1ère ANNEE 2010-2011

PREPA - ESMI - ESIGELEC

# STRUCTURES ALGEBRIQUES

**EXERCICE I** :

Soit $G$ un ensemble muni d'une loi de composition interne associative notée $*$
On suppose qu'il existe dans $G$ un élément neutre à droite $e$ et que tout élément $x$ de $G$ admet un symétrique à droite $x'$ dans $G$.

1°) Montrer que $x'$ est aussi le symétrique de $x$ à gauche

2°) Montrer que $e$ est aussi l'élément neutre à gauche. Conclure.

**EXERCICE II** :

Soit $(G, \centerdot)$ un groupe et $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous - groupes de $G$.

1°) Montrer que $\bigcap_{i\in I} H_i$ est un sous - groupe de $G$

2°) Montrer par un contre - exemple que en général $\bigcup_{i\in I} H_i$ n'est pas un sous - groupe de $G$.

3°) Montrer que si $(H_i)_{i\in I}$ est une famille totalement ordonnée par l'inclusion, alors $\bigcup_{i\in I} H_i$ est un sous - groupe de $G$

4°) Montrer que $H_1 \cup H_2$ est un sous - groupe $G \Longleftrightarrow H_1 \subset H_2$ ou $H_2 \subset H_1$.

**EXERCICE III** :

Soit $(G, \centerdot)$ un groupe d'éléments neutre $e$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall x, y \in G (x \centerdot y)^n = x^n \centerdot y^n$ et on pose

$$G_1 = \{y \in G \ / y^n = e\}$$
$$G_2 = \{y^n \ / y \in G\}$$

Montrer que $G_1$ et $G_2$ sont des sous - groupes normaux de $G$.

**EXERCICE IV** :

Soit $(G, \centerdot)$ un groupe d'éléments neutre $e$. Montrer que les sous - ensembles suivants sont des sous - groupes de $G$.

1°) Le normalisateur $N(S)$ d'une partie non vide $S$ de $G$

$$N(S) = \left\{x \in G \ / x \centerdot S = S \centerdot x\right\}$$

2°) Le centre $Z(G)$ de $G : Z(G) = \{a \in G : a \centerdot x = x \centerdot a \;\; \forall x \in G\}$

3°) L'ensemble $H = a \centerdot G \centerdot a^{-1}$ avec $a \in G$.

**<u>EXERCICE V</u>** :

Soit $(G, \centerdot)$ un groupe tel que $\forall x \in G \;\; x^3 = e$ où $e$ est l'élément neutre de $G$.

Montrer que $\forall (x, y) \in G^2$

$$x^2 \centerdot y \centerdot x^2 = y^2 \centerdot x \centerdot y^2$$
$$(x \centerdot y)^2 = y^2 \centerdot x^2 \;;\;\; xy^2 \centerdot x = y \centerdot x^2 \centerdot y$$

**<u>EXERCICE VI</u>** :

Soit $(G, \centerdot)$ un groupe d'éléments neutre $e$. Montrer que si l'une des conditions suivantes est vérifiée alors $G$ est abélien

i) $\forall x, y \in G \quad (x \centerdot y)^2 = x^2 \centerdot y^2$

ii) $\forall x \in G \qquad x = x^{-1}$.

**<u>EXERCICE VII</u>** :

1°) Montrer que $\forall n, n \in \mathbb{Z}^*$

$$m \centerdot \mathbb{Z} + n \centerdot \mathbb{Z} = pgcd(m, n) \centerdot \mathbb{Z}$$

2°) En déduire le théorème de Bezout - Bachet.

Deux entiers $m$ et $n$ non nuls sont premiers entre eux si et seulement si il existe un couple $u, v$ d'entiers tels que $m \centerdot u + n \centerdot v = 1$.

3°) Soit $(G, \centerdot)$ un groupe cyclique à $m$ éléments, a un générateur de $G$.

i) Soit $k$ un élément de $\mathbb{N}^*$ et notons $d$ le pgcd de $m$ et $k$.

Montrer que $< a^k > = < a^d >$

ii) En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^* \;\; a^k$ est un générateur de $G$ si et seulement si $pgcd(m, k) = 1$

iii) Montrer que l'ordre du sous - groupe engendré par $a^k$ est $\dfrac{m}{d}$ où $d = pgcd(m, k)$

1ère ANNEE 2010-2011

PREPA - ESMI - ESIGELEC

# STRUCTURES ALGEBRIQUES

**EXERCICE I** :

On donne les applications de $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ dans $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ défini par :

$$f_1(x) = x \ ; \quad f_2(x) = \frac{1}{1-x} \ ; \quad f_3(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{x} \ ; \quad f_5(x) = 1-x \ ; \quad f_6(x) = \frac{x}{x-1}$$

1) En considérant pour la loi de composition des applications des applications $f_i \circ f_j$ ; $1 \leq i, j \leq 6$. Montrer ces 6 applications forment un groupe $G$. Ce groupe est - il commutatif ?

2) Déterminer tous les sous - groupes de $G$. Lesquels sont normaux ?

**EXERCICE II** :

Soient $(G, \centerdot)$ un groupe d'éléments neutre $e$ et $a \in G$.
On définit l'application

$$\begin{aligned} f_a : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto a \centerdot x \centerdot a^{-1} \end{aligned}$$

1) Montrer que $f$ est un automorphisme de $(G, \centerdot)$ (appelé automorphisme intérieur défini par $a \in G$)

2) On note $I = \{f_a, a \in G\}$

Montrer que $(I, 0)$ est un groupe où 0 est la loi de composition des applications de $G$ dans $G$.

3) Soit

$$\begin{aligned} h : G &\longrightarrow I \\ a &\longmapsto f_a \end{aligned}$$

Montrer que $h$ est un homomorphisme de groupes et $Ker(h)$ est le centre de $G$

1ère ANNEE 2010-2011

PREPA - ESMI - ESIGELEC

# STRUCTURES ALGEBRIQUES

**EXERCICE I** :

On considère la loi $*$ définie sur $]-c,c[(c>0)$ par

$$\forall x,y\in]-c,c[\quad x*y=\frac{x+y}{1+xy/c^2}.$$

Montrer $(]-c,c[,*)$ est un groupe.

**EXERCICE II** :

Soit $(G,\centerdot)$ un groupe d'élément neutre $e$, $H$ un sous - groupe de $G$ et $A$ une partie non vide de $G$.

On pose $AH=\{ah/a\in A,h\in H\}$. Montrer que $AH=H$ si et seulement si $A\subset H$.

**EXERCICE III**

Soit $(G,\centerdot)$ un groupe d'élément neutre $e$. On suppose qu'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall(x,y)\in G^2\ (x\centerdot y)^n=x^n\centerdot y^n$$

et on pose

$$H=\{y\in G\ /y^n=e\}$$

$$K=\{x^n\ /x\in G\}$$

Montrer que $H$ et $K$ sont des sous - groupes normaux de $G$.

**EXERCICE IV**

Soit $(G,\centerdot)$ un groupe d'élément neutre $e$ tel que $\forall x\in G\ \ x^3=e$.

1°) Comparer le carré d'un élément à son inverse

2°) Montrer que $\forall(x,y)\in G^2$

$$(x\centerdot y)^2=y^2\centerdot x^2\ ;\quad x\centerdot y^2\centerdot x=y\centerdot x^2\centerdot y$$

$$x^2\centerdot y\centerdot x^2=y^2\centerdot x\centerdot y^2.$$

1ère ANNEE 2010-2011

PREPA - ESMI - ESIGELEC

# ALGEBRE

**<u>EXERCICE I</u>** :

Pour chacune des permutations suivantes, déterminer sa décomposition canonique en produits de cycles disjoints, son ordre, sa signature, une décomposition en produit de transpositins et le nombre d'inversions.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 8 & 7 & 9 & 11 & 12 & 10 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

En déduire $\sigma_1^{45}$ $\sigma_2^{1432}$ $\sigma_3^{2011}$

**<u>EXERCICE II</u>** :

Dans $S_g$, on considère les permutations suivantes :

$$\pi = (1,2,3)(4,5,6)(7,8,9) \qquad \sigma = (4,5,6)(7,8,9)$$

$$\tau = (1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$$

1°) Vérifier que $\pi$ commute avec $\sigma$ et $\tau$?

2°) Quels sont les ordres de $\pi, \sigma, \tau$ et $\sigma \circ \tau$.

3°) Calculer $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ et $\tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau$.

En déduire que $\pi$ est une puissance de $\sigma \circ \tau$.

**<u>EXERCICE III</u>** :

Soit $n \geq 4 (n \in \mathbb{N})$. Pour $i, j, k, \ell$ distincts dans $\mathbb{N}^*$.

1°) Vérifier les relations suivantes

$$(i,j)(j,k) = (i,j,k)$$
$$(i;j)(k,\ell) = (i,j,k)(j,k,\ell)$$

2°) En déduire que le groupe alterné $S_n$ est engendré par :

a) l'ensemble des 3 - cycles de $S_n$

b) l'ensemble des 3 - cycles de la forme

$$(1,i,j) \ (2 \leq j \leq n) \ (2 \leq i \leq n)$$

c) l'ensemble des 3 - cycles $(1, 2, i)$ $((3 \leq i \leq n)$.

**EXERCICE IV** :

Soit $S_4$ le groupe des permutations de $E = \{1, 2, 3, 4\}$. On considère le 4 - cycle $C = (1, 2, 3, 4)$ et l'on note $t_{ij}$ la transposition $(i, j)$ pour $i \neq j$ et $(i, j) \in E^2$.

1°) Ecrire $C$ et $t_{1,4}$ sous forme de produits de transpositions de la forme $t_i, i + 1(1 \leq i \leq 4)$

2°) Calculer les puissances $t_{1,4}$ et $C$

3°) Exprimer $t_{i,i+1}$ $(1 \leq i \leq 4)$ en fonction de $C$ et $t_{1,4}$

4°) En déduire que $S_4$ est engendré par $C$ et $t_{1,4}$.

**EXERCICE V** :

Dans le groupe symétrique $S_4$. Vérifier que

$$H = \left\{ I_d, (1, 2)(3, 4) \right\}$$
$$K = \left\{ I_d, (1, 2)(3, 4); (1, 3)(2, 4); (1, 4)(2, 3) \right\}$$

sont des sous-groupes de $S_4$ et $H$ normal dans $K$ et $K$ est normal dans $A_4$. Mais que $H$ n'est pas normal dans $S_4$.