Chapitre 1 : Espaces Vectoriels

Soit K un corps commutatif.

§I) Généralités :

1) Définitions et exemples :

Définition 1 :

Définition : On appelle loi de composition externe sur un ensemble E de domaine K à gauche, toute application de $K \times E$ dans E. On note

$\cdot : K \times E \to E : (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$

Définition 2 : On appelle loi de composition externe sur un ensemble E de domaine K à droite toute application de $E \times K$ dans E

On note : $\bullet : E \times K \longrightarrow E$

$$(x, \alpha) \longmapsto x \bullet \alpha$$

Remarque 1 :

1- En général la loi de composition externe est aussi la multiplication externe.

2- En général nous utiliserons la notation " $\cdot$ " pour désigner la loi de composition externe.

Exemple 1 : $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(\alpha,(x,y,z)) \longmapsto (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

est une loi de composition externe sur $\mathbb{R}^3$

Définition 3 : Soient E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée additivement $(+)$ et K un corps commutatif. On dit que E est un espace vectoriel sur K si E vérifie les conditions suivantes :

1- $(E,+)$ est un groupe abélien

2- Il existe une loi de composition

externe notée $\bullet$: $K \times E \longrightarrow E$

$(\alpha, x) \longmapsto \alpha \bullet x$

satisfaisant aux propriétés suivantes :

P_1) _ $\forall \alpha \in K, \forall (x, y) \in E^2, \alpha \bullet (x+y) = \alpha \bullet x + \alpha \bullet y$

P_2) _ $\forall (\alpha, \beta) \in K^2, \forall x \in E, (\alpha + \beta) \bullet x = \alpha \bullet x + \beta \bullet x$

P_3) _ $\forall (\alpha, \beta) \in K^2, \forall x \in E, \alpha \bullet (\beta \bullet x) = (\alpha\beta) \bullet x$

$P_4)$ – $\forall x \in E$, $1_K \cdot x = x$

Notation : Si E est un espace vectoriel sur K, alors on dit aussi que E est un K-espace vectoriel

on note : E est un K-e.v

ou E est un e.v sur K.

Remarque 2) : Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v

Les éléments de E sont appelés les vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les scalaires.

Conséquences (Règles de calcul dans un espace vectoriel)

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v alors on a les assertions suivantes :

R_1) - $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E$ $\left(\alpha \cdot x = 0_E \Leftrightarrow \alpha = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E \right)$

R_2) - $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \alpha \cdot (x - y) = \alpha \cdot x - \alpha \cdot y$

$R_3)$ — $\forall \alpha \in K, \forall y \in E, \alpha \cdot (-y) = -\alpha \cdot y$

$R_4)$ — $\forall (\alpha, \beta) \in K^2, \forall x \in E,$

$(\alpha - \beta) \cdot x = \alpha \cdot x - \beta \cdot x$

$R_5)$ — $\forall \beta \in K, \forall x \in E, (-\beta) \cdot x = -\beta \cdot x$

2) Exemples d'espaces vectoriels usuels

2-1) Tout corps commutatif K est un K-e.v !

$(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un $\mathbb{Q}$-e.v

$(\mathbb{R}, +, \times)$ est un $\mathbb{R}$-e.v

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un $\mathbb{C}$-e.v

2-2) Soit K un corps commutatif.

$$K^n = \underbrace{K \times K \times \cdots \times K}_{n \text{ fois}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in K \text{ pour } i = 1 \cdots n\}$$

Addition : Soient $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$X' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ 2 élts de K^n.

$X+X' \doteq (x_1+x'_1, x_2+x'_2, \dots, x_n+x'_n)$

Multiplication externe :

Soient $\alpha \in K$, $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un élt de K^n.

$\alpha \cdot X = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

$(K^n, +, \cdot)$ est un K-e.v

Cas particuliers :

$(\mathbb{Q}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{Q}$-e.v

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-e.v

$(\mathbb{C}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$-e.v

2-3) Soient K un corps commutatif et X un ensemble quelconque.

$\mathcal{F}(X,K)$: l'ensemble des applications de X dans K.

Addition : Soient f, g 2 élts de $\mathcal{F}(X,K)$:

$$f : X \longrightarrow K \; ; \; g : X \longrightarrow K .$$
$$x \longmapsto f(x) \qquad x \longmapsto g(x)$$

$f+g$?

Soit $x \in X$. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$$f+g : X \longrightarrow K$$
$$x \longmapsto f(x)+g(x).$$

Multiplication externe :

Soient $\alpha \in K$, $f \in \mathcal{F}(X,K)$

$$f : X \longrightarrow K, \quad x \longmapsto f(x).$$

$\alpha \cdot f$?

Soit $x \in X$

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)$$

$(\mathcal{F}(X,K), +, \cdot)$ est un K-e.v

Cas particuliers :

$X=\mathbb{R}$; $K=\mathbb{R}$ $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-e.v

$X=\mathbb{N}$, $K=\mathbb{R}$: $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$: l'ensemble des suites réelles. Soit $f\in\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$

$$f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$n\longmapsto f(n)$$

$(\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-e.v

$X = \mathbb{N}$, $K = \mathbb{C}$ $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$: l'ensemble des suites complexes.

$(\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$-e.v

2-4) $\mathbb{R}_n[x]$: l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels.

Addition : Soient $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$

$q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ 2 élts de $\mathbb{R}_n[x]$, $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$ $0 \leq i \leq n$.

$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n$

$a_i + b_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n$

Multiplication externe :

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ un élt de $\mathbb{R}_n[x]$

$$\alpha \cdot p(x) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1) x + \cdots + (\alpha a_n) x^n$$

$\alpha a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n$

$(\mathbb{R}_n[x], +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-e.v.

§II) Sous-espaces vectoriels :

Soient E un K-e.v et F une partie de E :

1) Définitions et exemples :

Définition 1 : On dit que F est un sous espace vectoriel de E sur K si :

1- $F \neq \emptyset$

2- F est stable pour l'addition

$\forall (x, x') \in F^2 , x + x' \in F$.

3- F est stable pour la multiplication externe

$\forall \alpha \in K , \forall x \in F , \alpha \cdot x \in F$.

Définition 2 : On dit que F est un sous-espace vectoriel de E sur K si :

1- $F \neq \emptyset$

2- $\forall (\alpha, \beta) \in K^2 \ \forall (x, x') \in F^2$

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot x' \in F$$

(stabilité par combinaison linéaire)

Notation : Si F est un sous-espace vectoriel de E sur K alors on dit aussi F est un K-sous-espace vectoriel de E.

On note : F est un s.e.V de E sur K

ou F est un K-s.e.V de E

Remarque : Si F est un $\mathbb{K}$-s.e.v de E alors $0_E \in F$.

Exemple 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-e.v alors E et $\{0_E\}$ sont des s.e.v de E.

Exemple 2 : $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 24x + 2y + 2019z = 0\}$

F est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$.

i) $F \neq \emptyset$.

$0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$ et $24 \times 0 + 2 \times 0 + 2019 \times 0 = 0$

$0_{\mathbb{R}^3} \in F$. Donc $F \neq \emptyset$.

ii) Stabilité pour l'addition :

Soient $X = (x, y, z)$ et $X' = (x', y', z')$ deux élts de F.

$$X + X' = (x + x', y + y', z + z')$$

$X \in F \Rightarrow 24x + 2y + 2019z = 0$

$X' \in F \Rightarrow 24x' + 2y' + 2019z' = 0$

$$24(x+x')+2(y+y')+2019(z+z')=(24x+2y+2019z)$$
$$+(24x'+2y'+2019z')=0+0=0$$

$$X+X'\in F$$

F est stable pour l'addition.

iii) Stabilité pour la multiplication extern

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $X = (x, y, z) \in F$

$$\alpha \cdot X = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

$$X \in F \Rightarrow 24x + 2y + 2019z = 0$$

$$24(\alpha x) + 2(\alpha y) + 2019(\alpha z) = \alpha(24x + 2y + 2019z) = \alpha \times 0 = 0$$

$$\alpha \cdot X \in F$$

Donc F est stable pour la multiplication ext

F est un $\mathbb{R}$-s.e.v de $\mathbb{R}^3$

Exemple : $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), +, \cdot)$

$F_1 = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,/\, f \text{ paire} \}$

$F_2 = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,/\, f \text{ impaire} \}$

$F_3 = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,/\, f \text{ continue sur } \mathbb{R} \}$

$F_4 = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,/\, f(c) = 0 \}$ $(c \in \mathbb{R})$

$F_5 = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,/\, f \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \}$

$F_6 = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,/\, \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \}$

En effet : Mq F_0 est un s.e.v de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

i) $F_0 \neq \emptyset$:

$$h = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 0$$

$$\int_0^1 h(t)\,dt = \int_0^1 0\,dt = \left[c^{te}\right]_0^1 = c^{te} - c^{te} = 0$$

$h = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in F_0$

$F_0 \neq \emptyset$

ii) Soient $(f, g) \in F_0^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$?

$\alpha \cdot f + \beta \cdot g \in F_0$.

$f \in F_0 \Rightarrow \int_0^1 f(t)\,dt = 0$

$g \in F_0 \Rightarrow \int_0^1 g(t)\,dt = 0$

$$\int_0^1 (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(t)\,dt = \int_0^1 \Big(\alpha f(t) + \beta g(t)\Big)\,dt$$

$$= \alpha \cdot \int_0^1 f(t)\,dt + \beta \cdot \int_0^1 g(t)\,dt$$

$$= \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0 + 0 = 0$$

$\alpha \cdot f + \beta \cdot g \in F_G$

F_G est un s.e.v de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$

Exemple : $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2\}$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

En effet :

stabilité pour l'addition

Soit $u = (2, -1, 4) \in G$ car $4 = 2^2$

$v = (3, 5, 9) \in G$ car $9 = 3^2$

$u+v=(5,4,13) \notin G$ car $13 \neq 5^2$

G n'est pas stable pour l'addition

G n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^3$

2) Opérations sur les sous espaces vectoriels :

Soient F, G 2 s.e.v de E.

e-1) Intersection - Réunion et complémentaire ;

Proposition : Les assertions suivantes sont vérifiées :

1- $F \cap G$ est un s.e.v de E.

2- $C_E F$ n'est pas un s.e.v de E.

3- En général $F \cup G$ n'est pas un s.e.v

4- $F \cup G$ est un s.e.v de $E \iff F \subset G$ ou $G \subset F$

Preuve : 1) $\Rightarrow$ $F \cap G$ est un s.e.v de E.

i) $F \cap G \neq \emptyset$.

On a $0_E \in F$ et $0_E \in G$ car F et G sont des s.e.v de E

$0_E \in F \cap G$

$F \cap G \neq \phi$

ii) Soient $(\alpha, \beta) \in K^2$, x et y 2 élts de $F \cap G$.

$x \in F \cap G \Rightarrow x \in F$ et $x \in G$.

$y \in F \cap G \Rightarrow y \in F$ et $y \in G$

$\left.\begin{array}{l} x \in F \\ y \in F \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F$ (F est un s.e.v)

$$\left.\begin{array}{l} x \in G \\ y \in G \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in G \quad \left(\begin{array}{l} \text{car} \\ G \text{ é um} \\ \text{s.e.v} \end{array}\right)$$

$\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F \cap G$

$F \cap G$ é um s.e.v de E.

2) $C_E F$ n'est pas um s.e.v de E

Ona $O_E \in F$ car F est um s.e.v de E

$O_E \notin C_E F \Longrightarrow C_E F$ n'est pas um s.e.v

3) $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est $\mathbb{R}$-e.v

$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ s.e.v de $\mathbb{R}^2$

$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ s.e.v de $\mathbb{R}^2$

On a $u = (1, 0) \in F \subset F \cup G \Rightarrow u \in F \cup G$

$v = (0, 1) \in G \subset F \cup G \Rightarrow v \in F \cup G$

$u + v = (1, 1) \notin F \cup G$ car $(1, 1) \notin F$

$(1,1) \notin G$.

$F \cup G$ n'est pas stable pour l'addition

$F \cup G$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$

4) Voir TD

2-2) Sous-espace vectoriel engendré

Soit A une partie de E

Définition : Soient $u_1, u_2, \ldots u_n$ des vecteurs de E. On appelle combinaison linéaire des elts $u_1, u_2, \ldots u_n$, tout vecteur de la forme $\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \ldots + \alpha_n \cdot u_n$ où $\alpha_i \in K$ pour $(1 \leq i \leq n)$.

Exemple : $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$

Soit $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$X = (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, x_n)$$

$$= x_1 \cdot (1, 0, \dots, 0) + x_2 \cdot (0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n (0, \dots, 1)$$

Posons $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$; $e_2 = (0, 1, \dots, 0) \dots e_n = (0, \dots, 1)$

$$X = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + x_n \cdot e_n$$

X est une combinaison linéaire des éléments $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Exemple : $(\mathbb{R}_n[X], +, \cdot)$

Soit $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ un élément de $\mathbb{R}_n[X]$

$$p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$$

p(x) est une combinaison linéaire des élts $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

Exemple : $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

$u = (1, 0, 4)$ $v = (2, 0, 5)$ $w = (1, 2, 3)$

W est-il combinaison linéaire des élts u et v ?

cherchons $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $W = \alpha \cdot U + \beta \cdot V$?

$$(1,2,3) = \alpha(1,0,4) + \beta(2,0,5)$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ 2 = 0 \\ 4\alpha + 5\beta = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{pas de solution}$$

Donc W n'est pas une combinaison linéaire de U et V.

Définition : On appelle s.e.v de E engendré par A, l'intersection de tous les s.e.v de E contenant A

On note : $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Lin}(A)$.

$$= \bigcap_{F \in V(A)} F$$

$V(A)$: l'ensemble des s.e.v de E contenant A

Remarque : 1) – Vect(A) est le plus petit s.e.v de E contenant A.

2) Si $A = \emptyset$ alors $Vect(A) = \{0_E\}$

3) – Si $A \neq \emptyset$ alors Vect(A) est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'élts de A

c.à.d : $X \in Lin(A) \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ $\exists a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ tq $X = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \dots + \alpha_n a_n$

4) - Si $F = \text{Lin}(A)$ alors A est une partie génératrice de F ou système générateur de F

5) Pour montrer qu'une partie F de E est un s.e.v de E, il suffit de montrer $F \neq \Phi$ et que tout élt de F est une combinaison linéaire de v_e

Exemple : $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + 7z = 0\}$

F est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$

~~Vérifier~~ : i) $F \neq \emptyset$

$0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$ et $3\times 0 - 0 + 7\times 0 = 0$

$0_{\mathbb{R}^3} \in F \Rightarrow F \neq \emptyset$.

ii) Soit $X=(x,y,z)\in F$.

$X\in F \Rightarrow 3x-y+7z=0$

$y=3x+7z$

$X=(x,3x+7z,z)=(x,3x,0)+(0,7z,z)$

$=x(1,3,0)+z(0,7,1)$

Posons $u=(1,3,0)$ et $v=(0,7,1)$

$X = x \cdot u + z \cdot v$.

X est une combinaison linéaire de u et v

F est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ avec $\mathbb{R}$.

Posons $S = \{u, v\}$ on a $F = Lin(S)$

S est une partie génératrice de F.

Exemple : $(\mathbb{R}_2[x], +, \cdot)$

$G = \{ p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(1) = 0 \}$

G est un s.e.v de $\mathbb{R}_2[x]$ sur $\mathbb{R}$.

i) $G \neq \emptyset$

$h(x) = (1-x)^2 \in \mathbb{R}_2[x]$

et $h(1) = 0$ donc $h(x) \in G$

ii) Soit $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2 \in G$

$p(x)\in G \Rightarrow p(1)=0$

$a_0+a_1+a_2=0 \Rightarrow a_2=-a_0-a_1$

$p(x)=a_0+a_1x+(-a_0-a_1)x^2$

$=a_0(1-x^2)+a_1(x-x^2)$

Posons $\varphi(x)=1-x^2$ et $\psi(x)=x-x^2$

$p(x)=a_0\cdot\varphi(x)+a_1\cdot\psi(x)$

$P(x)$ est une combinaison linéaire des élts $\varphi(x)$ et $\psi(x)$.

G est un s.e.v de $\mathbb{R}_2[X]$ sur $\mathbb{R}$

Posons $S' = \{\varphi(x) ; \psi(x)\}$

On a $G = \underline{Lin}(S') = Vect(S')$

S' est un système générateur de G.

2-3) Somme de sous-espaces vectoriels

Soient F et G 2 s.e.v de E.

$$F+G=\{x+y \mid x\in F \text{ et } y\in G\}$$

$$=\{X\in E \mid \exists X'\in F,\ \exists X''\in G : X=X'+X''\}$$

Proposition :

$F+G$ est un s.e.v de E.

Preuve : i) $F+G \neq \emptyset$

On a $0_E = 0_E + 0_E \in F+G$
$\qquad\quad\;\; \overset{\cap}{F} \quad \overset{\cap}{G}$

$F+G \neq \emptyset$

Pr. M. Barry

ii) Soient X, Y 2 éléments de $F+G$ et $(\alpha, \beta) \in K^2$

$$X \in F+G \Rightarrow \exists\, x' \in F,\ \exists\, x'' \in G : X = x' + x''$$

$$Y \in F+G \Rightarrow \exists\, y' \in F,\ \exists\, y'' \in G : Y = y' + y''$$

$$\alpha \cdot X + \beta \cdot Y = \alpha \cdot (x' + x'') + \beta \cdot (y' + y'')$$

$$= \Big(\underbrace{\alpha \cdot x' + \beta \cdot y'}_{\in F}\Big) + \Big(\underbrace{\alpha \cdot x'' + \beta \cdot y''}_{\in G}\Big) \in F+G$$

Donc $F+G$ est un s.e.v de E.

Remarque : soient F et G 2 s.e.v de E.
Alors on a les assertions suivantes :

1- $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$

2- $F+F=F$

3- $F+G=\mathrm{Lin}(F \cup G)$.

Preuve : 1) Montrons que $F \subset F+G$?

Soit $X \in F$.

$$X = \underset{\in F}{X} + \underset{\in G}{0_E} \in F+G$$

Donc $F \subset F+G$.

De manière analogue, on montre que $G \subset F+G$.

Pr. M. Barry

2) Montrons que $F+F=F$?

On a d'après 1) $F \subset F+F$ (*)

Vérifions que $F+F \subset F$:

Soit $x \in F+F$.

$\exists x' \in F$ et $x'' \in F$: $x = x' + x''$

Comme F est un s.e.v, donc $x' + x'' \in F$

c.a.d $x \in F$. Donc $F+F \subset F$ (**)

(*) et (**) $\Rightarrow$ $F + F = F$.

3) Homework

Pr. M. Barry