x\to x_0^-, x\to\infty, x\to+\infty, x\to-\infty$

②函数极限运算的过程性——必须保证在作极限运算的过程中函数处处有定义，否则极限过程便无从谈起，于是极限就不会存在了。比如下面这个例子：

【例】计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x\sin\dfrac{1}{x}}$.

事实上，在 $x=0$ 点的任一小的去心邻域内，总有点 $x=\dfrac{1}{k\pi}\to 0$（$|k|$ 为充分大的正整数），使 $\dfrac{\sin\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x\sin\dfrac{1}{x}}$ 在该点没有定义，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x\sin\dfrac{1}{x}}$ 不存在.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}$ 是什么？

2.极限的定义

（1）函数极限的定义：

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0,$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

注：趋向方式六种

（2）数列极限定义：

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N>0,$ 当 $n>N$ 时，恒有 $\left|x_n - a\right| < \varepsilon$

注：趋向方式只有一种

【例】以下三个说法，

（1）"$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x>X$ 时，恒有 $\left|f(x)-A\right|<e^{\frac{\varepsilon}{10}}$"是"$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$"的充要条件；

（2）"$\forall$ 正整数 N，$\exists$ 正整数 K，当 $0<\left|x-x_0\right|\le\dfrac{1}{K}$ 时，恒有 $\left|f(x)-A\right|\le\dfrac{1}{2N}$"是"$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$"的充要条件；

（3）"$\forall\varepsilon\in(0,1)$，$\exists$ 正整数 N，当 $n\ge N$ 时，恒有 $|x_n-a|\le 2\varepsilon$"是"数列 $\left\{x_n\right\}$ 收敛于 a"的充要条件；

正确的个数为（　　）

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3

二、极限的性质

1.唯一性

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = \infty, \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$，（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{|x|}$ 不存在（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left[x\right]$ 不存在

【例】设 k 为常数，且 $I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-\pi}{e^{\frac{2}{x}}+1}+k\cdot\arctan\dfrac{1}{x}\right)$ 存在，求 k 的值，并计算极限 I。

2.局部有界性

【例】函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界（ ）

(A) $(-1,0)$. (B) $(0,1)$. (C) $(1,2)$. (D) $(2,3)$.

【注】函数有界性判别法总结如下：

（1）理论型判别— $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界；

（2）计算型判别— $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内有界.

（3）若极限不存在，则转向“四则运算规则”——有限个有界函数与有界函数的和、差、积仍为有界函数.

（4）若存在 x_0，使得 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则无界。

3.局部保号性

若 $\lim\limits_{x\to\bullet}f(x)=A>0$，则当 $x\to\bullet$ 时，$f(x)>0$.

【例】设 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则 $x=0$ 是

（A）极大值点 （B）极小值点 （C）不是极值点 （D）无法判断

三、极限的计算

1.函数极限的计算

（1）化简先行

【例 1】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+\sin x}(\sin x-x)}{\tan^3 x}$

【例 2】求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt[3]{1+5x}}{x}$

（2）基本的七种未定型

第一组：$\dfrac{0}{0}$　$\dfrac{\infty}{\infty}$　$0\cdot\infty$

【例 1】求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$

【例 2】求极限$\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\cdot\ln(1-x)$

第二组：$\infty-\infty$

①有分母，则通分

【例】求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2})$

②没有分母，创造分母，再通分

【例】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]$

第三组：∞^0　　0^0　　1^∞

【例 1】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$

【例 2】求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}$

（3）核心工具——泰勒公式

①牢记 8 个公式

$$\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

$$\arcsin x = x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

$$\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\arctan x = x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

$$e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+o(x^2)$$

②掌握两个展开原则

i. $\frac{A}{B}$ 型——上下同阶原则

【例】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$

ii. $A-B$ 型——幂次最低原则

【例】已知 $x\to 0$ 时，$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}$ 与 cx^k 为等价无穷小，求 c,k .

【练习】设 $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$，当 $x\to 0$ 时，若 $p(x)-\tan x$ 与 x^3 为同阶无穷小，求 a,b,c,d .

2.数列极限的计算

（1）将 x_n 连续化，转化为函数的极限

【例】$\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot\tan\frac{1}{n})^{n^2}$

（2）当数列通项为具体已知时，通常的解法为：

1)夹逼准则， 2)定积分定义， 3)利用幂级数求和（仅数学一要求），

【例】$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+...+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$

（3）当数列通项由递推关系式 $a_n=f\left(a_{n-1}\right)$ 给出时，通常使用单调有界准则

【例】设 $a>0,x_1>0,x_{n+1}=\frac{1}{3}(2x_n+\frac{a}{x_n^2})\quad n=1,2,\cdots$，证明 $\{x_n\}$ 收敛并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

四、连续与间断

1.由于“一切初等函数在其定义区间内必连续”，则只需考虑两类特殊的点：函数的无定义点和分段函数的分段点.

2.所谓连续

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续

3.所谓间断

（1）跳跃间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$

（2）可去间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq f(x_0)$

（3）无穷间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$

（4）振荡间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 振荡

【例】设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0\\ 6, & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0\end{cases}$，问 a 为何值时，

（I） $f(x)$ 在 $x=0$ 连续；

（II） $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

第二讲 高等数学的基本概念串讲

核心考点概述

内容展开

一、一元函数微分需的概念及使用

1.考查导数定义的基本形式

【例】设 $\delta > 0$，$f(x)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上有定义，$f(0)=1$,且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)+2xf(x)}{x^2}=0$，

证明 $f'(0)$ 存在，并求 $f'(0)$.

2.考查导数定义中增量的广义化

【例】设 $f(0)=0$，下列命题能确定 $f'(0)$ 存在的是(　　　)

（A）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cosh)}{h^2}$ 存在　　（B）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}$ 存在

（C）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sinh)}{h^2}$ 存在　　（D）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在

二、一元函数积分学的概念及其使用

1.不定积分、变限积分和定积分

（1）不定积分

原函数与不定积分 设函数 $f(x)$ 定义在某区间 I 上， 若存在可导函数 $F(x)$，对于该区间上任一点都有 $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$ 成立，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数. 称

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分，其中 C 为任意常数.

【注】谈到函数 $f(x)$ 的原函数与不定积分，必须指明 $f(x)$ 所定义的区间.

【例 1】试证明：如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'(x)=f(x)$（本题即为**变限积分**函数求导的知识点）.

【例 2】试证明：含有第一类间断点、无穷间断点的函数 $f(x)$ 在包含该间断点的区间内必没有原函数 $F(x)$.

【注】第二类振荡间断点是否有原函数呢？举例说来，对于

$$f(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases},$$

其在 $(-\infty,+\infty)$ 上不连续，它有一个第二类振荡间断点 $x=0$，但是它在 $(-\infty,+\infty)$ 上存

在原函数 $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, \quad x=0. \end{cases}$ 即，对于 $(-\infty,+\infty)$ 上任一点都有 $F'(x)=f(x)$ 成立.

综合以上几点，可以得出重要结论：可导函数 $F(x)$ 求导后的函数 $F'(x)=f(x)$ 不一定是连续函数，但是如果有间断点，一定是第二类间断点（在考研的范畴内，只能是振荡间断点）.

（2）定积分

定积分存在定理 定积分的存在性，也称之为**一元函数的（常义）可积性**. 这里的“常义”是指“区间有限，函数有界”，也有人称为“黎曼”可积性，与后面要谈到的“区间无穷，函数无界”的“反常”积分有所区别. 在本讲中所谈到的可积性都是指的常义可积性.

【注】事实上，还有一个使得定积分存在的充分条件：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则 $\int_a^b f(x)dx$ 存在，不过考试大纲对此没有做要求，考生知道即可.

【例】在区间 $[-1,2]$ 上，以下四个结论，

① $f(x)=\begin{cases} 2, & x>0 \\ 1, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$，有原函数，但其定积分不存在；

② $f(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, x\neq 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad , x=0 \end{cases}$，有原函数，其定积分也存在

③ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$，没有原函数，其定积分也不存在

④ $f(x)=\begin{cases} 2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad , x=0 \end{cases}$，有原函数，其定积分也存在

正确结论的个数为（　　）

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

2.反常积分

（1）无穷区间上反常积分的概念与敛散性

① $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的定义 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

若上述极限存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，否则称为发散.

② $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 的定义 $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$

若上述极限存在，则称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 收敛，否则称为发散.

③ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 的定义 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_c^{+\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^c f(x)dx$

若右边两个反常积分都收敛，则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，否则称为发散

（2）无界函数的反常积分的概念与敛散性

① 若 b 是 $f(x)$ 的唯一奇点，则无界函数 $f(x)$ 的反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 定义为

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

若上述极限存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，否则称为发散.

② 若 a 是 $f(x)$ 的唯一奇点，则无界函数 $f(x)$ 的反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 定义为

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

若上述极限存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，否则称为发散.

③ 若 $c\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 的唯一奇点，则无界函数 $f(x)$ 的反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 定义为

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

若上述右边两个反常积分都收敛，则称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，否则称为发散.

第三讲　高等数学的基本计算串讲

核心考点概述

1.微分学的计算

2.积分学的计算

3.微积分在几何上的应用

内容展开

一、一元函数微分学的基本计算

1.四则运算

$$[f(x)\pm g(x)]' = f'(x)\pm g'(x)$$

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad (g(x)\neq 0)$$

$$d[f(x)\pm g(x)] = df(x)\pm dg(x)$$

$$d[f(x)\cdot g(x)] = g(x)df(x)+f(x)dg(x)$$

$$d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)df(x)-f(x)dg(x)}{g^2(x)} \quad (g(x)\neq 0)$$

2.复合函数求导

【例】 $y=2^{\sin^2\frac{1}{x}}$，求 y'

3.反函数求导

设函数 $y=f(x), f'(x)\neq 0$，其反函数为 $x=\varphi(y)$，则 $\varphi'(y)=\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}=\dfrac{1}{f'(x)}$

4.参数方程求导

设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 确定，t 为参数，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

【例】设函数由 $\begin{cases} x=\theta\cos\theta \\ y=\theta\sin\theta \end{cases}$ 确定，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}$

5.隐函数求导

方程两边分别对 x 求导即可，把方程中的 y 看成 $f(x)$

【例】设 $y=f(x)$ 是由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 所确定的，求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]$.

6.对数求导法

【例】 $y=\sqrt[5]{\dfrac{(x-3)^2(x+5)^3}{(x-1)^3}}$，求 y'.

7.幂指函数求导

【例】 $y = x^{\sin x}$，求 y'.

8.高阶导数

（1） $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$

（2） $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$

（3）泰勒展开式

①设 $y = f(x)$ 无穷阶可导，

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

②根据题目所给的具体函数 $y = f(x)$，将其展开

③由展开式的唯一性 $\Rightarrow$ 比较①②展开式的多项式同幂次项前面的系数

$\Rightarrow f^{(n)}(0), f^{(n)}(x_0)$

【例】 $y = x^3 \sin x$，求 $y^{(6)}(0)$.

9.参数方程确定的函数的二阶导数

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 确定，其中 t 是参数，则

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \\ \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx}=\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\Big/dt}{dx/dt}=\dfrac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3} \end{cases}$$

10.反函数的二阶导数

在 $y=f(x)$ 二阶可导的情况下，记 $f'(x)=y'_x,\varphi'(y)=x'_y(x'_y\neq 0)$，则

$$\begin{cases} y'_x=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{x'_y} \\ y''_{xx}=\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx}=\dfrac{d\left(\dfrac{1}{x'_y}\right)}{dx}=\dfrac{d\left(\dfrac{1}{x'_y}\right)}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x''_{yy}}{(x'_y)^2}\cdot\dfrac{1}{x'_y} \end{cases}$$

11.变限积分求导公式

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt\right)=f\left[\varphi_2(x)\right]\varphi_2'(x)-f\left[\varphi_1(x)\right]\varphi_1'(x)$$

12.基本初等函数的导数公式

$(c)'=0$	$d(c)=0$
$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ （α 实常数）	$d(x^\alpha)=\alpha x^{\alpha-1}dx$ （α 实常数）
$(\sin x)'=\cos x$	$d\sin x=\cos xdx$
$(\cos x)'=-\sin x$	$d\cos x=-\sin xdx$
$(\tan x)'=\sec^2 x$	$d\tan x=\sec^2 xdx$
$(\cot x)'=-\csc^2 x$	$d\cot x=-\csc^2 xdx$
$(\sec x)'=\sec x\tan x$	$d\sec x=\sec x\tan xdx$
$(\csc x)'=-\csc x\cot x$	$d\csc x=-\csc x\cot xdx$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}\ (a>0, a\neq 1)$　　　$d\log_a x = \dfrac{dx}{x\ln a}\ (a>0, a\neq 1)$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$　　　$d\ln x = \dfrac{1}{x}dx$

$(a^x)' = a^x \ln a\ (a>0, a\neq 1)$　　　$da^x = a^x \ln a dx\ (a>0, a\neq 1)$

$(e^x)' = e^x$　　　$de^x = e^x dx$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　　$d\arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　　$d\arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$　　　$d\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}dx$

$(arc\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$　　　$darc\cot x = -\dfrac{1}{1+x^2}dx$

$\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$　　　$d\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$

$\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$　　　$d\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$

二、一元函数积分学的基本计算

1.凑微分法

（1）基本思想　$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[g(x)]d[g(x)] = \int f(u)du$

当被积函数比较复杂时，拿出一部分放到 d 后面去，若能凑成$\int f(u)du$的形式，则凑微分成功.

（2）归纳总结凑微分的思维结构

①熟练掌握教材中的基本积分公式及常用的凑微分公式.

②当被积函数可分为$f(x)g(x)$或$\dfrac{f(x)}{g(x)}$时，其中$f(x)$较复杂时，对$f(x)$求导数（或其主要部分）求导，一般得到$g(x)$的倍数，既可以是常数倍，也可以是函数倍，从而凑微分进行计算.

③当对$f(x)$求导得不到$g(x)$的倍数时，考虑“被积函数的分子分母”，同乘以或同除以一个适当的因子，恒等变形以达到凑微分的目的. 一般而言，因子应根据题设函数给出，常用的有$e^{\alpha x}$，x^{β}，$\sin x$，$\cos x$等.

【例】求$\int \frac{\cos^2 x-\sin x}{\cos x(1+\cos x e^{\sin x})}dx$

2.换元法

（1）基本思想 $\int f(x)dx \overset{x=g(u)}{=\!=\!=\!=} \int f[g(u)]d[g(u)]\Big|_{u=g^{-1}(x)} = \int f[g(u)]g'(u)du\Big|_{u=g^{-1}(x)}$

当被积函数不容易积分（比如含有根式，含有反三角函数）时，可以通过换元的方法从 d 后面拿出一部分放到前面来，就成为$\int f[g(u)]g'(u)du$的形式，若$f[g(u)]g'(u)$容易积分，则换元成功.

（2）归纳总结换元的思维结构

①三角函数代换——当被积函数含有如下根式时，可作三角代换.

$$\begin{cases}\sqrt{a^2-x^2} \to x=a\sin t, |t|<\dfrac{\pi}{2}, \\ \sqrt{a^2+x^2} \to x=a\tan t, |t|<\dfrac{\pi}{2}, \\ \sqrt{x^2-a^2} \to x=a\sec t, 0<t<\dfrac{\pi}{2}(x>a)\end{cases}$$

②恒等变形后作三角函数代换——当被积函数含有根式$\sqrt{ax^2+bx+c}$时，可化为以下三种形式

$\sqrt{\varphi^2(x)+k^2}$，$\sqrt{\varphi^2(x)-k^2}$，$\sqrt{k^2-\varphi^2(x)}$，再做三角代换.

③根式代换——当被积函数含有根式$\sqrt[n]{ax+b}$，$\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$，$\sqrt{ae^{bx}+c}$等时，一般令根式$\sqrt{*}=t$. 对既含有$\sqrt[n]{ax+b}$，也含$\sqrt[m]{ax+b}$，一般取m,n的最小公倍数，令$\sqrt[l]{ax+b}=t$.

④倒代换——当被积函数分母的幂次比分子高两次及以上时，作倒代换，令$x=\frac{1}{t}$.

⑤复杂函数的直接代换——当被积函数中含有a^x，e^x，$\ln x$，$\arcsin x$，$\arctan x$等时，可考虑直接令复杂函数$=t$，值得指出的是，当$\ln x$，$\arcsin x$，$\arctan x$与$P_n(x)$或e^{ax}作乘除时，优先考虑分部积分法.

【例】求$\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{3+4x-4x^2}}$

3.分部积分法

基本思想 $\int udv = uv - \int vdu$，一目了然，这个方法主要适用于“求$\int udv$比较困难”，而$\int vdu$比较容易积分的情形.

【例】计算$\int_0^1 x\arcsin xdx$

4.有理函数积分

（1）定义 形如$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx(n<m)$的积分称为有理函数的积分.

（2）方法 先将$Q_m(x)$因式分解，再把$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$拆成若干最简有理分式之和.

（3）分解的基本原则

①$Q_m(x)$的一次因式$(ax+b)$产生一项$\frac{A}{ax+b}$；

②$Q_m(x)$的k重因式$(ax+b)^k$产生k项，分别为$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(ax+b)^k}$；

③$Q_m(x)$的二次单因式px^2+qx+r产生一项$\frac{Ax+B}{px^2+qx+r}$；

④$Q_m(x)$的k重二次因式$(px^2+qx+r)^k$产生k项

$$\frac{A_1x+B_1}{px^2+qx+r}+\frac{A_2x+B_2}{(px^2+qx+r)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(px^2+qx+r)^k}.$$

【例】$\int\frac{x^2+ax+b}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$ 的结果中不含对数函数，则 a,b 应满足什么条件？

5.关于定积分的计算

①用好基本积分法

【例 1】设 $f(x)=\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$，求 $\int_0^1 xf(x)dx$.

【例 2】设 $I_1=\int_1^e\ln xdx$， $I_2=\int_1^e\ln^2 xdx$，求 I_2+2I_1.

②用好重要公式

【例】求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 xdx$.

【注】$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数,}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}, & n\text{为大于1的奇数}\end{cases}$

③注意识别定积分与反常积分

【例】求$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$

三、应用

1.导数应用

①极值的判别

【结论】设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，

但 $f^{(n)}(x_0)\neq 0,(n\geq 2)$，则：

当 n 为偶数时，$\begin{cases} f^{(n)}(x_0)>0\Rightarrow x_0\text{极小值} \\ f^{(n)}(x_0)<0\Rightarrow x_0\text{极大值} \end{cases}$

【例】设 $y=y(x)$ 为 $y^{(4)}-2y'''+5y''-y'=e^{\cos x}$ 满足 $y'(2)=y''(2)=y'''(2)=0$ 的解，讨论 $x=2$ 时，函数的性态.

②拐点的判别

【结论】设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，且 $f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，

但 $f^{(n)}(x_0)\neq 0,(n\geq 3)$，则：

当 n 为奇数时，$(x_0,f(x_0))$ 为曲线的拐点.

【例】设 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$，则其拐点为（　　）

（A）$(1,0)$　　（B）$(2,0)$　　（C）$(3,0)$　　（D）$(4,0)$

③渐近线

1）$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$，则函数存在渐近线 $x=a$；

2）$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$，则函数存在渐近线 $y=b$；

3）$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=k\\ \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b\end{cases}$，则函数存在渐近线 $y=kx+b$.

【例】曲线 $y=\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\dfrac{1}{x})$ 的渐近线有______条

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

④求最值（推广：求值域）

若给出 $[a,b]$，找三类点

1） $f'(x)=0\Rightarrow x_0$（驻点）

2） $f'(x)$ 不存在 $\Rightarrow x_1$（不可导点）

3）端点 a,b

比较 $f(x_0), f(x_1), f(a), f(b)$，取其最小者为最小值，最大者为最大值

【注】若给出 (a,b)，则端点考虑取极限值。

【例】求 $f(x)=e^{-x^2}\sin x^2$ 的值域

2.积分应用

①求面积

1）直角坐标系：$S=\int_a^b\left|y_2(x)-y_1(x)\right|\,dx$

2）极坐标系：$S=\dfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta\left|r_2^2-r_1^2\right|\,d\theta$

②求体积

1）$V_x=\int_a^b \pi f^2(x)dx$

2）$V_y=\int_a^b 2\pi x\left|f(x)\right|dx$

【例】设曲线 $y=e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}$ 在 $x\geq 0$ 的部分与 x 轴所围成平面区域记为 D，求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积 V .

第四讲　高等数学的基本定理串讲

1. 涉及函数 $f(x)$ 的中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

定理 1　（有界定理） $|f(x)| \le M(M>0)$

定理 2　（最值定理） $m \le f(x) \le M$，其中 m,M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值.

定理 3　（介值定理） 当 $m \le \mu \le M$ 时，$\exists \xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi)=\mu$.

定理 4　（零点定理） 当 $f(a)\cdot f(b)<0$ 时，$\exists \xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

2. 涉及导数（微分）$f'(x)$ 的中值定理

定理 5　（费马定理）

设 $f(x)$ 满足在 x_0 点处 $\begin{cases}(1)\text{可导，}\\(2)\text{取极值}\end{cases}$ 则 $f'(x_0)=0$.

定理 6　（罗尔定理）

设 $f(x)$ 满足 $\begin{cases}(1)[a,b]\text{上连续，}\\(2)(a,b)\text{内可导，}\\(3)f(a)=f(b),\end{cases}$ 则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

定理 7　（拉格朗日中值定理）

设 $f(x)$ 满足两条 $\begin{cases}(1)[a,b]\text{上连续，}\\(2)(a,b)\text{内可导，}\end{cases}$ 则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

或者写成 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

定理 8　（柯西中值定理）

设 $f(x)$，$g(x)$ 满足 $\begin{cases}(1)[a,b]\text{上连续，}\\(2)(a,b)\text{内可导，}\\(3)g'(x)\ne 0,\end{cases}$ 则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

定理 9　（泰勒公式）

（1）带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有 $n+1$ 阶导数存在，则对该邻域内的任意点 x 均有

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，其中$\xi$介于$x$，$x_0$之间.

（2）带佩亚诺余项的n阶泰勒公式

设$f(x)$在点x_0处n阶可导，则存在x_0的一个邻域，对于该邻域中的任一点，成立

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

【注 1】当$x_0=0$时的泰勒公式称为麦克劳林公式，即

① $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$；

② $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$.

【注 2】几个重要函数的麦克劳林展开式

① $e^u=1+u+\frac{1}{2!}u^2+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}u^n+o(u^n)$.

② $\sin u=u-\frac{u^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(u^{2n+1})$.

③ $\cos u=1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!}+o(u^{2n})$.

④ $\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+\cdots\cdots+u^n+o(u^n)$.

⑤ $\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}u^n+o(u^n)$.

⑥ $\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{u^{n+1}}{n+1}+o(u^{n+1})$.

⑦ $(1+u)^\alpha=1+\alpha u+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}u^n+o(u^n)$.

【例 1】证明积分中值定理：若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则至少存在$\eta\in[a,b]$，使得$\int_a^b f(x)dx=f(\eta)(b-a)$.

【例 2】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有一阶连续导数， $f(0)=0$ ，证明至少存在一点 $\xi\in[0,1]$，使得 $f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)dx$.

【例 3】设 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的一阶导函数连续，在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内二阶可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=3$， $f(\dfrac{\pi}{2})=1$. 证明：$\exists\ \xi\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，使得 $f'(\xi)+f''(\xi)\tan\xi=0$.

第五讲　微分方程

一、概念及其使用

1.微分方程：$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$

2.微分方程的阶数：方程中 y 的最高阶导数的次数

3.通解：解中所含独立常数的个数等于方程的阶数

【例】设 y_1,y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，求 λ,μ.

二、基本方程的求解

仅一阶方程.

①变量可分离型

形如：$\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)=g(x)h(y)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{h(y)}=g(x)dx$$

$$\Rightarrow \int\frac{dy}{h(y)}=\int g(x)dx$$

【例】求 $y\sin\dfrac{x}{2}dx-\cos\dfrac{x}{2}dy=0$ 的通解

②齐次型

形如：$\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$

令 $\frac{y}{x}=u$，则 $y=ux,\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}x+u$，代入得

$$\frac{du}{dx}x+u=f(u)$$

$$\Rightarrow\frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow\int\frac{du}{f(u)-u}=\int\frac{dx}{x}$$

【例】求 $xdy=y(\ln y-\ln x)dx$ 的通解

3. 一阶线性型

形如：$y'+p(x)y=q(x)$

两边同乘积分因子 $e^{\int p(x)dx}$ 得

$$e^{\int p(x)dx}\left(y'+p(x)y\right)=e^{\int p(x)dx}q(x)$$

两边积分得

$$e^{\int p(x)dx}y=\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C$$

$$\Rightarrow y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C\right]$$

【例】求 $y'=\frac{y}{2x}+\frac{x^2}{2y}$ 的通解.

第六讲　多元函数微积分初步

一、多元函数微分学

1. 极限的存在性

定义 1　设二元函数 $f(x,y)$ 定义在区域 D 上，点 $P_0(x_0,y_0)$ 在 D 内或者在 D 的边界上（这样的点严格来说叫做聚点）. 如果存在常数 A，对于任给的正数 ε，总存在正数 δ，只要点 $P(x,y)\in D$ 满足 $0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$，恒有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限. 记为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$. 该极限也称为二重极限.

【例】 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x})=$________.

2. 连续性

如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

【注】若上式不成立 $\Rightarrow(x_0,y_0)$ 为不连续点，但不讨论间断类型.

3. 偏导数存在性

定义 2　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义. 若极限

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\triangle x}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad z'_x\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \text{ 或 } f'_x(x_0,y_0).$$

于是，

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\triangle x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0},$$

$$f_y'(x_0,y_0)=\lim_{\triangle y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\triangle y)-f(x_0,y_0)}{\triangle y}=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}.$$

【例】设 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^6}}$，求 $f_x'(0,0)$， $f_y'(0,0)$.

4. 可微

定义 3　如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全增量 $\triangle z=f(x+\triangle x,y+\triangle y)-f(x,y)$ 可表示为

$$\triangle z=A\triangle x+B\triangle y+o(\rho)\ \left(\rho=\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}\right),$$

其中， A,B 不依赖于 $\triangle x$， $\triangle y$ 而仅与 x,y 有关，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，而称

$A\triangle x+B\triangle y$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分，记作 dz，即 $dz=A\triangle x+B\triangle y$.

【例】设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，

求 $f_x'(0,0)$， $f_y'(0,0)$，并讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微.

5. 多元微分法

（1）链式求导规则：

①复合函数的中间变量均为一元函数的情形.

设 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(t)$，$v=\psi(t)$，则 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$，且 $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial t}$.

②复合函数的中间变量均为多元函数的情形.

设 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，则 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

③复合函数的中间变量既有一元函数，又有多元函数的情形.

$z=f(u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(y)$，则 $z=f[\varphi(x,y),\psi(y)]$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dy}$$

（2）无论 z 对谁求导，也无论 z 已经求了几阶导，求导后的新函数仍然具有与原函数完全相同的复合结构.

（3）注意书写规范

【例】设 $z=f(e^x\sin y,x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

二、二重积分

1. **概念**　设二元函数 $f(x,y)$ 定义在有界闭区域 D 上，则二重积分

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

注　（1）将 D 无限分割的 $\boxed{\Delta\sigma_i>0}$，λ 为所有 $\Delta\sigma_i$ 的直径的最大值，强调该极限与对区域 D 的分割方式无关；

（2）其几何背景是以 $f(x,y)$ 为曲顶、有界闭区域 D 为底的**曲顶柱体的体积**：

$$V=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$$

（3）（数学一二要求）其物理背景是以 $f(x,y)$ 为面密度的**平面区域 D 的质量**：

$$M=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$$

（4）要了解二重积分的存在性，也称为**二元函数的可积性**. 设平面有界闭区域 D 由一

条或者几条逐段光滑闭曲线所围成，当 $f(x,y)$ 在 D 上连续时, 或者当 $f(x,y)$ 在 D 上有界, 且在 D 上除了有限个点和有限条光滑曲线外都是连续的，则它在 D 上可积,也就是二重积分存在.

2. 二重积分的对称性

引例

$$\iint\limits_{D_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\le 1}(2x^2+3y^2)dxdy \overset{?}{=} \iint\limits_{D_1:\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}\le 1}(2y^2+3x^2)dydx$$

若把 x 与 y 对调，区域 D 不变（或称区域 D 关于 $y=x$ 对称），则

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(y,x)dydx$$

这就是轮换对称性.

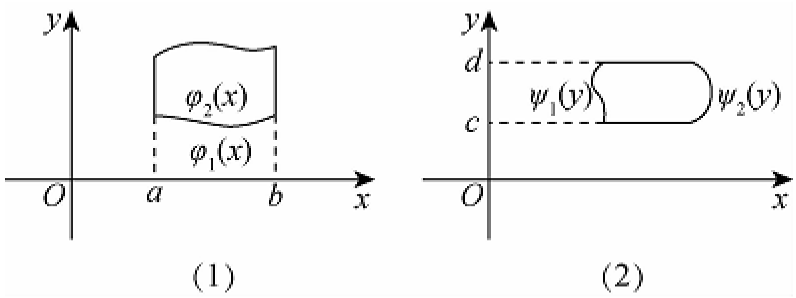
【例】设区域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\right\}$， $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数，a,b 为常数，求 $I=\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma$.

3. 计算

（**1**）直角坐标系下的计算法

① $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy$ 其中 D 为 X 型区域：$\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)$，$a\le x\le b$；

② $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)dx$ 其中 D 为 Y 型区域：$\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)$，$c\le y\le d$.

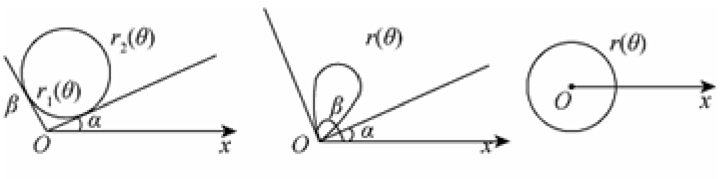


（**2**）极坐标系下的计算法

①$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$ （极点O在区域D外部）

②$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$ （极点O在区域D内部）

③$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$ （极点O在区域D边界上）



【例】计算$I=\iint\limits_D \sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,r^2\sin\theta drd\theta$，其中$D=\left\{(r,\theta)\middle|0\le r\le\dfrac{1}{\cos\theta},0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\right\}$.