考研数学高等数学强化讲义

主讲：张宇

张宇：新东方在线名师，博士，全国著名考研数学辅导专家，教育部“国家精品课程建设骨干教师”，全国畅销书《高等数学 18 讲》、《考研数学题源探析经典 1000 题》作者，高等教育出版社《全国硕士研究生入学统一考试数学考试参考书（大纲解析）》编者之一，2007 年斯洛文尼亚全球可持续发展大会受邀专家（发表 15 分钟主旨演讲）．首创“题源教学法”，对考研数学的知识结构和体系有全新的解读，对考研数学的命题与复习思路有极强的把握和预测能力，让学生轻松高效夺取高分．

目　录

第一讲　极限

综述

1．定义与性质

2．函数极限的计算

3．数列极限的计算

4．应用：无穷小比阶；连续与间断

内容展开

极限的定义与性质

1．定义

1）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

（$x\to x_0$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$）

2）$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，恒有$|x_n-a|<\varepsilon$.

考点有三：

①极限运算的过程性　　$x\to 0$

若$\lim\limits_{x\to 0} f(x)\,\exists$，则$f(x)$在$x\to 0$中处处有定义；

若$f(x)$在$x\to 0$中有无定义点，则$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不$\exists$.

如$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x\cos\frac{1}{x})}{x\cos\frac{1}{x}}$

②$\varepsilon-\delta$，$\varepsilon-N$的考法

③取ε，证明$f(x)$，x_n的范围.

2．性质

①唯一性　　若$\lim\limits_{x\to\bullet} f(x)=A\exists$，则$A$唯一.

【例】已知$I=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+k[x])$存在，求$I$，$k$.

②局部有界性

若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\exists$，则$\exists M>0$，$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)|<M$.

【例】设$f(x)=\dfrac{(x^3-1)\sin x}{(x^2+1)|x|}$，讨论其在定义域上的有界性.

③局部保号性

若$\lim\limits_{x\to\bullet} f(x)=A>0$（或<），则在$x\to\bullet$中，$f(x)>0$（或<）.　　脱帽

推论：若$x\to\bullet$中，$f(x)\geq 0$（或≤），若$\lim\limits_{x\to\bullet} f(x)\exists$，则$\lim\limits_{x\to\bullet} f(x)\geq 0$（或≤）.　　戴帽

【例】设$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=-1$，则$f(x)$在$x=x_0$处（　）

（A）取极大值　　（B）取极小值　　（C）不取极值　　（D）不确定

函数极限的计算

综述：（1）化简先行

（2）判别类型（七种未定式）

（3）使用工具（洛必达法则、泰勒公式）

（4）注意事项

【例】求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{x^2}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$

（3）$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$

（4）$\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\cdot\ln(1-x)$

【注】重要公式：$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ln^{\beta} x=0$（$\alpha>0$，$\beta>0$）

（5）$\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\dfrac{1}{x})-2\ln 2\cdot x]$

（6）$\lim\limits_{x\to 0^+}(2x-\tan x^2)^{\sin x}$

（7）$\lim\limits_{x\to \pi^-}(\pi-x+\sin x)^{\sin x}$

（8）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{(1+\dfrac{1}{x})^{x^2}}$

（9）若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+f(x)}{x^2\sin^2 x}=1$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+f(x)}{x^2\sin^2 x}$.

数列极限的计算

1．通项已知且易于连续化，用**归结原则**

【例】求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^{\sqrt{n}}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n+\sin n}}$

2．通项已知但不易连续化，用**夹逼准则**

【例】（Ⅰ）证明：当 $x>0$ 时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

（Ⅱ）设 $x_n=(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

3．对通项由递推公式给出的，用**单调有界准则**

【例】（Ⅰ）设 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，求 $f(x)$ 的最小值；

（Ⅱ）设 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

极限的应用：无穷小比阶，判别连续与间断

【例 1】设 $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$，当 $x\to 0$ 时，若 $p(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小量，求 $p(x)$.

【例 2】若 $\int_0^{x-\ln(1+x)}\dfrac{\sin t^2}{t}dt$ 与 cx^k 为等价无穷小量，求 c， k.

【例 3】 $f(x)=\dfrac{|x|^{x}-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点有_____个.

【例 4】设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x^{2}-4)}{\sin\pi x}, & x<0,\\ \dfrac{x(x^{2}-1)}{x-1}, & x\geq 0\end{cases}$

求其间断点并判别类型.

第二讲 一元函数微积分学

综述

1．概念
2．计算
3．应用
4．证明

一、概念

综述：导数、微分、不定积分、定积分、变限积分、反常积分

1．导数

【注】 $f(x)$ 在 x_0 点处可导

$\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 点处导数存在

$\Leftrightarrow$ $f'(x_0)$ 存在

命题角度：
（1）具体型（易）
（2）半抽象半具体型（中）
（3）抽象型（难）

【例 1】设 $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$，求 $F'(x)$.

【例 2】设 $\delta>0$， $f(x)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上有定义， $f(0)=1$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)+2xf(x)}{x^2}=0$，证明： $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$.

【例 3】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$∃，能否推出 $f'(0)$ 存在？

【例 4】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$∃，能否推出 $f'(0)$ 存在？

【例 5】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(ax)-f(x)}{x}=b$，$a$，$b$ 为常数，$|a|>1$，证明：$f'(0)=\dfrac{b}{a-1}$.

2．微分　　$y=f(x)$

① $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$　　真实增量

② $A\Delta x$　　线性增量

③ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-A\Delta x}{\Delta x}=0\Rightarrow y=f(x)$ 在 x_0 处可微

故一点可导 $\Leftrightarrow$ 一点可微

考点：$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$

$$dy=A\Delta x=y'(x_0)\Delta x=Adx$$

【例】设 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$，当 x 在 $x=-1$ 处取 $\Delta x=-0.1$ 时，Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(1)=$________.

3．不定积分

①定义：$\forall x\in I$，都有 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数.

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

否则：$\exists x_0\in I$，使得 $F'(x_0)\neq f(x_0)$，则 $F(x)$ 不是 $f(x)$ 在 I 上的原函数.

②原函数存在定理

1）连续；2）跳跃；3）可去；4）无穷；5）振荡.

1）连续函数必有原函数（考过证明）

设 $f(x)$ 在 I 上连续，证明 $F(x)=\int_a^x f(t)dt\ (a,x\in I)$ 必可导，且 $F'(x)=f(x)$，$\forall x\in I$.

2）含跳跃间断点的函数在此区间必没有原函数.

3）、4）同 2）

5）只具体计算，不抽象证明

【例 1】$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$

【例 2】$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 是否有原函数？

4．定积分

【例】在$[-1,2]$上，判断以下函数是否存在原函数和定积分？

① $f(x)=\begin{cases} 2, & x>0 \\ 1, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$

② $f(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

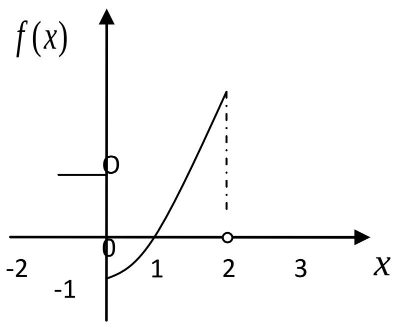
③ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

④ $f(x)=\begin{cases} 2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

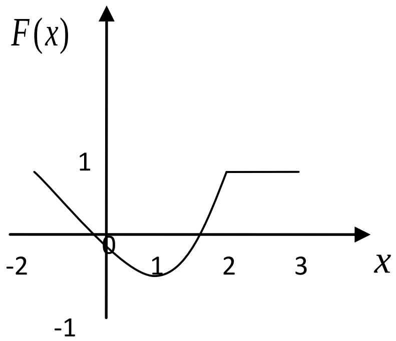
【注】① $f(x)$连续$\Rightarrow F(x)=\int_a^x f(t)dt$可导； $f(x)$可积$\Rightarrow F(x)=\int_a^x f(t)dt$连续.

$\Rightarrow F(x)=\int_a^x f(t)dt$ “天生”就连续！

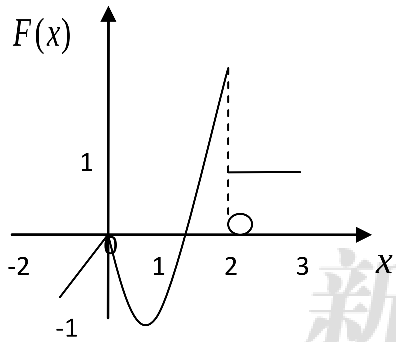
【例】设函数$y=f\left(x\right)$在区间$\left[-1,3\right]$上的图形为：



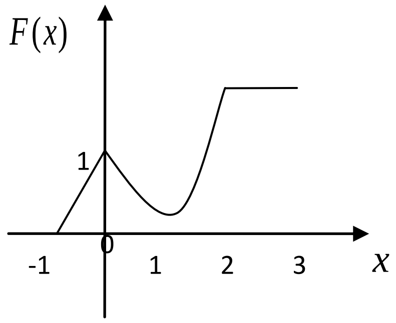
则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 的图形为（　　）



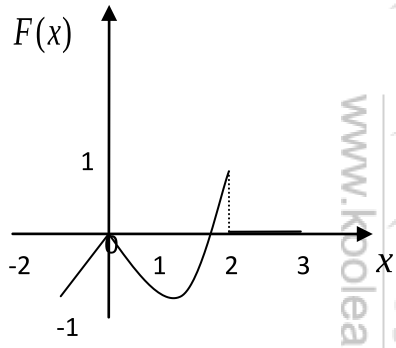
（A）



（B）



（C）



（D）

②关于奇偶、周期、有界、单调

（1）奇偶性

1）若可导函数 $f(x)$ 是奇函数，则 $f'(x)$__________.

2）若可导函数 $f(x)$ 是偶函数，则 $f'(x)$__________.

3）若可积函数 $f(x)$ 是奇函数，则 $F(x)=\begin{cases} \int_0^x f(t)dt \\ \int_a^x f(t)dt(a\neq 0) \end{cases}$

4）若可积函数 $f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)=\begin{cases} \int_0^x f(t)dt \\ \int_a^x f(t)dt(a\neq 0) \end{cases}$

【例 1】设 $f(x)$ 是奇函数，除 $x=0$ 外处处连续，$x=0$ 为其第一类间断点，则 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 是（　　）

（A）连续的奇函数　　（B）连续的偶函数

（C）$x=0$ 为间断点的奇函数　　（D）$x=0$ 为间断点的偶函数

【例 2】设 $f(x)$ 是连续的奇函数，$a\neq 0$，则下列函数中一定是 y 的偶函数的个数为______.

① $\int_a^y dx\int_0^x f(u)du$；② $\int_0^y dx\int_a^x f(u)du$；③ $\int_0^y dx\int_a^x x^2 f(u)du$；④ $\int_a^y dx\int_a^x xf(u)du$

（2）周期性

1）若可导函数 $f(x)$ 以 T 为周期，则其导数 $f'(x)$ 也是以 T 为周期的.

2）若可积函数 $f(x)$ 以 T 为周期，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 以 T 为周期的充要条件是 $\int_0^T f(x)dx=0$.

【定理】若可积函数 $f(x)$ 以 T 为周期，则 $\int_0^T f(x)dx=\int_a^{a+T} f(x)dx$，$\forall a$.

（3）有界性

【例】设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，则（　）

（A） $f(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 内有界

（B） $f'(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 内有界

（C） $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内有界

（D） $f'(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内有界

③关于定积分的精确定义

【例 1】 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+4}+\frac{n+3}{n^2+9}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n^2})$

【例 2】求 $\lim\limits_{n\to\infty}(b^{\frac{1}{n}}-1)\sum\limits_{i=0}^{n-1}b^{\frac{i}{n}}\sin b^{\frac{2i+1}{2n}}$， $b>1$.

5．变限积分 $\int_a^x f(t)dt$， $\int_x^b f(t)dt$， $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt$

1）属于定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 范畴

2）求导公式

$$(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt)'=f[\varphi_2(x)]\cdot\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\cdot\varphi_1'(x)$$

【例】设 $f(x)$ 是连续函数，则 $\left(\int_0^x tf(x^2-t^2)dt\right)_x' =$_______.

6．反常积分

①定义 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx$，a 为瑕点

②判别依据

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\begin{cases}p>1\Rightarrow \text{收敛}\\ p\le 1\Rightarrow \text{发散}\end{cases}$$

$$\int_0^1\frac{1}{x^p}dx\begin{cases}p<1\Rightarrow \text{收敛}\\ p\ge 1\Rightarrow \text{发散}\end{cases}$$

【例 1】设 $\alpha>0$，讨论 $\int_0^1\frac{\ln x}{x^\alpha}dx$ 的敛散性.

【例 2】设 $k>0$，讨论 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 的敛散性.

二、计算

1．求导

综述：一般题——求导规则、符号写法

高阶题——泰勒公式、莱布尼兹公式

【例 1】设 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\frac{1}{x^\beta}\ (\beta>0), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，讨论 α，β 满足何种关系时，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

【例 2】设 $y=f(x)$ 由 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f(x)$ 的极值.

【例 3】设 $y=x^3\sin x$，求 $y^{(6)}(0)$.

【例 4】设 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，求 $y^{(n)}(0)$.

【例 5】设 $y=\dfrac{x^n}{1-x}+x\cos^2 x$，求 $y^{(n)}(n\geq 2)$.

2．求积分

综述：凑微分法、换元法、分部积分法、有理函数积分法

【例 1】$\int \sqrt{\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx$

【例 2】$\int \dfrac{dx}{(2x+1)\sqrt{3+4x-4x^2}}$

【例 3】$I=\int \ln(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}})dx\ (x>0)$

【例 4】$I=\int \sqrt{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}}dx$

【例 5】$I=\int_3^{+\infty} \dfrac{dx}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$

三、应用

1．几何应用（主体）

（1）导数（极值点、最值点、拐点、单调性、凹凸性、渐近线——性态）

1^0 极值点与单调性

1）判别极值的“一阶”充分条件

① $x\in(x_0-\delta,x_0)$， $f'(x)<0$； $x\in(x_0,x_0+\delta)$， $f'(x)>0$ $\Rightarrow$ x_0 为极小值点；

② $x\in(x_0-\delta,x_0)$， $f'(x)>0$； $x\in(x_0,x_0+\delta)$， $f'(x)<0$ $\Rightarrow$ x_0 为极大值点.

【例】已知 $y=y(x)$ 满足 $x^2+y^2y'=1-y'$， $y(2)=0$，求 $y(x)$ 的极值.

2）判别极值的“高阶”充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，且 $\begin{cases} f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0, \\ f^{(n)}(x_0)\neq 0 \end{cases}$

当 n 为偶数时，若 $\begin{cases} f^{(n)}(x_0)>0\Rightarrow x_0\text{极小值点} \\ f^{(n)}(x_0)<0\Rightarrow x_0\text{极大值点} \end{cases}$

【例】设 $y=y(x)$ 满足 $y^{(4)}-3y''+5y=e^{\cos x}$，其中 $y(2)=y'(2)=y''(2)=y'''(2)=0$，讨论 y 在 $x=2$ 的性态.

2^0 拐点与凹凸性

1）判别拐点的“二阶”充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 点的左右邻域内 $f''(x)$ 变号 $\Rightarrow(x_0,f(x_0))$ 为曲线上的拐点.

2）判别拐点的“更高阶”充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，且 $\begin{cases} f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0, \\ f^{(n)}(x_0)\neq 0 \end{cases}$

当 n 为奇数时，$(x_0, f(x_0))$ 为拐点.

【例 1】$y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的一个拐点为（ ）

（A）$(1,0)$ （B）$(2,0)$ （C）$(3,0)$ （D）$(4,0)$

【例 2】设 $f(x)$ 二阶可导，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在 $[0,1]$ 上，（ ）

（A） $f'(x)\geq 0$ 时， $f(x)\geq g(x)$

（B） $f'(x)\geq 0$ 时， $f(x)\leq g(x)$

（C） $f''(x)\geq 0$ 时， $f(x)\geq g(x)$

（D） $f''(x)\geq 0$ 时， $f(x)\leq g(x)$

3^0 渐近线——求解程序

1）找 $y(x)$ 的无定义点或定义区间的端点 x_0.

若 $\lim\limits_{x\to x_0} y(x)=\infty$（或 $x\to x_0^+$、 $x\to x_0^-$），则 $x=x_0$ 为铅直渐近线；反之亦反.

2）若 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x)=A(\exists)$，则 $y=A$ 为水平渐近线；

若 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x)=\infty$，则转向 3）

3）若 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y(x)}{x}=a\ (\exists,\neq 0)$， $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[y(x)-ax]=b(\exists)$，则 $y=ax+b$ 为斜渐近线.

【例】曲线 $y=\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\frac{1}{x})$ 的渐近线有______条.

4^0 最值点

1）在 $[a,b]$ 上，

①令 $f'(x)=0\Rightarrow x_0$ 为驻点；

② $f'(x)$ 不存在 $\Rightarrow x_1$ 不可导点；

③端点 a， b.

$\Rightarrow f(x_0)$、$f(x_1)$、$f(a)$、$f(b)$，比较大小

$\Rightarrow M,m$

2）在 (a,b) 上，①②同上，

③ $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$， $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$

【例】求 $f(x)=e^{-x^2}\sin x^2$ 的值域.

（2）积分（测度）

1^0 平面图形的面积

①在直角坐标系下：$S=\int_a^b|y_1(x)-y_2(x)|dx$

②在极坐标系下：$S=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}|r_1^2(\theta)-r_2^2(\theta)|d\theta$

2^0 旋转体的体积

绕 x 轴旋转　$V_x=\int_a^b\pi f^2(x)dx$

绕 y 轴旋转 $V_y = 2\pi\int_a^b x|f(x)|$ (

3^0 平均值 $\overline{y} = \dfrac{\int_a^b y(x)dx}{b-a}$

4^0 弧长 $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

①直角坐标系下，$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$

②极坐标系下，$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2}d\theta$

③参数方程下，$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\phi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt$，其中$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$

5^0 旋转体的侧面积 $S = \int_a^b 2\pi\left|f(x)\right|\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$

注：4^0、5^0 均为数一、二考查内容，数三不要求

【例】设曲线 $y = e^{-\frac{1}{2}x}\sqrt{\sin x}$ 在 $x \geq 0$ 部分与 x 轴所围平面区域记为 D，求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积 V .

2．物理应用（数一、二）

综述：① $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$；②静水压力；③抽水做功；④质点引力

【例】一椭圆形钢板正好垂直浸没于水（相对密度 $\rho = 1$ ）中，其短轴垂直于水面，长轴长和短轴长分别为 $2a$ ， $2b$.求钢板一侧所受的静水压力.

2．经济应用（数三）
综述：①边际；②弹性；③积分

【例】设某产品的总成本函数为$C(x)=100+3x+\frac{1}{2}x^2$，而需求函数为 $p=\frac{100}{\sqrt{x}}$， x 为产量（假定等于需求量）， p 为价格.求（Ⅰ）边际成本；（Ⅱ）边际收益；（Ⅲ）边际利润；（Ⅳ）收益的价格弹性.

四、逻辑（证明）

中值定理“ξ”

不等式证明
方程的根（等式证明）

1．中值定理：研究对象的复杂化、区间的复杂化

【例 1】设 $f(x)$ 在$[-a,a](a>0)$ 上二阶导数连续， $f(0)=0$.

（Ⅰ）写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式；

（Ⅱ）证明：存在$\eta\in[-a,a]$，使得 $f''(\eta)=\frac{3\int_{-a}^{a}f(x)dx}{a^3}$.

【例 2】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$.

证明：存在不同的 ξ_1，ξ_2，$\xi_3\in(0,1)$，使得 $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=3$.

2．方程根

1）存在性：零点定理 $f(a)\cdot f(b)<0\Rightarrow \xi(\ )=$

2）唯一性：

单调性 $f'(x)>0\Rightarrow f(x)\nearrow$；$f'(x)<0\Rightarrow f(x)\searrow$

罗尔原话：若 $f^{(n)}(x)=0$ 至多有 k 个根，则 $f^{(n-1)}(x)=0$ 至多有 $k+1$ 个根.

【例】证明 $\ln x-e^{x}+\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=0$ 有且仅有两个根.

3．不等式

【例 4】设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\nearrow$，$0\le g(x)\le 1$.

证明：（Ⅰ）$0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a$，$x\in[a,b]$；

（Ⅱ）$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx$.

第三讲　多元函数微分学

综述

1．概念——5 个

2．计算——微分法

3．应用——极值与最值

一、概念

1．极限的存在性

（1）二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

【关键】除了“穷举法”、“洛必达法则”与“单调有界准则”外，可照搬一元函数求极限的方法，用于多元函数的二重极限，比如：等价无穷小替换，夹逼准则，无穷小×有界=无穷小，等等.

【例 1】设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

【例 2】求 $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{2}\\ y\to \frac{1}{2}}} \dfrac{\tan(x^2+2xy+y^2-1)}{x+y-1}$.

【例 3】求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

【例 4】求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y+y^4)}{x^2+y^2}$

【例 5】设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

（2）累次极限

2．连续性

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

【例】 $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

【注】若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)\neq f(x_0,y_0)$，称为间断，但多元时，不讨论间断类型.

3．偏导数的存在性

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=z_x'(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)$$

$$f_x'(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$f_y'(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

考法：

①考单调

$\forall(x,y)\in D$，若 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_x'(x,y)>0\Rightarrow f(x,y)$ 对 x 单增

$\Rightarrow$ 若 $x_1>x_2$，则 $f(x_1,y_0)>f(x_2,y_0)$.

【例】在全平面上，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$，若 $f(x_1,y_1)>f(x_2,y_2)$，则（　）

（A）$x_1>x_2$，$y_1>y_2$　　（B）$x_1<x_2$，$y_1>y_2$

（C）$x_1>x_2$，$y_1<y_2$　　（D）$x_1<x_2$，$y_1<y_2$

②考计算

【例】设 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^6}}$，求 $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$.

4．可微性

① $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$　全增量

② $A\Delta x+B\Delta y$　线性增量 $\begin{cases}A=f_x'(x_0,y_0)\\B=f_y'(x_0,y_0)\end{cases}$

③ $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0\Rightarrow f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微.

于是，$\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)=o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$，即

① $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-A\Delta x-B\Delta y=o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$

② $f(x,y)-f(x_0,y_0)-A(x-x_0)-B(y-y_0)=o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})$

全微分 $dz\big|_{(x_0,y_0)}=f_x'(x_0,y_0)dx+f_y'(x_0,y_0)dy$，

$dz=f_x'(x,y)dx+f_y'(x,y)dy$，$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

【例】设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，求 $dz\big|_{(0,1)}$.

5．偏导数的连续性

设 $z=f(x,y)$，

①用定义求 $f_x'(x_0,y_0)$， $f_y'(x_0,y_0)$

②用公式求 $f_x'(x,y)$， $f_y'(x,y)$

③ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f_x'(x,y)=f_x'(x_0,y_0)$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f_y'(x,y)=f_y'(x_0,y_0)$.

则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的偏导数连续.

逻辑关系：

【例】设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，求 $f''_{xy}(0,0)$， $f''_{yx}(0,0)$.

二、计算（多元微分法）

①链式求导法则

$$z=f(u,v,w)，\begin{cases}u=u(y)\\ v=v(x,y)\\ w=w(x)\end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dx}$$

②对于高阶导数

无论 z 对谁求导，也无论 z 已经求了 n 阶导，求导之后的新函数仍具有与原来函数完全相同的复合结构.

③注意书写规范

【例 1】设 $z=f(e^x\cos y,x^2+y^2)$，其中 f 有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【例 2】已知函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数， $f(1,1)=2$， $f_1'(1,1)=0$， $f_2'(1,1)=0$，$z=f(x+y,f(x,y))$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

三、应用——极值与最值（多元）

1．理论依据

（1）函数取极值的必要条件

设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) $\begin{cases}\text{一阶偏导数存在}\\ \text{取极值}\end{cases}$，则 $f_x'(x_0,y_0)=0, f_y'(x_0,y_0)=0$.

【注】1）适用于三元及以上函数

2）非充分条件

极值点：①在驻点中找；②在不可偏导点找

（2）函数取极值的充分条件

记 $\begin{cases} f_{xx}''(x_0,y_0)=A \\ f_{xy}''(x_0,y_0)=B \\ f_{yy}''(x_0,y_0)=C \end{cases}$，则 $\Delta=B^2-AC\begin{cases}<0\Rightarrow \text{极值}\begin{cases}A<0\Rightarrow\text{极大值}\\ A>0\Rightarrow\text{极小值}\end{cases}\\ >0\Rightarrow\text{非极值}\\ =0\Rightarrow\text{方法失效，另谋他法（定义法）}\end{cases}$

【注】不适用于三元及以上函数.

（3）条件极值与拉格朗日乘数法

问题提法：求目标函数 $u=f(x,y,z)$ 在约束条件 $\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0\\ \psi(x,y,z)=0\end{cases}$ 下的极（最）值，则

1）构造辅助函数

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$$

2）$\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_z = 0 \\ F'_\lambda = 0 \\ F'_\mu = 0 \end{cases}$

3）解上述方程组$\Rightarrow P_i(x_i, y_i, z_i)\ (i = 1, 2, \cdots) \Rightarrow u(P_i)\begin{cases} u_{\max} \\ u_{\min} \end{cases}$

根据实际问题，必存在最值，所得即所求.

2．例题分析

【例 1】设 $f(x,y) = kx^2 + 2kxy + y^2$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值，求 k 的取值范围.

【例 2】求 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$ 下的最大值与最小值.

【例 3】求 $u = xy + 2yz$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 下的最大值与最小值.

第四讲　二重积分

综述

1．概念与性质（重点：对称性）

2．计算结构

基础题：直角坐标系，极坐标系

技术题：换序、对称性、形心公式的逆用

3．综合题

一、概念与性质

1．概念比较

2．对称性

1）普通

设 D 关于 y 轴对称，$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(x,y)=f(-x,y)\\ 0, & f(x,y)=-f(-x,y)\end{cases}$

设 D 关于 x 轴对称，$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(x,y)=f(x,-y)\\ 0, & f(x,y)=-f(x,-y)\end{cases}$

设 D 关于原点对称，$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(x,y)=f(-x,-y)\\ 0, & f(x,y)=-f(-x,-y)\end{cases}$

【例】设 D 由 $y=x^3$，$y=1$，$x=-1$ 围成，则 $I=\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)d\sigma=$（　）

（A）0　　（B）$2\iint\limits_{D_1} xyd\sigma$

（C）$2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin yd\sigma$　　（D）$2\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)d\sigma$

其中，D_1 为 D 在第一象限的部分.

2）轮换

如：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续恒正，证明：$\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \ge (b-a)^2$.

若将 D 中的 x 与 y 对调后，区域 D 不变，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(y,x)d\sigma$. 叫轮换对称性.

【例 1】设区域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\right\}$，$f(x)$ 为 D 上的正值连续函数，a,b 为常数，求 $I=\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma$.

【自练】计算 $I=\iint\limits_D \sin(x^3+y^3)d\sigma$ ，其中 $D=\left\{(x,y)\middle| |x|+|y|\le 1\right\}$.

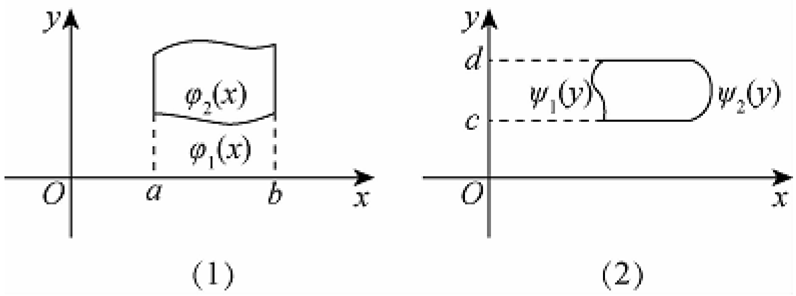
二、计算

1．基础题

（1）直角坐标系下的计算法

① $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ 其中 D 为 X 型区域：$\varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)$，$a\le x\le b$；

② $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$ 其中 D 为 Y 型区域：$\psi_1(y)\le x\le \psi_2(y)$，$c\le y\le d$.

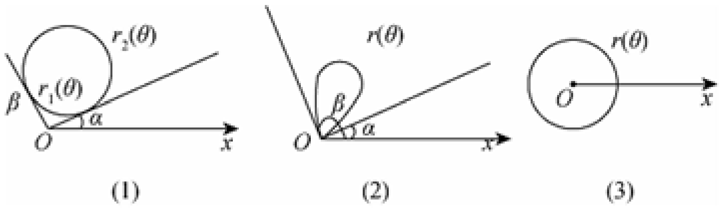


（2）极坐标系下的计算法

①$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$ （极点O在区域D外部）

②$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$ （极点O在区域D内部）

③$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$ （极点O在区域D边界上）



2．技术题

（3）换序

【例 1】交换$\int_{-1}^0 dy\int_2^{1-y} f(x,y)dx$的积分次序.

【例 2】交换$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{1+\cos\theta}^2 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$的积分次序.

（4）对称性

（5）形心公式的逆用（仅数一）

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x d\sigma}{\iint\limits_D 1 d\sigma}，\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_D y d\sigma}{\iint\limits_D 1 d\sigma} \Rightarrow$$

若 D 为规则图形（即：形心、图形面积易知），则 $\iint\limits_D x d\sigma=\bar{x}\cdot S_D$，$\iint\limits_D y d\sigma=\bar{y}\cdot S_D$.

【例】计算 $I=\iint\limits_D (x+y)d\sigma$，$D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le x+y+1\right\}$.

三、综合题分析

【例 1】计算 $I=\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}d\sigma$，$D=\left\{(x,y)\middle| 1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\right\}$.

【例 2】$I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}drd\theta$，$D=\left\{(r,\theta)\middle| 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}, 0\le r\le\sec\theta\right\}$.

第五讲　微分方程

综述

1．概念及其应用

2．一阶方程的求解

3．高阶方程的求解

一、概念及其应用

1．微分方程：$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$

2．微分方程的阶数：方程中 y 的最高阶导数的次数

3．通解：解中所含独立常数的个数等于方程的阶数

【例 1】设 $y=y(x)$ 为 $y''-2y'+4y=0$ 的满足 $y(x_0)>0$，$y'(x_0)=0$ 的解，则 $f(x)$ 在 x_0 处（　）

（A）取极大值　　（B）取极小值

（C）某邻域单增　　（D）某邻域单减

【例 2】设 $p(x)$ 与 $q(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$q(x)<0$，且设 $y=y(x)$ 为方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 满足 $y(a)=y(b)=0$ 的解，求 $y(x)$ 的表达式，$\forall x\in[a,b]$.

二、一阶方程的求解

1．变量可分离型

形如：$\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)=g(x)h(y)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{h(y)}=g(x)dx$$

$$\Rightarrow \int\frac{dy}{h(y)}=\int g(x)dx$$

【例】求 $y'+y^2\tan x=\tan x$ 的通解.

2．齐次型

形如：$\dfrac{dy}{dx}=f(\dfrac{y}{x})$

令 $\dfrac{y}{x}=u$，则 $y=ux,\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}x+u$，代入得

$$\frac{du}{dx}x+u=f(u)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int\frac{du}{f(u)-u}=\int\frac{dx}{x}$$

【例】求 $ydx-(x+\sqrt{x^2+y^2})dy=0\ (y>0)$ 的通解.

3．一阶线性型

形如：$y'+p(x)y=q(x)$

两边同乘积分因子$e^{\int p(x)dx}$得

$$e^{\int p(x)dx}\left(y'+p(x)y\right)=e^{\int p(x)dx}q(x)$$

两边积分得

$$e^{\int p(x)dx}y=\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C$$

$$\Rightarrow y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C\right]$$

【例】求$y'=\dfrac{y}{2x}+\dfrac{x^2}{2y}$的通解.

【注】尚有两种类型的方程，貌似二阶，实可降阶.

（1） $y''=f(x,y')$型——缺y

令$y'=p,y''=p'$，$\Rightarrow p'=f(x,p)$

（2） $y''=f(y,y')$——缺x

令$y'=p,y''=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$，$\Rightarrow p\dfrac{dp}{dy}=f(y,p)$

三、高阶方程的求解

1. $y''+py'+qy=0$　　二阶常系数线性齐次方程

$\lambda^2+p\lambda+q=0\Rightarrow\lambda_1,\lambda_2$

①$\Delta=p^2-4q>0$，$\lambda_1\neq\lambda_2$，通解$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$

②$\Delta=p^2-4q=0$，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，通解$y=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$

③$\Delta=p^2-4q<0$，$\lambda_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{4q-p^2}i}{2}=-\dfrac{p}{2}\pm\dfrac{\sqrt{4q-p^2}i}{2}=\alpha+\beta i$，通解

$y=e^{\alpha x}[C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x]$

【例】设 $\cos x$ 与 xe^x 为 4 阶常系数线性齐次微分方程的两个解，则首项系数为 1 的该方程为________.

2．1） $y''+py'+qy=e^{\alpha x}\cdot P_m(x)$

设 $y^*=e^{\alpha x}\cdot Q_m(x)\cdot x^k,k=\begin{cases}0 & \alpha\text{不是齐次特征方程的根}\\1 & \alpha\text{是齐次特征方程的单根}\\2 & \alpha\text{是齐次特征方程的重根}\end{cases}$

【例】 $y''-4y=e^x(2x+3)$

2） $y''+py'+qy=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$

设 $y^*=e^{\alpha x}[Q_l^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_l^{(2)}\sin\beta x]x^k\quad(l=\max\{m,n\})$

$k=\begin{cases}0 & \alpha\pm\beta i\text{不是齐次特征方程的根}\\1 & \alpha\pm\beta i\text{是齐次特征方程的单根}\end{cases}$

【例】 $y''+4y=2\cos 2x$

第六讲　无穷级数（数一、三）

综述

1．数项级数的判敛
2．幂级数的收敛域
3．展开与求和

引言

1．概念（本质）

（1）级数的定义　给定一个数列$u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n,\cdots$，则称$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$为(常数项)无穷级数，简称(常数项)级数，记为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，即$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$.

（2）级数的部分和　称$S_n=\sum_{i=1}^{n}u_i=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$ 为级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和.

（3）级数的敛散性　若$\lim_{n\to\infty}S_n=S$（存在），则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，极限S叫做该级数的和，并写成$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$；若$\lim_{n\to\infty}S_n$不存在，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

（4）如果$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}S_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

2．分类

$$
\text{级数}\begin{cases}\text{（常）数项级数}\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(u_n\ge 0)\text{——正项级数}\\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0)\text{——交错级数}\\ \sum_{n=1}^{\infty}u_n(u_n\text{符号无限制})\text{——任意项级数}\end{cases}\\ \text{函数项级数——幂级数 }\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\end{cases}
$$

一、数项级数的判敛

1．正项级数（$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$u_n\ge 0$）的判敛

1）收敛原则

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 有上界.

【例】设 $a_n > 0\ (n=1,2,\cdots)$，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的__________条件.

2）比较判别法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，且 $u_n \le v_n$，则 $\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛} \\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{发散} \end{cases}$

3）比较判别法的极限形式

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} \overset{\frac{0}{0}}{=} \begin{cases} 0 \quad \Rightarrow u_n \text{是高阶无穷小} \Rightarrow \begin{cases} \text{若} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{收敛，则} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛} \\ \text{若} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{发散，则} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{发散} \end{cases} \\ \infty \quad \Rightarrow v_n \text{是高阶无穷小} \Rightarrow \begin{cases} \text{若} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛，则} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{收敛} \\ \text{若} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{发散，则} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{发散} \end{cases} \\ A \ne 0 \Rightarrow u_n \text{与} v_n \text{是同阶无穷小} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{与} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{同敛散} \end{cases}$$

4）比值判别法（达朗贝尔判别法）

设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho\begin{cases}\rho<1 & \Rightarrow \text{级数收敛}\\ \rho>1 & \Rightarrow \text{级数发散}\\ \rho=1 & \Rightarrow \text{该法失效，另谋他法（一般转而用比较判别法）}\end{cases}$$

5）根值判别法（柯西判别法）

设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho\begin{cases}\rho<1 & \Rightarrow \text{级数收敛}\\ \rho>1 & \Rightarrow \text{级数发散}\\ \rho=1 & \Rightarrow \text{该法失效，另谋他法（一般转而用比较判别法）}\end{cases}$$

【例 1】判别下列级数的敛散性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})]$

【例 2】判别$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$在$x=2$、3 处的敛散性.

【例 3】设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$0<a_n<\dfrac{\pi}{2}$，$0<b_n<\dfrac{\pi}{2}$，$\cos a_n - a_n = \cos b_n$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛.

（Ⅰ）证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$；

（Ⅱ）证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$收敛.

2．交错级数$(\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n, u_n>0)$的判敛

莱布尼茨判别法　若交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\ (u_n>0)$满足条件：

(1)　$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$；　　(2)　$u_n \ge u_{n+1}$　(n = 1, 2, 3, ⋯)；

则级数收敛.

【例 1】判别$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n}$的敛散性.

【例 2】判别$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$的敛散性.

3．任意项级数（$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$u_n$符号无限制）的判敛

1）思路上：一般都是先把一般项u_n加上绝对值，变成正项级数后再去讨论问题，即

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.于是，判别正项级数敛散性的种种方法均可能派上用场.

2）理论上：

若$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 但$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$发散$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

【例 1】判别$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$的敛散性.

【例 2】设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则判别$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n |a_n|}{\sqrt{n^2+\alpha}} (\alpha > 0)$的敛散性.

二、幂级数的收敛域

1．幂级数

若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的一般项$u_n(x)$是幂函数，则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$为幂级数, 它是一种特殊且常用的函数项级数，其一般形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots ;$$

其标准形式为$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ ；其中a_n为幂级数的系数.

收敛点与发散点 若给定$x_0 \in I$，有$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛, 则称点$x_0$为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛点；若

给定 $x_0 \in I$，有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 发散，则称点 x_0 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的发散点.

收敛域 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的所有收敛点的集合称为它的收敛域.

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的首要任务是判别敛散性，因为只有收敛了才有继续讨论它的意义，具体说来，将某个 x_0 代入级数 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$，判别此数项级数是否收敛，我们的目标当然是：找到所有收敛点的集合，即收敛域.

2．阿贝尔定理

当幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_1 (x_1 \neq 0)$ 处收敛时，对于满足 $|x| < |x_1|$ 的一切 x，幂级数**绝对收敛**；当幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_2 (x_2 \neq 0)$ 处发散时，对于满足 $|x| < |x_2|$ 的一切 x，幂级数**发散**.

3．求收敛域的程序

1）对级数加绝对值变为正项级数；

2）用正项级数的判别法（比值法、根值法）计算；

3）单独讨论级数在端点处的敛散性.

综合 2、3 得出收敛域.

【例】$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 3^n}$ 的收敛域为________.

三、展开与求和

1．展开

如果函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处存在任意阶导数，则称

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$$

为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的**泰勒级数**，记作 $f(x)\sim\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ ，其中“～”叫做“可展开为”

特别当 $x_0=0$，则称 $f\left(0\right)+\frac{f'\left(0\right)}{1!}x+\frac{f''\left(0\right)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}x^n+\cdots$ 为函数 $f\left(x\right)$ 的**麦克劳林级数**，记作 $f(x)\sim\sum\limits_{h=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}x^n$.

【例 1】将 $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x-2}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数.

【例 2】将 $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数.

注：几个重要函数的展开式

（1）$e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\quad\left(-\infty<x<+\infty\right)$

（2）$\frac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^n=1-x+x^2-\cdots\cdots+\left(-1\right)^{n-1}x^n+\cdots,\quad\left(-1<x<1\right)$

（3）$\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n+\cdots,\quad\left(-1<x<1\right)$

（4）$\ln\left(1+x\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\left(-1\right)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,\quad(-1<x\le 1)$

（5）$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$

（6）$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)\ !}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$

（7）$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha\ x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$

这里，（1）至（6）右端x的取值范围是指收敛域，而对于（7），问题比较复杂，其收敛区间的端点是否收敛与α的取值有关，可以证明(这里不证)：

当$\alpha\le-1$时,收敛域为$(-1,1)$；当$-1<\alpha<0$时,收敛域为$(-1,1]$；当$\alpha>0$时,收敛域为$[-1,1]$.

2．求和 $\sum a_n x^n=y(x)$

【例 1】求$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^n$，$|x|<1$.

【例 2】求$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，$|x|<1$.

注：几个重要级数的和函数

(1)$\sum_{n=k}^{\infty}cx^n=\frac{cx^k}{1-x}\qquad(|x|<1,k\in Z^+)$.

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}\qquad(-1<x<1).$$

$$(3)\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n}=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\qquad(-1<x<1).$$

$$(4)\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x^2\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{x^2}{(1-x)^2}\qquad(|x|<1).$$

$$(5)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)''=\left(\frac{1}{1-x}\right)''=\frac{2}{(1-x)^3}\qquad(|x|<1).$$

$$(6)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\right)dt=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)\qquad(-1\le x<1).$$

四、傅里叶级数（仅数一）

1．狄利克雷收敛定理

设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的可积函数，如果在$[-l,l]$上 $f(x)$ 满足：

（1）连续或只有有限个第一类间断点；

（2）只有有限个极值点；

则 $f(x)$ 的傅里叶级数处处收敛，记其和函数为 $S(x)$，则

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

且
$$S(x)=\begin{cases} f(x) & x\text{为连续点}\\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & x\text{为第一类间断点}\\ \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2} & x\text{为端点}\end{cases}$$

【例】设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & -1\le x\le 0,\\ x-1, & 0<x\le 1\end{cases}$ 的周期为 2 的傅里叶级数为 $S(x)$，则在 $x=-\frac{1}{2}$，$x=0$，$x=1$，$x=\frac{3}{2}$ 处，$S(x)$ 分别收敛于________，________，________，________.

2．周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数

设周期为$2l$的周期函数$f(x)$满足狄利克雷收敛定理的条件，则它的傅里叶级数为

$$f(x)\sim S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

其中系数a_n和b_n分别为

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx & (n=0,1,2,\cdots)\\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx & (n=1,2,3,\cdots)\end{cases}$$

考研的实际考题分为以下三种情况：

1、将普通周期函数$f(x)$在$[-l,l]$上展开为傅里叶级数

$$\text{展开系数为}\begin{cases}a_0=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)dx\\ a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx & (n=1,2,3,\cdots)\\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx & (n=1,2,3,\cdots)\end{cases}$$

2、将奇偶周期函数$f(x)$在$[-l,l]$上展开为傅里叶级数

$$\text{当}f(x)\text{为奇函数时，展开系数为}\begin{cases}a_0=0\\ a_n=0\\ b_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx & (n=1,2,3,\cdots)\end{cases}$$

此时的傅里叶展开式由于只含正弦函数表达式，故也称为正弦级数.

$$\text{当}f(x)\text{为偶函数时，展开系数为}\begin{cases}a_0=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l}f(x)dx\\ a_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx & (n=1,2,3,\cdots)\\ b_n=0\end{cases}$$

此时的傅里叶展开式由于只含余弦函数表达式，故也称为余弦级数.

3、将非对称区间$[0,l]$上的函数$f(x)$展开为正弦级数或者余弦级数

$$[0,l]\text{上的}f(x)\begin{cases}\xrightarrow[\text{需作奇延拓}]{\text{若要求展开成正弦级数}}\text{得到}[-l,l]\text{上的奇函数}f(x)\\ \xrightarrow[\text{需作偶延拓}]{\text{若要求展开成余弦级数}}\text{得到}[-l,l]\text{上的偶函数}f(x)\end{cases}$$

$$\text{当}f(x)\text{为奇函数时，展开系数为}\begin{cases}a_0=0\\ a_n=0\\ b_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx & (n=1,2,3,\cdots)\end{cases}$$

此时的傅里叶展开式由于只含正弦函数表达式，即展开为了正弦级数.

当 $f(x)$ 为偶函数时，展开系数为 $\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)dx \\ a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3,\cdots) \\ b_n = 0 \end{cases}$

此时的傅里叶展开式由于只含余弦函数表达式，即展开为了余弦级数.

【例 1】设 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$，$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx$，$n=1,2,\cdots$，令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$，则求 $S(-\dfrac{9}{4})$.

【例 2】将 $f(x)=1-x^2 (0\le x\le \pi)$ 展开成余弦级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.