UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE ET INFORMATIQUE

Première Année

Algèbre : 2021 - 2022

...

23 octobre 2022

Table des matières

Chapitre 1

Applications linéaires

Sommaire

1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1.1 *Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est linéaire si :*

1. $f(X + X') = f(X) + f(X') \quad \forall X, X' \in E$
2. $f(\lambda X) = \lambda \cdot f(X) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad et \quad \forall X \in E.$

Autrement : f est linéaire si et seulement si on a $f(\alpha X + \beta X') = \alpha \cdot f(X) + \beta \cdot f(X')$, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad et \quad \forall (X, X') \in E^2$.

Remarque 1.1.1 *Soit f une application linéaire.*

1. *Si f est une application linéaire,* $f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ f(u_i)$
   $\forall \alpha_i \in \mathbb{K} \quad i = \{1, 2, ..., n\}$ *et* $\forall u_i \in E \quad i = \{1, ..., n\}$;

2. $f(O_E) = O_F$;
3. $f(-X) = -f(X)$.

Preuve.

1. On procède par récurrence
2. $f(\alpha \cdot X) = \alpha \cdot f(X)$; si $\alpha = O_{\mathbb{K}} \Longrightarrow \alpha X = O_E$, ainsi $f(O_{\mathbb{K}} \cdot X) = O_{\mathbb{K}} \cdot f(X) = O_F$. Donc on a $f(O_E) = O_F$.
3. $\alpha = 1_{\mathbb{K}} \quad f(-1_{\mathbb{K}} \cdot X) = -1_{\mathbb{K}} \cdot f(X) \ \ \forall X \in E$. Ainsi $f(-X) = -f(X)$.

Notation 1.1.1 *1.* $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$ *= l'ensemble des applications linéaires de* E *dans* F.

2. Si $f : E \longrightarrow F$ *est une application linéaire, si* $E = F$*, alors* f *est un endomorphisme.*

3. Si $f : E \longrightarrow F$ *application linéaire si* $F = \mathbb{K}$*,* f *est dite forme linéaire.*

4. Soit $f : E \longrightarrow F$ *une application linéaire et si* f *est bijective alors* f *est dite isomorphisme.*

Exemple 1.1.1 *1. Soit* E *un* K*-espace vectoriel*

$$\begin{array}{llll} f_1 : & E \longrightarrow X & & \textit{est une application linaire} \\ & X \longrightarrow X & & \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{llll} f_2 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \qquad \textit{est linaire} \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x - y, 2x + z) \end{array}$$

En effet

Soient $X = (x, y, z)$ *et* $X' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$

$f_2(X + X') = f_2(X) + f_2(X')$ *?*

$X + X = (x + x', y + y', z + z')$

$$\begin{array}{rcllll} f_2(X + X') & = & \big(('x + x') - (y + y') & , & 2(x + x') + z + z'\big) \\ & = & (x - y, 2x + z) & + & (x' - y', 2x' + z') \\ & = & f_2(X) & + & f_2(X') \end{array}$$

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*. On a* $\alpha X = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ $f(\alpha X) = \alpha f(X)$ *?*

$$\begin{aligned} f_2(\alpha X) = f_2(\alpha x, \alpha y, \alpha z) &= (\alpha x - \alpha y, 2\alpha x + \alpha z) \\ &= \alpha(x-y, 2x+z) \\ &= \alpha f_2(x,y,z) \\ &= \alpha f_2(X). \end{aligned}$$

Donc f_2 est linéaire.

3. $\begin{array}{rccl} f_3 : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z,t) & \longmapsto & 2x+3y+z-t \end{array}$ *est linéaire.*

4. $\begin{array}{rccl} f_4 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y,1) \end{array}$.

   on a $O_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$ or $f_4(0,0) = f(0,1) \neq (0,0) = O_{\mathbb{R}^2}$ donc l'image de $O_{\mathbb{R}^2}$ est $\neq O_{\mathbb{R}^2} \Longrightarrow f$ n'est pas linéaire.

5. *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif $r \leq n$*

$$\begin{array}{rccl} p : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^r \\ & (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & (x_1, x_2, ..., x_r) \end{array}$$

   p est une application linéaire appelée projection de $\mathbb{K}^n$ sur $\mathbb{K}^r$.

6.

$$\begin{array}{rccl} D : & \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[x] \\ & P(x) & \longmapsto & P'(x) \end{array}$$

   D est une application linéaire.

1.2 Opérations sur les applications linéaires

Soit $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$, l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

1. **Addition**

   Soient f, g deux éléments de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$

   $\begin{array}{rccl} f : & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ $\quad\quad$ $\begin{array}{rccl} g : & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & g(x) \end{array}$

$f+g)(x) = f(x)+g(x)$

$$\begin{array}{rccc} f+g: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array}.$$

On a alors $(f+g)$ est aussi une application linéaire de E dans F.

2. **Multiplication par un scalaire**

   Soit $\alpha \in \mathbb{K},\ f \in L(E,F)$

   $(\alpha \cdot f)(X) = \alpha \cdot f(X)$

   $$\begin{array}{rccc} \alpha \cdot f: & E & \longrightarrow & F \\ & X & \longmapsto & \alpha \cdot f(x) \end{array}$$

   On a alors $\alpha \cdot f$ est une application linéaire

   $\alpha \cdot f(X+X') = \alpha \cdot [f(X)+f(X')] = \alpha \cdot f(X) + \alpha \cdot f(X')$

   $\alpha \cdot f(\lambda X) = \alpha \cdot [\lambda \cdot f(X)] = \lambda \cdot [\alpha f(X)] = \lambda \cdot [(\alpha \cdot f(X)]$ donc $\alpha \cdot f(X)$ est linéaire.

3. **Composition d'application linéaire**

   Soient E, F et G 3 '$\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ 2 applications linéaires

   $$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

   $$g \circ f$$

   Soit $X \in E$, $(g \circ f)(X) = g[f(X)]$

   $$\begin{array}{rccc} g \circ f: & E & \longrightarrow & G \\ & X & \longmapsto & g[f(x)] \end{array}$$

   On a $g \circ f$ est une application linéaire.

Remarque 1.2.1 *Soit $f : E \longrightarrow F$ un endormorphisme $f^n = f \circ f$ est un endomorphisme, $f^n = \underbrace{f \circ ... \circ f}_{n\ fois}$ est un endomorphisme.*

Proposition 1.2.1 *Application linéaire réciproque*

Soit f une application linéaire de E dans F alors et f bijective alors f^{-1} est aussi linéaire.

Preuve Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire bijective. On a $f^{-1} : F \longrightarrow E$.

Soient Y et $Y' \in F$ donc $\exists X$ et $X' \in E$ tel que $Y = f(X)$ et $Y' = f(X')$ car f est bijective. On a $X = f^{-1}(Y)$ et $X' = f^{-1}(Y')$. Soit maintenant α, $\alpha' \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha Y + \alpha' Y') &= f^{-1}(\alpha f(X) + \alpha' f(X')) \\ &= f^{-1}[f(\alpha X + \alpha' X')] \\ &= \alpha X + \alpha' X' \\ &= \alpha f^{-1}(Y) + \alpha' f^{-1}(Y') \end{aligned}$$

Par conséquent f^{-1} est linéaire.

1.3 Noyau et Image d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Définition 1.3.1 *1. On appelle noyau de f l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est nulle. On note $Ker(f) = \{x \in E : f(x) = O_F\}$.*

2. On appelle image de f l'ensemble des images des éléments de E par f. On note $Im(f) = \{f(x),\ x \in E\} = \{y \in F\ /\ \exists x \in E$ tel que $y = f(x)\}$.

Remarque 1.3.1 *1. $Ker(f) \subset E$*

2. $Im(f) \subset F$.

Proposition 1.3.1 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $Ker(f)$ est un s.ev. de E et $Im(f)$ est s.e.v. de F.*

Preuve.

1. $Ker(f) = \{x \in E : f(x) = O_F\}$.
   Comme f est linéaire, on a $f(O_E) = O_F \Longrightarrow O_E \in Ker(f)$ d'où $Ker(f) \neq \emptyset$.
   Soient X, X' deux éléments de $Ker(f)$ et α, $\alpha' \in \mathbb{K}$.

$X \in Ker(f) \Rightarrow f(X) = 0_F$ et $X' \in Ker(f) \Rightarrow f(X') = 0_F$.
$f(\alpha X + \alpha' . X') = \alpha f(X) + \alpha' f(X') = O_F$.
Ainsi $(\alpha X + \alpha' X') \in Kerf$. D'où $Kerf$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. $Im(f) = \{Y \in F : \exists X \in E$ tel que $Y = F(X)\}$
Comme f est linéaire $f(O_E) = O_F \Longrightarrow 0_F \in Im(f)$, donc Im(f) est non vide.
Soient Y, Y' 2 éléments de $Im(f)$ et $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$.
$Y \in Im(f) \Longrightarrow \exists X \in E$ tel que $f(X) = Y$ et $Y' \in Im(f) \Longrightarrow \exists X' \in E$ tel que $Y' = f(X')$.
On a $\alpha Y + \alpha' Y' = \alpha f(X) + \alpha' f(X) = f(\alpha X + \alpha' X')$ car f linéaire.
Comme $Z = \alpha X + \alpha' X' \in E$, alors $f(Z) = \alpha' Y + \alpha Y' \in Im(f)$.
Par conséquent $Im(f)$ est un s.ev de F.

Exemple 1.3.1 1) $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (2x - y + 3z, -x + y) \end{array}$

$Ker(f) = \{X \in \mathbb{R}^2, f(X) = O\}$.
Soit $X = (x, y, z) \in Ker(f)$, *donc on a* $f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^2}$. *Ainsi on a* $(2x - y + 3z, -x + y) = (0, 0)$.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 & \Longrightarrow \quad 2x - x + 3z = 0 \Longrightarrow & x = -3z \\ y - x = 0 \Longrightarrow \quad y = x & & y = x = -3z \end{cases}$$

Ainsi $X = (-3z, -3z, z) = z(-3, -3, 1)$. *Posons* $U = (-3, -3, 1)$.
Par conséquent $Ker(f) = Lin\{U\}$. *Comme* $U \neq 0_{\mathbb{R}^3} \Longrightarrow B = \{U\}$ *base de* $Kerf$. *D'où* $dimKer(f) = 1$
$Im(f) = \{Y \in \mathbb{R}^2 \ , \exists X \in R^3 \ , Y = f(x)\}$.
Soit $Y \in Im(f)$ $\exists X = (x, y, z)$ *tel que* $Y = f(X) = f(x, y, z) = (2x - y + 3z, -x + y)$
$\Rightarrow Y = (2x, -x) + (-y, y) + (3z, 0) = x(2, 1) + y(-1, 1) + (3z, 0)$.

On pose $V_1 = (2, -1), \ V_2 = (-1, 1), \ V_3 = (3, 0)$
$Y = x \ (2, -1) = V_1 + y \ V_2 + z \ V_3$ *donc* $Im(f) = Vect\{V_1, V_2, V_3\}$.

2) $\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (2x - 3y, x - 2y + z, x - y - z) \end{array}$

$Ker\varphi = \{X \in E$ *tel que* $f(X) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$
$X = (x, y, z) \in Ker(f) \Longrightarrow \varphi(X) = \varphi(x, y, z) = O_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{cases} 2x-3y=0 & (1) \\ x-2y+z=0 & (2) \\ x-y-z=0 & (3) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (2)+(3) \Longrightarrow 2x-3y=0 \Longrightarrow & \\ 2x-3y=0 \Longrightarrow & x=\dfrac{3}{2}\ y \Longrightarrow y=\dfrac{2}{3}\ x \\ & z=x-y=x-\dfrac{2}{3}\ x=\dfrac{1}{3}x \end{cases}$$

$X=(x,\dfrac{2}{3}x,\dfrac{1}{3}x)=\dfrac{1}{3}x(3,2,1)$ *on pose* $U=(3,2,1)$

$X=\alpha U \Longrightarrow Ker(f)=Vect\{U\}$

$Im(f)=\{(x',y',z')\in\mathbb{R}^3\ /\ \exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ \textit{tel que}\ (x',y',z')=f(x,y,z)\}$

Soit $Y=(x',y',z')\in Im(\varphi)\Longrightarrow \exists\ (x,y,z)\in R^3$ *tel que*

$Y=\varphi(x,y,z)=(2x-3y,x-2+z,x-y-z)$

$$\begin{cases} x'=2x-3y & y'+z'=x' \\ y'=x-2y+z & Y=(y'+z',y',z')=(y',y')+ \\ z'=x-y-z & =(y',y',0)+(z',0,z') \end{cases}$$

$=y'\underbrace{(1,1,0)}_{V_1}+z'\underbrace{(1,0,1)}_{V_2}$

$Y=y'\ V_1+z'\ V_2$

donc $Im(\alpha)=Vect\{V_1,V_2\}$.

3) $\psi:\ \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$

$\quad P(X) \longmapsto \psi(P(X))=P'(X)$

Calculer $Im\psi$ *et* $Ker\varphi$.

Déterminer $Ker\psi$.

$Ker(\psi)=\{P\in R_n[X]\ \ \textit{tel que}\ \ \psi(P(x))=0\}$.

Soit $P(x)=a_o+a_1x_1+a_2x^2+...+a_nx^n\in Ker(\varphi)$

$\Longrightarrow \varphi(P(x))=0$

$\Longrightarrow P'(x)=0$

$\Longrightarrow a_1\ 1+2\ a_i\ X+...+n\ a_n\ x^{n-1}=0$

or $\{1,x,x^2,...,x^{n-1}\}$ *est libre*

$$\textit{donc}\begin{cases} a_1=0 \\ 2a_2=0 \\ \vdots \\ n\ a_{n-1}=0 \quad \Longleftrightarrow P(x)=a_o \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ker(\psi) & = \{P(x) \in \mathbb{R}_n[X] \ / \ P(x) = a_o = cte\} \\ & = \{\alpha \ / \ \alpha \in \mathbb{R}\}. \end{cases}$$

Déterminons $Im(\psi)$

$Im(\psi) = \{\psi(P(x)) \in \mathbb{R}_n[X]\}$

$$\begin{aligned} Soit\ Q \in Im(f).Ainsi\ \ Q &= \psi(P) = a_1 + 2a_2\ X + ... + a\ a_n\ X^{n-1} \\ &= a_1 + 2a_2X + ... + na_nX^{n-1} \end{aligned}$$

Ainsi $Im(\psi) = Vect\{1, x, x^2, ..., x^{n-1}\} = \mathbb{R}_{n-1}[X]$

Proposition 1.3.2 *Soit f une application linéaire de E dans F. Alors les assertions suivantes sont vérifiées :*

1. *L'image par f d'un système lié de E est un système lié de F.*
2. *Si A est un s-ev. de E, alors $f(A)$ est un s-ev de F.*
3. *Si $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$ est un système générateur d'un s-ev A alors l'image $\{f(U_1), ..., f(U_n)\}$ est un système générateur de $f(A)$.*

Preuve.

1. Soit $\{V_1, ..., V_n\}$ un système (liée) général lié de E.

   Donc il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}^n$ scalaires non tous nuls tel que $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + ... = \lambda_n V_n = O_E$. Ainsi $f(\lambda_1 V_1 + ... + \lambda_n V_n) = \lambda_1\ f(V_1) + ... + \lambda_n f(V_n) = O_F$. Il existe ainsi $\lambda_1, ..., \lambda_n$ non tous nuls tels que

   $$\lambda_1 f(V_1) + ... + \lambda_2 f(V_2) + ... + \lambda_n f(V_n) = O_F$$

   Donc $\{f(V_i), ..., f(V_n)\}$ est liée.

2. Soit A un s-ev de E

   $$f(A) = \{f(x)\ /\ x \in A\} = \{y \in F\ , \exists x \in A\ , y = f(x)\}$$

   Comme A est un s-ev de E donc A donc $O_E \in A$, ainsi $f(O_E) \in f(A)$. Donc $f(A)$ est non vide.

   Soit maintenant $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$ et $Y_1, Y_2 \in f(A)$.

$Y_1 \in f(A) \Longrightarrow \exists x_1 \in A$ tel $Y_1 = f(x_1)$

$Y_2 \in f(A) \Longrightarrow \exists x_2 \in A$ tel que $y_2 = f(x_2)$

$\alpha Y_1 + \alpha' Y_2 = \alpha f(x_1) + \alpha' f(x_2) = f(\alpha x_1 + \alpha' x_2)$.

Posons $x_3 = (\alpha x_1 + \alpha' x_2) \in A$. Ainsi $\alpha Y_1 + \alpha' Y_2 = f(x_3) \in f(A)$

D'où $f(A)$ est un s-ev de F.

3. Soit $A = Vect\{U_1, ..., U_n\}$

   Montrer que $f(A) = Vect\{f(U_1, ..., f(U_n)\}$

   Soit $Y \in f(A) \Longrightarrow \exists X \in A$ tel que $Y = f(X)$.

$$X \in A \Longrightarrow \exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K} \ tel \ que \ \ X = \alpha_1 U_1 + ... + \alpha_n U_n$$

$$f(X) = f(\alpha_1 U_1 + ... + \alpha_n U_n) = \alpha_1 f(U_1) + \alpha_2 (f(U_2) + ... + \alpha_n f(U_n)$$

$$Y = \alpha_1 f(U_1) + ... + \alpha_n f(U_n).$$

   Donc $f(A) = Vect\{f(U_n) + ... + f(U_n)\}$

Théorème 1.3.1 *Caractérisation des applications linéaires injectives*
Soit $f \in \alpha_{\mathbb{K}}(E, F)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *f est injective*
2. *$Ker(f) = \{O_E\}$*
3. *L'image par f d'un système libre de E est un système libre de F*

Preuve.

Montrer que $(1) \Longrightarrow (2)$

Soit X un élément de $Ker(f)$ donc $f(X) = 0$ où f est linéaire donc $f(O_E) = O_F$ on a

$$\begin{cases} f(X) = 0 \\ f(O_E) = \{O_F\} \end{cases} \Longrightarrow f(X) = f(O_E).$$

or f est injective donc $O_E = X$ d'où $Ker(f) = \{O_E\}$.

Montrer que $(2) \Longrightarrow (3)$

Soit $\{U_1, ..., U_n\}$ un système libre de E

Montrer que $\{f(U_1, ..., f(U_n)\}$ est un système libre de F.

Soit $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda_1 f(U_1) + \lambda_2 f(U_2) + ... + \lambda_n f(U_n) = 0$ où f est linéaire donc $f(\lambda_1 U_1 + ... + \lambda_n U_n) = O_F$.

Donc $(\lambda_1 U_1 + ... + \lambda_n U_n) \in Ker(f)$ or $(2) \Longrightarrow Ker(f) = 0$

d'où $\lambda_1 U_1 + ... + \lambda_n U_n = 0$.

Or $\{U_1, ..., U_n\}$ est libre donc $\lambda_1 = \lambda_2 .... = \lambda_n = O_{\mathbb{R}}$ d'où le système $\{f(U_1), ..., f(U_n)\}$ est libre.

Montrer que $(3) \Longrightarrow (1)$.

Supposons que l'image par f d'un système libre de E est un système libre de F.

Soient X, X' deux éléments de E tel que $f(X) = f(X')$.

Soit $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E ; $\exists \alpha_i \in \mathbb{K}\ i = 1, ..., n$

$$X = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$$
$$X' = \alpha'_1 e_1 + ... + \alpha'_n e_n$$

$f(X) = f(X') \Longleftrightarrow \alpha_1 f(e_1) + ... + \alpha_n f(e_n) = \alpha'_i f(e_1) + ... + \alpha'_n f(e_n)$

$$Ainsi\ \ (\alpha_1 - \alpha'_1) f(e_1) + (\alpha_n - \alpha'_n) f(e_2) + ... + (\alpha_n - \alpha'_n) f(e_n) = 0$$

or $f\{e_1), ..., f(e_n)\}$ est libre d'après (ii)) d'où

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha'_1 = 0 \\ \\ \vdots \\ \\ \alpha_n - \alpha'_n = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha'_1 \\ \alpha_2 = \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha_n = \alpha'_n \end{cases}$$

d'où $X = X'$ et par conséquent f est injective.

Exemple 1.3.2

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) &\longmapsto (2x, x + y, y - 2z, 3z + t) \end{aligned}$$

$$Ker(f) = \{X \in \mathbb{R}^4 \ / f(X) = O_{\mathbb{R}^4}\}$$

Soit $X = (x, y, z, t)$ *tel que* $f(X) = f(x, y, z, t) = 0_{\mathbb{R}^4}$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ x + y = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 3z + t = 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

d'où $X = O_{\mathbb{R}^4}$*, ainsi* $Ker(f) = \{O_{\mathbb{R}^4}\}$ *donc* f *est injective.*

Proposition 1.3.3 *(Détermination d'une application linéaire)*
Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$ *- ev,* $B = \{U_1, ..., U_n\}$ *une base de* E ; $\{U'_1, U'_2, ..., U'_n\}$ *un système de vecteur de* F*. Alors* $\exists$ *une application linéaire et une seule* $f : E \longrightarrow E$ *telle que*

$$f(U_1) = U'_1, f(U_2) = U'_2, ..., f(U_n) = U'_n$$

Remarque 1.3.2 *Une application linéaire est entièrement déterminée par la donnée des images des éléments d'une base de l'espace de départ.*

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que

$$f(1, 1, 1) = (2, 1) \ ; \ f(1, 0, 1) = (1, 2) \ ; \ f(1, 0, -1) = (3, 0).$$

Ces données définissent - elles une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$.

$$B = \{(1, 1, 1), \ (1, 0, 1) \ , \ (1, 0, -1)\}$$

Soit λ, γ, β tels que

$$\lambda(1, 1, 1) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(1, 0, -1) = 0(0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} \lambda + \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \\ \lambda + \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

B est libre de plus cette famille est constituée de 3 vecteurs, et que $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, d'où B est une base de $\mathbb{R}^3$. Par conséquent f est une application linéaire.

$$\begin{aligned} B = & \ \{U, V, W\} \\ X = & \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \\ & = aU + bV + cW \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(X) = & \ f(U) + bf(V) + cf(W) \\ & = a(2,1) + b(1,2) + c(3,0) \\ & = (2a + b + 3c, \ a + 2b) \end{aligned}$$

Comme X = AU + bV + cW = (x, y, z), on a

$$\begin{cases} x = a + b + c \\ y = a \\ z = a + b - c \end{cases} \qquad \begin{cases} b + c = x - y \\ b - c = z - y \end{cases} \qquad \Longrightarrow b = \frac{1}{2}(x + z - 2y)$$

$$\begin{cases} a = y \\ b = \frac{1}{2}(x - 2y + z) \\ c = x - y - \frac{1}{2}(x - 2y + z) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \begin{cases} a = y \\ b = \frac{1}{2}(x - 2y + z) \\ c = \frac{1}{2}(x - z) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (2y + \frac{1}{2}(x - 2y + z) + \frac{3}{2}(x - y), y + x - 2y + z) \\ &= (2x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, x - y + z) \end{aligned}$$

Théorème 1.3.2 *Soient* $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E, F)$ *et* $\{e_1, ..., e_n\}$ *une base de* E.
Alors les assertions suivantes sont vérifiées

1. f *est injective* $\Longleftrightarrow \{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ *est libre*
2. f *est surjective* $\Longleftrightarrow \{f(e_1, ..., f(e_n)\}$ *est un système générateur*
3. f *est bijective* $\Longleftrightarrow \{f(e_1, ..., f(e_n)\}$ *est une base de* F.

Preuve

(1) est déjà montré (voir caractérisation des applications linéaires injectives)

(2) Soit $Y \in F$ comme f est surjective donc $\exists X \in E$ tel que $f(X) = Y$, avec $X = \lambda_1 e_1, ..., +\lambda_n e_n$; $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$

$$f(X) = \lambda_1 f(e_1) + ... + \lambda_n f(e_n) \text{ car } f \text{ est linéaire}$$

d'où

$$Y = \lambda_1 f(e_1) + ... + \lambda_n f(e_n)$$

$\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ est un système générateur de F.

$\Leftarrow$) Supposons $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ un système générateur de F.
Soit $Y \in F \Longrightarrow Y \in Vect\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$, $\exists \lambda_i \in \mathbb{K}$ $i = 1, ..., n$ tel que

$$\begin{aligned} Y = \ & \lambda_1 f(e_1) + ... + \lambda_n f(e_n) \\ & = f(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n) \end{aligned}$$

Posons $Z = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n \in E$ donc $Y = f(Z)$ d'où $\exists Z \in E$ tel que $Y = f(Z)$ donc f est surjectif.

(3) Conséquence de (1) et (2).

Remarque 1.3.3 *Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ alors les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *f est injective*
2. *f est surjective*
3. *f est bijective*

Exemple 1.3.3

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (3x, x - 2y, \ x + y + z) \end{aligned}$$

f est linéaire donc f est un endomorphisme

$$\begin{aligned} & Ker(f) = \{X \in \mathbb{R}^3 \ \textit{ tel que } \ f(X) = 0\} \\ & X = (x, y, z) \in Ker(f), \\ & f(X) = f(x, y, z) = (3x, x - 2y, \ x + y + z) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ x - 2y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

d'où $X = (0,0,0)$ *donc* f *est injective.*

$$Ker(f) = \{O_{\mathbb{R}^3}\}.$$

Par conséquent f *est bijective.*