

高一数学总结

1.不等式

(1) 对数比较大小:

①单调性方法: $\log_A B = C \begin{cases} A > 1 \text{ 时, } B \text{ 越大, } N \text{ 越大} \\ 0 < A < 1 \text{ 时, } B \text{ 越大, } N \text{ 越小} \end{cases}$

(2) 不等式乘或除以一个数时, 先要判断正负号

(3) $|x| > 2 \rightarrow x > 2 \text{ 或 } x < -2$; $|x| < 2 \rightarrow -2 < x < 2$

(4) 在算出最后结果之前, 先要把二次项系数变为正

(5) 因式分解出来两个式子要带入**验算**后再进行下一步! (正负号问题)

(6) 求解集要用 $\{x| \dots (\text{区间})\}$ 表示, **并在写完后检查写的是否是要求的字母!** (圈出来)

(7) 求...的最大值, 先把要求的式子用原式里的字母代表(例: k), 后把字母(k)的取值范围用 Δ 求出来, 最后把两个极值代入计算, 得出要求的值。

注: k 的值必须在 Δ 的范围里

不要用完全平方确定, 要用 Δ 算出的值确定

(8) 不等式的解集若为 R 或 \emptyset , 则可以用 Δ 和图像法求解

(9) 基本不等式: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$; $a+b \geq 2\sqrt{ab}$; $a^2+b^2 \geq 2ab$ (a, b 也可以是分数)

进阶: $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$; $\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ (类推)

调和平均值 \leq 几何平均值 \leq 算数平均值 \leq 平方平均值 **【 $H \leq G \leq A \leq Q$ 】**

(10) 遇到 $|a|+|b|=|c|$ 求解集时, 需要使用三角不等式

(11) 幂的基本不等式最后的结果是 >1 , 不要写成 0

(12) 遇到绝对值的加减就可以用三角不等式 **【成立条件: $|a|=|b|$ 或 $a^2=b^2$ 】**

(13) 基本不等式的符号不要写错 (如有负号, 则要把 \geq 变成 \leq)

(14) 要求的代数式里出现 3 个字母, 则要想办法化简成 2 个字母的代数式, 再用基本不等式求解

(15) 基本不等式代入代数式的时候要注意等号成立条件

(16) 特别注意是否有齐次式的特征

2.集合

(1) 所有关于集合的问题都要考虑 \emptyset !!!

(2) 集合需要**检验**, 分类讨论

(3) 集合需注意表示方法 (列举, 描述, 区间)

(4) \emptyset 的情况需要讨论, 但要注意要符合条件

(5) 证明“不一定”需要举出反例

(6) **命题一定是小范围推大范围!**

(7) \emptyset 是任何非空子集的真子集

(8) $x \neq 1$ 且 $x \neq 2 \Rightarrow x \neq 1$; $x \neq 1 \nRightarrow x \neq 1$ 且 $x \neq 2$

- (9) 元素要用 \in ，集合才能用 \subseteq
- (10) 两个不同的元素之间不能用 \cap/\cup ，元素和集合放在一起，元素要加上 $\{ \}$
如： $\{(x,y)|0\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 1\}$, $A\cap B=[-7,4]\cup\{7\}$
- (11) 证明 a 和 b 条件间的关系：充分性，必要性
证明集合的包含关系： $\forall x\in\cdots, \exists y\in\cdots$
- (12) 任取 x_1 ，都有 x_2 ： x_1 为小范围， x_2 为大范围

3.三角比

- (1) 较繁琐的三角比，先用默认的公式化成最简单的式子，再代入数字
- (2) 齐次型式子解法：①若为分数，则上下同时除以一个数，再化简；
②若为二次项式子，则同时除以 1 ($\sin^2 a + \cos^2 a$)
- ★ (3) 通过题目给定的条件，判断角的终边所在的位置，再确定正负值
- (4) 在单位圆中， $P(\cos a, \sin a)$, $x=\cos a$, $y=\sin a$
- (5) 奇变偶不变，符号看象限（符号看变之前的那个）
注：符号的正负是前后两个数的符号关系，相同则为+，不同则为一
- (6) 已知三角比求角度时，先看是否有具体范围 ($a < x < b$ /锐角/钝角)，无具体范围要加上 $2k\pi$
注：角 a 为第 x 象限角不是范围，也要加上 $2k\pi$
- (7) \sec 常用公式： $\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$
- ★ (8) 若 $\sin x = \sin \alpha$ ，则 $x = 2k\pi + \alpha$ 或 $x = 2k\pi + \pi - \alpha$ ($k \in Z$)
若 $\cos x = \cos \alpha$ ，则 $x = 2k\pi \pm \alpha$ ($k \in Z$)
若 $\tan x = \tan \alpha$ ，则 $x = k\pi + \alpha$ ($k \in Z$)
- (9) 三角函数的区间永远是逆时针（向+的方向）转动
- (10) 如果一个角的范围在题目中是用弧度制表示，则最后的答案也要用弧度制表示

4.基础概念问题

- (1) a 的质因数=不包括 1 和 a 本身的其他因数
- (2) x （自变量）在指数上的叫指数函数； x （自变量）在底数上的叫幂函数（不要搞错!）

5.反函数

- (1) 存在反函数 \rightarrow 函数值一一对应，也就是单调递增/递减【天天练 60/7】

6.函数单调性、奇偶性

- (1) 可以通过函数单调性求出函数的根
- (2) 复合函数单调性：同增异减 【特别容易错，注意!!!】
- (3) 函数奇偶性类题目的最好方法就是用定义
- (4) 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增/减 \neq 函数 $f(x)$ 的单调区间为 $[a,b]$
区别：单调区间 $[a,b]$ \rightarrow 指单调区间的最大范围是 $[a,b]$ ；
在 $[a,b]$ 上单调 \rightarrow 指 $[a,b]$ 是单调区间的子集
- (5) $y=f(x)$ 为非奇非偶函数时，要通过举反例验证

(6) 偶函数的比大小：绝对值

7. 函数存在根问题、值域问题

(1) 求函数在定义域上有解 \leftrightarrow 求函数在定义域上的值域

(2) 常用方法：分离变量

(3) $y = \lg f(x)$ 值域为 $R \rightarrow y = f(x)$ 取尽一切正数 ($f(x)$ 为二次函数, 且 $a > 0, \Delta \geq 0$)

8. 二次函数问题

(1) 二次函数根的分布:

① 根在相同区间内: 讨论 3 种情况 (Δ , 对称轴, 端点)

② 根在不同区间内: 讨论 1 种情况 (端点)

9. 函数变换问题

(1) $\begin{cases} \text{函数关于 } x \text{ 轴对称} \rightarrow y = -f(x) \\ \text{函数关于 } y \text{ 轴对称} \rightarrow y = f(-x) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y = f(x) \rightarrow y = |f(x)|: \text{下翻上} \\ y = f(x) \rightarrow y = f(|x|): \text{左边擦除, 右边翻左边} \end{cases}$

10. 复合函数问题

(1) 两句话: $\begin{cases} \text{① 定义域永远是 } x \text{ 的范围} \\ \text{② } () \text{ 里的范围都相同} \end{cases}$

(2) $f(x)$ 和 $g(x)$ 构成复合函数:

$f(x)$	$g(x)$	$f(x)+g(x)$	$f(x)-g(x)$	$f(x) \cdot g(x)$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$f(g(x))$	$g(f(x))$
偶	偶	偶	偶	偶	偶	偶	偶
偶	奇	非奇非偶	非奇非偶	奇	奇	偶	偶
奇	偶	非奇非偶	非奇非偶	奇	奇	偶	偶
奇	奇	奇	奇	偶	偶	奇	奇

11. 抽象函数

(1) $f(x)$ 为周期函数类问题:

见到 $f(x+a) = \pm f(x)$, 就可以变成 $f(x+2a) = \pm f(x+a) = \pm f(x)$, 周期为 $2a$

★例: $f(x+4) = -f(x) \rightarrow f(x+8) = -f(x+4) = f(x)$, 说明周期为 8

12. 三角公式

(1) 遇到从 \sin 推 \cos , 或使用半角公式时, 需要注意正负号。

- 判断方法：①是否有三角形条件 ②通过已知角的范围判断角的象限
- (2) \tan/\cot 可能会有不存在的情况，如出现不存在的情况，也要写出来。
- (3) \tan 半角公式记忆方法：“上山一家哭 ($\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$)，下山一姐哭 ($\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$)”
- (4) 降幂公式： $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$
- (5) 半角公式化简： $\sqrt{1 - \cos \alpha} = \sqrt{2} \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|$, $\sqrt{1 + \cos \alpha} = \sqrt{2} \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|$;
 $\sqrt{1 + \sin \alpha} = \left| \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right|$, $\sqrt{1 - \sin \alpha} = \left| \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right|$ 看到 $\tan \alpha / \cot \alpha$, 尽量都化为 $\sin \alpha / \cos \alpha$ 再计算
 (切化弦)
- (7) $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 大小分界线：一、三象限角平分线
 $\sin \alpha + \cos \alpha$ 大小分界线：二、四象限角平分线
- (8) 若算出 α 角的范围为 $(0, 2\pi)$, 则 α 所在象限为一、二象限以及 y 轴正半轴
- (9) 齐次式化简：①分式：上下同时除以 $\sin \alpha / \cos \alpha$ ②最高次为二次：除以 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha (=1)$
- (10) 给出三角形的一个角的三角比，先要判断角是钝角还是锐角（特别是给角的 \sin 值的时候）

13. 正弦函数、余弦函数、正切函数

- (1) 所有函数求值域都要化成单项式，否则会放大范围
- (2) 函数如 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + B$ 的值域： $[-A+B, A+B]$
- (3) 求函数最值要让 $\omega x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ (求最大值) 或 $\omega x + \varphi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ (求最小值)
- 【换元思想】
- (4) 正切函数没有对称轴，但有两个对称中心
- (5) 三角函数变换：
 ①横坐标平移变换，只发生在 x 上
 ②纵坐标变换，整个式子都要乘以 a
 ③若将横坐标变为 m 倍，则只需要变 x , 后面的 ϕ 不用变
- (6) 在一个范围内只有 n 个交点，求 ω 的取值范围：先写出 x 的通式，再写出临界的 2 个 k 的范围，将其代入后，一个式子 $>/\geq$ 临界值，一个式子 $</\leq$ 临界值
- (7) 特别注意 $\tan \alpha$ 的对称中心有 2 个，可以统一归纳为 $(\frac{k\pi}{2}, 0)$, 且无对称轴
- (8) 三角比的周期中出现 k , 则要加上 $k \in \mathbb{Z}$ 且 $k \neq 0$
- (9) 尽量不要拆已知角，计算未知角可以通过已知角和常用角的三角比来计算
- (10) 遇上 $\sin x + \cos x + \sin x \cos x$ 的式子可以设 $t = \sin x + \cos x$ 并换元
- (11) 注意求三角函数解时是否对 x 有范围限制
- (12) 注意通过坐标求三角比时，要注意字母是否有大小要求
- (13) 求函数一定要注意定义域，有些题目里不一定是 \mathbb{R}
- (14) 一定要看清 $\sin/\cos/\tan!!!$
- (15) 在区间内找交点可以通过画图来解决

14.解三角形

- (1) 已知钝角/锐角三角形和两边，求第三边长度的范围，则需要列出 3 个式子，注意也要有已知量和未知量的平方的和（易漏）
- (2) 海伦公式： $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$
- (3) $\arcsinx/\arccosx/\arctanx$ 后都只能接 $x>0$ 的数
- (4) 求角平分线的长：余弦定理（角化成边， \cos 值相等）+角平分线定理
- (5) 求中线的长：将一个角的 \cos 值通过大、小两个三角形计算，最后的值相等
- (6) $\sin A = \sin B \leftrightarrow A = B$; $\sin 2A = \sin 2B \leftrightarrow A = B$ 或 $A + B = \frac{\pi}{2}$
- (7) $\cos A = \cos B \leftrightarrow A = B$; $\cos 2A = \cos 2B \leftrightarrow A = B$
- (8) $a > b \leftrightarrow A > B$ （充要条件）
- (9) $\sin x = a \leftrightarrow x = 2k\pi + \arcsin a$ 或 $x = 2k\pi + \pi - \arcsin a$
 $\cos x = a \leftrightarrow x = 2k\pi \pm \arccos a$
 $\tan x = a \leftrightarrow x = k\pi + \arctan a$ ($a > 0$)
- (10) $\sin x = -a \leftrightarrow x = 2k\pi - \arcsin a$ 或 $x = 2k\pi + \pi - \arcsin a$
 $\cos x = -a \leftrightarrow x = 2k\pi + \pi \pm \arccos a$
 $\tan x = -a \leftrightarrow x = k\pi - \arctan a$ ($a > 0$)
- (11) A 为锐角时：
① $a < b \sin A \rightarrow$ 无解
② $a = b \sin A \rightarrow 1$ 解
③ $b \sin A < a < b \rightarrow 2$ 解
④ $a \geq b \rightarrow 1$ 解
- (12) 三角大题的式子化简都可以采用边化角、角化边的方法
- (13) 三角面积公式有 $\frac{1}{2}$ ，余弦公式有 2，向量公式无系数
- (14) 三角比相除时，要注意分母 $\neq 0$ （特殊情况要考虑，但不要想太多）
- (15) 边化三角比很难，可以尝试三角比化边

15.向量

- (1) 向量的数量积的公式不要和解三角形的公式混在一起了，有的有系数，有的系数为 1
- (2) $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$, $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \leftrightarrow |\vec{a}\vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}|$, $|\vec{a}\vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$
- (3) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 为锐角/钝角，需要两个向量的数量积 $> 0 / < 0$ ，且两向量不平行
- (4) 三角不等式在向量中也适用
- (5) 向量的平方等于向量的模的平方
- (6) 向量中没有乘法交换律
- (7) 向量垂直是 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ ，向量平行是 $x_1y_2 = x_2y_1$ ，**注意不要乘错！**
- (8) 向量 a 在向量 b 上的投影/数量投影要分清
- (9) 2 个根号相加/相减求最值：
① 根号里有平方且可以分解为两个平方相加：认为一个根号是向量的长度，写出终点坐标后计算
② 根号里屋平方：当成 $x_1x_2 + y_1y_2$ 的形式后计算

(10) 等比分点坐标公式: $P\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{\lambda+1}, \frac{y_1+\lambda y_2}{\lambda+1}\right)$ (该公式只能在 $\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{PP_2}$ 时才能使用)

(11) 三角形面积坐标公式: $S = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$

(12) 重心坐标公式: $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

(13) $\overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{OC}^2 \rightarrow O$ 为外心 $\rightarrow \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|^2$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \rightarrow O$ 为重心

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} \rightarrow O$ 为垂心

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right) \rightarrow O$ 为内心

(如果乘或除了 \sin/\cos , 则可以通过正弦定理/同长度的边化成一个 λ)

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \rightarrow D$ 为中点

(14) 在三角形 ABC 中, 当 D 为 BC 边中点时, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}^2 - \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}^2$ (极化恒等式) 【见下图】

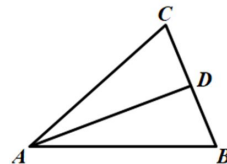
在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 的中点:

(15) $\lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ 且 $\lambda + \mu = 1 \Leftrightarrow A, B, C$ 三点共线

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{BD}|^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{CD}|^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 - \frac{1}{4} |\overrightarrow{BC}|^2.$$

(16) $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}|$, $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$

(17) $\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} - \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \Rightarrow$ 角平分线



16. 复数

(1) 在设 $z = a + bi$ 时, 一定要加上 $(a, b \in \mathbb{R})$

(2) $i^m = i$ ($m = 4k + 1$); -1 ($m = 4k + 2$); $-i$ ($m = 4k + 3$); 1 ($m = 4k + 4$) ($k \in \mathbb{Z}$)

(3) 复数系数的一元二次方程又有实根 \Leftrightarrow 拆开后虚部 ($\text{Im} z$) = 0

(4) $|z_1| + |z_2| \neq |z_1 + z_2|$, $|z_1|^2 \neq z_1^2$

(5) $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$, $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (向量中的三角不等式)

(6) $|z| = 1 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow z = \cos \theta + i \sin \theta$

$|z| = r \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = r^2 \Leftrightarrow z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

(7) z 为纯虚数 $\Leftrightarrow z^2 < 0$

(8) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ (平行四边形对角线平方和等于各边平方和)

(9) 只有实数可以比较大小

(10) 在实系数一元二次方程中, 若 $\Delta < 0$, 则:

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{-\Delta}}{|a|}; \quad x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot \bar{x}_1 = |x_1|^2; \quad |x_1| = |x_2| = \sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

(11) 在实系数一元二次方程中, 韦达定理仍然成立, $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{|a|}$

(12) 在一个含参方程中, 已知两根的模的和, 求参数的值

方法:

例: 已知 $x^2 + 4x + m = 0$, $|x_1| + |x_2| = 2$, 求 m

① 求出 Δ , 并分成两种情况讨论 ($\Delta \geq 0$; $\Delta < 0$)

② 在第 1 中情况中, 分成两根同号和两根异号两种情况讨论 (一般以 0 为分界线)

(1) 两根同号: $|x_1| + |x_2| = |x_1 + x_2|$, 通过 $-\frac{b}{a}$ 验证其是否正确

(2) 两根异号: $|x_1| + |x_2| = |x_1 - x_2|$, 通过 $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ 验证其是否正确

③ 在第 2 中情况中, $\because |x_1| + |x_2| = 2, \therefore |x_1| = |x_2| = 1$,

$\therefore x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot \overline{x_1} = |x_1|^2 = 1$, 并通过 $\frac{c}{a}$ 验证其是否正确

④ 最后写综上, 并且带上 m 对应的取值范围

(13) 在复数的三角形式中, $r, \sin \theta, \cos \theta$ 前均为正号, 有符号要化入

(14) $z_1 z_2 = rs[\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)]$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{s}[\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)]$

(15) 复数在复平面上的旋转和缩放: 逆时针为 $+\theta$, 顺时针为 $-\theta$, 缩放到 a 倍为乘以 a

(16) 复数的开根: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right), k \in \mathbb{Z}$

(17) 开 n 次根号就有 n 个值

(18) 当括号内可以提出某个带变量的式子后可以化成复数的三角形式, 则 **要讨论正负**

(19) $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{|a|}$ 适用于所有一元二次方程

17. 等差数列 (AP)

(1) $a_n = a_1 + (n - 1)d$ $a_n = a_m + (n - m)d$

(2) 若 $\{a_n\}$ 是以 d 为公差的 AP, 则 $a_p, a_{p+q}, a_{p+2q}, \dots, a_{p+nq}$ 为 AP, 公差 $d' = qd$

(3) $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$

(4) $S_{2n-1} = (2n - 1)a_n$

(5) AP 中的片段和: $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 为 AP, 公差 $d' = n^2 d$ ($S_n \neq 0$)

(6) $a_n = \begin{cases} S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \\ S_1, n = 1 \end{cases}$ (已知 S_n , 求 a_n 的通项公式) (S_1 易漏)

(7) $\{a_n\}$ 为 AP $\Leftrightarrow S_n = an^2 + bn$ (找对称轴求最值)

若 $S_n = an^2 + bn + c$, 则 $\{a_n\}$ 为从第二项起成 AP 的数列

(8) 使用 $S_{\text{奇}}$, $S_{\text{偶}}$ 的求值问题

① 项数为 $2n-1$ 项: $S_{\text{奇}} = n \cdot a_n$, $S_{\text{偶}} = (n-1) \cdot a_n$

② 项数为 $2n$ 项: $S_{\text{奇}} = n \cdot a_n$, $S_{\text{偶}} = n \cdot a_{n+1}$

(9) 在 AP $\{a_n\}$ 中, $m+n=p+q$, 则 $a_m + a_n = a_p + a_q$

(10) 在 AP $\{a_n\}$ 和 AP $\{b_n\}$ 中, $\frac{a_n}{b_n} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$

(11) 在 AP $\{a_n\}$ 中, $2a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$

18. 等比数列 (GP)

- (1) 在等比数列中, 任意一项都不为 0, 公比 q 不为 0
- (2) a, b, c 成 GP $\Rightarrow b^2 = ac$ (右推左反例: $b=0$)
- (3) a, b, c 成 GP, 则 a, b, c 的等比中项为 $\pm\sqrt{ac}$ (2 解)
- (4) 在 GP $\{a_n\}$ 中, $m+n=p+q$, 则 $a_m a_n = a_p a_q$
- (5) 若 $\{a_n\}$ 是以 q 为公比的 GP, 则 $a_p, a_{p+m}, a_{p+2m}, \dots, a_{p+nm}$ 为 GP, 公比 $q'=q^m$
- (6) GP 中的片段和: $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 为 GP, 公比 $q'=q^n$ ($S_n \neq 0$)
- (7) $S_n = \begin{cases} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1 \\ na_1, & q = 1 \end{cases} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$, 求和要分清项数
- (8) $\{a_n\}$ 为 GP $\Leftrightarrow a_n = cq^n \Leftrightarrow S_n = A - Aq^n$
- (9) $\{a_n\}$ 同时为 AP 和 GP $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 为非零常数列
- (10) 在 GP $\{a_n\}$ 中, $a_n^2 = a_{n+1} a_{n-1}$

19. 无穷等比数列的各项之和

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{i=0}^{+\infty} aq^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}$
- (2) q 的范围: $(-1, 0) \cup (0, 1)$, 需要关注 q 是否可以不为 0
- (3) 没有明显的等比数列时要先设项, 并证明其为等比数列
- (4) 注意设的量和要求的量之间 q 的关系, 不要把两个 q 弄错

20. 数列的概念

- (1) 并不是所有的数列都有通项公式
- (2) 求数列最大值的方法: 函数的图像/函数的单调性 (先看图像, 若图像不是常规图像, 则要用单调性)
- (3) 可以把通项公式化为带常规函数的式子后求最值
- (4) 已知递推公式求通项公式:
 - ① $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 用累加法求;
 - ② $a_{n+1} = a_n \times f(n)$ 用累乘法求;
 - ③ $a_1 = a, a_{n+1} = ka_n + b$ 用构造法求, 两边同时加上 $\frac{b}{k-1}$;
 - ④ $a_1 = 2, a_n - a_{n+1} = 2a_n a_{n+1}$ 两边同时除以 $a_n a_{n+1}$, 得到 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 为等差数列;
 - ⑤ 一边有平方: 取 \log 后成为等差数列/等比数列
 - ⑥ $a_{n+1} = ka_n + q^n$ 两边同时除以 q^{n+1}
- (5) 一定要讨论 a_1 是否满足题意, 在简答题里一定要有这一步!!!
- (6) $a_n = (-1)^n (An + B) \Rightarrow$ 两两相加后求和
 $a_n = (An + B)q^n \Rightarrow$ 错位相减
- (7) 一定要验证 a_1 是否符合数列的通项公式, 无论是否符合都要
- (8) 求数列通项并使用“退一步, 减一减”法时, 一定最后减出来/开始计算/结束计算的项要为 a_n , 否则会有 n 的范围问题
- (9) 给出两个片段和, 可以通过相减的方法求出公差