Définition : Soient F et G 2 s.e.v de E. On dit que F et G sont supplémentaires dans E si :

$F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$.

Remarque : Soient $F_1, F_2, \dots F_n$ des s.e.v de E.

1) $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est un s.e.v de E.

2) On dit que $F_1, F_2, \dots, F_n$ sont supplémentaires dans E si $F_1 + F_2 + \dots + F_n = E$ et $\forall j \in \{1, 2, \dots n\}\ F_j \cap \left(\sum_{i \neq j} F_i\right) = \{0_E\}$

Théorème (caractérisation de s.e.v supplémentaires)

Soient E_1 et E_2 deux s.e.v de E. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1- E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E.

2- Tout élt $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.

3- $E_1 + E_2 = E$ et

$\forall x_1 \in E_1, \forall x_2 \in E_2 \left(x_1 + x_2 = 0_E \Rightarrow x_1 = x_2 = 0_E \right)$

Définition : On dit que les s.e.v E_1 et E_2 constituent une somme directe E s'ils vérifient l'une des conditions équivalentes du théorème précédent. On note :

$$E_1 \oplus E_2 = E.$$

Exemple :

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-e.v

$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$ s.e.v de $\mathbb{R}^2$

$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\}$ s.e.v de $\mathbb{R}^2$

On a $F \oplus G = \mathbb{R}^2$

En effet :

i) $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

Soit $X = (x,y) \in F \cap G$

$$\begin{cases} X \in F \\ X \in G \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Donc $X = (0,0) = 0_{\mathbb{R}^2}$

D'où $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

ii) $F + G = \mathbb{R}^2$.

On a F et G sont des s.e.v de $\mathbb{R}^2$

$F + G$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$.

$F+G \subset \mathbb{R}^2$ $(*)$?

Mq $\mathbb{R}^2 \subset F+G$

Soit $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$

On a $X=(x,0)+(0,y) \in F+G$

$\qquad\quad \in F \qquad\quad \in G$

$X \in F+G$

$\mathbb{R}^2 \subset F+G \ (**)$: On a $F+G=\mathbb{R}^2$

§III) Bases et dimension d'un espace vectoriel.

1°) Dépendance linéaire et indépendance linéaire :

– Soit $S = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$ une famille de vecteurs de E.

Définition : On dit que la famille S est liée ou que les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_n$ sont linéairement dépendants s'il existe des scalaires non tous nuls $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ tels que

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0_E .$$

Remarque : La famille S est liée s'il existe $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tq $u_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i \cdot u_i$ ($\alpha_i \in K$)

Définition : On dit que la famille S est libre ou que les vecteurs $u_1, u_2, \dots u_n$ sont linéairement indépendants si $\forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) \in K^n$

$$\left(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0_E \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0_K \right)$$

Remarque :

1- Toute famille réduite à un vecteur non nul est libre ($S = \{u\}$ $u \neq 0_E$)

2- Toute famille contenant le vecteur nul est liée

3- Toute famille de vecteurs de E contenant un sous-ensemble lié est liée

4- Toute partie d'une famille libre est libre

Exemple 1 :

1- $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ $\quad S_1 = \{u_1, v_1, w_1\}$

$u_1 = (-1, 2, 0)$ $\quad v_1 = (2, -1, 3)$

$w_1 = (0, 3, 3)$

On a S_1 est lié

On a $2u_1 + v_1 = w_1$

2 — $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ $S_2 = \{u_2, v_2, w_2\}$

$u_2 = (1, 1)$ $v_2 = (1, 2)$ $w_2 = (0, 3)$

— S_2 est liée

En effet : Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

tq $\alpha \cdot u_2 + \beta \cdot v_2 + \gamma w_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$

$\alpha(1, 1) + \beta(1, 2) + \gamma(0, 3) = (0, 0)$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \alpha + 3\gamma = -2\beta \end{cases}$$

$$3\gamma = -2\beta + \beta = -\beta$$

$$\gamma = -\frac{1}{3}\beta$$

S_2 est lié

$$S = \{u_1, u_2, \dots, 0_E, \dots, u_{n-1}, u_n\}$$

Exemple 2)

1- $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$

$S = \{u, v, w\}$ $u = (1, 1, 1, 1)$

$v = (0, -1, 2, 3)$

$w = (0, 0, 4, 5)$. S est libre.

En effet : Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq

$\alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w = 0_{\mathbb{R}^4}$.

$\alpha(1, 1, 1, 1) + \beta(0, -1, 2, 3) + \gamma(0, 0, 4, 5) = (0, 0, 0, 0)$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta + 5\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

~~Donc~~ S' est libre.

2- $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), +, \cdot)$

$S'' = \{f, g\}$ avec $f(t) = \cos(t)$

$g(t) = \sin(t)$.

S'' est libre

En effet : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq

$\alpha \cdot f + \beta \cdot g = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$

$\forall t \in \mathbb{R}, (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(t) = 0$

$\forall t \in \mathbb{R}, \alpha f(t) + \beta \cdot g(t) = 0$

$\forall t \in \mathbb{R}, \alpha \cdot \cos(t) + \beta \cdot \sin(t) = 0.$

$t = 0$: $\alpha \cdot \cos(0) + \beta \cdot \sin(0) = 0$

$t = \pi/2$: $\alpha \cdot \cos(\pi/2) + \beta \sin(\pi/2) = 0$

$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow S$ est libre.

2°) Bases :

Soient $S = \{u_1, u_2, \dots u_n\}$ une famille de vecteurs de E et F un s.e.v de E.

Définition : On dit S est une famille génératrice de F si $\forall x \in F, \exists \alpha_1, \dots \alpha_n \in K$ tq $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$.

Définition : On dit que S est une base de F si S est libre et S est une famille génératrice de F.

Remarque : $\{0_E\}$ n'a pas de base.

Exemple 1 : $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ $\mathbb{R}$-e.v

$B_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$

avec $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0, \dots 0) \dots e_n = (0, 0, \dots 1)$

i) B_1 est un système générateur de $\mathbb{R}^n$.

Soit $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$X = (x_1, 0, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, x_n)$

$= x_1 \cdot (1, 0, \dots, 0) + x_2 \cdot (0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n (0, \dots, 1)$

$= x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + x_n \cdot e_n$.

Donc B_1 est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.

ii) B_1 est libre.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0_{\mathbb{R}^n}$$

$$\alpha_1 \cdot (1, 0, \dots 0) + \alpha_2 \cdot (0, 1, \dots 0) + \dots + \alpha_n \cdot (0, \dots, 1) = (0 \dots 0)$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n = 0 \end{cases} \Longrightarrow B_1 \text{ est libre.}$$

B_1 est une base de $\mathbb{R}^n$ appelée la base canonique $\mathbb{R}^n$.

Cas particuliers : $n=2$: $\mathbb{R}^2$ a pour base canonique $\{e_1, e_2\}$ avec $e_1=(1,0)$ et $e_2=(0,1)$

$n=3$: $\mathbb{R}^3$ a pour base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ avec $e_1=(1,0,0)$; $e_2=(0,1,0)$; $e_3=(0,0,1)$.

$n=4$: $\mathbb{R}^4$ a pour base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ avec $e_1=(1,0,0,0)$
$e_2=(0,1,0,0)$

$e_3 = (0,0,1,0)$ et $e_4 = (0,0,0,1)$.

$\underline{n=1}$ $\mathbb{R}$ a pour base canonique $\{1\}$

$\underline{Rq}$: Toute famille réduite à un réel non nul est une base de $\mathbb{R}$.

Exemple 2

$(\mathbb{R}_n[X], +, \cdot)$

$B_2 = \{1, X, X^2, \dots, X^n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

Cas particuliers :

$n=1$ $\mathbb{R}_1[x]$ a pour base canonique $\{1, x\}$

$n=2$: $\mathbb{R}_2[x]$ a pour base canonique $\{1, x, x^2\}$

$n=3$: $\mathbb{R}_3[x]$ a pour base canonique $\{1, x, x^2, x^3\}$

Exemple 3 : $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x - y + 4z = 0\}$$

Soit $X = (x,y,z) \in F$.

Donc $2x - y + 4z = 0$.

$y = 2x + 4z$ $\quad X = (x, 2x+4z, z)$

$$X = (x, 2x, 0) + (0, 4z, z)$$
$$= x(1,2,0) + z(0,4,1)$$

$u = (1,2,0)$

$v = (0,4,1)$

$X = x \cdot U + y \cdot V$.

Posons $B_3 = \{U, V\}$

B_3 est une famille génératrice de F.

$F = \mathrm{Lin}(B_3)$.

A-t-on B_3 libre ?

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $\alpha \cdot U + \beta \cdot V = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\alpha \cdot (1,2,0) + \beta \cdot (0,4,1) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow B_3 \text{ est libre}$$

B_3 est une base de F.

Théorème : Soit $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ une base du K-e.v E. Alors pour tout $X \in E$ il existe un unique n-uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $X = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \dots + \alpha_n \cdot u_n$ et les α_i $(1 \leq i \leq n)$ sont les composantes de X dans B.

Exemple : Considérons le $\mathbb{R}$-e.v $\mathbb{R}^2$.

$B = \{e_1, e_2\}$ est la base canonique $\mathbb{R}^2$ $\big(e_1 = (1,0)$ $e_2 = (0,1)\big)$

$B' = \{e'_1, e'_2\}$ une autre base de $\mathbb{R}^2$ avec $\big(e'_1 = (1,1)$ $e'_2 = (1,2)\big)$.

$u = (5,6) \in \mathbb{R}^2$.

i) $u = 5e_1 + 6e_2$; 5 et 6 sont les composantes de u dans B

Pr. M. Barry

ii) B'.

Cherchons a et $b \in \mathbb{R}$ tq

$$u = a \cdot e'_1 + b e'_2$$

$$a(1,1) + b(1,2) = (5,6)$$

$$\begin{cases} a+b=5 \\ a+2b=6 \end{cases}$$

$b = 1$ $\quad a = 4$ $\quad u = 4 \cdot e'_1 + 1 \cdot e'_2$

4 et 1 sont les composantes de u dans B'.

3) Dimension d'un espace vectoriel :

Remarque : Toutes les bases du K-e.v E ont le même nombre d'éléments.

Définition : On appelle dimension du K-e.v E, le nombre d'éléments d'une base E. On note $\dim_K(E) = \dim(E)$.

Remarque $\dim_K(\{0_E\}) = 0$

Exemple 1 : $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$

$B_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Card}(B_1) = n$

Cas particuliers

$n=1$ $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})=1$

$n=2$ $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)=2$

$n=3$: $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)=3$

$n=4$: $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)=4$.

Exemple 2 : $(\mathbb{R}_n[X], +, \cdot)$

$B_2 = \{1, X, X^2, \dots, X^n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_n[X]) = \operatorname{card}(B_2)$

$= n+1$

Cas particuliers :

$\underline{n=1}$: $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_1[x]) = 2$

$\underline{n=2}$: $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x]) = 3$

$\underline{n=3}$: $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_3[x]) = 4$

Exemple 3 : $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + 4z = 0\}$

$B_3 = \{u, v\}$ $u = (1, 2, 0)$; $V = (0, 4, 1)$

$\dim(F) = \mathrm{Card}(B_3) = 2$

Définition : On dit que E est de dimension finie s'il admet un système générateur fini.

Proposition : Soient E un K-e.v de dimension finie n et $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ une famille de n vecteurs de E.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1- S est une base de E

2- S est libre

3- S est une famille génératrice de E

Exemple : $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

$S = \{u, v, w\}$ $u = (0,1,1)$ $v = (1,0,1)$
$w = (1,1,0)$

S est une base de $\mathbb{R}^3$

En effet : Comme card$(S) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$

S est une base de $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow$ S est libre (ou génératrice de $\mathbb{R}^3$)

A-t-on S libre ?

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq $\alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\alpha(0,1,1) + \beta(1,0,1) + \gamma(1,1,0) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -\gamma \\ \alpha = -\gamma \\ -2\gamma = 0 \end{cases}$$

$\gamma = 0$, $\beta = 0$ $\alpha = 0$. S est libre

Théorème (théorème de la base incomplète)

Soit E un K-e.v de dimension finie et $E \neq \{0_E\}$. Alors pour toute famille libre $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ de vecteurs de E, il existe des vecteurs $v_1, v_2, \dots v_q \in E$ tels que $\{u_1, u_2, \dots u_p, v_1, v_2, \dots v_q\}$

Soit une base de E.

($p+q=\dim(E)$)

Exemple

($\mathbb{R}^4, +, \cdot$) $\dim(\mathbb{R}^4)=4$

$S=\{u,v\}$ $u=(1,1,1,1)$; $v=(0,-1,1,2)$

A-t-on S libre ?

Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tq $\alpha\cdot u+\beta\cdot v=0_{\mathbb{R}^4}$

$\alpha(1,1,1,1)+\beta(0,-1,1,2)=(0,0,0,0)$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

S est libre.

D'après le théorème base incomplète

On peut compléter S en une base de $\mathbb{R}^4$.

Pr. M. Barry

$S' = \{u, v, u', v'\}$ avec $u' = (0, 0, 1, 0)$

$v' = (0, 0, 0, 1)$

A-t-on S' libre ?

Soient α, β, γ et $\delta \in \mathbb{R}$ tq

$\alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot u' + \delta v' = 0_{\mathbb{R}^4}$

$\alpha(1, 1, 1, 1) + \beta(0, -1, 1, 2) + \gamma(0, 0, 1, 0) + \delta(0, 0, 0, 1) = 0_{\mathbb{R}^4}$

Pr. M. Barry

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}$$

S' est libre.

Comme $\dim(\mathbb{R}^4) = \operatorname{card}(S') = 4$.

S' est une base $\mathbb{R}^4 \Leftrightarrow S'$ libre.

Comme S' est libre, donc S' est une base de $\mathbb{R}^4$

Pr. M. Barry

Proposition : Soient E un K-e.v de dimension finie, F et G 2 S.e.v de E.

Alors F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si pour toute base B_1 de F et pour toute base B_2 de G, $B_1 \cup B_2$ est une base E.

Exemple

Considérons le $\mathbb{R}$-e.v $\mathbb{R}^2$.

$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$ s.e.v de $\mathbb{R}^2$

$E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} / x = 0\}$ s.e.v de $\mathbb{R}^2$

$B_1 = \{u\}$ est 1 base de E_1, avec $u = (1,0)$

$B_2 = \{v\}$ est 1 base de E_2, avec $v = (0,1)$

or $B_1 \cup B_2 = \{u, v\} = \{(1,0), (1,0)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$

Pr. M. Barry

Théorème : Soient E un K-e.v de dimension finie et F, G deux s.e.v de E.
Alors on a les assertions suivantes :

1- F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$

2- $F = E \Leftrightarrow \dim(F) = \dim(E)$

3- $F = G \Leftrightarrow \begin{cases} F \subset G \\ \dim(F) = \dim(G) \end{cases}$

4- $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

Pr M. Benky

4) Rang d'un système de vecteurs :

Soient E un K-e.V et $S=\{u_1, u_2, \dots u_n\}$ une famille de vecteurs de E.

Définition : On appelle rang de S, le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de S. On note $Rg(S)$

$Rg(S)$

Remarque : 1- $1 \leq Rg(S) \leq n$

2- $Rg(S) = \dim_{\mathbb{R}}(Vect(S))$

Définition : Soient S_1 et S_2 deux systèmes de vecteurs de E. On dit que S_1 et S_2 sont équivalents si $Lin(S_1) = Lin(S_2)$

Définition : On appelle opération élémentaire dans S, l'une des opérations suivantes :

1- changement de l'ordre des vecteurs dans S

2- Multiplication d'un élt de S par un scalaire non nul.

3- Substitution d'un élt de S par une combinaison linéaire de vecteurs de S.

Remarque

Si l'on effectue dans S une ou plusieurs opérations élémentaires alors les différents obtenus sont équivalents.

Méthode de Gauss-Jordan :

On utilisera cette méthode pour :

- Calculer le rang d'un système de vecteurs

Pr. M. Barry

- Construire une base d'un espace vectoriel.
- Déterminer la dimension d'un espace vectoriel
- Vérifier l'indépendance linéaire ou la dépendance linéaire des vecteurs.
- Trouver la relation de dépendance linéaire

Pr. M. Barry

Exemplo 1: $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ $S_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$

$u_1 = (1, 2, 3)$; $u_2 = (0, 4, 5)$; $u_3 = (-1, 2, 1)$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$L_1^{(1)} = L_1$

$L_2^{(1)} = L_2$

$L_3^{(1)} = L_1 + L_3$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$L_1^{(2)} = L_1^{(1)}$

$L_2^{(2)} = L_2^{(1)}$

$L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - L_2^{(1)}$

Conséquences :

1- On a abouti à une forme échelonnée et aucune ligne n'est nulle. Donc S_1 est libre

2- $Rg(S_1) =$ nbre de lignes non nulles.

3- $\dim(Lin(S_1)) = Rg(S_1) = 3$

$= 3$

4 – Les lignes non nulles forment une base de $\mathrm{Lin}(S_1)$

$\{L_1^{(2)}, L_2^{(2)}, L_3^{(2)}\}$ forme une base de $\mathrm{Lin}(S_1)$.

Exemple 2 : $(\mathbb{R}^5, +, \cdot)$

$S_2 = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ avec $V_1 = (1,0,1,2,3)$

$V_2 = (1,-5,-4,3,8)$ $V_3 = (2,1,5,1,-1)$

$V_4 = (3,-1,5,2,1)$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & -4 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -7 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$L_1^{(1)} = L_1$$
$$L_2^{(1)} = L_2 - L_1$$
$$L_3^{(1)} = L_3 - 2L_1$$
$$L_4^{(1)} = L_4 - 3L_1$$

$$\sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & -14 & -30 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & -15 \end{pmatrix}$$

$$L_1^{(2)} = L_1^{(1)}$$
$$L_1^{(2)} = L_2^{(1)}$$
$$L_3^{(2)} = L_2^{(1)} + 5L_3^{(1)}$$
$$L_4^{(2)} = L_4^{(1)} + L_3^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & -14 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} L_1^{(3)} &= L_1^{(2)} \\ L_2^{(3)} &= L_2^{(2)} \\ L_3^{(3)} &= L_3^{(2)} \\ L_4^{(3)} &= -2L_4^{(2)} + L_3^{(2)} \end{aligned}$$

~~Conséquences~~ :

1- On a abouti à une forme échelonnée avec une ligne nulle. Donc S_2 est liée

2- $Rg(S_2) = 3$ (nombre de lignes non nulles)

3- $\left\{ L_1^{(3)} ; L_2^{(3)} ; L_3^{(3)} \right\}$ forment une base de $Lin(S_2) = Vect(S_2)$

4- Relation de dépendance linéaire.

$$L_4^{(3)} = 0 \Rightarrow -2L_4^{(2)} + L_3^{(2)} = 0$$

$$-2\left(L_4^{(1)} + L_3^{(1)}\right) + \left(L_2^{(1)} + 5L_3^{(1)}\right) = 0$$

$$-2L_4^{(1)} + 3L_3^{(1)} + L_2^{(1)} = 0$$

$$-2(L_4-3L_1)+3(L_3-2L_1)+(L_2-L_1)=0$$

$$-2L_4+3L_3+L_2-L_1=0$$

$$-2V_4+3V_3+V_2-V_1=0$$

$$V_1=V_2+3V_3-2V_4$$

Fin de Chapitre

Pr. M. Barry

Chapitre 4 : Applications linéaires

Soient K un corps commutatif, E, F deux K-e.v

§I) Généralités :

1°) Définitions et exemples :

Définition 1 :

Soit $f : E \to F$ une application.

On dit que f est linéaire si :

1. $\forall (x, x') \in E^2$, $f(x+x') = f(x) + f(x')$

2 - $\forall \alpha \in K$, $\forall x \in E$ $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$

Définition 2 : Soit $f : E \to F$ une applicati

On dit que f est linéaire si

$\forall (\alpha, \alpha') \in K^2, \forall (x, x') \in E^2$

$f(\alpha \cdot x + \alpha' \cdot x') = \alpha \cdot f(x) + \alpha' \cdot f(x')$

Remarque : Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors on a les assertions suivantes :

1- $f(0_E) = 0_F$

2- $\forall x \in E \; f(-x) = -f(x)$

3- $\forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n,$
$\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E_m^n$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f(u_i)$$

Preuve : Comme f est linéaire

$\forall \alpha \in K, \forall x \in E \; f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$

1- Si $\alpha = 0_K$ on a : $f(0_K \cdot X) = 0_K \cdot f(X)$

$$f(0_E) = 0_F.$$

2- Si $\alpha = -1_K$ on a $f(-1_K \cdot X) = -1_K \cdot f(X)$

$$f(-X) = -f(X)$$

3- Par récurrence sur n :

Définition : Soit $f : E \to F$ une application

On dit que f est un isomorphisme si

f est linéaire et bijective.

Définition : On appelle endomorphisme

de E toute application linéaire de

E dans E.

Définition : On appelle automorphisme de E tout endomorphisme de E qui est bijectif.

Définition : On appelle forme linéaire de E toute application linéaire de E dans K.

Notations : 1- $\mathcal{L}_K(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$

l'ensemble des applications linéaires de E dans F

2- $End_K(E) = \mathcal{L}_K(E) = \mathcal{L}(E)$: l'ensemble des endomorphismes de E.

3- $\mathcal{L}_K(E, K) = E^*$: l'ensemble des formes linéaires de E.

Exemple 1 : $Id_E : E \to E : x \mapsto x$ est linéaire.

Exemple 2 :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto (x-2y+3z,\ 4x+y+2z)$$

f est linéaire.

En effet : i) Soient $X=(x,y,z)$, $X'=(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$; $X+X'=(x+x', y+y', z+z')$

$$f(X+X') = \left[(x+x')-2(y+y')+3(z+z'),\ 4(x+x')+(y+y')+2(z+z')\right]$$

$$= (x-2y+3z+x'-2y'+3z',\ 4x+y+2z+4x'+y'+2z')$$

$$= \left(x-2y+3z,\ 4x+y+2z\right)+\left(x'-2y'+3z',\ 4x'+y'+2z'\right)$$

$$= f(X) + f(X')$$

2) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $X=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\alpha \cdot X = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

$$f(\alpha \cdot X) = \left(\alpha x - 2\alpha y + 3\alpha z,\ 4\alpha x + \alpha y + 2\alpha z\right)$$

$= \alpha\,(x-2y+3z,\ 4x+y+2z)$

$= \alpha \cdot f(X)$

Donc f est linéaire.

Exemple 3 : $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y,z,t) \longmapsto x+4y+3z+9t$

g est linéaire.