Corrigé contrôle final-PRST1

Exercice1 : (4pts) Soit l'espace probabilisé $(\Omega, \Lambda, \mathrm{P})$.

Les quatre parties de cet exercice sont indépendantes.

A). Soit A et B deux évènements aléatoires tels que $\mathrm{P}(A) = \frac{2}{3}$ et $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$.

i) les évènements A et B peuvent-ils être incompatibles ?

ii) l'un des deux évènements peut-il impliquer l'autre ? Si oui, lequel ?

i) $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \frac{7}{6} > 1$, *les évènement* A et B *ne sont pas incompatibles car*

$\mathrm{P}(A \cup B) \neq \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$ *0,5pts*

ii) Comme $\mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(B)$ *il est possible que l'évènement* B *soit inclus dans l'évènement* A *, donc* B *peut impliquer* A *, mais il est impossible que* A *implique* B *.* *0,5pts*

B). Soit A et B deux évènements aléatoires, montrer que les évènements A, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cup B}$ forment un système complet d'évènements de Ω.

Les évènements A, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cup B}$ *forment un système complet d'évènement de* Ω *car :*

- A, $\overline{A} \cap B$ et $\overline{A \cup B}$ sont deux à deux incompatibles car :

$$\begin{cases} A \cap (\overline{A} \cap B) = (A \cap \overline{A}) \cap B = \phi \cap B = \phi \\ A \cap (\overline{A \cup B}) = A \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{A}) \cap \overline{B} = \phi \cap \overline{B} = \phi \\ (\overline{A} \cap B) \cap (\overline{A \cup B}) = (\overline{A} \cap B) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = (\overline{A} \cap A) \cap (B \cap \overline{B}) = \phi \cap \phi = \phi \end{cases}$$ *0,5pts*

- *Et on a :*

$$\begin{aligned} A \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A \cup B}) &= A \cup \left((\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})\right) = A \cup \left(\overline{A} \cap (B \cup \overline{B})\right) \\ &= A \cup \left(\overline{A} \cap \Omega)\right) = A \cup \overline{A} = \Omega \end{aligned}$$ *0,5pts*

C). Soit A, B et C trois évènements aléatoires indépendants, prouver que : $A - B$ et C sont indépendants ?

On montre que $\mathrm{P}((A-B) \cap C) = \mathrm{P}(A-B) \times \mathrm{P}(C)$. *0,5pts*

Puisqu'on a : $A - B = A \cap \overline{B}$ *et on sait que si* A, B *et* C *sont indépendants alors* A, $\overline{B}$ *et* C *le sont aussi. On aura :*

$$\begin{aligned} \mathrm{P}((A-B) \cap C) &= \mathrm{P}(A \cap \overline{B}) \cap C) \\ &= \mathrm{P}(A \cap \overline{B} \cap C) \\ &= \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(\overline{B}) \times \mathrm{P}(C) \quad \text{car } A, \overline{B}, C \text{ sont indépendants} \\ &= \mathrm{P}(A \cap \overline{B}) \times \mathrm{P}(C) \quad \text{car } A \text{ et } \overline{B} \text{ sont indépendants} \\ &= \mathrm{P}(A-B) \times \mathrm{P}(C). \end{aligned}$$

D). A un évènement aléatoire de probabilité égale à 1 (ce n'est pas nécessairement Ω).

Montrer que $\forall B \in \Lambda$,

i) $P(B-A)=0$. ii) $P(A\cup B)=1$. iii) $P(A\cap B)=P(B)$.

i) $B-A=B\cap\overline{A}\subset\overline{A}$ *d'où* $0\le P(B-A)\le P(\overline{A})=1-P(A)=0$ *d'où* $P(A-B)=0$ ...*0,5pts*
ii) Puisque $A\subset A\cup B$ *alors* $1=P(A)\le P(A\cup B)\le 1$ *d'où* $P(A\cup B)=1$ *0,5pts*
iii) Comme $B=B\cap\Omega=B\cap(A\cup\overline{A})=(B\cap A)\cup(B\cap\overline{A})$ avec $B\cap\overline{A}$ *et* $B\cap A$ *sont incompatibles, on aura :*
$P(B)=P[(B\cap A)\cup(B\cap\overline{A})]$
$=P(B\cap\overline{A})+P(B\cap A)$ *or* $P(B\cap\overline{A})=0$ *d'aprés (i)* *0,5pts*
$=P(A\cap B)$

Exercice2 : (8pts)

Soit la fonction f définie par: $f(x)=\dfrac{x^2}{9}.I_{]0,3[}(x)$.

a) Montrer que f est une densité de probabilité d'une v.a.continue qu'on notera X et déterminer sa fonction de répartition F_X .

a)

- f *est bien une densité de probabilité dune v.a.continue* X *car :*
  - f *est positive.* *0,25*
  - f *est continue sur* $IR-\underbrace{\{3\}}_{\substack{ensble\\fini}}$ *et on a :* $\lim\limits_{\xrightarrow{>}3} f=0$ *et* $\lim\limits_{\xrightarrow{<}3} f=1$ *existent*. *0,25*
  - $\int\limits_{IR} f(x)dx=\frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3=\frac{27}{27}=1$ *0,5*
- *Soit* F_X *sa fonction de répartition :* $\forall x\in IR,\ F_X(x)=P(X\le x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.
  - *Si* $x<0$, $F_X(x)=0$ *0,25*
  - *Si* $0\le x<3$, $F_X(x)=\int\limits_0^x t^2dt=\frac{x^3}{2è}$ *0,25*
  - *Si* $x\ge 3$, $F_X(x)=0+\int\limits_0^3 t^2dt+0=1$ *0,5*

b) Calculer la variance de la v.a $\frac{1}{X}$.

b) $V(\frac{1}{X})=E(\frac{1}{X^2})-(E(\frac{1}{X}))^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ *car* *0,25*
$E(\frac{1}{X})=\int\limits_{IR}\frac{1}{x}f_X(x)dx=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}$ *et* $E(\frac{1}{X^2})=\int\limits_{IR}\frac{1}{x^2}f_X(x)dx=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ . ... *0,5*+ *0,25*

c) On définie la v.a.r. $Y=[X]$ où $[.]$designe la partie entière. Calculer :

I. La loi de probabilité de Y, sa fonction de répartition F_Y, son espérance et sa variance.

a)

- *La loi de probabilité de* Y :
  - $Y(\Omega)=\{0,1,2\}$ 0,25

    et on a : (puisque $P(X<x)=P(X\le x)=F_X(x)$ *car* X *est continue)*
  - $P_Y(0)=P(Y=0)=P(X<1)=F_X(1)=\frac{1}{27}$ 0,25
  - $P_Y(1)=P(Y=1)=P(1\le X<2)=F_X(2)-F_X(1)=\frac{8}{27}-\frac{1}{27}=\frac{7}{27}$ 0,25
  - $P_Y(2)=(1-P_Y(0)-P_Y(1))$ *ou* $P(2\le X<3)=F_X(3)-F_X(2)=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$ 0,25

On résume par le tableau suivant :

y	0	1	2	$\sum$
$P_Y(y)$	$1/27$	$7/27$	$19/27$	1

- F_Y *sa fonction de répartition* : $\forall y\in IR,\quad F_Y(y)=P(Y\le y)$.
  - *Si* $y<0$, $F_Y(y)=0$ 0,25
  - *Si* $0\le y<1$, $F_Y(y)=P_Y(0)=\frac{1}{27}$ 0,25
  - *Si* $1\le y<2$, $F_Y(y)=P_Y(0)+P_Y(1)=\frac{8}{27}$ 0,25
  - *Si* $y\ge 2$, $F_Y(y)=P_Y(0)+P_Y(1)+P_Y(2)=1$ 0,25
- $E(Y)=0\times(1/27)+1\times(7/27)+2\times(\frac{19}{27})=45/27$ 0,5
- $E(Y^2)=0^2\times(1/27)+1^2\times(7/27)+2^2\times(\frac{19}{27})=83/27$ *d'où* $V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=$.
  0,25 0,25

II. La fonction génératrice des moments G_Y de Y .

$$\forall t\in IR, G_Y(t)=E(e^{t.Y})=\sum_{y=0}^{2}e^{t.y}P_Y(y)=e^{0.t}\,\tfrac{1}{27}+e^{1.t}\,\tfrac{7}{27}+e^{2.t}\,\tfrac{19}{27}=\tfrac{1}{27}\left(1+7e^{t}+19e^{2.t}\right)$$ 1pt

III. Donner le moment non centré d'ordre1, le moment non centré d'ordre2, le moment centré d'ordre1 et le moment centré d'ordre2 de Y .

Le moment non centré d'ordre1 de Y : $M_1(Y)=E(Y)$ *(déja calculé)* 0,25	Le moment non centré d'ordre2 de Y : $M_2(Y)=E(Y^2)$ *(déja calculé)* 0,25
Le moment centré d'ordre1 de Y : 0,25 $\mu_1(Y)=0$ *(nulle quelque soit la variable)*	Le moment centré d'ordre2 de Y : $\mu_2(Y)=V(Y)$ *(déja calculé)* 0,25

Exercice3 : (8pts)

La durée de vie X en années d'une télévision suit une loi exponentielle de densité :

$$f(x)=ae^{-\frac{1}{8}.x}.I_{IR^+}(x) \ .$$

1) Déterminer a .

Remarque : C'est la densité de la v.a.r suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{8}$.
f *est une densité de probabilité donc on déduit* $\begin{cases} a \geq 0 \quad et \\ \int_{IR} f(x)dx = 1 \end{cases}$ *1pt*
or $\int_{IR} f(x)dx = a\int e^{-\frac{x}{8}}dx = \frac{8}{a} \quad d'où \quad \frac{8}{a} = 1 \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{8}$

2) Calculer la fonction de répartition F de X .

F_X *la fonction de répartition on a :* $\forall x \in IR, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0 \qquad si\, x < 0 \\ \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{8}.e^{-\frac{x}{8}}dx = \left(1 - e^{-\frac{x}{8}}\right) \end{cases}$ *1pt*

3) Calculer la fonction génératrice des moments G de X et déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Voir le chapitre4 du cours : Calcul de la fonction génératrice de la loi exponentielle de paramètre λ *et déduction de ses moments d'ordre* k *). On trouve :*
$\begin{cases} G_X(t) = \dfrac{1}{1-8.t} \qquad t < \frac{1}{8} \\ E(X) = 8 \\ V(X) = 64 \end{cases}$ *(respectivement : 1pt+0.5pt +0.5pt)*

4) Montrer que X satisfait la propriété donnée par l'égalité :

$$\mathrm{P}(X > t_1 + t_2 / X > t_1) = \mathrm{P}(X > t_2), \quad t_1, t_2 \geq 0$$

Démontrée en TD, dans la série d'exercice(4) *1pt*

- Donner l'appellation de cette propriété.

Cette propriété est dite « absence de mémoire » *1pt*

5) Calculer la probabilité que la télévision que vous venez d'acheter ait une durée de vie supérieure à 8 ans.

On cherche $P(X > 8) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 8) = 1 - F_X(8) = e^{-1}$ *(d'après (2))* *1pt*

6) Vous possédez une telle télévision depuis 2 ans. Quelle est la probabilité que sa durée de vie soit encore de 8 ans à partir de maintenant ?

On cherche $P(X > 2 + 8 / X > 2) = \mathrm{P}(X > 8) = 1 - F_X(8) = e^{-1}$ *(d'après (4) et (2))* *1pt*