Mr. Niang

# Devoir d'Algebre  Durée 2h



## Exercice 1

1) Rappeler la définition d'un groupe et celle d'un sous-groupe

2) On pose $G = ]-1, 1[$, pour $x, y \in G$ on définit $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$

a) montrer que $*$ est une LCI dans $G$

b) Montrer que $(G, *)$ est un groupe abelien

**Exercice 2**. Soit $(G, .)$ un groupe d'element neutre $e$. Soit $S$ une partie non vide de $G$. On considère les sous-ensemble $N(S)$ et $Z(G)$ definie par

$$N(S) = \{x \in G \,/\, x.S = S.x\}$$

$$Z(G) = \{a \in G \,/\, a.x = x.a, \forall x \in G\}$$

On rappelle que

$$x.S = \{x.s \,/\, s \in S\}$$

$$S.x = \{s.x \,/\, s \in S$$

Montrer que $N(S)$ et $Z(G)$ sont des sous-groupe de $G$

exercice 3 Soit $(G, .)$ un groupe d'élément neutre $e$.

1) On suppose que $\forall x \in G$, $x^3 = e$. montrer les relations suivantes

a) $x^2.y.x^2 = y^2.x.y^2$, $\forall x, y \in G$

b) $(x.y)^2 = y^2.x^2$, $\forall x, y \in G$

c) $x.y^2.x = y.x^2.y$

2) Maintenant on suppose que $\forall x \in G$, $x^2 = e$. Montrer que le groupe $G$ est alors abelien.

exercice 4.

On ~~sup~~ admettra que la composition $\circ$ des applications est associative. Soit $G$ l'ensemble formé de six application $f_i : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{1-x}$, $f_3(x) = \frac{x-1}{x}$

$f_4(x) = \frac{1}{x}$ $f_5(x) = 1-x$, $f_6(x) = \frac{x}{x-1}$

On muni $G$ de la loi $\circ$

a) Montrer $(G, \circ)$ est groupe

b) Ce groupe est-il commutatif

c) déterminer tous les sous-groupes de G

d) en justifiant donner un sous-groupe d'ordre 3 qui est distingué.