Travaux pratiques • Feuille n° 3

Opérateurs différentiels de la physique

L2 MATH303_MPC

Durant la séance de TP, il est permis de discuter avec les collègues et de consulter Internet, notamment la documentation de SageMath. Cependant, il est totalement interdit de copier les programmes des collègues et le rapport rendu doit être personnel.

Le rapport est à rendre impérativement et exclusivement sur Moodle au format HTML, avant le *jeudi 26 octobre à 23 h 30*. Ce TP compte pour 15 points dans la note finale des TP. Le barême est sur 17 points (12 points pour les exercices et 1 point par compétence) et on prendra le minimum entre la note obtenue et 15 points. Pour rappel, les cinq compétences sont les suivantes :

- identifier certaines quantités physiques, les comprendre et les calculer ;
- utiliser un logiciel de calcul symbolique ou numérique pour résoudre un problème pratique ;
- interpréter les résultats obtenus afin de répondre à une problématique ;
- utiliser les outils de communication courants ;
- restituer une production écrite qui satisfait les attendus du thème et du niveau.

Exercice 1 • Flot et divergence (6 points)

On considère le champ de vecteurs

$$V\colon \left|\begin{array}{rcl}\mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & (-y,x).\end{array}\right.$$

Question 1 (0,5 point). Calculer sa divergence.

Question 2 (1,5 points). Étant donné un point (x_0, y_0), on souhaite calculer numériquement le flot $t \longmapsto \Phi_t(x_0, y_0)$ associé au champ de vecteurs V. Pour rappel, ce dernier vérifie le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\Phi_t(x_0,y_0)}{\mathrm{d}t} = V(\Phi_t(x_0,y_0)),\\ \Phi_0(x_0,y_0) = (x_0,y_0). \end{cases}$$

On va mettre en place la méthode d'Euler explicite. On fixe un temps final $T > 0$ et un petit pas de temps $h > 0$. On pose $N \coloneqq \lfloor T/h \rfloor$. On construit la suite $(x_i, y_i)_{0\leqslant i\leqslant N}$ telle que

$$(x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_i, y_i) + hV(x_i, y_i), \qquad \forall i \in \{0, \ldots, N-1\}.$$

Chaque point (x_i, y_i) est une approximation du point $\Phi_{ih}(x_0, y_0)$ qui peut décrire la position d'une particule transportée par le champ de vecteurs V au temps $t = ih$ partant du point (x_0, y_0). On prend $(x_0, y_0) = (2, 0)$. Pour différentes valeurs du réel h, donner une approximation de la position de la particule au temps $t = Nh$ pour $T \in \{1, 2, 10\}$.

Question 3 (1 point). Soit $m \in \mathbf{N}^*$ un entier. On considère les points

$$\left(2 + \frac{i}{4m}\cos\frac{2\pi j}{m}, \frac{i}{4m}\sin\frac{2\pi j}{m}\right) \quad \text{avec} \quad i, j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Représenter ces points pour $m \in \{5, 10, 20\}$.

Question 4 (1 point). Représenter ces points transportés par le champ de vecteurs aux temps $t = 1$, $t = 2$ et $t = 10$. Qu'observe-t-on ?

Question 5 (2 points). Reprendre l'exercice avec les champs de vecteurs

$$V\colon \left| \begin{array}{l} \quad \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (-x^2+y^2, -2xy) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad V\colon \left| \begin{array}{l} \quad \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (x/5, y/5). \end{array} \right.$$

Qu'observe-t-on ? Quelles sont les différences avec le champ de vecteurs de l'exercice 1 ?

Exercice 2 • Cardoïde (6 points)

On considère la courbe donnée par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos\theta(1+\cos\theta), \\ y(\theta) = \sin\theta(1+\cos\theta), \qquad \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Question 1 (0,5 point). Tracer la courbe.

Question 2 (1 point). Tracer les vecteurs tangents à la courbe aux points correspondant aux angles

$$\theta \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}.$$

Question 3 (1 point). Tracer les vecteurs normaux à la courbe aux mêmes points. Y a-t-il un problème pour $\theta = \pi$?

Question 4 (1 point). Calculer numériquement la longueur de la courbe.

Indication. On utilisera la commande `monte_carlo_integral()`. La valeur théorique vaut 8.

Question 5 (1,5 points). On considère le champ de vecteurs V défini par $V(x, y) = (x, y)$. Calculer numériquement la circulation du champ sur la courbe. Qu'observe-t-on ? Comment peut-on l'expliquer ?

Question 6 (1 point). En utilisant la formule de la divergence, calculer numériquement l'aire de la région entourée par la courbe.