Chapitre 2 : Applications Linéaires.

Soient K un corps commutatif ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), E et F deux K-e.v.

§I) Généralités :

1) Définitions et exemples

Pr. M. Barry

Définition :

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

On dit que f est linéaire si :

1- $\forall (x, x') \in E^2$, $f(x+x') = f(x) + f(x')$

2- $\forall \alpha \in K$, $\forall x \in E$, $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$

Pr. M. Barry

Définition : Soit $f : E \longrightarrow F$ une application

On dit que f est linéaire si

$$\forall (\alpha, \alpha') \in K^2, \forall (x, x') \in E^2$$

$$f(\alpha \cdot x + \alpha' \cdot x') = \alpha \cdot f(x) + \alpha' \cdot f(x').$$

Pr. M. Barry

Remarque : Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors on a les assertions suivantes :

1 – $f(0_E) = 0_F$

2 – $\forall x \in E,\ f(-x) = -f(x)$.

3 – $\forall \alpha_i \in K$ pour $i = 1, \dots, n$ et $\forall x_i \in E$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f(x_i)$

Pr. M. Barry

Preuve : Comme f est linéaire, donc

$\forall \alpha \in K$, $\forall x \in E$ $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$.

1) si $\alpha = 0_K$ $f(0_K \cdot x) = 0_K \cdot f(x)$

$$f(0_E) = 0_F.$$

2) si $\alpha = -1_K$ alors $f(-1_K \cdot x) = -1_K \cdot f(x)$

$$f(-x) = -f(x)$$

Pr. M. Barry

Définition : Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est un isomorphisme si f est linéaire et bijective.

Définition : On appelle endomorphisme de E, toute application linéaire de E dans E.

Pr. M. Barry

Définition : On appelle automorphisme de E, tout endomorphisme de E qui est bijectif.

Définition : On appelle forme linéaire de E, toute application linéaire de E dans K.

Pr. M. Barry

Notations :

$\mathcal{L}_K(E,F)$: l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

$\mathcal{L}_K(E) = \mathcal{L}(E) = \mathrm{End}_K(E)$: l'ensemble des endomorphismes de E

$\mathcal{L}_K(E,K) = E^*$: l'ensemble des formes linéaires de E.

Pr. M. Barry

Exemple :

$Id_E : E \longrightarrow E$ est une application linéaire.
$x \longmapsto x$

Exemple : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y,z) \longmapsto (3x-y+z, x+2y-z)$

f est linéaire.

Pr. M. Barry

en effet i) Soient $X=(x,y,z)$ et $X'=(x',y',z')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$

$$X+X'=(x+x',\,y+y',\,z+z')$$

$$f(X+X')=\big[3(x+x')-(y+y')+(z+z');\ (x+x')+2(y+y')-(z+z')\big]$$

$$=\big(3x-y+z+3x'-y'+z';\ x+2y-z+x'+2y'-z'\big)$$

$$=(3x-y+z,\ x+2y-z)+(3x'-y'+z',\ x'+2y'-z')$$

$$= f(X) + f(X').$$

ii) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\alpha \cdot X = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

$$f(\alpha \cdot X) = (3\alpha x - \alpha y + \alpha z, \alpha x + 2\alpha y - \alpha z)$$

$$= \alpha \cdot (3x - y + z, x + 2y - z)$$

$$= \alpha \cdot f(X).$$

Pr. M. Barry

Donc f est linéaire.

Exemple : $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y,z,t) \longmapsto x+4y+4z+t$

g est linéaire.

En effet

Soient $(\alpha,\alpha') \in \mathbb{R}^2$ et $\left(X=(x,y,z,t) \text{ et } X'=(x',y',z',t')\right)$ 2 éléments de $\mathbb{R}^4$.

Pr. M.Bary

$$\alpha\cdot X+\alpha'\cdot X' = (\alpha x+\alpha' x', \alpha y+\alpha' y', \alpha z+\alpha' z', \alpha t+\alpha' t')$$

$$g(\alpha\cdot X+\alpha'\cdot X') = (\alpha x+\alpha' x') + 4(\alpha y+\alpha' y') + 4(\alpha z+\alpha' z') + (\alpha t+\alpha' t')$$

$$= (\alpha x + 4\alpha y + 4\alpha z + \alpha t) + (\alpha' x' + 4\alpha' y' + 4\alpha' z' + \alpha' t')$$

$$= \alpha\cdot(\underbrace{x+4y+4z+t}) + \alpha'(\underbrace{x'+4y'+4z'+t'})$$

$$= \alpha\cdot g(X) + \alpha'\cdot g(X').$$

Donc g est linéaire. D'où g est une forme linéaire de $\mathbb{R}^4$.

Exemple :

$$h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longmapsto (xy, x-y+z, x+y+z)$$

h n'est pas linéaire.

En effet : Soient $u = (1, 2, 3)$ $v = (-1, 5, 4)$

$u+v = (0, 7, 7)$

$h(u+v) = (0, 0, 14)$

$h(u) = (2, 2, 6)$ $h(v) = (-5, -2, 8)$

$$h(u)+h(v)=(-3,0,14)$$

$$h(u)+h(v)\neq h(u+v)$$

h n'est pas linéaire.

Exemple : $D: \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$

$$P(X) \longmapsto D(P(X)) = \frac{d}{dX}P(X).$$

D est linéaire.

D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pr. McBawry

Homework :

2) Opérations sur les applications linéaires :

2-1) Addition :

Soient f, g 2 éléments de $\mathcal{L}_K(E, F)$

Pr. M. Berry

$$f : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array} \qquad g : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto g(x) \end{array}$$

$$f+g : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto (f+g)(x) = f(x)+g(x). \end{array}$$

Proposition : $f+g$ est linéaire

Pr. M. Barry

Preuve : Homework

Remarque : $(\mathcal{L}_K(E,F), +)$ est un groupe abélien.

2-2) Multiplication par un scalaire :

Soit $\alpha \in K$ et $f \in \mathcal{L}_K(E,F)$.

Pr. M. Barry

$f \in \mathcal{L}_K(E,F) : f : E \longrightarrow F$

$x \longmapsto f(x)$

soit $x \in E$, $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$

$\alpha \cdot f : E \longrightarrow F$

$x \longmapsto \alpha \cdot f(x)$

Proposition : $\alpha \cdot f$ est linéaire.

Pr. M. Barry

Remarque :

1- $(\mathcal{L}_K(E,F), +, \cdot)$ est un K-e.v

2- si E et F sont de dimension finie alors $\dim(\mathcal{L}_K(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$

Pr. M. Barry

2-3) Composition d'applications linéaires:

Soient E, F et G 3 $\mathbb{K}$-e.v

$f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

$$g \circ f$$

Pr. M. Barry

Proposition : $g \circ f$ est linéaire

Remarque : Soit $f \in \mathcal{L}_K(E)$; un endomorphisme de E.

1 – $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ est aussi un endomorphisme de E.

2 – $f^{n+1} = f^n \circ f = f \circ f^n$

Pr. M. Barry

2-4) Application linéaire réciproque :

Soit $f \in \mathcal{L}_K(E,F)$ et f bijective

Donc f^{-1} existe

Proposition : f^{-1} est linéaire

Preuve : $f : E \longrightarrow F$; $f^{-1} : F \longrightarrow E$

$x \longmapsto f(x)$; $y \longmapsto f^{-1}(y)$

Pr. M. Barry

Soient $(y, y') \in F^2$ et $(\alpha, \beta) \in K^2$

$y \in F \Rightarrow \exists x \in E$ tq $y = f(x)$ et $x = f^{-1}(y)$

$y' \in F \Rightarrow \exists x' \in E$ tq $y' = f(x')$ et $x' = f^{-1}(y')$

$$f^{-1}(\alpha \cdot y + \beta \cdot y') = f^{-1}[\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(x')]$$

$$= f^{-1}[f(\alpha \cdot x + \beta \cdot x')]$$ car f est linéaire

Pr. M. Barry

$$= f^{-1}\left[f(\alpha \cdot x + \beta \cdot x') \right]$$

$$= (f^{-1} \circ f)(\alpha \cdot x + \beta \cdot x')$$

$$= \mathrm{Id}_E(\alpha \cdot x + \beta \cdot x')$$

$$= \alpha \cdot x + \beta \cdot x'$$

$$= \alpha \cdot f^{-1}(y) + \beta \cdot f^{-1}(y')$$

Pr. M. Barry

Donc $\bar{f}$ est linéaire.

§II) Noyau et Image d'une application linéaire !!

1) Définitions et exemples :

Soit $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$.

Pr. M. Barry

Définition : On appelle noyau de f, l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est nulle.

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$$

Définition : On appelle image de f, l'ensemble des images des éléments de E par f. On note $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) / x \in E\}$

Remarque : Soit $f \in \mathcal{L}_K(E,F)$

1 – $\mathrm{Ker}(f) \subset E$

2 – $\mathrm{Im}(f) \subset F$.

Proposition : Soit $f \in \mathcal{L}_K(E,F)$. Alors les assertions suivantes sont vérifiées :

1 – $\mathrm{Ker}(f)$ est un s.e.v de E.

2 – $\mathrm{Im}(f)$ est un s.e.v de F.

Pr. M. Barry

Preuve :

i) Montrons que $Ker(f)$ est un s.e.v de E

$Ker(f) \neq \emptyset$

On a $f(0_E) = 0_F$

Donc $0_E \in Ker(f)$.

$Ker(f) \neq \emptyset$

ii) Soient $(x, x') \in Ker(f)^2$ et $(\alpha, \beta) \in K^2$.

Pr. M. Barry

$x \in \operatorname{Ker}(f) \Rightarrow f(x) = 0_F$

$x' \in \operatorname{Ker}(f) \Rightarrow f(x') = 0_F$.

$f(\alpha \cdot x + \beta \cdot x') = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(x')$

$= \alpha \cdot 0_F + \beta \cdot 0_F$

$= 0_F + 0_F = 0_F$.

$\alpha \cdot x + \beta \cdot x' \in \operatorname{Ker}(f)$

Donc $\operatorname{Ker}(f)$ est un s.e.v de E.

2) Montrons que $Im(f)$ est un s.e.v de F.

i) $Im(f) \neq \phi$

On a $f(0_E) = 0_F \Rightarrow 0_F = f(0_E)$

$0_F \in Im(f)$.

$Im(f) \neq \phi$

ii) Soient $(Y, Y') \in Im(f)^2$ et $(\alpha, \beta) \in K^2$

Pr. M. Barry

$y \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \exists x \in E$ tq $y = f(x)$

$y' \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \exists x' \in E$ tq $y' = f(x')$

$\alpha \cdot y + \beta \cdot y' = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(x')$

$= f(\alpha \cdot x + \beta \cdot x')$ car f linéaire

Posons $x'' = \alpha \cdot x + \beta \cdot x' \in E$

$\alpha \cdot y + \beta \cdot y' = f(x'') \in \mathrm{Im}(f)$

Donc $\mathrm{Im}(f)$ est un s.e.v de F.

Pr. M. Barry

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y, z, t) \longmapsto (x - y + 2z + t,\ 2x + y - z + 3t)$

On a f est une application linéaire !

$$\mathrm{Ker}(f) = \{ X \in \mathbb{R}^4 \mid f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \}$$

Soit $X = (x, y, z, t) \in \mathrm{Ker}(f)$

$$f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \Longrightarrow \begin{cases} x - y + 2z + t = 0 \\ 2x + y - z + 3t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = -2z - t & (1) \\ 2x + y = z - 3t & (2) \end{cases}$$

$$3x = -z - 4t \Rightarrow x = -\frac{1}{3}z - \frac{4}{3}t$$

$$(2): y = -2x + z - 3t$$

$$= \frac{2}{3}z + \frac{8}{3}t + z - 3t$$

$$y = \frac{5}{3}z - \frac{1}{3}t$$

$$X = \left(-\frac{1}{3}z - \frac{4}{3}t,\ \frac{5}{3}z - \frac{1}{3}t,\ z,\ t\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{3}z,\ \frac{5}{3}z,\ z,\ 0\right) + \left(-\frac{4}{3}t,\ -\frac{1}{3}t,\ 0,\ t\right)$$

$$= \frac{1}{3}z\,(1,\ 5,\ 3,\ 0) + \frac{1}{3}t\,(-4,\ -1,\ 0,\ 3)$$

Posons $u = (1, 5, 3, 0)$ et $v = (-4, -1, 0, 3)$

$$X = \frac{1}{3}z \cdot u + \frac{1}{3}z \cdot v$$

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Lin}(\{u, v\}).$$

Pr. M. Barry

2) Image de f

$$\mathrm{Im}(f) = \{ f(X) \mid X \in \mathbb{R}^4 \}$$

Soit $Y \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \exists X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tq $Y = f(X)$

$$Y = f(X) = (x - y + 2z + t,\ 2x + y - z + 3t)$$

$$= (x, 2x) + (-y, y) + (2z, -z) + (t, 3t)$$

$$= x(1,2) + y(-1,1) + z(2,-1) + t(1,3)$$

Posons $w_1 = (1, 2)$; $w_2 = (-1, 1)$

$w_3 = (2, -1)$; $w_4 = (1, 3)$

$$Y = x \cdot w_1 + y \cdot w_2 + z \cdot w_3 + t \cdot w_4$$

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Lin}\left(\{w_1, w_2, w_3, w_4\}\right)$$

Pr. M. Barry

Exemple : Considérons l'application linéaire

$$\mathcal{D} : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$$
$$p(x) \longmapsto \mathcal{D}(p(x)) = \frac{d}{dx} p(x)$$

$$\operatorname{Ker}(\mathcal{D}) = \{ p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \,/\, \mathcal{D}(p(x)) = 0 \}$$

$$\operatorname{Im}(\mathcal{D}) = \{ \mathcal{D}(p(x)) \,/\, p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \}$$

Homework

Pr. M. Barry

2) Propriétés des applications linéaires :

Proposition : Soit $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$.

Alors les assertions suivantes sont vérifiées :

1 _ L'image par f d'un système de E est un système lié de F.

2 _ Si A est un s.e.v de E alors $f(A)$ est un s.e.v de F.

Pr. M. Barry

4) – Si $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ est un système générateur d'un s.e.v A alors $\{f(u_1); f(u_2), \ldots, f(u_n)\}$ est un système générateur de $f(A)$.

Preuve : Homework

Pr. M. Barry

Théorème : (Caractérisation des applications linéaires injectives)

Soit $f \in \mathcal{L}_K(E,F)$.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1- f est injective

2- $\ker(f) = \{0_E\}$

Preuve : $1) \Longrightarrow 2)$.

Pr. M. Barry

Supposons que f est injective et
Montrons que $Ker(f) = \{0_E\}$

Soit $x \in Ker(f)$

$f(x) = 0_F$ et $f(0_E) = 0_F$

$f(x) = f(0_E)$

Comme f est injective $\Rightarrow x = 0_E$

Donc $Ker(f) = \{0_E\}$.

Pr. M. Barry

$2) \Rightarrow 1)$: Supposons que $Ker(f) = \{0_E\}$

Montrons que f est injective

Soient $(x, x') \in E^2$ tels que $f(x) = f(x')$

$f(x) = f(x') \Rightarrow f(x) - f(x') = 0_F$

$f(x - x') = 0_F \Rightarrow x - x' \in Ker(f)$

Comme $Ker(f) = \{0_E\}$ Donc $x - x' = 0_E$

$x = x'$. Donc f est injective

Pr. M. Barry

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1 - f est injective

2 - l'image par f d'un système libre de E est un système libre de F.

Pr. M. Barry

Exemple :

Soit l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$(x,y,z) \longmapsto (2x,\ x+y,\ x-y+z,\ 2x-z)$$

f est injective

En effet

$$\ker(f) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^4}\}$$

Pr. M. Barry

Soit $X=(x,y,z)\in \mathrm{Ker}(f)$

$$f(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^4}\Rightarrow \begin{cases} 2x=0\\ x+y=0\\ x-y+z=0\\ 2x-z=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0\\ y=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow X=(0,0,0)=0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\mathrm{Ker}(f)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

f est injective.

Pr. M. Barry

Théorème : Soient $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$ et $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E. Alors les conditions suivantes sont vérifiées :

1 – f est injective $\iff \{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$ est libre

2 – f est surjective $\iff \{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$ est un système générateur de F

3 – f est bijective $\iff \{f(e_1), f(e_2), f(e_3), \dots, f(e_n)\}$ est une base de F.

Preuve :

Pr. M. Barry

1) Fait.

2) $\Longrightarrow$ Soit $Y \in F$.

Comme f est surjective, il existe $X \in E$ tq $Y = f(X)$

$X \in E \Rightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ tq $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot e_i$

$$Y = f(X) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f(e_i)$$

Donc $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$ est 1 système générateur de F.

$\Leftarrow$) Soit $y \in F$.

$\exists \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in K$ tq $y = \beta_1 f(e_1) + \dots + \beta_n f(e_n)$

(car $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$ est système générateur de F.)

$y = f(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n)$ (car f est linéaire)

Posons $x = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$

$y = f(x) \Longrightarrow f$ est surjective.

Pr. M. Barry

3) f est bijective $\Longleftrightarrow$ f est injective et surjective

$\Longleftrightarrow \{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$ est libre et générateur de F.

$\Longleftrightarrow \{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$ est une base de F.

Pr. M. Barry

Théorème : Soient $\{u_1, u_2, \ldots u_n\}$ une base de E $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ une famille de vecteurs de F. Alors il existe une application linéaire et une seule $f : E \longrightarrow F$ telle que $f(u_i) = v_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et pour tout $x = a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \ldots + a_n \cdot u_n \in E$

$$f(x) = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \ldots + a_n \cdot v_n.$$

Pr. M. Barry

Remarque :

Une application linéaire est entièrement déterminée par la donnée des images des éléments d'une base de l'espace de départ.

Pr. M. Barry

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que :

$f(-1,1,1) = (2,1)$; $f(1,-1,1) = (3,0)$ et

$f(1,1,-1) = (1,1)$.

f est-elle une application linéaire ?

Posons $u_1 = (-1,1,1)$; $u_2 = (1,-1,1)$; $u_3 = (1,1,-1)$

$v_1 = (2,1)$; $v_2 = (3,0)$; $v_3 = (1,1)$.

Pr. M. Barry

Comme $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Donc $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ est une application linéaire

Expression analytique de f :

Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

Comme $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ donc,

$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tq $X = a \cdot u_1 + b \cdot u_2 + c \cdot u_3$

$f(X) = a \cdot v_1 + b \cdot v_2 + c \cdot v_3$

$= a(2, 1) + b(3, 0) + c(1, 1) = (2a + 3b + c, a + c)$

$$X = a \cdot u_1 + b \cdot u_2 + c \cdot u_3$$

$$= a(-1,1,1) + b(1,-1,1) + c(1,1,-1)$$

$$= (-a+b+c, a-b+c, a+b-c) = (x, y, z)$$

$$\begin{cases} -a+b+c = x & (1) \\ a-b+c = y & (2) \\ a+b-c = z & (3) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow 2c = x+y \qquad c = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$

$(1)+(3) \Rightarrow 2b = x+z \qquad b = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z$

$(2)+(3)$: $2a = y + z \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z}$

$$f(x) = f(x, y, z) = \left(2a + 3b + c \; , \; a + c\right)$$

$$= \left(2x + \frac{3}{2}y + \frac{5}{2}z \; ; \; \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z\right)$$

Pr. M. Barry

Définition : Soit $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$.

On appelle rang de f, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

On note : $Rg(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$

Pr. M. Barry

Théorème (Règle des 3 dimensions)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$.

Alors $\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$

$= \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \operatorname{Rg}(f)$

Pr. M. Barry

Exemple :

Soit l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z, t) \longmapsto (x - y + 2z + t,\ x + y - 2z + 3t)$$

$$\operatorname{Ker}(f) = \{ X \in \mathbb{R}^4 / f(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \}$$

Soit $X = (x, y, z, t) \in \operatorname{Ker}(f)$.

$$f(x) = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z + t = 0 \\ x + y - 2z + 3t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = -2z - t \\ x + y = 2z - 3t \end{cases}$$

$$2x = -4t \Rightarrow x = -2t$$

$$y = 2t + 2z - 3t \Rightarrow y = 2z - t$$

$$X = (-2t, 2z - t, z, t)$$

$$X = (-2t, -t, 0, t) + (0, 2\beta, \beta, 0)$$

$$= t(-2, -1, 0, 1) + \beta(0, 2, 1, 0)$$

Posons $u = (-2, -1, 0, 1)$ et $v = (0, 2, 1, 0)$

$$X = t \cdot u + \beta \cdot v$$

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Lin}(\{u, v\})$$

Pr. M. Barry

Posons $B = \{u, v\}$ est un système générateur de $\ker(f)$.

A-t-on B libre ?

On a $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

et B est libre.

D'où B est une base de $\ker(f)$

$\dim(\ker(f)) = 2$

D'après la règle des 3 dimensions on a :

$$\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\ker(f))$$

$$= 4 - 2 = 2$$

On a $\mathrm{Im}(f)$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$

et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$

Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ (Voir chapitre sur les e.v)

D'où f est surjective.

Corollaire 1 : Soient E, F 2 K-e.v de dimension finie et $f \in \mathcal{L}_K(E,F)$ tels que $\dim(E) = \dim(F)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1 – f est injective
2 – f est surjective

3- f est bijective.

Corollaire 2 : Soient E un K-e.v de dimension finie et $f \in \mathcal{L}_K(E)$

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1- f est injective

2- f est surjective

3- f est bijective

Pr. M. Barry

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x, y, z) \longmapsto (3x, x-y, x+y+2z)$

un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

f est bijective

En effet :

$$Ker(f) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid f(X) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$

Soit $X = (x, y, z) \in Ker(f)$

$$f(X) = 0_{\mathbb{R}^3} \Longrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ x - y = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow X = (0, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

f est injective

Comme f est un endomorphisme

Donc f est bijective.

Pr. M. Barry