Développement 11. La décomposition de Dunford effective par la méthode de Newton

Théorème 1. Soient $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique nulle et $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice de polynôme caractéristique scindé $\chi \in \mathbf{K}[X]$. On pose
$$P \coloneqq \frac{\chi}{\chi \wedge \chi'}.$$
On considère la suite $(A_r)_{r\in\mathbf{N}}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ définie par les égalités
$$A_0 = A \qquad \text{et} \qquad A_{r+1} = A_r - P(A_r)P'(A_r)^{-1}.$$
Alors cette suite est bien définie, elle est stationnaire et elle tend vers une matrice diagonalisable $D \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. De plus, la matrice D est un polynôme de la matrice A et la matrice $N \coloneqq A - D$ est nilpotente. Enfin, la décomposition $A = N + D$ est unique.

Preuve Remarquons d'abord que, comme le corps $\mathbf{K}$ est de caractéristique nulle, le polynôme χ' n'est pas nul ce qui implique que ce polynôme P est à racines simples et ce sont les valeurs propres de la matrice.

Pour tout entier $r \in \mathbf{N}$, on va montrer, par récurrence, la propriété (P_r) constituée des trois points suivants :

(P_r^1) la matrice $P(A_r)$ est nilpotente d'indice de nilpotence $\nu_r \leqslant 1 + (n-1)2^{-r}$;

(P_r^2) la matrice $P'(A_r)$ est inversible ;

(P_r^3) la matrice A_{r+1} est bien définie et appartient à l'anneau $\mathbf{K}[A]$.

• *Initialisation.* Le point (P_0^3) est clair. Montrons le point (P_0^2). Comme le polynôme P est sans facteur carré, on a $P \wedge P' = 1$ et le théorème de Bézout assure qu'on peut trouver deux polynômes $U, V \in \mathbf{K}[X]$ tels que $UP + VP' = 1$. En particulier, on a $V(A)P'(A) = I_n - U(A)P(A)$. Comme $\chi \mid P^n$, le théorème de Cayley-Hamilton assure que $P(A)^n = P^n(A) = 0$, donc la matrice $P(A)$ est nilpotente et il en va de même pour la matrice $U(A)P(A)$. Ainsi la matrice $I_n - U(A)P(A)$ est inversible en utilisant la formule bien connue
$$(a-1)\sum_{k=0}^{N} a^k = 1 - a^{N+1}, \qquad a \in A,$$
donc la matrice $P'(A) = P'(A_0)$ est inversible. D'où le point (P_0^2). Par la même occasion, on a montré le point (P_0^1) puisque $P(A)^n = 0$ et donc $\nu_0 \leqslant n = 1 + (n-1)2^{-0}$.

• *Hérédité.* Soit $r \in \mathbf{N}$. On suppose la propriété (P_r). Montrons le point (P_{r+1}^1). D'après la formule de Taylor polynomiale, il existe un polynôme $Q \in \mathbf{K}[X, H]$ tel que
$$P(X + H) = P(X) + HP'(X) + H^2 Q(X, H).$$
Alors
$$\begin{aligned} P(A_{r+1}) &= P(A_r - P(A_r)P'(A_r)^{-1}) \\ &= P(A_r) - P(A_r)P'(A_r)^{-1}P'(A_r) \\ &\qquad + [P(A_r)P'(A_r)^{-1}]^2 Q(A_r, -P(A_r)P'(A_r)^{-1}) \\ &= [P(A_r)P'(A_r)^{-1}]^2 Q(A_r, -P(A_r)P'(A_r)^{-1}). \end{aligned}$$
Avec le point (P_r^1), la matrice $P(A_r)$ est nilpotente, donc la matrice $P(A_{r+1})$ est nilpotente d'indice de nilpotence
$$\nu_{r+1} \leqslant \frac{\nu_r + 1}{2} \leqslant \frac{2 + (n-1)2^{-r}}{2} = 1 + \frac{n-1}{2^{r+1}}.$$
D'où le point (P_{r+1}^1).

Montrons le point (P_{r+1}^2). Comme dans l'initialisation, on a trouvé deux polynômes $U, V \in \mathbf{K}[X]$ vérifiant $V(A_{r+1})P'(A_{r+1}) = I_n - U(A_{r+1})P(A_{r+1})$. D'après le point (P_{r+1}^1), la matrice $U(A_{r+1})P(A_{r+1})$ est nilpotente, donc la matrice $P'(A_{r+1})$ est inversible.

Enfin, montrons le point (P_{r+1}^3). Avec le point (P_{r+1}^2), la matrice A_{r+2} est bien définie et, avec le point (P_r^3), il s'agit bien d'un polynôme de la matrice A — notons que $B^{-1} \in \mathbf{K}[B]$ si $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

Montrons alors que les propriétés (P_r) prouvent bien le théorème. D'après les points (P_r^3), les matrices A_r commutent entre elles. De plus, grâce au point (P_r^1), dès que $m \geqslant \log_2 n$, la matrice $P(A_m)$ est d'indice de nilpotence $\nu_m = 1$, donc $P(A_m) = 0$ ce qui montre que la suite $(A_r)_{r\in\mathbf{N}}$ est stationnaire égale à une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Comme le polynôme P est scindé simple et comme $P(D) = 0$, la matrice D est diagonalisable. Montrons que la matrice $N \coloneqq A - D$ est nilpotente. En effet, pour tout entier $m \geqslant \log_2 n$, on a
$$N = A - A_m = \sum_{i=0}^{m-1}(A_i - A_{i+1}) = \sum_{i=0}^{m-1} P(A_i)P'(A_i)^{-1}.$$
Avec les points (P_i^1) et (P_i^3) avec $i \in [\![0, m-1]\!]$, comme les matrice $P(A_i)$ sont nilpotente et les matrices $P(A_i)$ et $P'(A_i)^{-1}$ commutent, les matrices $P(A_i)P'(A_i)^{-1}$ sont nilpotentes. Comme ces dernières commutent, la matrice N est nilpotente. Enfin, la matrice D est clairement un polynôme de la matrice A d'après la propriété (P_m^3)

Montrons l'unicité. Soit $A = N' + D'$ une autre décomposition de Dunford. On écrit $N - N' = D' - D$. Montrons que $DD' = D'D$ et $NN' = N'N$. D'abord, on a
$$D'A = D'(D' + N') = D'^2 + D'N' = D'^2 + N'D' = (D' + N')D' = AD'.$$
Comme le matrice N sont des polynômes en la matrice A, elles commutent avec cette dernière, donc on peut écrire
$$DD' = (A - N)D' = AD' - ND' = D'A - D'N = D'(A - N) = D'D.$$
De même, on montre que $NN' = N'N$. Par conséquent, la matrice $N - N'$ est nilpotente et les matrices D et D' sont codiagonalisables ce qui implique que leur différence $D - D'$ est diagonalisable. Comme une matrice diagonalisable et nilpotente est nulle, on en déduit que $N - N' = D - D' = 0$ ce qui conclut l'unicité. ◁

[1] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries.* T. Tome premier. Calvage & Mounet, 2017.