# Serie 5 : Nous avons l'intention d'utiliser la méthode de Gauss-Jordan tout le long de l'exercice ①

## Exercice 1

Considérons le $\mathbb{R}$-e.v $\mathbb{R}^4$, les systèmes de vecteurs suivants :

$S_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ et $S_2 = \{u_4, u_5\}$

$u_1 = (1,-1,0,1)$ ; $u_2 = (0,2,1,0)$ ; $u_3 = (0,6,-1,4)$

$u_4 = (3,3,1,5)$ et $u_5 = (-3,3,-2,-1)$

1°) Peut-on compléter $S_1$ et $S_2$ en des bases de $\mathbb{R}^4$ ?

1) $S_1$

a) A-t-on $S_1$ libre ?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1^{(1)} = L_1 \\ L_2^{(1)} = L_2 \\ L_3^{(1)} = L_3 - 3L_2 \end{array}$$

On a abouti à une forme échelonnée et aucune ligne n'est nulle. Donc $S_1$ est libre.

D'après le théorème de la base incomplète. On peut compléter $S_1$ en une base de $\mathbb{R}^4$.

b) Complétons $S_1$ en une base de $\mathbb{R}^4$ ?

Posons $S_1' = \{u_1, u_2, u_3, v_4\}$ avec $v_4 = (0,0,0,1)$

②

Comme $\dim(\mathbb{R}^4) = 4 = \text{card}(S'_1)$

$S'_1$ st une base de $\mathbb{R}^4 \Leftrightarrow S'_1$ est libre.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1^{(1)} = L_1 \\ L_2^{(1)} = L_2 \\ L_3^{(1)} = L_3 - 3L_2 \\ L_4^{(1)} = L_4 \end{matrix}$$

$S'_1$ st libre.

Donc $S'_1$ st une base de $\mathbb{R}^4$.

On a complété $S_1$ en une base de $\mathbb{R}^4$!

$S'_1$ st le complété de $S_1$.

ii) $S_2$ :

a) A-t-on $S_2$ libre ?

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 5 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1^{(1)} = L_1 \\ L_2^{(1)} = L_2 + L_1 \end{matrix}$$

$S_2$ st libre.

D'après le Théorème de la base incomplète on peut compléter $S_2$ en une base de $\mathbb{R}^4$.

b) Complétons $S_2$ en une base de $\mathbb{R}^4$ ? ③

Posons $S'_2 = \{V_1, V_2, U_3, U_4\}$ avec $V_1 = (0,0,1,0)$
et $V_2 = (0,0,0,1)$

Comme $\dim(\mathbb{R}^4) = 4 = \operatorname{card}(S'_2)$
$S'_2$ est une base ~~de~~ $\mathbb{R}^4 \iff S'_2$ est libre.

A-t-on $S'_2$ libre ?

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 5 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1^{(1)} = L_1 \\ L_2^{(1)} = L_2 + L_1 \\ L_3^{(1)} = L_3 \\ L_4^{(1)} = L_4 \end{matrix}$$

$S'_2$ est libre.
Donc $S'_2$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
On a complété $S_2$ en une base de $\mathbb{R}^4$.
$S'_2$ est le complété de $S_2$.

2°) Déterminons $E_1 + E_2$ et $E_1 \cap E_2$ ?

Pour déterminer ces s.e.v, nous allons d'abord calculer $E_1$ et $E_2$.

- $E_1$ : base et dimension :

Comme $E_1 = \text{Lin}(S_1) = \text{Vect}(S_1)$
donc $S_1$ est un système générateur de $E_1$.
Comme d'après 1°) $S_1$ est libre, donc $S_1$ est une base de $E_1$.

$$\dim(E_1) = \text{card}(S_1) = 3$$

- $E_2$ : base et dimension :

Comme $E_2 = \text{Lin}(S_2) = \text{Vect}(S_2)$
Donc $S_2$ est une famille génératrice de $E_2$
D'après 1°) $S_2$ est libre
Donc $S_2$ est une base de $E_2$ et $\dim(E_2) = \text{card}(S_2) = 2$

- $E_1 + E_2$ : base et dimension

On a $E_1 + E_2 = \text{Lin}(E_1 \cup E_2) = \text{Lin}(S_1 \cup S_2)$
Donc $S_1 \cup S_2$ est un système générateur de $E_1 + E_2$.

A-t-on $S_1 \cup S_2$ libre ?

$S_1 \cup S_2 = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1^{(1)} = L_1 \\ L_2^{(1)} = L_2 \\ L_3^{(1)} = L_3 \\ L_4^{(1)} = L_4 - 3L_1 \\ L_5^{(1)} = L_5 + L_4 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1^{(2)} = L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} = L_2^{(1)} \\ L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - 3L_2^{(1)} \\ L_4^{(2)} = L_4^{(1)} - L_3^{(1)} \\ L_5^{(2)} = L_5^{(1)} - L_3^{(1)} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1^{(3)} = L_1^{(2)} \\ L_2^{(3)} = L_2^{(2)} \\ L_3^{(3)} = L_3^{(2)} \\ L_4^{(3)} = 2L_4^{(2)} + L_3^{(2)} \\ L_5^{(3)} = L_5^{(2)} \end{array}$$

## Conséquences :

1) On a abouti à deux lignes nulles. Donc $S_1 \cup S_2$ est lié

2) $Rg(S_1 \cup S_2) = \dim(\mathrm{Lin}(S_1 \cup S_2))$ = nombre de lignes non nulles = 3

Donc $\dim(E_1 + E_2) = 3$

3) $\{L_1^{(3)}; L_2^{(3)}; L_3^{(3)}\}$ est une base de $\mathrm{Lin}(S_1 \cup S_2)$

Donc $\left\{L_1^{(3)} ; L_2^{(3)} ; L_3^{(3)}\right\}$ est une base de $E_1+E_2$.

- $E_1 \cap E_2$ : $\dim(E_1 \cap E_2)$ ; base de $E_1 \cap E_2$

Comme $\dim(E_1+E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)$

$$\dim(E_1 \cap E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1+E_2)$$
$$= 3 + 2 - 3 = 2$$

$$\dim(E_1 \cap E_2) = 2$$

Cherchons une base de $E_1 \cap E_2$ en utilisant les lignes nulles :

On a $\begin{cases} L_4^{(3)} = 0 \\ L_5^{(3)} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2L_4^{(2)} + L_3^{(2)} = 0 \\ L_5^{(2)} = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2\left(L_4^{(1)} - L_3^{(1)}\right) + \left(L_3^{(1)} - 3L_2^{(1)}\right) = 0 \\ L_5^{(1)} - L_3^{(1)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2L_4^{(1)} - L_3^{(1)} - 3L_2^{(1)} = 0 \\ L_5^{(1)} - L_3^{(1)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(L_4 - 3L_1) - L_3 - 3L_2 = 0 \\ L_5 + L_4 - L_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2L_4 - L_3 - 3L_2 - 6L_1 = 0 \\ L_5 + L_4 - L_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u_4 - u_3 - 3u_2 - 6u_1 = 0 \\ u_5 + u_4 - u_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2u_4 = 6u_1 + 3u_2 + u_3 \\ u_5 + u_4 = u_3 \end{cases}$$

Pour construire un élément de $E_1 \cap E_2$ on met les éléments de $E_1$ dans un membre et les éléments de $E_2$ dans l'autre membre

On a $6u_1 + 3u_2 + u_3 \in E_1$ et $2u_4 \in E_2$

Comme $2u_4 = 6u_1 + 3u_2 + u_3$

Donc $2u_4 \in E_1 \cap E_2$

De même on a $u_3 \in E_1$ et $u_4 + u_5 \in E_2$

Comme $u_5 + u_4 = u_3$,

Donc $u_3 \in E_1 \cap E_2$

Posons $S_3 = \{2u_4 ; u_3\}$

Comme $\dim(E_1 \cap E_2) = 2$

Comme $\dim(E_1 \cap E_2) = 2$

$S_3 = \{2U_4 ; U_3\}$ est une base $E_1 \cap E_2 \Leftrightarrow$ $S_3$ est libre.

A-t-on $S_3$ libre ?

$2U_4 = 2(3,3,1,5) = (6,6,2,10)$

$U_3 = (0,6,-1,4)$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 & 10 \\ 0 & 6 & -1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

Donc $S_3$ est libre.

D'où $S_3$ est une base de $E_1 \cap E_2$

Bonne Chance

Bon Courage