Chapitre 3 : Matrices

Soit K ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) un corps commutatif

§I) Généralités :

1) Définitions et exemples :

Soient m et n 2 entiers naturels non nuls.

Définition : On appelle matrice de type (m,n) ou $m \times n$ à coefficients dans K tout tableau A de $m \times n$ éléments de K constitué de m lignes et n colonnes

On note : $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

$a_{ij} \in K$ pour $\left\{ \begin{array}{l} i \in \{1, \dots, m\} \\ j \in \{1, 2, \dots, n\} \end{array} \right\}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m : nombre de lignes

n : nombre de colonnes

Remarque :

Si $m = n$ alors A est dite matrice carrée d'ordre n et on écrit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$ est une matrice de type $(2,4)$

$$A' = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 0 & 8 & -5 \\ 10 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$ est une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$ est une matrice uni colonne

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$ est une matrice uni-ligne

Notations :

1 - $M_{m,n}(K)$: l'ensemble des matrices de type (m,n) et à coefficients dans K

2 - $M_n(K)$: l'ensemble des matrices carrées d'ordre n et à coefficients dans K

2) Quelques types de matrices :

2-1) Transposée d'une matrice :

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le}} \in M_{m,n}(K)$

Définition : On appelle transposée de A, la matrice de type (n,m) dont les colonnes sont les lignes de A

On note ${}^tA = (a_{ji})_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le i\le m}}$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 5 \\ 4 & 8 & 19 & 11 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbb{R})$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 8 \\ 0 & 19 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} \; ; \quad A' = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 0 & 6 & 14 \\ -3 & 2 & 18 \end{pmatrix} \quad {}^tA' = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -1 & 6 & 2 \\ 7 & 14 & 18 \end{pmatrix}$$

$$A'' = (-1, 8, 9, 7) \qquad {}^t(A'') = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2-2) Matrices diagonales :

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(K)$.

Définition : On appelle diagonale principale de A, les élts de la forme a_{ii} pour $1 \leq i \leq n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

← diagonale principale de A.

Définition : On dit que A est une matrice diagonale si $\forall i \neq j \; a_{ij} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & 0 \\ & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2-3) Matrices scalaires :

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(K)$.

Définition : On dit que A est une matrice scalaire si A est diagonale et tous les élts diagonaux sont égaux

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \ \alpha \end{pmatrix}$$

$\alpha \in K$

Remarque : si $\alpha = 1_K$ alors la matrice scalaire obtenue s'appelle la matrice unité d'ordre n et est notée I_n

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2-4) Matrices triangulaires:

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \in M_n(K)$

Définition : On dit que A est triangulaire supérieure si $\forall i > j \; a_{ij} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Définition : On dit que A est triangulaire inférieure si $\forall i<j \quad a_{ij} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

2-5) Matrices symétriques :

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(K)$

Définition : On dit que A est symétrique si ${}^tA = A$.

c.a.d $\forall i \in \{1, .., n\}, \forall j \in \{1, \ldots, n\}$ $a_{ij} = a_{ji}$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

${}^tA = A$. Donc A est symétrique

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 2019 \\ 4 & 9 & 2019 & -10 \end{pmatrix}$$

§II) Opérations sur les matrices :

1) Égalité :

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

2 élts de $M_{m,n}(\mathbb{K})$.

$A = B \iff \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}\ a_{ij} = b_{ij}$

Remarque : si $a_{ij} = 0$ $\forall 1 \leq i \leq m$ et $\forall 1 \leq j \leq n$ alors la matrice $A = O_{M_{m,n}(K)}$: la matrice nulle de $M_{m,n}(K)$.

$$O_{M_{m,n}(K)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

2) Addition

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

2 élts de $M_{m,n}(K)$.

$$A + B = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} + (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$= (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 8 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} -1+2 & 2-3 & 3+6 \\ 4+8 & 5+9 & 0+11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 12 & 14 & 11 \end{pmatrix}$$

Propriétés de l'addition:

Soient A, A', A'' 3 éléments de $M_{m,n}(K)$

1- la somme de matrices est associative.

$$A+A'+A''=(A+A')+A''=A+(A'+A'')$$

2- la somme de matrices est commutative

$$A+A'=A'+A$$

3- la matrice nulle de $M_{m,n}(K)$ est l'élément neutre de $M_{m,n}(K)$ pour l'addition.

c.a.d : $A + O_{M_{m,n}(K)} = O_{M_{m,n}(K)} + A = A$

4) - tout élt de $M_{m,n}(K)$ admet un symétrique pour l'addition.

c.a.d. $A + (-A) = (-A) + A = O_{M_{m,n}(K)}$

avec $(-A)$ est le symétrique de A appelée la matrice opposée de A

Proposition : $\left(M_{m,n}(K), + \right)$ est un groupe abélien.

3) Multiplication par un scalaire :

Soient $\alpha \in K$, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in M_{m,n}(K)$

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = (\alpha\, a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Propriétés de la multiplication par 1 scalaire

1- $\forall \alpha \in K, \forall A, A' \in M_{m,n}(K) : \alpha \cdot (A + A') = \alpha \cdot A + \alpha A'$

2- $\forall (\alpha, \beta) \in K^2, \forall A \in M_{m,n}(K) : (\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

3- $\forall (\alpha, \beta) \in K^2, \forall A \in M_{m,n}(K) \quad \alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \beta) \cdot A$

4)— $1_K \cdot A = A \quad \forall A \in M_{mn}(K)$

Proposition :

1— $(M_{m,n}(K), +, \cdot)$ est un K-e.V de dimension $m \times n$

2— $(M_n(K), +, \cdot)$ est un K-e.V de dimension n^2

Exemple :

$\left(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot\right)$ est un $\mathbb{R}$-ev $2^2 = 4$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

est une base de $M_2(\mathbb{R})$, appelée la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

(Homework)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$= a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_2} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_3} + d \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_4}$$

$$A = a \cdot M_1 + b \cdot M_2 + c \cdot M_3 + d \cdot M_4$$

Posons $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ est un système générateur de $M_2(\mathbb{R})$

A-t-on B libre ?

Soient α, β, γ et $\delta \in \mathbb{R}$ tq

$$\alpha \cdot M_1 + \beta \cdot M_2 + \gamma \cdot M_3 + \delta \cdot M_4 = 0_{M_2(\mathbb{R})}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}$$

B est libre

Donc B est une base de $M_2(\mathbb{R})$.

4) Produit de matrices :

Soient $X = (x_1, x_2) \in M_{12}(\mathbb{R})$ $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \in M_{21}(\mathbb{R})$

$X \cdot X' =$

$$X \cdot X' = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = x_1 x'_1 + x_2 x'_2 \in M(\mathbb{R})$$

ii) Soient $X = (x_1, x_2, x_3) \in M_{1,3}(\mathbb{R})$

$$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot X' = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot x'_1 + x_2 \cdot x'_2 + x_3 x'_3$$

III) Soient $X = (x_1, x_2, \cdots x_n) \in M_{1,n}(\mathbb{R})$

$$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$$

$$X \cdot X' = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + \cdots + x_n x'_n$$

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et

$B = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}}$ $\cdot$ $A \cdot B$

Définition : On appelle produit de A et B, la matrice $C = A \bullet B$ dont les élts sont les c_{ik} avec $c_{ik} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} =$

$$= a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots + a_{in} b_{nk}$$

$$C = (c_{ik})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le k \le p}}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & & c_{mp} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & & B_p \end{array} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & \cdots & A_1B_p \\ A_2B_1 & A_2B_2 & \cdots & A_2B_p \\ \vdots & & & \\ A_mB_1 & A_mB_2 & \cdots & A_mB_p \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B$$

$$= (m, \cancel{n})(\cancel{n}, p)$$

$$(m, p)$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 0 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 0 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -15 & -17 \\ 39 & 58 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad B' = (0, 8, 1, 9)$$

$$A' \cdot B' = \begin{pmatrix} 0 & -8 & -1 & -9 \\ 0 & 40 & 5 & 45 \\ 0 & 48 & 6 & 54 \\ 0 & 56 & 7 & 63 \end{pmatrix}$$

Propriétés :

1.- Associativité :

Le produit de matrices est associatif.

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ $A' = (a'_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}}$

$A'' = (a''_{kl})_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq l \leq q}}$ $(A \cdot A') A'' = A \cdot (A' \cdot A'')$

2- Commutativité :

En général le produit de matrices n'est pas commutatif.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

3- Distributivité

le produit de matrices est distributif par rapport à l'addition. 3

c.a.d $\forall (A, B, C) \in M_n(K)$

$$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(B+C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$$

4)- transposée du produit.

Soient $(A, B) \in M_n^2(K)$

$${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$$

5)- Soient $\alpha \in K$, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

$B = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}}$

$$A\cdot\alpha\cdot B = (A\cdot\alpha)\cdot B = A\cdot(\alpha\cdot B) = \alpha\cdot(AB)$$

6- Puissance d'une matrice :

Soit $A \in M_n(K)$ et $p \in \mathbb{N}$

$$A^p = \underbrace{A \times A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ fois}}$$

Définition : On dit que A est une matrice nilpotente d'indice p si $A^{p} = O_{M_n(K)}$ et $A^{p-1} \neq O_{M_n(K)}$

Remarque (Formule du binôme de Newton)

Soient A, B 2 élts de $M_n(K)$ tels

$A \cdot B = B \cdot A$ et $m \in \mathbb{N}$

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \cdot A^k \cdot B^{m-k}$$

Remarque :

1- $A^0 = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

2- $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

3- $I_n^k = I_n$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

A^n ? A^{2019}

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Posons $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A = I + N = N + I$ et $N \cdot I = I \cdot N = N$

$$A^n = (N+I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot N^k \cdot I^{n-k}$$

or $I^{n-k} = I$

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot N^k \cdot I = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot N^k$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^3 = N^2 \cdot N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $N^3 = O$. N est nilpotente d'indice 3

$$\forall k \geq 3,\ N^k = O$$

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot N^k = C_n^0 \cdot N^0 + C_n^1 \cdot N^1 + C_n^2 \cdot N^2$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad C_n^0 = 1 \quad C_n^1 = n \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$N^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^n = 1 \cdot I + n \cdot N + \frac{n(n-1)}{2} \cdot N^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

§III) Matrices et Applications linéaires

1) Matrice d'une application linéaire

Soient E, F 2 K-e.v de dimension finie, $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$, $B = \{u_1, u_2, \dots u_n\}$ une base de E et $D = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ une base de F.

Définition : On appelle matrice associée à f par rapport aux bases B et D, la matrice A dont les colonnes sont les composantes des élts $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)$ exprimés dans la base $D = \{v_1, \ldots, v_m\}$

On note : $A = M(f, B, D) = Mat_{B,D}(f)$

$$f(u_1) = a_{11} \cdot v_1 + a_{21} \cdot v_2 + \dots + a_{m1} \cdot v_m$$

$$f(u_2) = a_{12} \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 + \dots + a_{m2} \cdot v_m$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$f(u_n) = a_{1n} \cdot v_1 + a_{2n} \cdot v_2 + \dots + a_{mn} \cdot v_m$$

$$A = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} f(u_1) & f(u_2) & \cdots & f(u_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{array} \end{array}$$

Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$(x, y) \longmapsto$

Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$(x,y) \longmapsto (x+2y, 4x, 4x+y, 9y)$

f est linéaire

$B = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$

$e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$

$D = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$

$\varepsilon_1 = (1,0,0,0)$; $\varepsilon_2 = (0,1,0,0)$

$\varepsilon_3 = (0,0,1,0)$ et $\varepsilon_4 = (0,0,0,1)$

$A = M(f, B, D)$: matrice associée à f par rapport aux bases B et D.

$f(e_1) = f(1,0) = (1,4,4,0) = 1\cdot\varepsilon_1 + 4\cdot\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 + 0\cdot\varepsilon_4$

$f(e_2) = f(0,1) = (2,0,1,9) = 2\cdot\varepsilon_1 + 0\cdot\varepsilon_2 + 1\cdot\varepsilon_3 + 9\varepsilon_4$

$$A = \begin{array}{cc|c} f(e_1) & f(e_2) & \\ \hline 1 & 2 & \varepsilon_1 \\ 4 & 0 & \varepsilon_2 \\ 4 & 1 & \varepsilon_3 \\ 0 & 9 & \varepsilon_4 \end{array}$$

$B' = \{e'_1, e'_2\}$ une autre base de $\mathbb{R}^2$

$e'_1 = (1,1)$; $e'_2 = (1,2)$

$A' = M(f, B', D)$: matrice de f relativement aux bases : B' et D

$f(e'_1) = f(1,1) = (3,4,5,9) = 3\cdot\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + 5\varepsilon_3 + 9\varepsilon_4$

$f(e'_2) = f(1,2) = (5,4,6,18) = 5\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + 6\varepsilon_3 + 18\varepsilon_4$

$$A' = \begin{array}{cc} f(e'_1) & f(e'_2) \\ \left(\begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 18 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{array}$$

Remarque : Soit E un K-e.v de dimension finie, $f \in \mathcal{L}_K(E)$ et B une base de E.

$M(f, B) = M(f, B, B)$ s'appelle la matrice de f dans la base B.

Exemple : $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$

$P(X) \longmapsto \varphi(P(X)) = P(X) + \frac{d}{dX} P(X)$

$C = \{1, x, x^2, x^3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$

$A = M(\varphi, C) = M(\varphi, C, C)$: matrice de φ dans la base C

$\varphi(1) = 1 + \frac{d}{dx}1 = 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3$

$\varphi(x) = x + \frac{d}{dx}x = x + 1 = 1\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3$

$\varphi(x^2) = x^2 + \frac{d}{dx}x^2 = x^2 + 2x = 0\cdot 1 + 2\cdot x + 1\cdot x^2 + 0x^3$

$$\varphi(x^3) = x^3 + \frac{d}{dx}x^3 = x^3 + 3\cdot x^2$$

$$= 0\cdot 1 + 0\cdot x + 3\cdot x^2 + 1\cdot x^3$$

$$A = M(\varphi, C) = \begin{array}{c@{}c} \begin{array}{cccc} \varphi(1) & \varphi(x) & \varphi(x^2) & \varphi(x^3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{array} \end{array}$$

A^n? (Homework)

Remarque :

1 - Soient $f, g \in \mathcal{L}_K(E, F)$

B une base de E et D une base de F.

$$M(f+g, B, D) = M(f, B, D) + M(g, B, D)$$

2) Soient E, F et G 3 K-e.v,

B une base de E, B' une base de F et

B'' une base de G.

$g \circ f : E \longrightarrow G$

$$M(g \circ f, B, B'') = M(g, B', B'') \times M(f, B, B')$$

3) Soient $f \in \mathcal{L}_{K}(E)$ et B une base de E

$$M(f^2, B) = \big(M(f, B)\big)^2$$

$$M(f^n, B) = \big[M(f, B)\big]^n$$

§IV) Matrices inversibles :

1) Généralités :

Soit $A \in M_n(K)$.

Définition : On dit que A est inversible ou régulière s'il existe une matrice $A' \in M_n(K)$ telle que $A \cdot A' = A' \cdot A = I_n$.

Notation : la matrice A' s'appelle l'inverse de A et est notée

$A' = A^{-1}$

Remarque : 1 _ L'inverse d'une matrice si elle existe alors elle est unique.

2 _ Soient A_1 et $A_2 \in M_n(K)$ inversibles

$(A_1 \cdot A_2)^{-1} = A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$

2) Quelques méthodes de calcul de l'inverse :

2-1) Méthode directe :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Cherchons $A' = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ tq

$AA' = A'A = I_2$

$$AA' = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+2y & z+2t \\ 3x+4y & 3z+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2y = 1 \\ 3x+4y = 0 \\ z+2t = 0 \\ 3z+4t = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3/2 \\ z = 1 \\ t = -1/2 \end{cases} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2-2) Méthode du polynôme caractéristique

Soient $A \in M_n(K)$ et $P(t)$ un polynôme admettant un coefficient constant non nul.

Remarque :

1- On dit A est une racine de $P(t)$ si $P(A) = 0$

2- Si A est une racine de $P(t)$ alors A est inversible.

Exemple : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $p(t) = t^2 - 5t - 2$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(A) = A^2 - 5A - 2 \cdot I_2$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

$$-5A = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -15 & -20 \end{pmatrix} \qquad -2I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 5A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{M_2(\mathbb{R})}$$

$$P(A)=0 \Rightarrow A^2-5A-2I_2=0$$

$$A^2-5A=2I_2$$

$$\frac{1}{2}A^2-\frac{5}{2}A=I_2$$

$$A\cdot I_2=I_2\cdot A=A$$

$$A\cdot\left(\frac{1}{2}A-\frac{5}{2}\cdot I_2\right)=\left(\frac{1}{2}A-\frac{5}{2}\cdot I_2\right)\cdot A=I_2$$

Posons $A'=\frac{1}{2}A-\frac{5}{2}I_2$

$A\cdot A'=A'\cdot A=I_2 \Rightarrow$ A est inversible

$$A^{-1}=A'=\frac{1}{2}\cdot A-\frac{5}{2}I_2.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{5}{2}I_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2-3) Méthode de Gauss-Jordan :

Soit $A \in M_n(K)$.

1- $(A \mid I_n)$: On superpose avec A avec I_n

2 – Faire subir au bloc $(A|I_n)$ une série d'opérations élémentaires pour changer la position de I_n

3 – Prendre à la dernière opération la matrice A' obtenue dans le dernier bloc comme l'inverse de A

$$(A|I_n) \sim \cdots\cdots (I_n|A')$$

$$A' = A^{-1}$$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1^{(1)} = L_1 \\ L_2^{(1)} = L_1 + L_2 \\ L_3^{(1)} = L_1 + L_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1^{(2)} = L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} = L_3^{(1)} \\ L_3^{(2)} = L_2^{(1)} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1^{(3)} = -2L_1^{(2)} + L_3^{(2)} \\ L_2^{(3)} = L_2^{(2)} \\ L_3^{(3)} = L_3^{(2)} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1^{(4)} = L_1^{(3)} + L_2^{(3)} \\ L_2^{(4)} = L_2^{(3)} \\ L_3^{(4)} = L_3^{(3)} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{I_3} \qquad \underbrace{}_{A^{-1}}$$

$$L_1^{(5)} = \frac{1}{2} L_1^{(4)}$$

$$L_2^{(5)} = \frac{1}{2} L_2^{(4)}$$

$$L_3^{(5)} = \frac{1}{2} L_3^{(4)}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Homework

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 3 & 4 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & -2 & | & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1^{(1)} = L_1 \\ L_2^{(1)} = L_2 - 3L_1 \end{array}$$

2-4) Méthode des cofacteurs

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

s'appelle le déterminant de A.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(K)$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ Cofacteur associée à a_{11}

$$(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$: Cofacteur associé à a_{12}

$$(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$ Cofacteur associé à a_{13}

Définition : Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(K)$

On appelle comatrice de A la matrice dont les élts sont les cofacteurs des élts de A. On note : $A^* = Com(A)$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(K)$$

$$A^* = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Remarque : Si A est inversible alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot {}^t(A^*)$$ et $\det(A) \neq 0$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \, {}^t(A^*)$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 3 \times 2$$
$$= 4 - 6 = -2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} +4 & -3 \\ -2 & +1 \end{pmatrix}$$

$${}^tA^* = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot {}^t(A^*)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Méthode de Sarrus : (determinant)

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

$$\det(A) = \left| \begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} a & b \\ a' & b' \\ a'' & b'' \end{matrix} \right.$$

$$\det(A) = +\left(ab'c'' + bc'a'' + ca'b''\right) - \left(cb'a'' + ac'b'' + ba'c''\right)$$

Théorème (Caractérisation d'une matrice inversible)

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \in M_n(K)$

Les conditions suivantes sont équivalentes

1- A est inversible

2- les lignes de A forment un système libre

3 – Les colonnes de A forment un système libre

4 – $\det(A) \neq 0$

5 – $Rg(A) = n$

6 – l'application linéaire $f : \begin{aligned} K^n &\longrightarrow K^n \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$ est injective

7 - l'application linéaire $f : K^n \longrightarrow K^n$, $X \longmapsto AX$

est surjective.

8 - L'application linéaire

$f : K^n \longrightarrow K^n$, $X \longmapsto A \cdot X$ est bijective.

§V) Changement de bases :

1) Généralités :

Définition : Soient A et B deux élts de $M_{m,n}(K)$. On dit que A et B sont équivalentes s'il existe une matrice inversible P d'ordre n

et une matrice inversible Q d'ordre n telles que $B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$

Définition : Soient A et B deux élts de $M_n(K)$. On dit que A et B sont semblables s'il existe une matrice inversible P

telle que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$

2) Matrice de passage :

Soient E un K-e.v de dimension n, $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ et $B' = \{u'_1, u'_2, \dots u'_n\}$ deux bases de E.

Définition : On appelle matrice de passage de la base B à la base B', la matrice P dont les colonnes sont les composantes des éléments $U'_1, U'_2, \dots U'_n$ exprimés dans la base B.

$$u_1' = a_{11} \cdot u_1 + a_{21} \cdot u_2 + \dots + a_{m1} \cdot u_n$$

$$u_2' = a_{12} \cdot u_1 + a_{22} \cdot u_2 + \dots + a_{m2} \cdot u_m$$

$$\vdots$$

$$u_n' = a_{1n} \cdot u_1 + a_{2n} \cdot u_2 + \dots + a_{nn} \cdot u_n$$

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u'_1 & u'_2 & \cdots & u'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{array}$$

$$P = (\alpha_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Remarque : 1- la matrice de passage est inversible.

2- Si P est la matrice de passage de B à B' alors P^{-1} est la matrice de passage de B' à B

Exemple : $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$

$B_1 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ la base canonique $\mathbb{R}^2$

$\varepsilon_1 = (1,0)$; $\varepsilon_2 = (0,1)$

$B_2 = \{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2\}$ une autre base de $\mathbb{R}^2$

$\varepsilon'_1 = (1,1)$; $\varepsilon'_2 = (-1,1)$

P : matrice de passage de B_1 à B_2

$\varepsilon'_1 = (1,1) = 1 \cdot \varepsilon_1 + 1 \cdot \varepsilon_2$, $\varepsilon'_2 = (-1,1) = -1 \cdot \varepsilon_1 + 1 \varepsilon_2$

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \varepsilon'_1 & \varepsilon'_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{array}$$

P' : matrice de passage de B_2 à B_1

$$\begin{cases} \varepsilon'_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \varepsilon'_2 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

$$2\varepsilon_2 = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\varepsilon'_1 + \frac{1}{2}\varepsilon'_2$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon'_1 - \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\varepsilon'_1 - \frac{1}{2}\varepsilon'_2$$

$$P' = \begin{array}{cc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \\ \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \end{array}$$

Donc $P' = \bar{P}^1$

Exemple : $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

$C_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$e_1 = (1, 0, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0)$

$e_3 = (0, 0, 1)$

$C_2 = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ une autre base de $\mathbb{R}^3$

$e'_1 = (1, 0, 1)$; $e'_2 = (0, 1, 1)$

$e'_3 = (1, 1, 1)$

P : matrice de passage de C_1 à C_2

$e'_1 = (1,0,1) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$

$e'_2 = (0,1,1) = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$

$e'_3 = (1,1,1) = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

Calculer P^{-1} : matrice de passage $C_2 \to C_1$.

3) Effet du changement de bases sur les composantes d'un vecteur

Soient E un K-e.v, B et B' deux bases du K-e.v E et V un élt de E.

Proposition : Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ les composantes de V dans la base B et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ les composantes de V dans la base B' alors $X' = P^{-1} \cdot X$ $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$

Exemple :

$B_1 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$

$B_2 = \{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2\}$ une autre base de $\mathbb{R}^2$

avec $\varepsilon'_1 = (1,1)$; $\varepsilon'_2 = (-1,1)$

$V = (5,6) \in \mathbb{R}^2$.

P : matrice de passage de B_1 à B_2

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$X = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ sont les composantes de V dans B_1

$V = 5 \cdot \varepsilon_1 + 6 \cdot \varepsilon_2$

$X' = P^{-1} \cdot X$ sont les composantes de V dans B_2

$=$

$$X' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} + \frac{6}{2} \\ -\frac{5}{2} + \frac{6}{2} \end{pmatrix}$$

$$X' = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ Sont les composantes de V dans B_2

$$V = \frac{11}{2} \cdot \varepsilon_1' + \frac{1}{2} \varepsilon_2'$$

4) Effet du changement de bases sur la matrice d'une application linéaire :

Soient E et F deux K-e.v de dimensions respectives n et m.

$B = \{u_1, u_2, \ldots u_n\}$ et $B' = \{u'_1, \ldots u'_n\}$ 2 bases de E

$D = \{v_1, v_2, \dots v_m\}$, $D' = \{v'_1, v'_2, \dots v'_m\}$

deux bases de F;

$f \in \mathcal{L}_K(E, F)$;

P : la matrice de passage de B à B',

Q : la matrice de passage de D à D'.

Théorème : Si $A = M(f, B, D)$ est la matrice de f par rapport aux bases B et D et $A' = M(f, B', D')$ est la matrice de f relativement aux bases B' et D'. Alors

$$A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P$$

Corollaire : Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension n, B et B' deux bases de E, $f \in \mathcal{L}_K(E)$, P : la matrice de passage de B à B'. Si

$A = M(f, B)$ est la matrice de f dans B

$A' = M(f, B')$ la matrice de f dans B'

Alors $A' = P^{-1} A \cdot P$.

Exemple : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y, z) \longmapsto (x+y+z, x-y+z)$

une application linéaire.

$B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ une autre base de $\mathbb{R}^3$

$e'_1 = (1, 0, 1)$; $e'_2 = (0, 1, 1)$

$e'_3 = (1, 1, 1)$

$B = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$

$B' = \{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2\}$ une autre base de $\mathbb{R}^2$

$\varepsilon'_1 = (1,1)$; $\varepsilon'_2 = (-1,1)$

P : matrice de passage de B à B'

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

; Q : matrice de passage de B à B' ; $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$A = M(f, B, D)$: matrice associée à f relativement à B et D.

$f(e_1) = f(1,0,0) = (1, 1) = 1 \cdot \varepsilon_1 + 1 \cdot \varepsilon_2$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (1, -1) = 1 \cdot \varepsilon_1 - 1 \cdot \varepsilon_2$

$f(e_3) = f(0,0,1) = (1, 1) = 1 \cdot \varepsilon_1 + 1 \cdot \varepsilon_2$

$$
A = \begin{array}{c c}
\begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{array}
\end{array}
$$

$A' = M(f, B', D')$: matrice de f relativement aux bases B' et D'

$$
A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \longmapsto (x+y+z,\ x-y+z)$$

$$f(e_1) = (1, 1) = 1 \cdot \varepsilon_1 + 1 \cdot \varepsilon_2$$

$$f(e_2) = (1, -1) = 1 \cdot \varepsilon_1 - 1 \cdot \varepsilon_2$$

$$f(e_3) = (1, 1) = 1 \cdot \varepsilon_1 + 1 \varepsilon_2$$

$$A = M(f, B, D) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{array}$$

P: la matrice de passage de B à B'

$$e'_1 = (1,0,1) = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 1\cdot e_3$$

$$e'_2 = (1,1,0) = 1\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 0\cdot e_3$$

$$e'_3 = (0,1,1) = 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 1\cdot e_3$$

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

Q : la matrice de passage de D à D'

$\varepsilon'_1 = (1,1) = 1\cdot \varepsilon_1 + 1\cdot \varepsilon_2$

$\varepsilon'_2 = (1,2) = 1\cdot \varepsilon_1 + 2\cdot \varepsilon_2$

$$Q = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \varepsilon'_1 & \varepsilon'_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{array} \end{array}$$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A' = M(f, B', D') = Q^{-1}\cdot A \cdot P$$

$$A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$