Travaux pratiques • Feuille n° 2

Intégration de fonctions de plusieurs variables, calcul de longueurs et surfaces

L2 MATH303_MPC

Durant la séance de TP, il est permis de discuter avec les collègues et de consulter Internet, notamment la documentation de SageMath. Cependant, il est totalement interdit de copier les programmes des collègues et le rapport rendu doit être personnel.

Le rapport est à rendre sur Moodle au format HTML, avant le *jeudi 19 octobre à 23 h 30.*

Exercice 1 • Calcul d'aires et d'intégrales avec la méthode de Monte-Carlo

On souhaite approcher l'aire du disque unité $\mathbf{D}$. Pour cela, on décrit une méthode. On choisit au hasard un certain nombre de points à l'intérieur du carré $[-1,1]\times[-1,1]$ qui contient le disque $\mathbf{D}$. Puis on utilise le fait suivant : la probabilité que le point se trouve à l'intérieur du disque est égale à l'aire du disque divisée par l'aire du carré, c'est-à-dire $\pi/4$. On fixe un entier $n\in\mathbf{N}^*$. Pour chaque question, on lancera les programmes avec $n=10^i$ pour $i\in[\![1,6]\!]$.

Question 1. Générer une suite de n points aléatoires dans le carré et déterminer le nombre de ces points se trouvant dans le disque $\mathbf{D}$.

Indication. Pour tirer un nombre aléatoire dans le segment $[0,1]$ de manière uniforme, on pourra utiliser la commande `random()`.

Question 2. En déduire une estimation de l'aire du disque $\mathbf{D}$.

Question 3. Répéter trois fois l'expérience et faire la moyenne de ces estimations. Que constate-t-on ?

Question 4. Proposer une méthode semblable permettant d'estimer l'intégrale

$$\iint_{\mathbf{D}} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Comparer le résultat avec la valeur théorique.

Exercice 2 • Calcul de l'aire du disque unité avec les sommes de Riemann

Le but de cet exercice est de calculer numériquement, en utilisant la méthode des sommes de Riemann, l'aire du disque unité du plan $\mathbf{R}^2$

$$\mathbf{D}\coloneqq\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 1\}.$$

On fixe un entier $n\in\mathbf{N}^*$ et on considère l'ensemble de points

$$\mathscr{P}_n\coloneqq\left\{\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right)\,\middle|\, i,j\in[\![-n,n]\!]\right\}\subset\mathbf{R}^2.$$

Pour chaque point $(i/n,j/n)\in\mathscr{P}_n$, on note $\mathscr{R}_{i,j}$ le carré formé des sommets

$$\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right),\qquad\left(\frac{i-1}{n},\frac{j}{n}\right),\qquad\left(\frac{i}{n},\frac{j-1}{n}\right)\qquad\text{et}\qquad\left(\frac{i-1}{n},\frac{j-1}{n}\right).$$

Pour chaque question, on lancera les programmes avec $n = 10^i$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Question 1. Calculer le nombre de carrés $\mathscr{R}_{i,j}$ entièrement contenus dans le disque $\mathbf{D}$. En déduire une estimation de l'aire du disque $\mathbf{D}$ et comparer avec la valeur théorique.

Question 2. Reprendre la question 1 avec des carrés d'intersection non vide avec le disque $\mathbf{D}$.

Question 3. Calculer le nombre de carrés $\mathscr{R}_{i,j}$ touchant le bord du disque $\mathbf{D}$. Calculer l'aire de la réunion de ces carrés. Comment interprète-t-on ce résultat ?

Exercice 3 • Volume d'une ellipsoïde

En reprenant la méthode de l'exercice 1 ou 2, estimer le volume de l'ellipsoïde d'inéquation

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leqslant 1.$$

Comparer avec la valeur théorique.

Exercice 4 • Une histoire de toit

Un·e architecte souhaite construire un bâtiment en forme de cylindre circulaire droit avec un toit original. Le cylindre doit avoir comme base (normalisée) le disque unité $\mathbf{D}$ et le toit est décrit par la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace donnée par les équations

$$\begin{cases} x = \cos\theta, \\ y = \sin\theta, \\ z = 1 + \cos^2\theta, \qquad \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Question 1. Représenter la courbe $\mathscr{C}$ et vérifier qu'elle s'appuie bien sur le cylindre décrit. Calculer numériquement sa longueur.

Indication. Pour représenter une courbe donnée par une équation paramétrique, on pourra utiliser la commande `parametric_plot3d()`. Pour tracer un cylindre, on pourra utiliser la commande `Cylinder()`. Pour calculer numériquement une intégrale, on pourra utiliser la méthode de Monte-Carlo qui est directement disponible grâce à la commande `monte_carlo_integral()`.

Question 2. L'architecte doit proposer la forme du toit, ce dernier devra être joli et peu cher tout en s'appuyant sur le cylindre. Proposer une surface qui pourrait convenir et la représenter.

Question 3. Après réflexion, l'architecte décide de prendre un toit dont la surface est paramétrée par les équations

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = 1 + \frac{1}{2}(1 - r^\alpha) + r^\alpha\cos^2\theta, \qquad r \in [0, 1],\ \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

pour un paramètre $\alpha \in \{1, 2, 3\}$. Vérifier que ces trois toits s'appuient bien sur le cylindre.

Indication. On pensera à régler l'opacité du cylindre grâce à l'argument `opacity=0.3`.

Question 4. Lequel de ces toits est le moins cher en sachant que le prix est proportionnel à la surface ?