파이썬 확률 통계

논리적인 자료의 요약

/* elice */

목차

중심위치의 측도

수치를 통한 연속형 자료 요약

그림이나 도표에 의한 분석의 단점

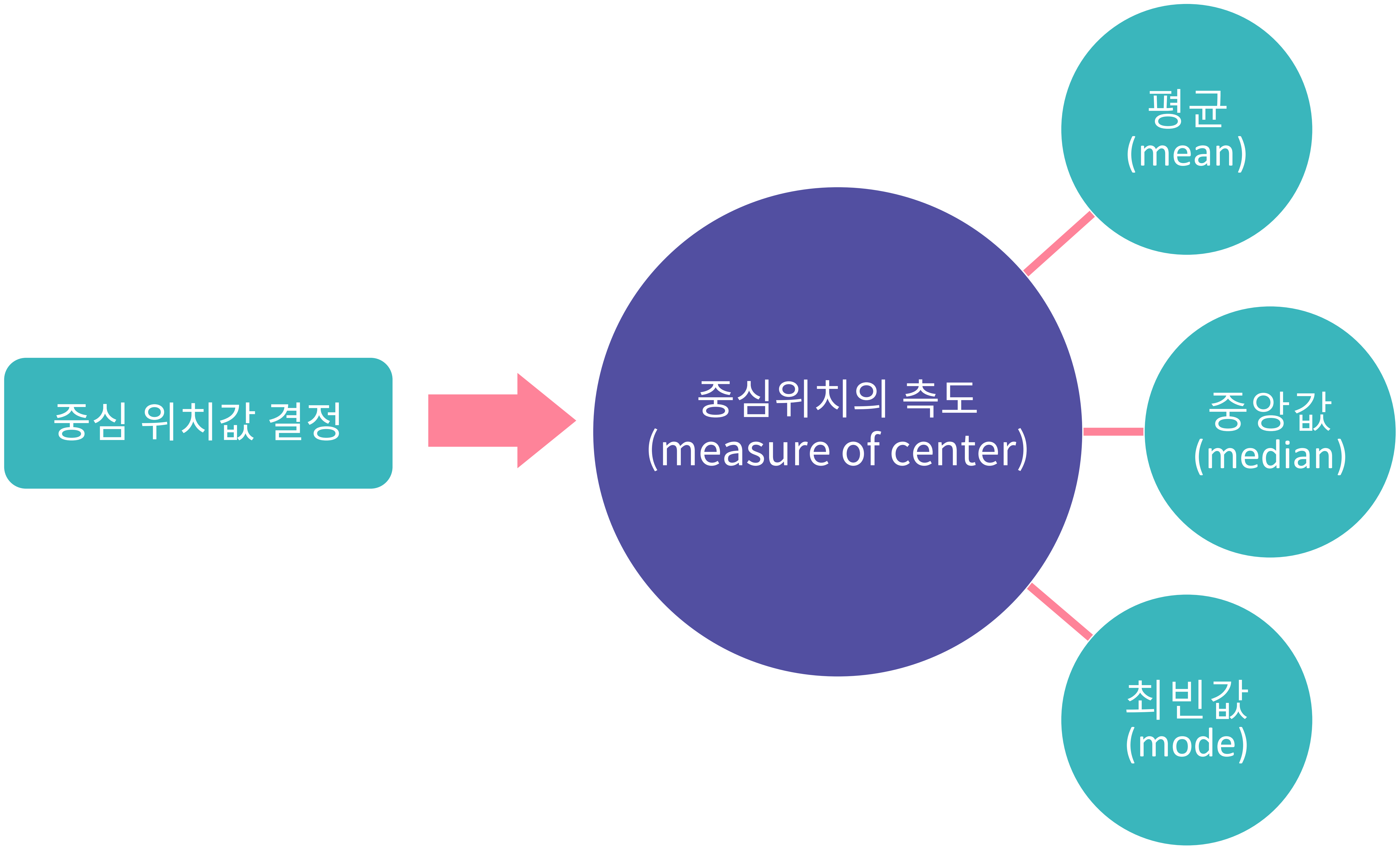
- 작성자의 주관적 판단에 따라 달라지므로 일관성 및 객관성이 부족
- 시각적 자료로는 이론적 근거 제시가 쉽지 않음

많은 양의 자료를 의미 있는 수치로 요약하여
대략적인 분포상태를 파악 가능하므로 단점 보완 가능

수치를 통한 연속형 자료 요약

1) 중심위치의 측도 (measure of center)	자료의 중심위치를 나타냄
2) 퍼진 정도의 측도 (measure of dispersion)	자료가 각 중심위치로부터 얼마나 흩어져 있는지 나타냄
3) 도수분포표에서의 자료의 요약	자료가 이미 그룹화된 경우의 수치 요약 방법
4) 상자 그림	사분위수, 최솟값, 최댓값 등을 이용한 요약 방법

중심위치의 측도



중심 위치값 결정
중심위치의 측도
(measure of center)
평균
(mean)
중앙값
(median)
최빈값
(mode)

평균, 중앙값, 최빈값의 정의

평균(Mean)

```
np.mean()
```

중심위치의 측도 중에서 가장 많이 사용되는 방법

모든 관측값의 합을 자료의 개수로 나눈 것

관측값들의 무게중심

자료 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 의 평균을 $\bar{x}$ 로 표기

$$\bar{x} = \frac{\text{모든 관측값의 합계}}{\text{총 자료의 개수}} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

평균의 특징

- 관측값의 산술평균으로 사용
- 통계에서 기초적인 통계 수치로 가장 많이 사용
- 극단적으로 큰 값이나 작은 값의 영향을 많이 받음

중앙값(Median)

```
np.median()
```

전체 관측값을 정렬했을 때 가운데에 위치하는 값

자료의 개수(n)가 홀수인 경우

$\frac{(n+1)}{2}$ 번째 관측값

자료의 개수(n)가 짝수인 경우

$\frac{n}{2}$ 번째 관측값과 $\frac{n}{2}+1$ 번째 관측값의 평균

중앙값의 특징

- 관측값을 크기 순서대로 배열할 때 중앙에 위치
- 가운데에 위치한 값 이외의 값의 크기는 중요하지 않음
- 관측값의 변화에 민감하지 않고, 극단값의 영향을 받지 않음

최빈값(Mode)

```
stats.mode()
```

관측값 중 가장 자주 나오는 값

이산형/범주형 자료에서 많이 사용

최빈값의 특징

- 연속형 자료에서 같은 값이 나오는 경우는 흔치 않으므로 최빈값을 사용하기 부적절
- 단봉형 분포를 갖는 자료에서만 유용

평균, 중앙값, 최빈값의 비교

평균, 중앙값, 최빈값의 비교

실제 사용 빈도

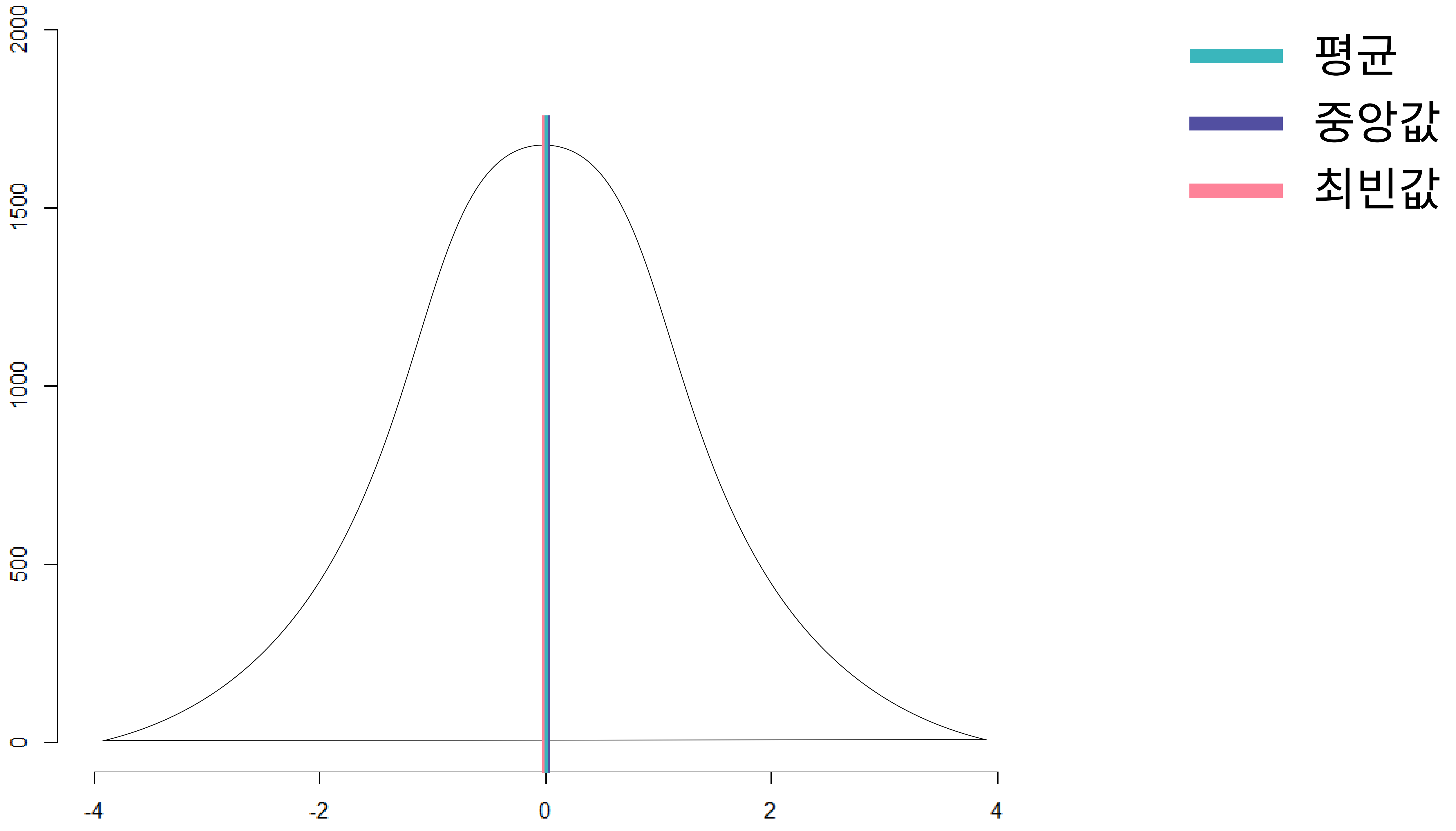
평균 > 중앙값 > 최빈값

평균	중앙값
• 이해하기 쉽고 통계적으로 가장 많이 사용 • 관측값이 골고루 반영 • 극단값으로 인한 영향을 많이 받음	• 중앙 부분 외 관측값의 변화에 민감하지 않음 • 극단값으로 인한 영향을 받지 않음

극단값이 있는 경우

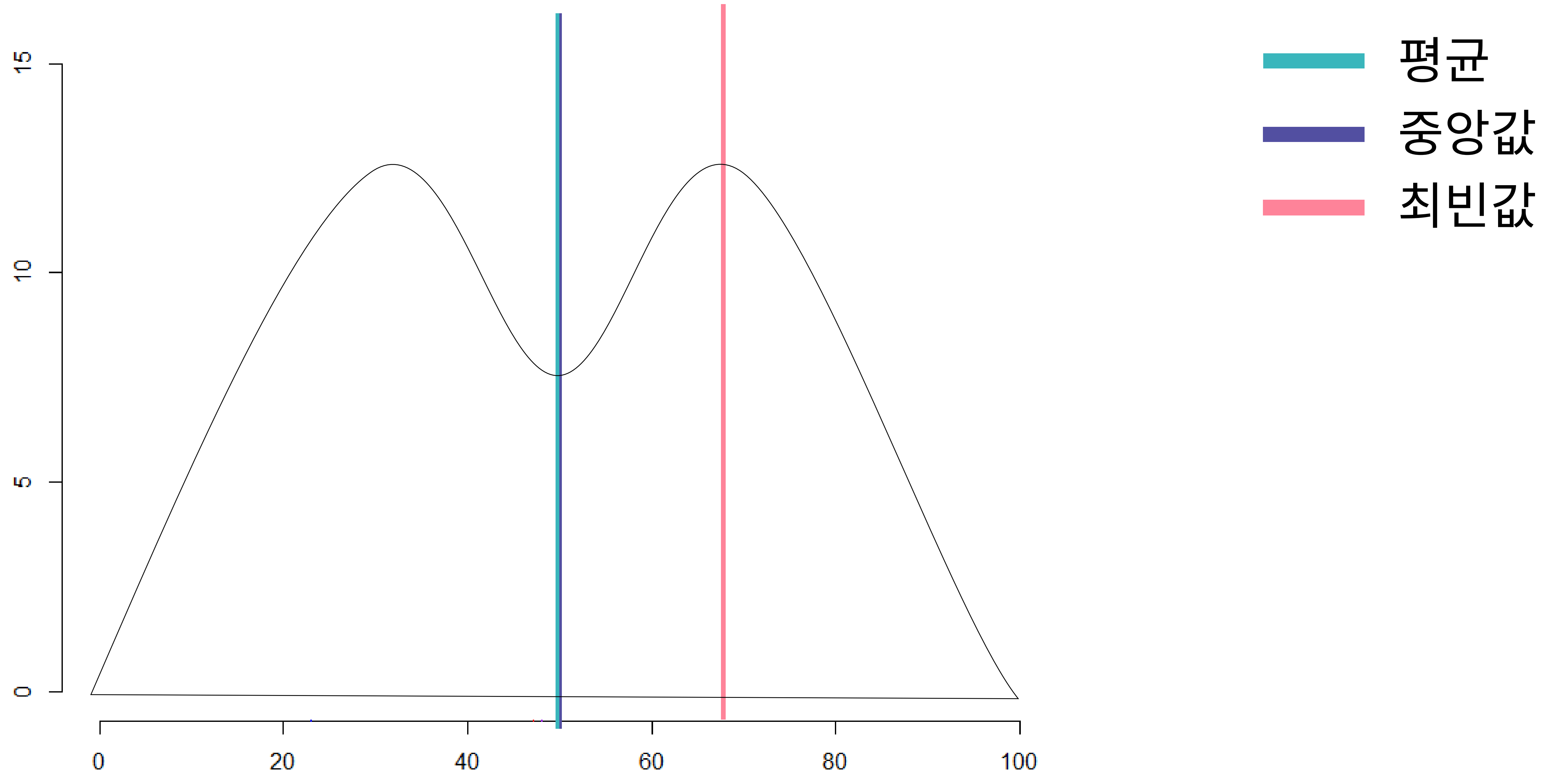
- 극단값의 영향을 배제하고 싶으면 중앙값 사용
- 전체 관측값을 모두 포함하고 싶으면 평균 사용

단봉형 대칭



평균 = 중앙값 = 최빈값

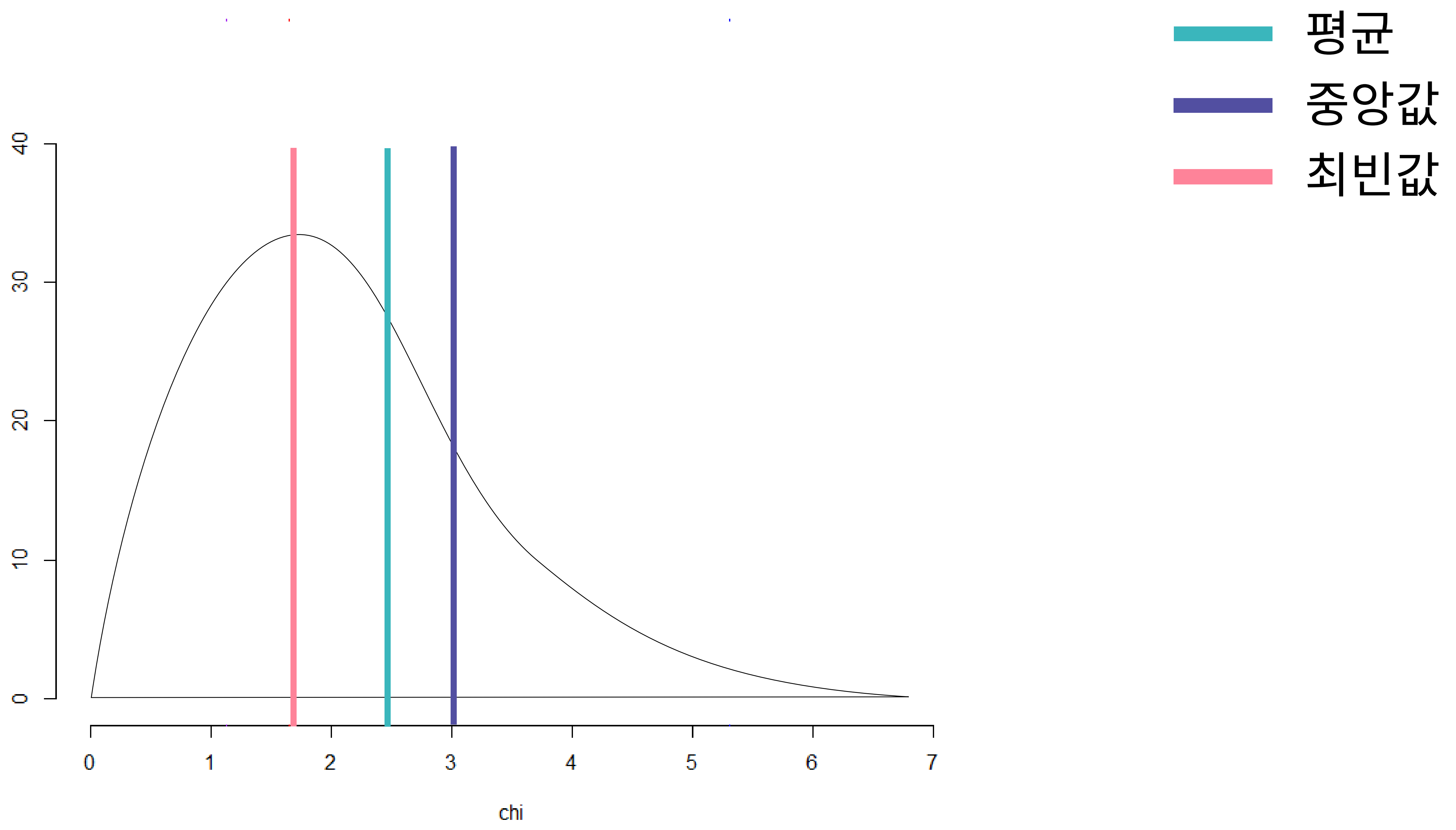
이봉형 대칭



평균 = 중앙값 ≠ 최빈값

※다봉형 분포에서 최빈값은 중심위치의 측도로 부적합

비대칭 분포



평균 ≠ 중앙값 ≠ 최빈값

비대칭 분포에서 평균과 중앙값

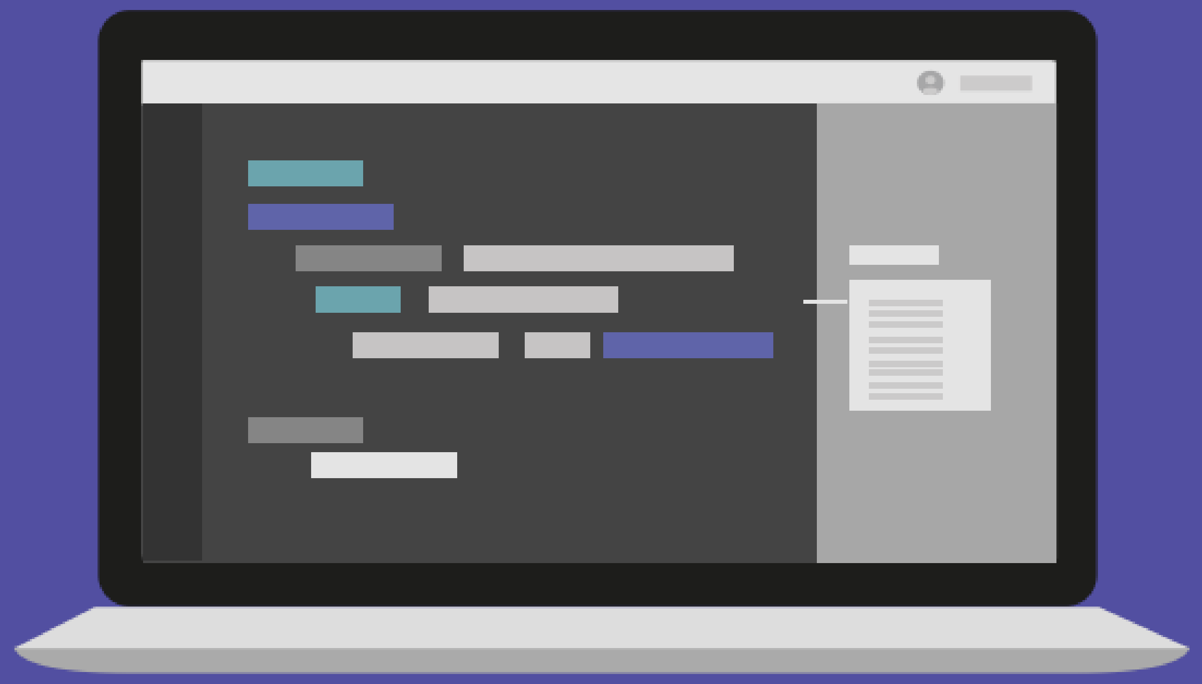
비대칭 분포
(치우친 분포)

왼쪽으로 치우친 분포
평균 > 중앙값

오른쪽으로 치우친 분포
평균 < 중앙값

[실습]

중심위치의 측도



퍼진 정도의 측도

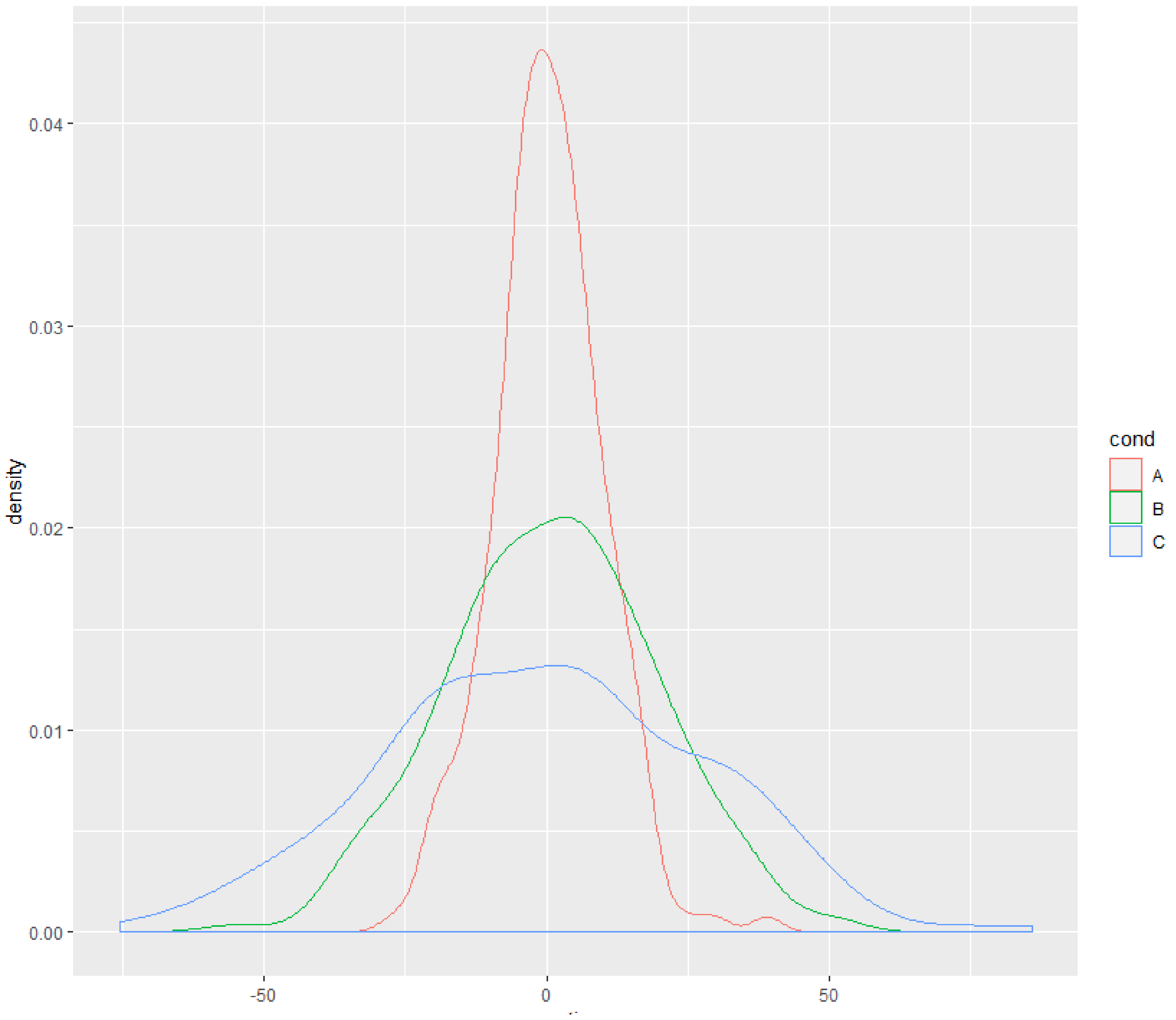
퍼진 정도의 측도

중심위치만으로 분포를 파악하기에 부족

중심위치 측도 외에 분포가 퍼진 정도를 측도할 수치가 필요

분산, 표준편차, 범위, 사분위수 등을
퍼진 정도의 측도로 사용

퍼진 정도의 측도



A : 평균 0, 표준편차 10

B : 평균 0, 표준편차 20

C : 평균 0, 표준편차 30

분산과 표준편차

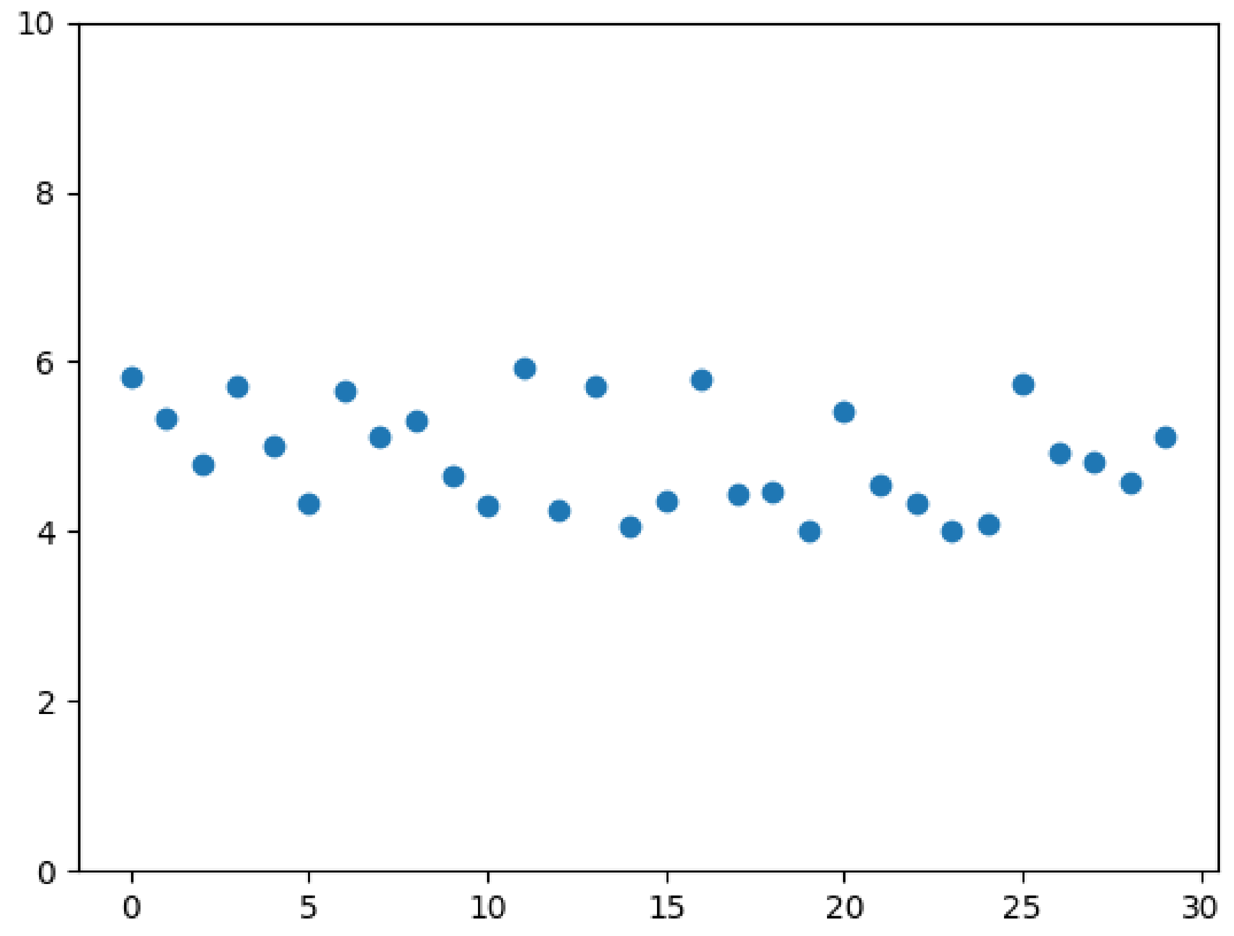
분산

```
variance()
```

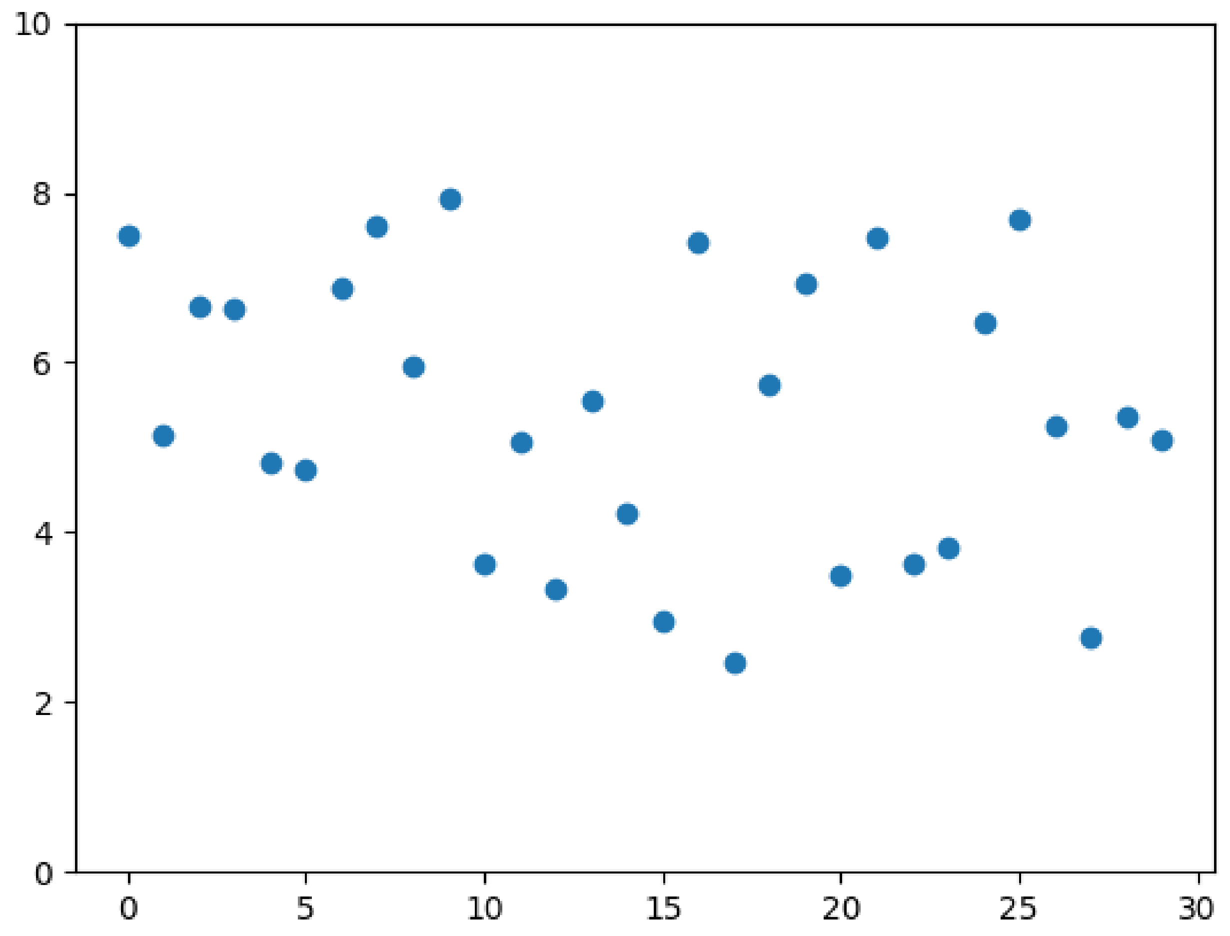
자료가 얼마나 흩어졌는지 숫자로 표현

각 관측값이 자료의 평균으로부터 떨어진 정도

분산



분산이 작다



분산이 크다

분산

관측값이 $x_1, x_2, \ldots x_n$ 이고 평균이 $\bar{x}$ 일 때,

관측값에 대한 편차 = (관측값- 평균) = $(x_i - \bar{x})$

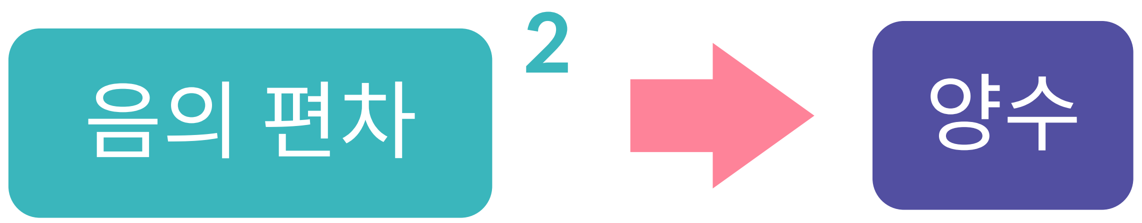
편차의 합은 항상 0

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$$

그렇지만 편차들의 합은 항상 0이므로 평균도 항상 0이 되어
편차의 평균은 퍼진 정도의 측도로 적합하지 않음

분산

음의 편차를 제곱하여 양수로 바꿀 수 있다



분산

편차의 제곱의 평균으로 퍼진 정도를 측정할 수 있다

$$\frac{\text{편차의 제곱합}}{n}$$ → 퍼진 정도를 측정

분산, s^2로 표기

관측값이 $x_1, x_2, \ldots x_n$ 이고 평균이 $\bar{x}$ 일 때,

$$\text{분산 } s^2 = \frac{(\text{편차의 제곱합})}{n} = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

표준편차

`stdev()`

분산의 단위 = 관측값의 단위의 제곱

관측값의 단위와 불일치

분산의 양의 제곱근은 관측값과 단위가 일치

분산의 양의 제곱근을 표준편차라 하고 s로 표기

$$s = +\sqrt{s^2}$$

범위와 백분위수

범위(Range)

```
np.max()-np.min()
```

관측값에서 가장 큰 값과 가장 작은 값의 차이

장점
간편하게 구할 수 있고
해석이 용이함

단점
- 중간에 위치한 값은 고려되지 않음
- 극단값의 영향이 클 수 있음

백분위수

```
np.percentile()
```

중앙값을 확장한 개념

자료를 순서대로 정렬했을 때 백분율로 특정 위치의 값을 표현

백분위수

제 100×p 백분위수를 구하는 방법

1. 관측값을 오름차순으로 배열

2. 관측값의 개수(n) 에 p를 곱셈

3-1. n×p가 정수인 경우

n×p 번째로 작은 관측값과
n×p+1 번째로 작은 관측값의 평균

3-2. n×p가 정수가 아닌 경우

n×p에서 정수 부분에 1을 더한 값 m을 구한 후
m번째로 작은 관측값

사분위수

사분위수

`np.percentile(a, 25)`

`np.percentile(a, 50)`

`np.percentile(a, 75)`

백분위수의 일종으로 전체를 사등분하는 값

제1, 2, 3 분위수를 각각 Q_1, Q_2, Q_3 으로 표시

- 제 1 사분위수 : Q_1= 제 25백분위수
- 제 2 사분위수 : Q_2= 제 50백분위수
- 제 3 사분위수 : Q_3= 제 75백분위수

중앙값은 전체의 1/2에 위치하는 값이므로 제 2사분위수 및 제 50백분위수

사분위수 범위

제 3사분위수와 1사분위수 사이의 거리

사분위수 범위 IQR = 제 3사분위수 – 제 1사분위수 = $Q_3 - Q_1$

범위	사분위수 범위
전체 관측값이 퍼진 정도	관측값의 중간 50%에 대한 범위

퍼진 정도 측정법 비교

표준편차, 범위, 사분위수 범위의 비교

평균의 특징 = 표준편차의 특징

중앙값의 특징 = 사분위수 범위의 특징

표준편차	사분위수 범위	범위
전체 관측값의 퍼진 정도를 골고루 반영 단점 : 극단적인 관측값에 의해 영향을 받음	극단값의 영향없이 퍼진 정도를 확인 가능 단점 : 제1사분위수와 제3사분위수 사이의 관측값에 대한 분포를 반영하지 않음	퍼진 정도를 나타냄 단점 : 표준편차의 단점과 사분위수 범위의 단점을 모두 가지고 있음

변동계수

퍼진 정도를 상대적으로 나타내는 수치를 사용

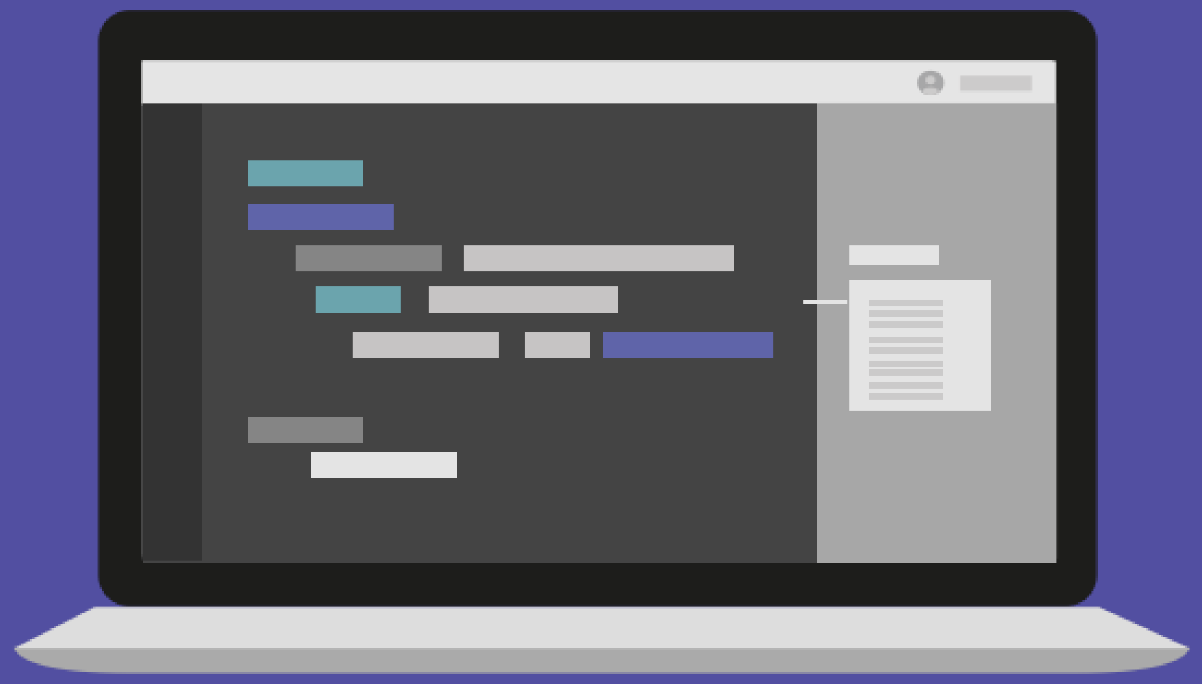
변동계수는 평균에 대한 상대적인 퍼진 정도를 백분율(%) 로 나타냄

$$\text{변동계수 } CV = \frac{\text{표준편차}}{\text{평균}}$$

비교 대상의 단위가 다른 경우, 단위가 없는 변동계수를 통해 퍼진 정도 비교 가능

[실습]

퍼진 정도의 측도



도수분포표

도수분포표

자료가 도수분포표로 요약되고 원 자료는 주어지지 않을 경우

계급구간의 모든 관측값이
계급의 중간값을 갖는다고 가정하여 평균과 분산을 계산

원 자료를 그룹화에 의해 정보가 상실되기 때문에
가능하다면 원 자료를 이용

도수분포표에서의 평균

계급의 개수 : k

각 계급의 도수 : f_i,

각 계급의 중간값 : m_i

자료의 개수 : n(= $\sum_{i=1}^{k} f_i$)

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(m_1 f_1 + m_2 f_2 + \cdots + m_k f_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} m_i \left(\frac{f_i}{n}\right)$$

Σ(각 계급의 중간값 × 각 계급의 상대도수)

도수분포표에서의 분산, 표준편차

계급의 개수 : k

각 계급의 도수 : f_i,

각 계급의 중간값 : m_i

자료의 개수 : n(= $\sum_{i=1}^{k} f_i$)

분산

$$s_g^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(m_i \, , \overline{x_g})^2 f_i$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k} m_i^2 \, f_i - n\overline{x_g}^{\,2}\right)$$

표준편차

$$s_g = \sqrt{s_g^2}$$

상자그림

상자 그림

```
plt.boxplot()
```

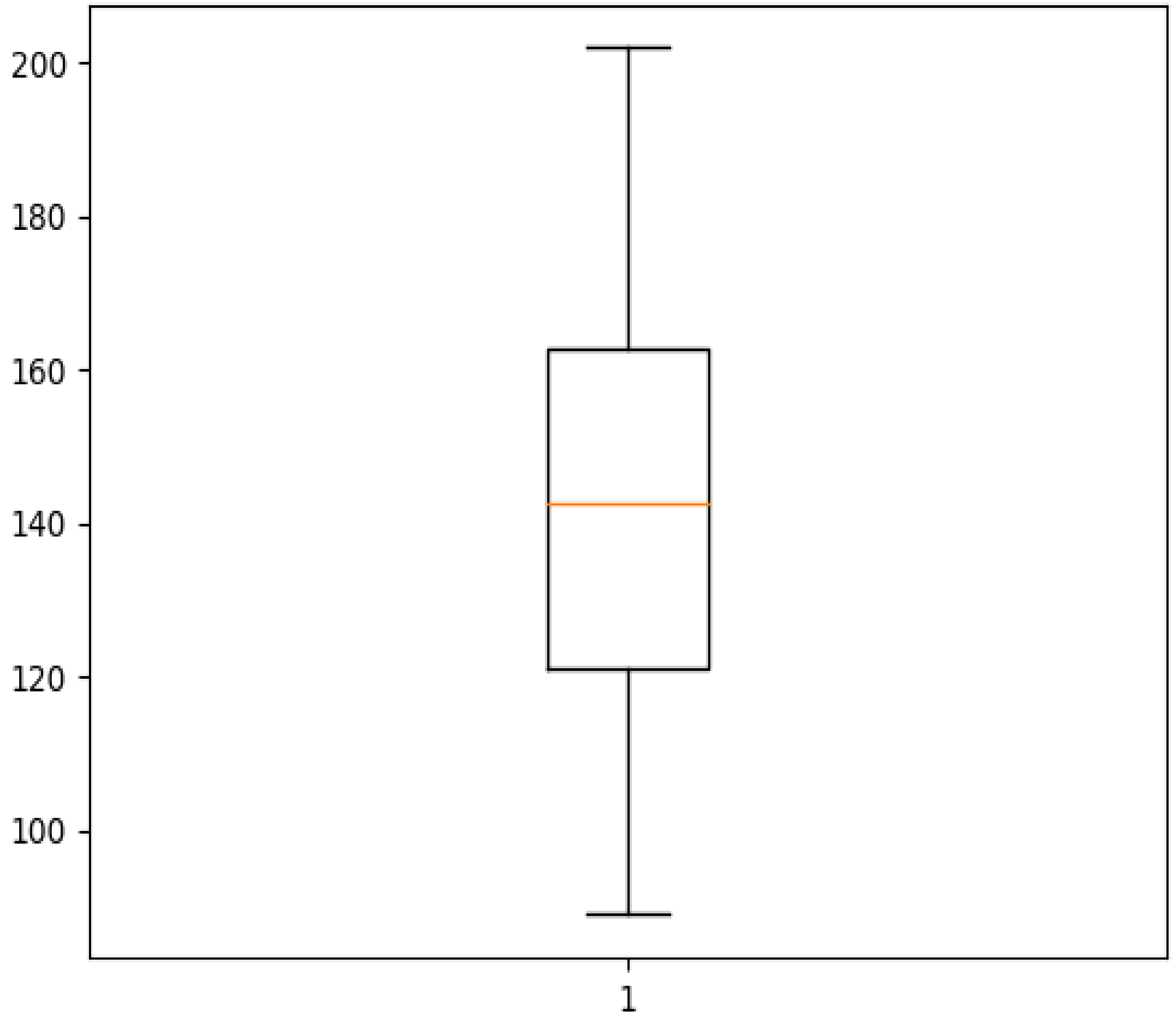
다섯 가지 요약 수치(최솟값, Q1, Q2, Q3, 최댓값)를 그림으로 표현

일반적 그래프에선 드러나지 않는 수치를 함께 제공

제 1사분위수에서 제 3사분위수까지 상자로 그림

좌우에 선을 그어 최솟값, 최댓값을 나타냄

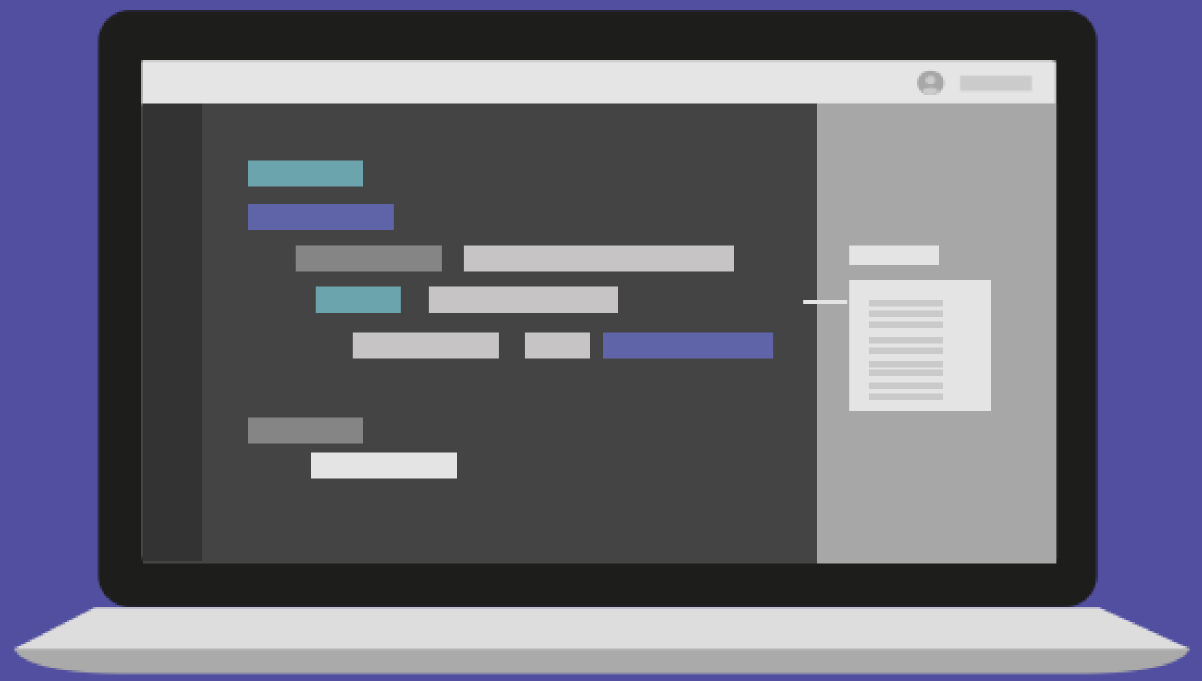
상자 그림



- 상자-수염그림(box-whisker plot) 이라고도 함
- 봉우리가 하나 있는 분포의 특징을 나타내는데 적절
- 봉우리가 여러 개 있는 분포에서는 효과적인 분석 어려움
- 대략적인 자료의 분포를 먼저 파악 후 상자 그림 작성

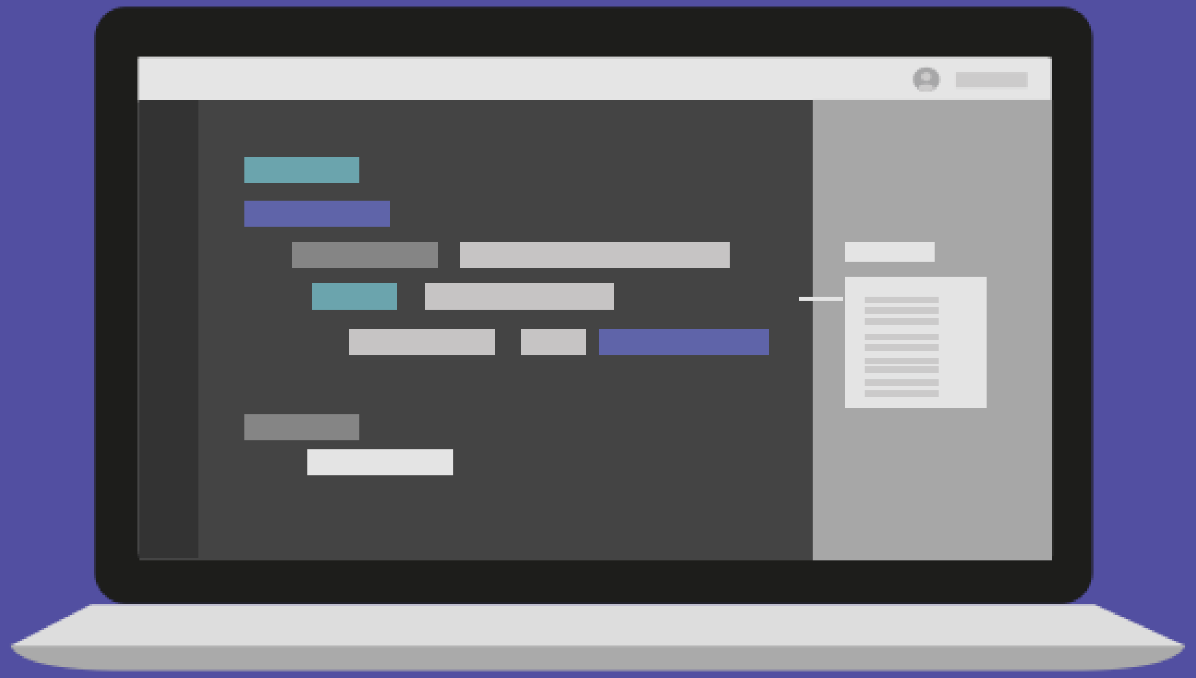
[실습]

도수분포표



[실습]

상자그림



범주형 자료의 요약: 분할표

두 변수 자료의 요약

일반적 자료 요약

하나의 변수에 대한 관측 자료

도표/수치로 요약

두 변수 자료의 요약

둘 또는 그 이상 변수에 대한 관측 자료

동시에 분석하여 도표/수치로 요약

두 변수 자료의 요약

자료

범주형 자료
(Categorical data)

분할표

수치형 자료
(Numerical data)

산점도, 공분산, 상관계수

1) 분할표

범주형

변수 1 | 변수 2

도수분포표를 2차원으로 확장한 형태로 요약

	변수 2의 범주 1	변수 2의 범주 2	변수 2의 범주 3
변수 1의 범주 1			
변수 1의 범주 2			
변수 1의 범주 3			

두 변수의 범주들이 동시에 갖는 관측값의 수
(ex : **변수 1의 범주 2**와 **변수 2의 범주 3** 사이의 상관관계)

```
pd.crosstab(index = 기준 범주, columns = 관측 범주)
```

두 범주형 변수의 요약 : 분할표

교차하는 부분에 여러 가지 값 표시 가능

예) 상대도수 -> 두 변수 사이 관련 분포 상태를 명확히 표현

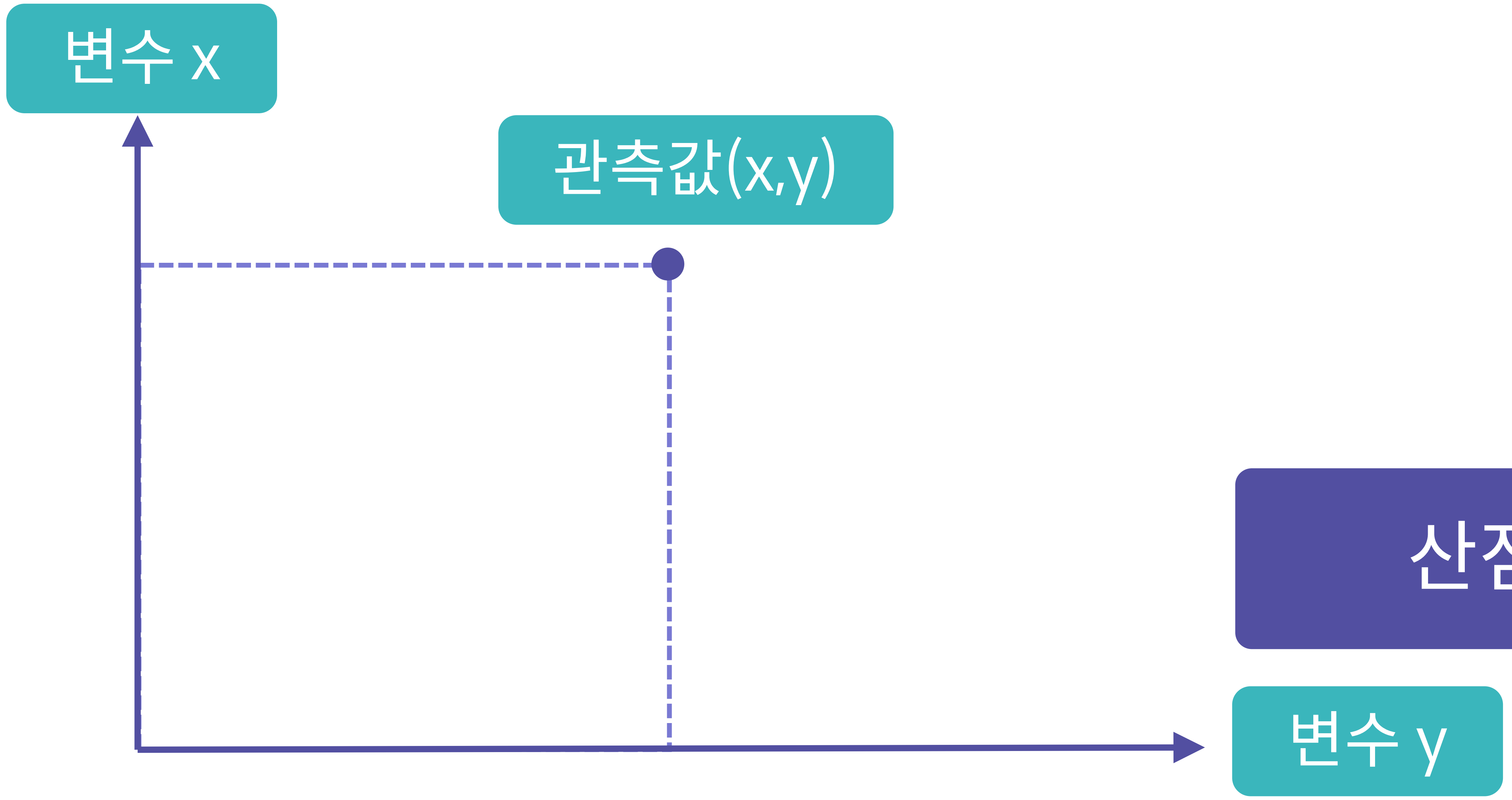
범주형 자료의 요약: 산점도

그림을 통한 두 연속형 변수의 요약 : 산점도

연속형

변수 x 변수 y

각 변수의 관측값을 좌표평면에 표시함



산점도 (Scatter Plot)

그림을 통한 두 연속형 변수의 요약 : 산점도

```
plt.scatter(x = x축 변수, y = y축 변수)
```

두 변수 사이의 관계를 시각적으로 파악

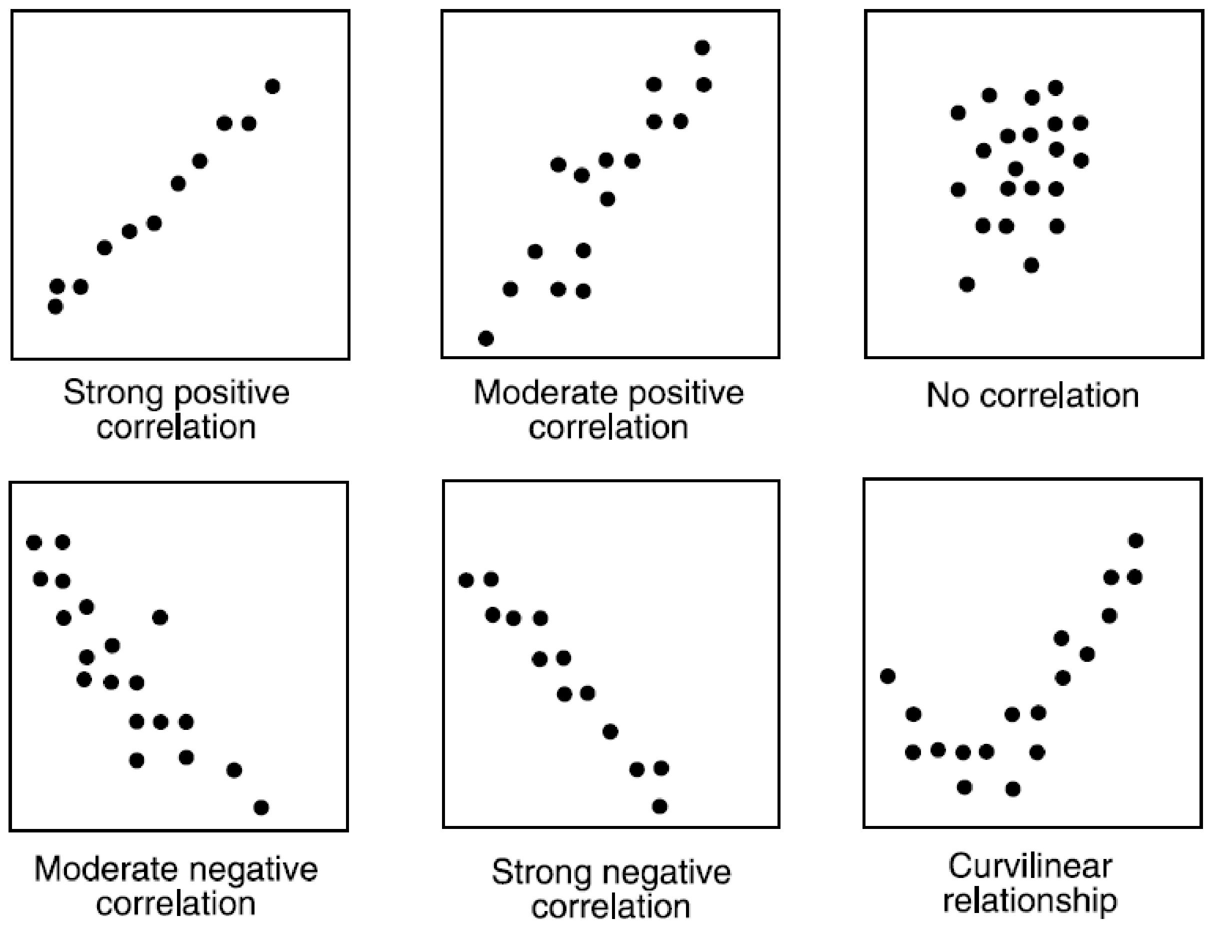
관측값이 많은 경우 점들이 띠를 형성

그림을 통한 두 연속형 변수의 요약 : 산점도

변수 x

변수 y

변수 x, 변수 y 각각에 대해 관심이 있다면
앞서 배운 기법들로 분석 가능



변수 x

변수 y

두 변수가 서로 어떤 관계인지
확인하기 위해 산점도를 사용

산점도 위의 점들의 경향

곡선 등 여러 가지 형태가 가능

범주형 자료의 요약: 공분산

공분산

```
dataframe.cov()
```

두 변수 (x, y) 에 대하여 서로 어떤 관계를 가지는지 나타냄

- x 값과 y값이 같은 방향으로 변화할 때, 공분산 값은 양수
- x 값과 y값이 반대 방향으로 변화할 때, 공분산 값은 음수

cov(x,y)로 표현

공분산

$S_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y})$ 로 계산

- 여기서 $\bar{x}, \bar{y}$는 평균값, x_i, y_i는 각각의 관측값

두 변수의 편차를 곱하여 더한 후자료의 개수(N) 으로 나누어줌

자료가 평균값으로부터 얼마나 멀리 떨어져 있는지 나타냄

범주형 자료의 요약: 상관계수

상관계수

연속형

변수 x　변수 y

산점도의 점들이 직선에 가까운
정도를 수치로 나타내어 관계를 파악

◂ 피어슨

- 피어슨에 의해 제안되었기 때문에 피어슨의 상관계수라고도 불림
- 상관계수는 보통 r 로 표시

상관계수

두 변수 (x, y) 에 대하여 관측값 n 개의 짝

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$이 주어질 때 다음과 같이 계산

$$상관계수\ r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}} \cdot \sqrt{S_{yy}}}$$

$$단,\ \bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i,\ \bar{y} = \frac{1}{n}\sum y_i$$

$$S_{xx} = \Sigma(x_i - \bar{x})^2$$

$$S_{yy} = \Sigma(y_i - \bar{y})^2$$

$$S_{xy} = \Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

상관계수

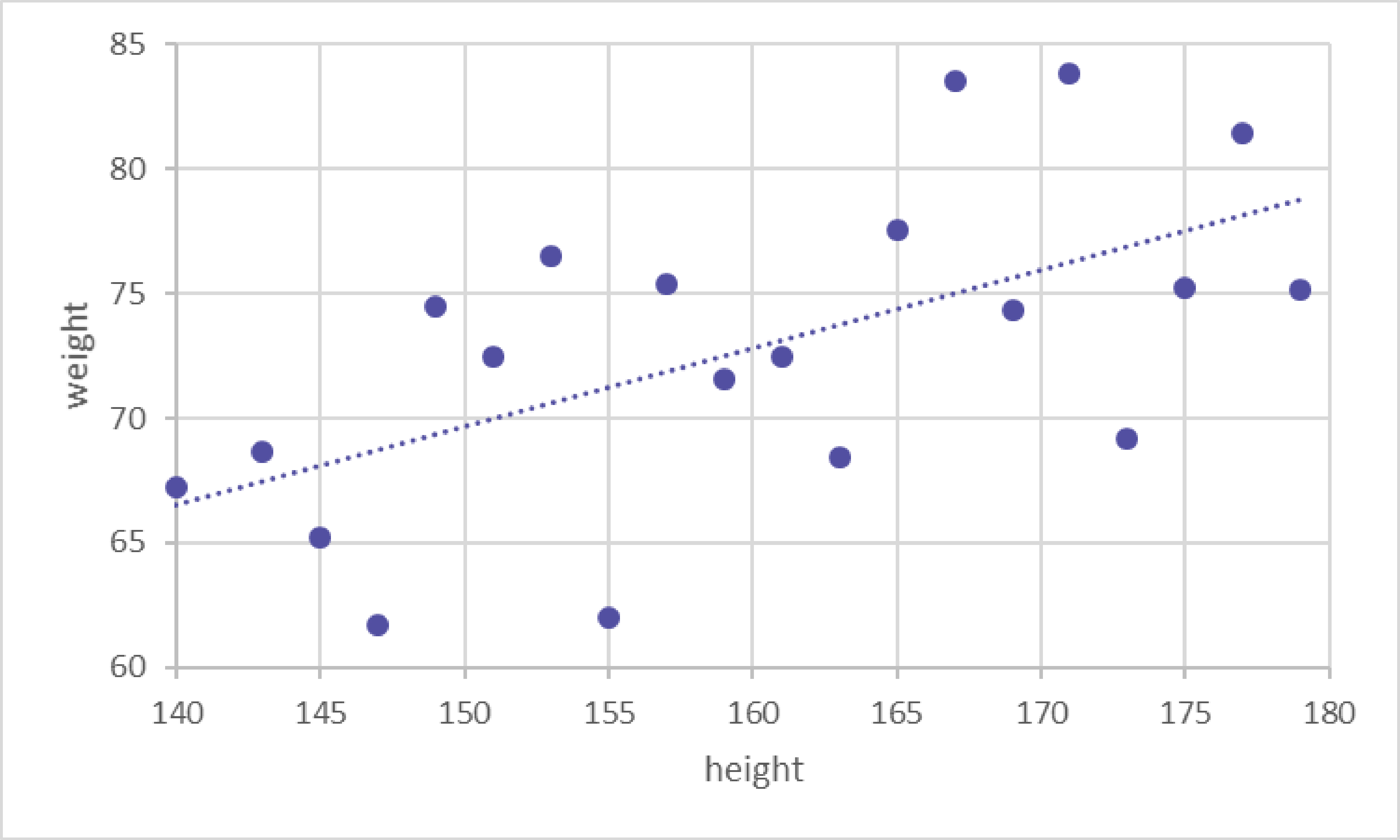
```
dataframe.corr()
```

표본상관계수 r은 항상 -1과 1사이에 있음

절댓값의 크기는 직선관계에 가까운 정도 나타냄

부호는 직선관계의 방향을 나타냄

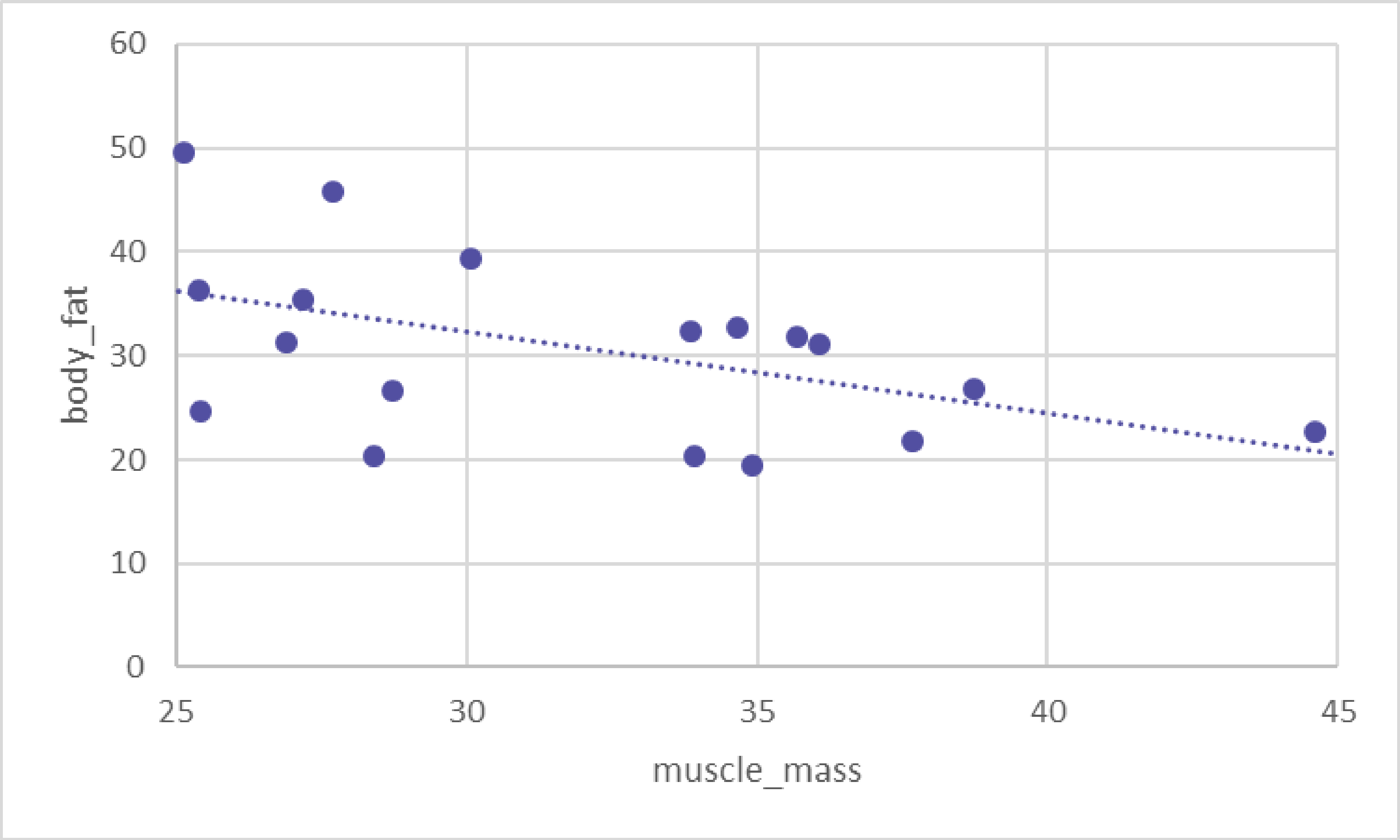
상관계수



r > 0

- 점들이 좌하에서 우상방향으로 띠를 형성
- 두 변수의 값이 **비례** 관계를 나타냄
- 이 경향 직선의 기울기는 **양수**

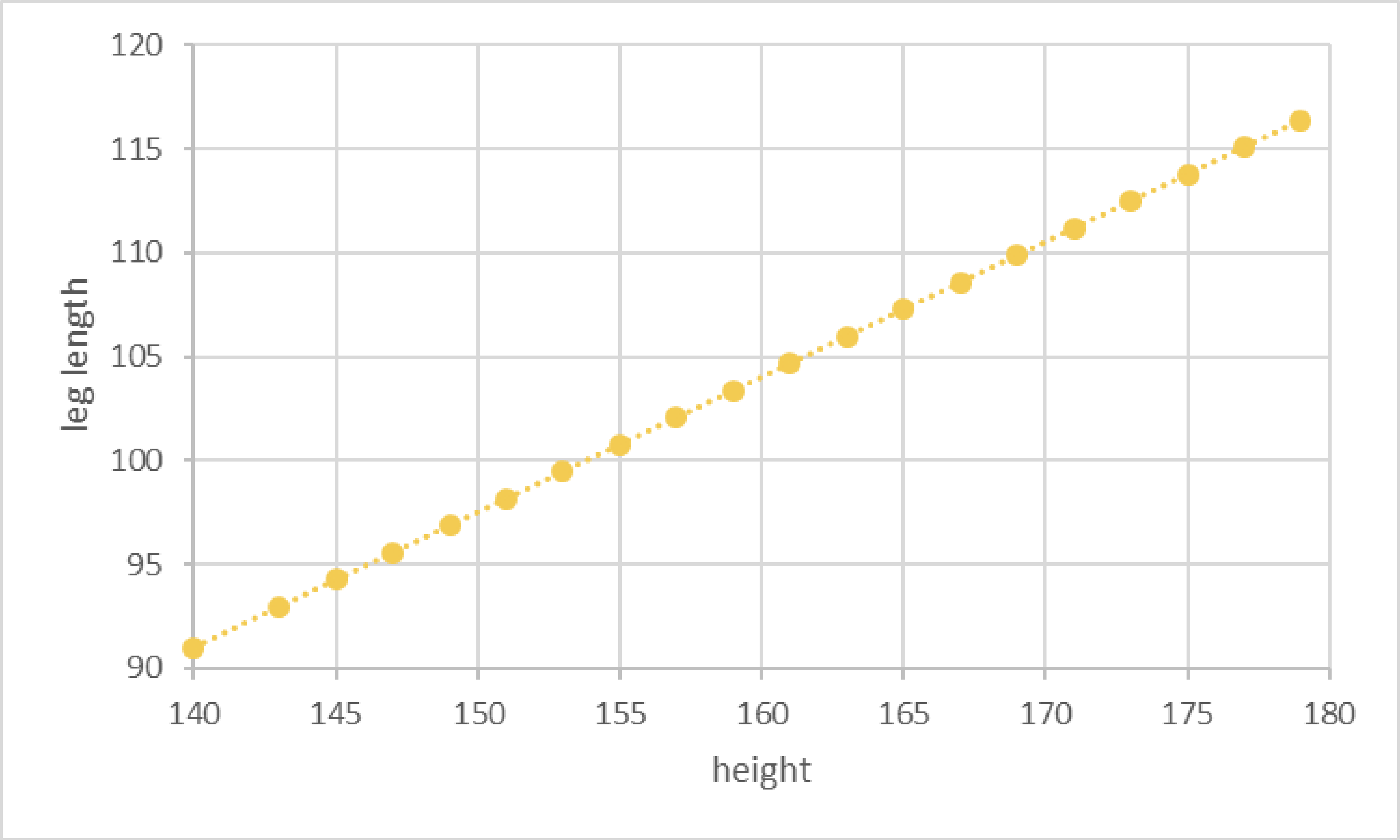
상관계수



r < 0

- 점들이 좌상에서 우하방향으로 띠를 형성
- 두 변수의 값이 **반비례** 관계를 나타냄
- 이 경향 직선의 기울기는 **음수**

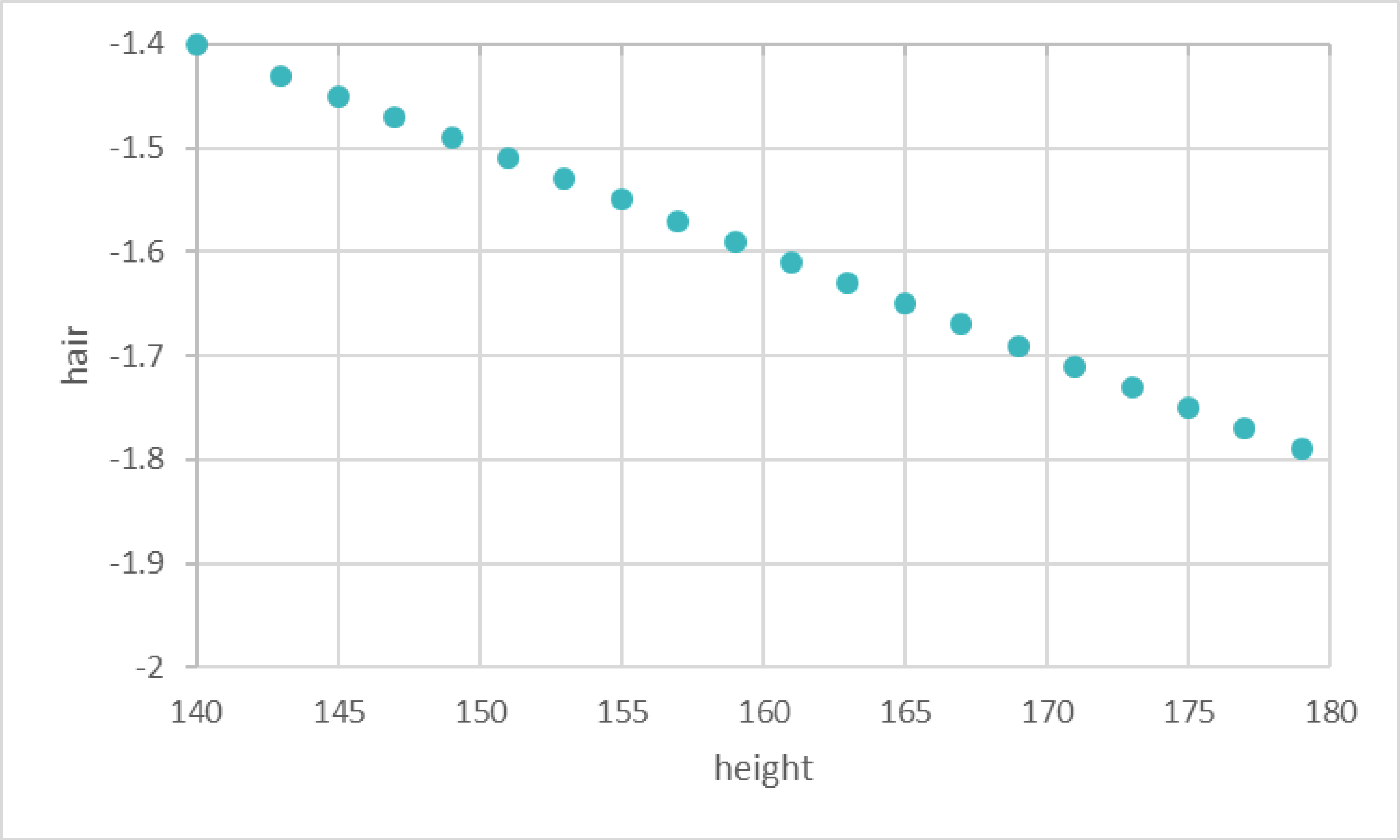
상관계수



r = +1

- 모든 점이 정확히 기울기가 양수인 직선에 위치

상관계수



r = -1

- 모든 점이 정확히 기울기가 음수인 직선에 위치

상관계수의 특징

상관계수는 단위가 없음

- 변수 x, y의 단위는 분모, 분자에서 상쇄
- 이를 이용하여 단위가 다른 변수에서 직선관계 정도를 비교 가능

상관계수만으로 판단 시, 잘못된 해석 가능성

- 상관계수는 직선 관계 나타내므로 직선이 아닐 때 부적합
- 상관계수를 구하기 전 산점도를 보고 전체의 경향을 파악한 후 상관계수 계산

상관계수와 인과관계

인과관계

x가 y의 원인이 되고 있다고 믿어지는 관계

자료분석 시, 주의해야할 점

큰 상관계수값이 항상 두 변수 사이의

어떠한 인과관계를 의미하지 않는다는 사실!

상관계수와 인과관계

상어에 물린 사고 횟수가 늘어날 때

아이스크림 판매량도 같이 늘어난다

→ 상어에 물린 사고 횟수와
아이스크림 판매량은 상관 관계가 있다

→ 상어에 많이 물릴 수록 **아이스크림이 많이 팔린다**?

상관계수와 인과관계

상어 사고가 많다 → 해수욕이 많은 **여름철**이기 때문

아이스크림이 많이 팔린다 → 더운 **여름철**이기 때문

직접적인 인과관계는 상어와 아이스크림이 아니라,

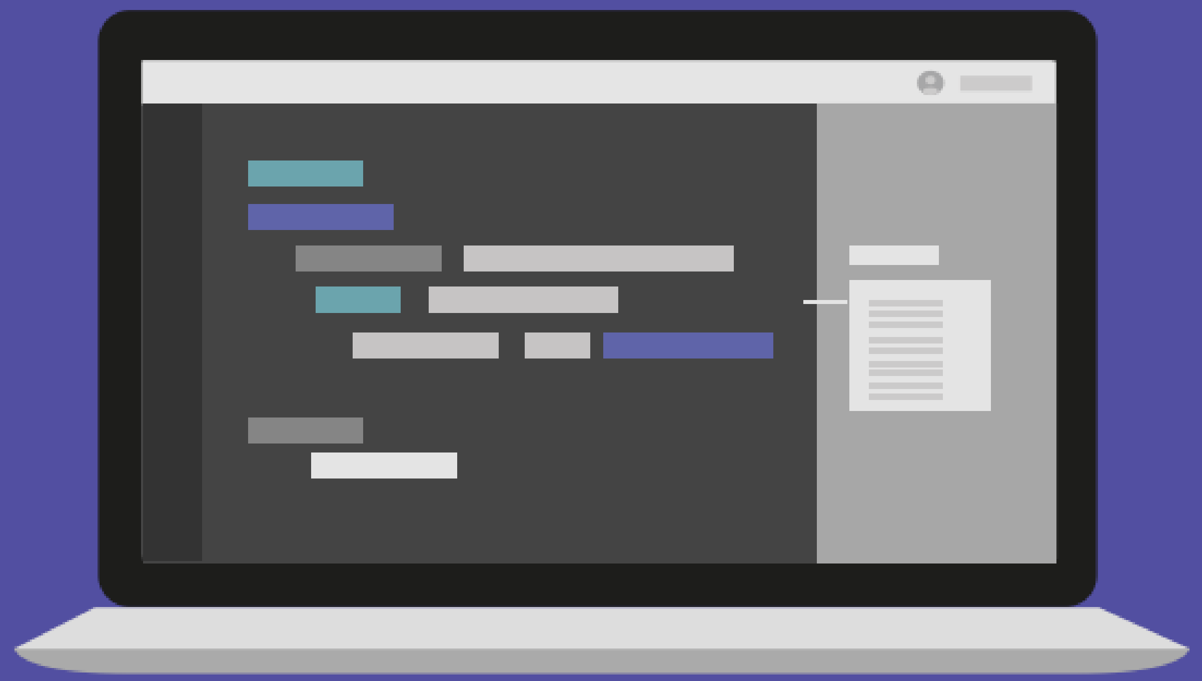
여름과 상어, **여름**과 아이스크림에 있다

상관계수와 인과관계

상관 계수가 높다 $\neq$ 인과관계이다

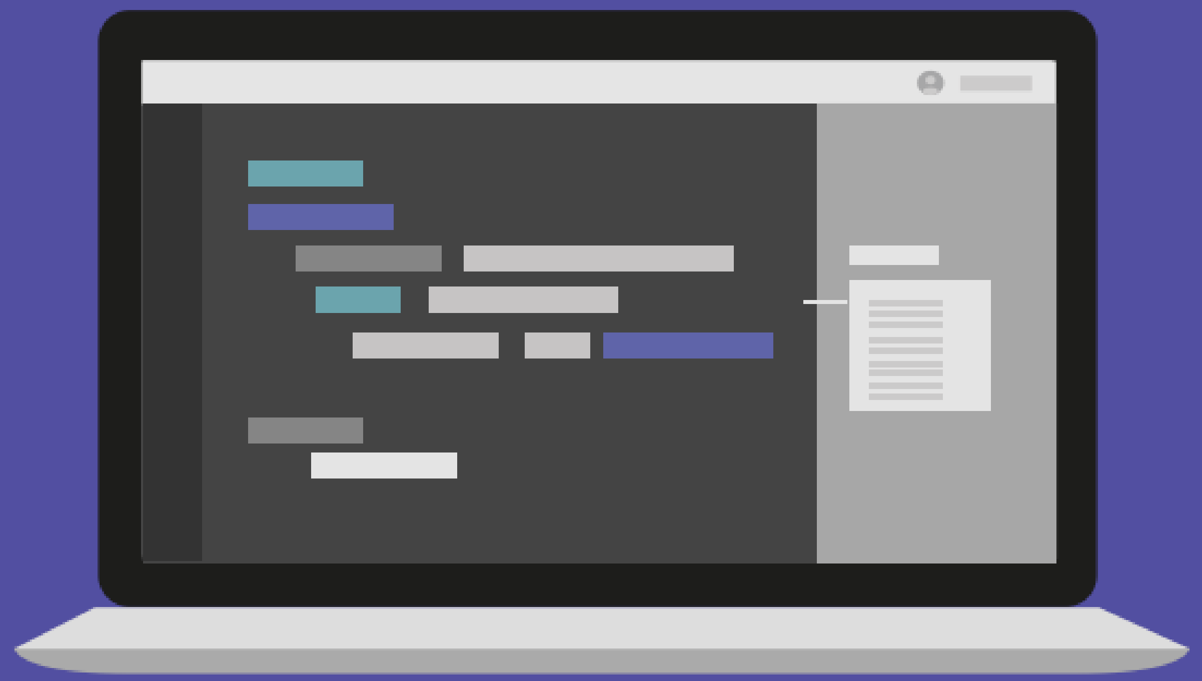
[실습]

분할표



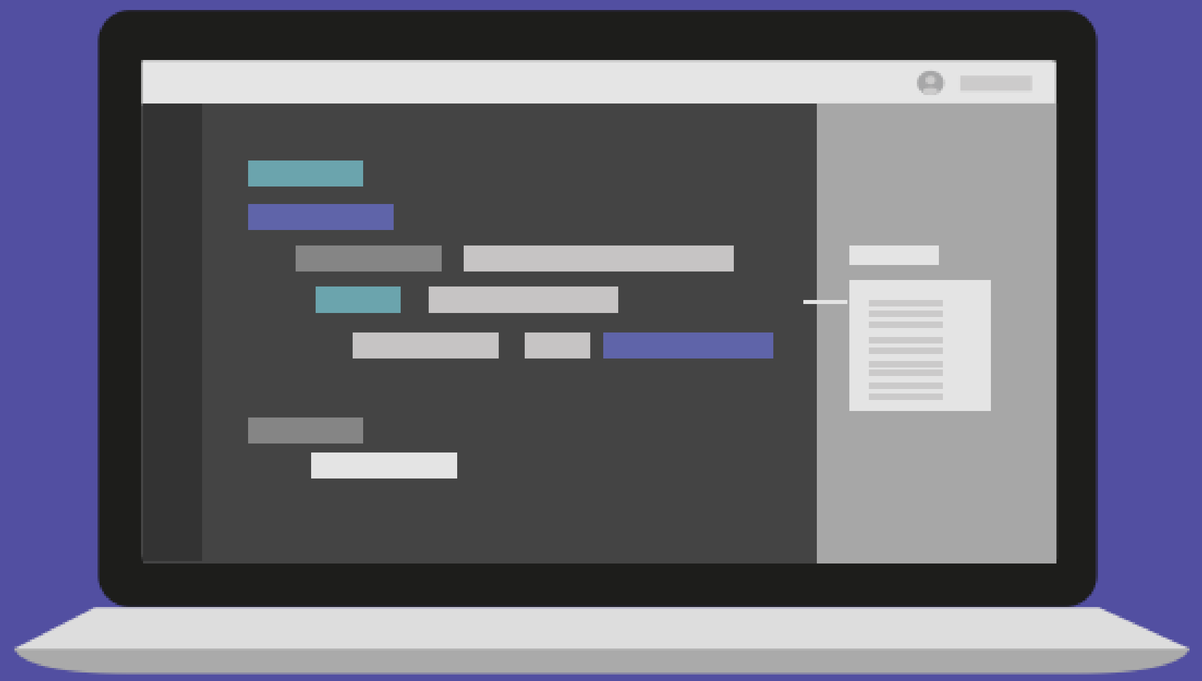
[실습]

산점도



[실습]

공분산



[실습]

상관계수