Développement 17. Une suite de polygones convergente

Lemme 1. Soient $n \geqslant 1$ un entier et $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{C}$ des complexes. Notons la matrice
$$A \coloneqq \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}),$$
le complexe $\omega \coloneqq e^{2i\pi/n} \in \mathbf{C}$ et le polynôme $P \coloneqq a_1 + \cdots + a_n X^{n-1} \in \mathbf{C}[X]$. Alors
$$\det A = P(1)P(\omega)\cdots P(\omega^{n-1}).$$

Preuve Considérons la matrice de van der Monde
$$V \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}).$$
Comme $\omega^n = 1$, un simple calcul donne
$$AV = \begin{pmatrix} P(1) & P(\omega) & \cdots & P(\omega^{n-1}) \\ P(1) & \omega P(\omega) & \cdots & \omega^{n-1} P(\omega^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(1) & \omega^{n-1} P(\omega) & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} P(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}$$
si bien qu'on obtient
$$(\det A)(\det V) = \det(AV) = P(1)\cdots P(\omega^{n-1}) \det V.$$
Comme les éléments ω^i sont deux à deux distincts, la déterminant de la matrice V n'est pas nul ce qui conclut le lemme. ◁

Théorème 2. Soit $(P^k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathbf{C}^n$ qu'en notant $P^k = (z_1^k, \dots, z_n^k)$ pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, elle satisfasse la relation
$$P^{k+1} = \left(\frac{z_1^k + z_2^k}{2}, \frac{z_2^k + z_3^k}{2}, \dots, \frac{z_n^k + z_1^k}{2} \right), \qquad k \in \mathbf{N}. \tag{1}$$
Alors la suite $(P^k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers l'élément $(g, \dots, g) \in \mathbf{C}^n$ avec
$$g \coloneqq \frac{z_1^0 + \cdots + z_n^0}{n}.$$

Preuve La relation (1) se réécrit sous la forme matricielle
$$P^{k+1} = AP^k, \qquad k \in \mathbf{N}$$
avec
$$A \coloneqq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors
$$P^k = A^k P^0, \qquad k \in \mathbf{N}. \tag{2}$$
Remarquons que la matrice A est celle du lemme avec $P = \frac{1}{2}(1 + X)$ et la même preuve que celle du lemme assure que ses valeurs propres sont les complexes $\frac{1}{2}(1 + \omega^i)$ avec $i \in [\![0, n-1]\!]$. Par conséquent, elle est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que
$$A = Q \operatorname{diag}\left(1, \frac{1+\omega}{2}, \dots, \frac{1+\omega^{n-1}}{2}\right) Q^{-1}.$$
On peut alors écrire
$$A^k = Q \operatorname{diag}\left(1, \left[\frac{1+\omega}{2}\right]^k, \dots, \left[\frac{1+\omega^{n-1}}{2}\right]^k\right) Q^{-1}, \qquad k \in \mathbf{N}.$$
Pour tout entier $\ell \in [\![1, n-1]\!]$, on a
$$|1 + \omega^\ell|^2 = (1 + e^{i\pi\ell/n})(1 + e^{-i\pi\ell/n}) = 2\left(1 + \cos\frac{\pi\ell}{n}\right) < 4$$
ce qui donne $|\frac{1}{2}(1 + \omega^\ell) < 1|$. On en déduit $A^k \longrightarrow A^\infty \coloneqq \operatorname{diag}(1, 0, \dots, 0)$, donc la suite $(P^k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers le polygone $P^\infty \coloneqq A^\infty P^0$. Un passage à la limite dans l'égalité (2) donne alors $P^\infty = AP^\infty$, c'est-à-dire $P^\infty \in \operatorname{Ker}(A - I_n)$. Comme la matrice A est diagonalisable, le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(A - I_n)$ est de dimension une et un simple calcul montre qu'il contient le vecteur $(1, \dots, 1)$, donc il existe un complexe $a \in \mathbf{C}$ tel que $P^\infty = (a, \dots, a)$. Il reste à montrer que $a = g$. En effectuant une récurrence, vérifions que, pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, on a
$$g = \frac{z_1^k + \cdots + z_n^k}{n}. \tag{3}$$
Le cas $k = 0$ est immédiat. Si l'égalité (3) est vraie à un rang $k \in \mathbf{N}$, alors
$$\begin{aligned} \frac{z_1^{k+1} + \cdots + z_n^{k+1}}{n} &= \frac{1}{n} \frac{z_1^k + 2z_2^k + \cdots + 2z_n^k + z_1^k}{2} \\ &= \frac{z_1^k + \cdots + z_n^k}{n} = g. \end{aligned}$$
Un passage à la limite dans l'égalité (3) conclut alors $a = g$. ◁

[1] Xavier Gourdon. *Algèbre*. 2e édition. Ellipses, 2009.
[2] Lucas Isenmann et Timothée Pecatte. *L'oral à l'agrégation de mathématiques*. Ellipses, 2017.