# Inverse Kinematics using QP

# 7자유도 KUKA 역기구학 QP 문제 공식화.

## 1. 기본 QP 형태.

$$\min_{q \in \mathbb{R}^7} \ \frac{1}{2} q^T H q + f^T q$$

subject to: $A_{eq}\, q = b_{eq}$ (Equality constraint)

$A_{ieq}\, q \le b_{ieq}$ (Inequality constraint)

(여기에서) $q \in \mathbb{R}^7$ : Joint Angle vector

$H \in \mathbb{R}^{7\times7}$ : Hessian matrix

$f \in \mathbb{R}^7$ : linear coefficient vector

$A_{eq} \in \mathbb{R}^{6\times7}$ : Equality constraint coefficient matrix.

$A_{ieq} \in \mathbb{R}^{m\times7}$ : Inequality constraint coefficient matrix.

## 2. 목적함수 설계

- option 1 : 관절각 변화 최소화

$\succeq 0 \Rightarrow$ convex.

$\Rightarrow$ $H = I$ (단위 행렬) , $f = -2q_0$

$\Rightarrow$ Object : $\min_{q \in \mathbb{R}^7} \|q - q_0\|^2$

- option 2 : 가중치 최적화

$\Rightarrow$ $H = W$ (가중치 행렬), $f = -2Wq_0$

$\Rightarrow$ object : $\min_{q \in \mathbb{R}^7} (q-q_0)^T W (q-q_0)$

- option3 : 특이점 회피 포함.

$\Rightarrow$ $H = W_1 + \kappa (J^T J)^{-1}$

$\Rightarrow$ $f = -2 W_1 q_0$

$\Rightarrow$ Total objective function

= 관절각 변화 최소화 + 특이점회피 + 조작성 최대화

$$\Rightarrow J(q) = \frac{1}{2}(q-q_0)^T W_1 (q-q_0) + \alpha * \text{singularity\_avoidance}(q) + \beta * \text{manipulability}(q)$$

※ option 3 상세!

[단계 1]: 기본 관절각 변화 최소화

$$\Rightarrow Term1 = \frac{1}{2}(q-q_0)^T W_1 (q-q_0) = \frac{1}{2} q^T W_1 q - q_0^T W_1 q + \frac{1}{2} q_0^T W_1 q_0$$

QP 형태로 변환

∘ $H_1 = W_1$ , $f_1 = -W_1 q_0$ , 상수항 무시!

[단계 2]: 특이점 회피 (Singularity Avoidance) → 특이점에서 멀어지도록 하는 항.

∘ 방법 A – 조작성 지수 기반

$$\Rightarrow singularity\_Avoidance = -\alpha \sqrt{\det(JJ^T)}$$

∘ 방법 B – 최소 특이값 기반

$$\Rightarrow singularity\_Avoidance = -\alpha * \sigma_{min}(J)^2$$

∘ 방법 C – 가중 최소자승 기반 (null space projection)

$$\Rightarrow singularity\_Avoidance = \alpha q^T (J^T J + \lambda I)^{-1} q$$

→ 정규화 항으로 수치적 안정성 보장!

$$\Rightarrow Term2 = \alpha q^T (J^T J + \lambda I)^{-1} q$$

→ 의 고유값이 작을때 (특이점 근처) 큰 페널티

⇒ QP 형태

∘ $H_2 = \alpha (J^T J + \lambda I)^{-1}$ , $f_2 = 0$

[단계 3]: 조작성 최대화 (Manipulability)

* 7자유도에서 조작성이 중요한 이유

① 중복 자유도의 활용

→ 같은 E.E. 위치에 무수히 많은 해 존재

→ 그 중 조작성이 높은 해 사용

② 작업 수행중 유연성 확보

→ 작업 중간에 장애물 회피 필요

→ 다음 작업으로의 전환

이 모든것이 조작성이 높은 자세에서 유리

조작성 지수 $\omega(q) = \sqrt{\det(JJ^T)}$ 를 최대화

Taylor 전개를 통한 선형화

$$\omega(q) \approx \omega(q_k) + \nabla\omega(q_k)^T(q - q_k)$$

조작성 최대화 $= -\beta\,\omega(q)$ 최소화

$$\text{Term3} = -\beta\left(\omega(q_k) + \nabla\omega(q_k)^T(q - q_k)\right)$$

$$= -\beta\,\nabla\omega(q_k)^T q + \text{상수항.}$$

여기에서 조작성 기울기:

$$\nabla\omega(q) = \nabla\left(\sqrt{\det(JJ^T)}\right) = \frac{1}{2}\,\omega(q)^{-1}\,\mathrm{trace}\left((JJ^T)^{-1}\,\nabla(JJ^T)\right)$$

$\Rightarrow$ QP 형태 : ∘ $H_3 = 0$ (2차항 없음), $f_3 = -\beta\nabla\omega(q_k)$

<최종결과>

Hessian matrix : $H = H_1 + H_2 + H_3 = \omega_1 + \alpha(J^TJ + \lambda I)^{-1} + 0$

Linear coefficient vector : $f = f_1 + f_2 + f_3 = -\omega_1 q_0 + 0 + (-\beta\nabla\omega(q_k))$

<파라미터 설정 가이드>

- $\omega_1$ : 관절별 가중치 ( 보통 Identity matrix or diagonal matrix )
- $\alpha$ : 특이점 회피 강도 ( 0.01 ~ 0.1 )
- $\beta$ : 조작성 최대화 강도 ( 0.001 ~ 0.01 )
- $\lambda$ : 정규화 파라미터 ( $1e^{-6} \sim 1e^{-4}$ )

↱ 비선형 QP를 위해 선형화

* 우리가 원하는 것 $f(q) = x_d$
  - → Taylor를 통한 선형화
  - → 현재 관절각 $q_k$ 근처에서 $f(q)$를 Taylor~
  - → $f(q) \approx f(q_k) + J(q_k)(q - q_k)$
  - * 여기에서 $J(q_k) = \left.\frac{\partial f}{\partial q}\right|_{q=q_k}$

## 3. 제약조건 설정

* 등식 제약조건 (E.E. 위치/자세)

$$A_{eq} = J(q_k), \quad b_{eq} = x_d - f(q_k) \Rightarrow \text{목표위치} - \text{현재위치}$$

* k번째 반복에서
  - ∘ $q_k$ : 현재 알고있는 관절각 (주어진 값)
  - ∘ $q$ : QP로 구하려는 새로운 관절각 (최적화 변수)

* 부등식 제약조건
  - ∘ 관절각 한계 : $q_{min} \le q \le q_{max}$
  - ∘ 관절속도 한계 : $\dot{q}_{min} \le \frac{q - q_k}{\Delta t} \le \dot{q}_{max}$
  - ∘ 관절 가속도 한계 : $\ddot{q}_{min} \le \frac{q - 2q_k + q_{k-1}}{\Delta t^2} \le \ddot{q}_{max}$

* But 나는 여기에서 manipulability 사용 X.