考研数学线性代数强化讲义（数一）

主讲：张宇

张宇：新东方在线名师，博士，全国著名考研数学辅导专家，教育部“国家精品课程建设骨干教师”，全国畅销书《高等数学 18 讲》、《考研数学题源探析经典 1000 题》作者，高等教育出版社《全国硕士研究生入学统一考试数学考试参考书（大纲解析）》编者之一，2007 年斯洛文尼亚全球可持续发展大会受邀专家（发表 15 分钟主旨演讲）. 首创“题源教学法”，对考研数学的知识结构和体系有全新的解读，对考研数学的命题与复习思路有极强的把握和预测能力，让学生轻松高效夺取高分.

目　录

第一讲　行列式

综述

1．行列式的定义与性质：几何法、逆序法、展开法、性质

2．行列式的计算：3、4 阶；n 阶（n>4）

消 0 化三角形、消 0 降阶、拆项、加边、范氏、数归&递推

一、行列式的三种定义与性质

1．几何法定义

重要结论：

（1）n 阶行列式由 n 个 n 维向量拼成，其结果为以这 n 个向量为邻边的 n 维图形的体积.

（2）行列式由向量组成！

（3）$|A|_{n\times n}\neq 0\Leftrightarrow$ n 个 n 维向量线性无关；

$|A|_{n\times n}=0\Leftrightarrow$ n 个 n 维向量线性相关.

（4）7 大性质（习惯上写列向量 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$）

1）$|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|=\begin{vmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\vdots\\\alpha_n^T\end{vmatrix}$

2）$|\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_n|=0$

3）$|\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,k\alpha_i,\cdots,\alpha_n|=0$

4）$|\alpha_1,\cdots,\alpha_i+\beta_i,\cdots,\alpha_n|=|\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_n|+|\alpha_1,\cdots,\beta_i,\cdots,\alpha_n|$

5）（互换）$|\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n|=-|\alpha_1,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_n|$

6）（倍乘）$k|\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_n|=|\alpha_1,\cdots,k\alpha_i,\cdots,\alpha_n|$

7）（倍加） $\left|\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n\right|=\left|\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j+k\alpha_i,\cdots,\alpha_n\right|$

【例 1】设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta,\gamma$ 均为 4 维列向量，且 $\left|\gamma,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right|=2$，$\left|\alpha_1,\beta+\gamma,\alpha_2,\alpha_3\right|=3$，则 $\left|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,5\beta\right|=$________.

【例 2】任给 4 维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，则 $\left|\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1\right|=$________.

【例 3】设 a，b，c 为已知常数，$\left|A\right|_{n\times n}=a$，$\begin{vmatrix} A & \beta \\ \beta^T & b \end{vmatrix}=0$，$\beta$ 为 n 维列向量，则 $\begin{vmatrix} A & \beta \\ \beta^T & c \end{vmatrix}=$________.

2．逆序法定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\sigma(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

①展开后有 n！项；②每项是取自不同行，不同列的 n 个元素的乘积；③行下标顺排后，每项前乘以 $(-1)^{\sigma(j_1j_2\cdots j_n)}$

注：$\sigma(j_1j_2\cdots j_n)$：$j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

【例 1】展开后，

$a_{12}a_{23}a_{31}a_{45}a_{54}a_{66}$ 前添______号.

$a_{45}a_{16}a_{53}a_{22}a_{64}a_{31}$ 前添______号.

【例 2】$\sigma(1,2,3,\cdots,n)=$______，$\sigma(n,n-1,\cdots,3,2,1)=$______.

【例 3】求 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 2x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 的 x^4 、 x^3 的系数.

3．展开式法定义 $|A|=|a_{ij}|_{n\times n}$

①余子式 M_{ij}

②代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

③展开公式

$$|A|=\begin{cases} a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} & (\text{按第}i\text{行展开}) \\ a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} & (\text{按第}j\text{列展开}) \end{cases}$$

【例 1】$\begin{vmatrix} 我 & & 生 \\ & 有 & \\ 你 & & 幸 \end{vmatrix}=$______.

【例 2】设 $D_4=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，则第 4 行各元素余子式之和为______.

【例 3】设 D_4 的某行元素全为 2，且 D_4=3，则 $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}A_{ij}=$______.

二、行列式的计算

关键——研究行列式中元素的分布规律

1．3、4 阶——用好性质，出 0，展开式

【例 1】设 $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$，求 λ.

2．n 阶的计算

（1）消 0 化三角形法

【例】$D_n=\begin{vmatrix} a_1-x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}$

【注】重要公式：$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$

（2）消 0 展开降阶法

【例】$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

（3）拆项法

【例】$D_n=\begin{vmatrix} x_1+1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n \\ x_2+1 & x_2+2 & \cdots & x_2+n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n+1 & x_n+2 & \cdots & x_n+n \end{vmatrix}$，$n\geq 2$.

（4）加边法

【例】设 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$，求 $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a_2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a_n \end{vmatrix}$.

（5）范德蒙行列式

$$V_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&x_3^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

$V_n\neq 0\Leftrightarrow x_i\neq x_j,i\neq j$

【例 1】$\begin{vmatrix}b+c&a+c&a+b\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$

【例 2】设 a，b，c，d 互不相等，证明：$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}=0$ 的充要条件为 $a+b+c+d=0$.

（6）数学归纳法&递推法

综述：

1）第一数学归纳法：①验 n=1 成立；②设 n=k 成立；③证 n=k+1 成立.

2）第二数学归纳法：①验 n=1，2 成立；②设 n<k 成立；③证 n=k 成立.

【例 1】 $D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$

【例 2】证明： $D_n=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \cdots & & \\ & & \vdots & & \vdots & \\ & & & \cdots & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}=(n+1)a^n$

第二讲 矩阵

综述

①定义与基本运算

②伴随矩阵 A^*

③可逆矩阵 A^{-1}

④初等矩阵

⑤求 A^{-1}

⑥矩阵方程

⑦分块矩阵

一、定义与基本运算

1．定义　由 n 个 m 维列向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}$，$\cdots$，$\alpha_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}$拼成.记为

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}.$$

若 $m=n$，称为 n 阶矩（方）阵.

2．基本运算

1）加法　　$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$

要求：矩阵同型（对应加）

2）数乘　　$kA=(ka_{ij})_{m\times n}$

1^0 每一个 $a_{ij}\times k$

2^0 若 $A_{n\times n}$，$|kA|=k^n|A|$

3）乘法　　$A_{m\times s}B_{s\times n}=(c_{ij})_{m\times n}=C_{m\times n}$

1^0 A 的列数=B 的行数，才可乘.

$2^0 \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{is} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & c_{ij} & \end{pmatrix}$

其中 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{is}b_{sj}$.

【注】① $|A_{n\times n}B_{n\times n}| = |A||B|$

② $|A+B|$ 不一定等于 $|A|+|B|$

③ $A \neq B$ 推不出 $|A| \neq |B|$

④ $A \neq 0$ 推不出 $|A| \neq 0$

⑤ AB 不一定等于 BA

⑥ $AB = 0$ 推不出 $A = 0$ 或 $B = 0$

⑦ $AB = AC$， $A \neq 0$ 推不出 $B = C$；

$AB = AC$， $|A| \neq 0 \Rightarrow B = C$.

3．重要矩阵及运算

①零矩阵 $O_{m\times n}$

②单位矩阵 $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

③数量矩阵 $kE_n = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$

$\forall A_{n\times n}$， $A \cdot kE = kE \cdot A$.

④对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

⑤对称阵 $\Leftrightarrow A^T = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$

⑥反对称阵 $\Leftrightarrow A^T = -A \Leftrightarrow \begin{cases} a_{ii} = 0 \\ a_{ij} = -a_{ji} (i \neq j) \end{cases}$

⑦正交矩阵

1） $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

$1^0 |A|=|A^T|$；$2^0 (A^T)^T=A$；$3^0 (kA)^T=kA^T$；$4^0 (A+B)^T=A^T+B^T$；$5^0 (AB)^T=B^TA^T$

2） $A_{n\times n}$是正交阵$\Leftrightarrow AA^T=A^TA=E$

A为正交阵$\Rightarrow A$由标准正交基组成.

【例 1】设$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$，则$A^n=$__________.

【例 2】设$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求$A^n$.

【例 3】$A_{n\times n}$，证明：$\forall x=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$x^TAx=0 \Leftrightarrow A$为反对称矩阵.

【例 4】设 A、B 均为 n 阶正交阵，$|A|+|B|=0$，证明：$|A+B|=0$.

二、伴随矩阵 A^*

1．定义

①$A \Rightarrow A_{ij}$ ②$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$，$A$ 的伴随矩阵.

$AA^*=A^*A=|A|E$

若 $|A|\neq 0$，A 可逆，则 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$.

2．重要结论

当 $|A|\neq 0$ 时，（A 可逆）

①$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$

②$k\neq 0$，$(kA)^*=k^{n-1}A^*$

③$(A^T)^*=(A^*)^T$

④$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$

⑤$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$

⑥$(AB)^*=B^*A^*$

【例 1】$A_{3\times 3}$ 为正交阵，$a_{ij}=A_{ij}$，$a_{33}=-1$，$AB=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，求 B.

【例 2】$A_{n\times n}$，证明：$(E-A)$与$(E+A)^*$可交换.

三、可逆矩阵 A^{-1}

1．定义　$A_{n\times n}$，$B_{n\times n}$，若$AB=E$，则A、B可逆，且$A^{-1}=B$，$B^{-1}=A$，$AB=BA$.

2．性质

①$(A^{-1})^{-1}=A$；②$k\neq 0$，$(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$；③$A$、$B$可逆，则$AB$可逆，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$；

④$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$；⑤$\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|}$

【注】$\begin{cases}(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}\\(A+B)^*\neq A^*+B^*\\(A+B)^T\neq A^T+B^T\end{cases}$

【例 1】$A_{n\times n}$，$A^2-3A+2E=0$，证明：A、$A+2E$均可逆，并求A^{-1}，$(A+2E)^{-1}$.

【例 2】A_n，B_n均可逆，$A^{-1}+B^{-1}$可逆，证明$A+B$可逆，并求$(A+B)^{-1}$.

四、初等矩阵

1．定义　E_n经过一次初等变换得到的矩阵，叫初等矩阵.

E_{ij}：互换初等矩阵

$E_i(k)$：倍乘初等矩阵

$E_{ij}(k)$：行——第 i 行×k+第 j 行

列——第 j 列×k+第 i 列

2．重要结论

①$[E_i(k)]^{-1}=E_i(\frac{1}{k})$，$E_{ij}^{-1}=E_{ij}$，$[E_{ij}(k)]^{-1}=E_{ij}(-k)$

②“左行右列”定理

初等阵 P 左（右）乘 A 得 PA（AP），就是对 A 作了一次与 P 完全相同的初等行（列）变换.

【例】设 $A_{3\times3}$ 可逆，交换 A 的第 1、2 列得到 B，则 B^* 可由（ ）互换得到.

（A）A^* 的第 1、2 列 （B）A^* 的第 1、2 行

（C）$-A^*$ 的第 1、2 列 （D）$-A^*$ 的第 1、2 行

五、求 A^{-1}

①定义法

若 $AB=E$，A_n，B_n，则 $A^{-1}=B$，$B^{-1}=A$.

② A^* 法 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

【例 1】$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

【例 2】求 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1}.

③初等行变换法

$\left(A\middle|E\right)\underline{\text{行变换}}\left(E\middle|A^{-1}\right)$

【例】$A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

六、矩阵方程

1．定义：含未知矩阵的方程

2．基本形式

① $AX=B$；② $XA=B$；③ $AXB=C$.

3．解法

（1）A或A与B可逆，①$\Rightarrow X=A^{-1}B$；②$\Rightarrow X=BA^{-1}$；③$\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$

（2）A不可逆，如① $AX=B$，用解方程组的思想：

$A(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\Rightarrow$

$A\xi_i=\beta_i(i=1,2,\cdots,n)\Rightarrow$

解出ξ_i，得 $X=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$

（3）有时，设 $X=(x_{ij})_{m\times n}$，代入方程$\Rightarrow$以 x_{ij} 为未知的方程组，求之.——待定系数法

（4）勿忘“化简先行”

【例 1】设 $A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$，$ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，求 B.

【例 2】$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$AX+E=A^2+X$，求 X.

七、分块矩阵

1．定义　用若干纵、横线将一个矩阵分成若干小块，称这些小块为子矩阵，将子矩阵看作原矩阵的元素，就得分块矩阵.

【注】进行加、减、乘、转置时，将子矩阵当作普通矩阵的元素看待，不必陌生.

2．基本运算

①加法：同型、分法相同

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & A_2+B_2 \\ A_3+B_3 & A_4+B_4 \end{pmatrix}$$

②数乘 $k\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kA & kB \\ kC & kD \end{pmatrix}$

③乘法：左列分法=右行分法，且可加

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AX+BZ & AY+BW \\ CX+DZ & CY+DW \end{pmatrix}$$

如：$A_{n\times n}$ 可逆，$\alpha_{n\times 1}$，b 常数，$P=\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* |A| & |A| \end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}$，求 PQ.

④转置：$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{pmatrix}$

3．重要结论

① A_n，B_n，$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^m=\begin{pmatrix} A^m & O \\ O & B^m \end{pmatrix}$

②1） A_i 可逆，则 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$ 可逆，且 $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$；

A_i 可逆，则 $A=\begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_s & & & \end{pmatrix}$ 可逆，且 $A^{-1}=\begin{pmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$.

2）B、C 可逆，$\Rightarrow A=\begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix}$ 可逆，且 $A^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$.

$A=\begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix}$ 可逆，且 $A^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}$；

$A=\begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 可逆，且 $A^{-1}=\begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \end{pmatrix}$.

③ A_n，B_m

1）$\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}=|A||B|$

2）$\begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}=(-1)^{nm}|A||B|$

3）A 可逆，$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|$；

D 可逆，$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|D||A-BD^{-1}C|$

【例】求 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 1 & & \cdots & \\ 2 & & 2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & & & \cdots & n \end{vmatrix}$

第三讲　向量组与方程组

综述

①线性相关性

②线性表出

③极大无关组与秩

④等价向量组

⑤齐次方程组

⑥非齐次方程组

⑦秩的等式与不等式

一、线性相关性

1．定义

①∃一组不全为 0 的数 $x_1,x_2,\cdots,x_s$，使得 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$ 成立.称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关.

$$\Leftrightarrow \left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=0 \text{ 有非零解.}$$

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$$

②若 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$ 成立，必使 $x_1=x_2=\cdots=x_s=0$，称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

$$\Leftrightarrow \left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=0 \text{ 只有零解.}$$

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$$

2．重要结论

①设 m 个 n 维向量

1^0 $m=n$，用行列式$\begin{cases}|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|=0 \Leftrightarrow \text{相关} \\ |\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|\neq 0 \Leftrightarrow \text{无关}\end{cases}$

2^0 $m>n$，必相关.

3^0 $m<n$，（具体数字型），用化行阶梯型阵，看秩.

②1）部分相关$\Rightarrow$整体相关

2）整体无关$\Rightarrow$部分无关

3）原来相关$\Rightarrow$缩短相关

4）原来无关$\Rightarrow$延长无关

【例】$\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\1\\7\\0\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}9\\0\\6\\6\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-8\\0\\-11\\5\\6\end{pmatrix}$，判断向量组的线性相关性.

【例 1】设 n 维 $(n\geq 3)$ $\alpha_1=(a,a,\cdots,a,b)^T$，$\alpha_2=(a,a,\cdots,b,a)^T$，$\cdots$，$\alpha_n=(b,a,\cdots,a,a)^T$，$ab\neq 0$，若 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=n-1$，则 a，b 满足________.

【例 2】$A_{n\times n}$，α 是 n 维列向量，若 $A^{m-1}\alpha\neq 0$，$A^m\alpha=0$，证明：$\alpha,A\alpha,A^2\alpha,\cdots,A^{m-1}\alpha$ 线性无关.

二、线性表出

1．定义

①∃一组数 $x_1,\cdots,x_s$，使 $\beta=x_1\alpha_1+\cdots+x_s\alpha_s$ 成立.称 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出（示）.

$$\Leftrightarrow \left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}=\beta \text{ 有解}$$

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)$$

②不∃任何一组数 $x_1,x_2,\cdots,x_s$，使 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s$ 成立.称 β 不可由

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出（示）.

$$\Leftrightarrow \left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}=\beta \text{ 无解.}$$

2．重要结论

①若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，但 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 唯一表示.

②若 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 表出，且 $s>t$，则 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 必相关.

③若 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 表出，且 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性无关，则 $s\le t$.

【例】设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，$\alpha_2,\cdots,\alpha_{s+1}$ 线性无关，

（Ⅰ）α_1 能否由 $\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 表出？（Ⅱ）α_{s+1} 能否由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 表出？

三、极大无关组与秩

1．定义　若 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots\alpha_{i_r}$ 满足：1^0 取自 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$；$2^0$ 线性无关；3^0 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 中 $\forall\alpha_i$

均可由$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots\alpha_{i_r}$线性表示.则称$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots\alpha_{i_r}$是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$的一个极大线性无关组，且秩$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s)=r$.

2．重要结论

若 A 经过初等行变换化为 B，则 A 的列向量组与 B 的列向量组有相同的线性相关性，即

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s)\underset{\text{行}}{\to}B=(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s)$

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$与$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_s\beta_s=0$同解.

【例 1】设$\alpha_1=(1,1,1,0)^T$，$\alpha_2=(1,1,0,0)^T$，$\alpha_3=(3,3,2,0)^T$，$\alpha_4=(1,0,0,0)^T$，$\alpha_5=(3,2,1,0)^T$，求其极大无关组与秩.

四、等价向量组

1．定义

（Ⅰ）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$，（Ⅱ）$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$，

则（Ⅰ）与（Ⅱ）等价$\Leftrightarrow$（Ⅰ）与（Ⅱ）可互相线性表出.

2．重要结论

（Ⅰ）与（Ⅱ）等价$\Leftrightarrow$ r（Ⅰ）=r（Ⅱ）且可单方表出.

$\Leftrightarrow$ r（Ⅰ）=r（Ⅱ）=r（Ⅰ|Ⅱ）.

【例】设（Ⅰ）$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\a-3\\1\\-2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\8\\b-1\\3-b\end{pmatrix}$，

（Ⅱ）$\beta_1=\begin{pmatrix}2\\b+5\\-2\\4\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}3\\7\\a-4\\7-a\end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix}1\\2b+4\\-1\\2\end{pmatrix}$

①a，b 取何值时，r（Ⅰ）=r（Ⅱ），且（Ⅰ），（Ⅱ）等价.

②a，b 取何值时，r（Ⅰ）=r（Ⅱ），但（Ⅰ），（Ⅱ）不等价.

五、齐次方程组 $AX=0$

1．解的判定

$AX=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow r(A)=n$；

$AX=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(A)<n$ （未知数个数 n ）

2．基础解系 $\Leftrightarrow$ 无穷多解的一个极大无关组.

定义：设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 满足：1^0 是 $AX=0$ 的解；2^0 线性无关；3^0 $s=n-r(A)$

【例 1】求 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0\end{cases}$ 的通解.

【例 2】$A_{n\times n}$， $M_{11}\neq 0$，求 $AX=0$ 的通解.

六、非齐次方程组 $AX=\beta$

1．解的判定

$AX=\beta$ 无解 $\Leftrightarrow r(A)+1=r(A|\beta)$ 或 $r(A)\neq r(A|\beta)$；

$AX=\beta$ 有唯一解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A|\beta)=n$；

$AX=\beta$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A|\beta)<n$

2．解法

1^0 求 $AX=0$ 的通解；

2^0 求 $AX=\beta$ 的一个特解

非齐次通解=齐次通解+非齐次特解

【例】求 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_4=-6 \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3=3 \end{cases}$ 的通解.

七、秩的等式与不等式

1．定义：对 $A_{m\times n}$， $\exists k$ 阶子式 $\neq 0$， $\forall k+1$ 阶子式 $=0\Rightarrow r(A)=k$

2．重要结论

（1）关于 A 本身

1） $A_{m\times n}$， $0\le r(A)\le \min\{m,n\}$

2） $r(kA)=r(A)$， $k\ne 0$

3） $r(A)=r(A^T)=r(AA^T)=r(A^TA)$

证明：

4） $A_{n\times n}$， $r(A^n)=r(A^{n+1})$

（2）关于 A， B， C，……，拼起来，不运算

5） $\max\{r(A),r(B)\}\le \left\{\begin{matrix} r(A|B) \\ r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \end{matrix}\right\}\le r(A)+r(B)$

6） $r(A)+r(B)\le r\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}\le r(A)+r(B)+r(C)$

（3） $A+B$

7） $r(A+B)\le r(A)+r(B)$

（4） AB

8） $A_{m\times n}$， $B_{n\times s}$， $r(A)=n\Rightarrow r(AB)=r(B)$

9） $r(A)+r(B)-n\le r(AB)\le \min\left\{r(A),r(B)\right\}$

（5） A^*

10） $r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n, \\ 1, & r(n)=n-1, \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$

向量空间（数一）

1．对向量空间V

若$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$： 1^0取自V；2^0线性无关；$3^0 V$的任一α均可由它们表出.

$\Rightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_r$叫$V$的一个基.

且$\alpha = k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r$，$k_1,\cdots,k_r$叫$\alpha$在这个基下的坐标.（唯一）

2．设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，$\beta_1,\cdots,\beta_n$为R^n的两个基，且$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)C=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，称$C$为$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$到$(\beta_1,\cdots,\beta_n)$的过渡矩阵.（$C$可逆）

【例】设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，

$\beta_1=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$

是R^3的两个基.

（Ⅰ）求$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$到$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$的过渡阵$C$；

（Ⅱ）求$\eta=(1,0,-1)^T$在$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$下的坐标；

（Ⅲ）已知ξ在$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$下的坐标为$(1,2,0)$，求$\xi$在$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$下的坐标.

第四讲 特征值与二次型

综述

知识结构：

1^0 ∃可逆矩阵 C，使得 $C^{-1}AC = B \Rightarrow A \sim B$

2^0 ∃可逆矩阵 D，使得 $D^{-1}AD = \Lambda \Rightarrow A \sim \Lambda$

3^0 ∃正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = \Lambda \Rightarrow A \sim \Lambda$

4^0 $f = X^T AX \,\underline{\underline{X = PY}}\, (PY)^T A(PY) = Y^T P^T APY = Y^T \Lambda Y$

一、$A_{n\times n}$ 的特征值与特征向量

1．定义

$A_{n\times n}$，$\xi_{n\times 1} \neq 0$，λ 为常数，若 $A\xi = \lambda\xi$，则称 λ 为 A 的特征值，ξ 为 A 的属于 λ 的特征向量.

2．性质

①$\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} = tr(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$

②$|A| = \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$

3．求法

①定义法

A	$aA+bE$	A^k	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$
λ	$a\lambda+b$	λ^k	$f(\lambda)$	$1/\lambda$	$\lvert A\rvert/\lambda$	λ
ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	$P^{-1}\xi$

【例】$A_{3\times 3}$，$A^2 - 3A - 4E = 0$，$|A| = -1$，则 $|A^* + A^{-1}| =$________.

②特征方程法

$A\xi=\lambda\xi$，$\xi\neq 0\Rightarrow \lambda\xi-A\xi=0\Rightarrow(\lambda E-A)\xi=0\Rightarrow(\lambda E-A)X=0$ 有非零解

$\Rightarrow|\lambda E-A|=0\Rightarrow\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$（重根按重数计）

解 $(\lambda_i E-A)X=0\Rightarrow\xi_i$（属于 λ_i 的），$i=1,\cdots,n$

【例 1】设 $A=\begin{pmatrix}3&1&-7\\0&2&4\\0&0&6\end{pmatrix}$，求 A 的特征值与特征向量.

【例 2】求 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

二、$A\sim B$ 与 $A\sim\Lambda$

1．A 相似于 B

（1）定义：$\exists$ 可逆矩阵 C，使得 $C^{-1}AC=B\Rightarrow A\sim B$

（2）性质

$A\sim B\Rightarrow$ 1）$r(A)=r(B)$；2）$|A|=|B|$；3）$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$；4）$tr(A)=tr(B)$；5）$A^m\sim B^m$；6）$f(A)\sim f(B)$；

7）A^{-1}，$B^{-1}\exists$，$A^{-1}\sim B^{-1}$，$f(A^{-1})\sim f(B^{-1})$，$A^*\sim B^*$，$f(A^*)\sim f(B^*)$

2．$A\sim\Lambda$

（1）定义：$\exists$ 可逆矩阵 D，使得 $D^{-1}AD=\Lambda \Rightarrow A\sim\Lambda$

重要结论：$A\sim\Lambda \Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量.

（2）重要结论

1）普通矩阵 A

$\lambda_1\neq\lambda_2 \Rightarrow \xi_1$ 与 ξ_2 无关；

$\lambda_1=\lambda_2 \Rightarrow \xi_1$ 与 ξ_2 相关性不确定.

2）实对称矩阵 A（$a_{ij}=a_{ji}$）

$\lambda_1\neq\lambda_2 \Rightarrow \xi_1\perp\xi_2$（正交）；

$\lambda_1=\lambda_2 \Rightarrow \xi_1$ 与 ξ_2 正交或不正交，但一定是线性无关的.

（3）$A\sim\Lambda$ 的判别法

1）两个充分条件

A 有 n 个不同的特征值 $\lambda_i \Rightarrow A\sim\Lambda$.

A 为实对称矩阵 $\Rightarrow A\sim\Lambda$.

2）两个充要条件

A 有 n 个线性无关的特征向量 $\Leftrightarrow A\sim\Lambda$.

$n_i=n-r(\lambda_iE-A)$，λ_i 为 n_i 重根 $\Leftrightarrow A\sim\Lambda$.

【例 1】判别 $A=\begin{pmatrix}1&6&8\\0&7&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 是否可以相似对角化？

【例 2】判别 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ 是否可以相似对角化？

【例 3】判别 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$ 是否可以相似对角化？

【例 4】判别 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-3&-3&-3\end{pmatrix}$ 是否可以相似对角化？

3． $A\sim B$ 的判别法

1） $A_{n\times n}$， $B_{n\times n}$， A 实对称，则 $A\sim\Lambda$， $B\sim\Lambda$， $A\sim B$.

2） $A_{n\times n}$， $B_{n\times n}$， A， B 均可对角化， $\lambda_A=\lambda_B\Rightarrow A\sim B$

3） $A_{n\times n}$ 对称， $B_{n\times n}$ 对称， $\lambda_A=\lambda_B\Rightarrow A\sim B$

【例】证明： $A_n=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$ 与 $B_n=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$ 相似.

三、二次型化标准形

1．二次型及其矩阵表示

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n$$

$$+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n$$

$$+\cdots\cdots$$

$$+a_{nn}x_n^2$$

$$=X^TAX=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

【例】 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$

2．化二次型为标准形

（1）理论

1） $f=\cdots\cdots=d_1x_1^2+\cdots+d_nx_n^2$， d_i 为实数　　　　标准形

$f=\cdots\cdots=x_1^2+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_{p+q}^2$　　　　规范形

注： p——正惯性指数； q——负惯性指数

2） $f=X^TAX\ \underline{\underline{X=PY}}Y^T\Lambda Y$ （P 正交矩阵）

$f=X^TAX\ \underline{\underline{X=CY}}(CY)^TA(CY)$ （C 可逆矩阵）

合同：∃可逆矩阵 C，使得 $C^TAC=B$，称 A 合同于 B.

（2）配方法

从左，找一个系数 $\neq 0$ 的 x_i^2，将所有含 x_i 的项集中在一起，配完全平方，接着，如法炮制，直到每一项都完全平方.

【例】 $f=2x_1^2-4x_1x_2+x_2^2-4x_2x_3$

（3）正交变换法

【例】 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 化标准形，并写出正交阵 P.

【注】施密特正交化 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$

令 $\beta_1=\alpha_1$，

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2.$$

3． f 的正定性

（1）定义：$\forall x\neq 0$， $f=X^TAX>0$，叫 f 正定.

（2）必要条件：A 正定$\Rightarrow$1） $a_{ii}>0$；2） $|A|>0$；3） $A^T=A$.

（3）充要条件：

f 正定$\Leftrightarrow$ A正定

$\Leftrightarrow$ A^{-1} 正定

$\Leftrightarrow \forall x\neq 0, f=X^TAX>0$

$\Leftrightarrow \lambda_i>0$

$\Leftrightarrow p=n$

$\Leftrightarrow$ 顺序主子式均大于零

$\Leftrightarrow$ $\exists$可逆矩阵D，使$A=D^TD$（A合同于E）

【例】设 $f=X^TAX$，则 f 正定的充要条件是（　）

（A） A^* 正定　（B） A^{-1} 正定　（C） $q=0$　（D） $\exists C$，使$A=C^TC$

4．矩阵的等价、相似、合同

1^0 A、B 同型　　A、B 等价 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)$

2^0 A、B 同阶　　A、B 相似 $\Leftrightarrow \exists$ 可逆矩阵 C，使得 $C^{-1}AC=B$

3^0 A、B 对称　　A、B 合同 $\Leftrightarrow$ p、q 相同

【例 1】当 k 取何值时，$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ 等价？

【例 2】当 k 取何值时，$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 相似？

【例 3】当 k 取何值时，$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 合同？