Travaux pratique • Feuille n° 1

Fonctions de plusieurs variables

L2 MATH303_MPC

Durant la séance de TP, il est permis de discuter avec les collègues et de consulter Internet, notamment la documentation de SageMath. Cependant, il est totalement interdit de copier les programmes des collègues et le rapport rendu doit être personnel.

Liens utiles.

– La documentation : `https://doc.sagemath.org/html/en/reference/`

– Une brève introduction : `https://doc.sagemath.org/html/fr/a_tour_of_sage/`

Exercice 1 • Graphe d'une fonction

Question 1. Tracer le graphe des fonctions

$$f\colon \left| \begin{array}{rcl} [-1,1]\times[-1,1] & \longrightarrow & \mathbf{R}, \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}(x^2+4xy+y^2)+x^2y^2 \end{array} \right.$$

et

$$g\colon \left| \begin{array}{rcl} [-1,1]\times[-2,2] & \longrightarrow & \mathbf{R}, \\ (x,y) & \longmapsto & x^2(1+y^2)+y^2. \end{array} \right.$$

Indication. On utilisera la fonction `plot3d`.

Question 2. Reprendre la question précédente en remplaçant les ensembles de définitions par le carré $[-1/2,1/2]\times[-1/2,1/2]$.

Exercice 2 • Lignes de niveau

On considère la fonction

$$f\colon \left| \begin{array}{rcl} [-2,2]\times[-2,2] & \longrightarrow & \mathbf{R}, \\ (x,y) & \longmapsto & x^3-4xy^2. \end{array} \right.$$

Question 1. Tracer le graphe de la fonction f.

Question 2. Tracer 20 lignes de niveau de la fonction f.

Indication. On utilisera la fonction `contour_plot`.

Question 3. Tracer les lignes de niveau -3, -2, -1, 0, 1, 2 et 3 de la fonction f.

Exercice 3 • Représentation du gradient

On reprend la même fonction qu'à l'exercice précédent.

Question 1. Calculer le vecteur $u \coloneqq \nabla f(1,1)$. Quelle est l'extrémité du vecteur ayant pour origine le point $(1,1)$ et étant égal au vecteur $\frac{1}{8}u$?

Indication. On pourra utiliser le calcul symbolique et la méthode `gradient()`. Pour le calcul vectoriel, on pourra s'inspirer du code suivant :

```
V = VectorSpace(RR, 2)
u = V((1, 1))
v = V((0, 1))
u + v
```

Question 2. Faire de même avec le vecteur $\frac{1}{3}\nabla f(1,0)$ d'origine $(1,0)$ et le vecteur $\frac{1}{8}\nabla f(-1,1)$ d'origine $(-1,1)$?

Question 3. Tracer des lignes de niveau entre -3 et 3 de la fonction f. Sur quelles lignes de niveau se situent les points $(1,1)$, $(1,0)$ et $(-1,1)$?

Indication. Pour afficher les valeurs des niveaux sur les lignes de niveau, on pourra passer l'argument `label=True` à la fonction `contour_plot`.

Question 4. Tracer les trois lignes de niveau précédemment trouvées et représenter les vecteurs trouvés aux questions 1 et 2. Que remarque-t-on ?

Indication. Pour tracer des vecteurs, on pourra utiliser la commande `arrow`.

Exercice 4 • Extrema d'une fonction

On considère la fonction

$$f\colon \left| \begin{array}{rcl} [-2,2]\times[-2,2] & \longrightarrow & \mathbf{R}, \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 - x^3 + y^2. \end{array} \right.$$

Question 1. Tracer le graphe de la fonction f.

Question 2. Conjecturer l'existence d'extrema locaux ou globaux. Voit-on un point critique ? Si oui, est-ce un extremum local ?

Indication. On pourra utiliser la méthode `hessian()`.

Question 3. Tracer les ligne de niveau entre 0 et 2 avec un pas de 0,05.

Question 4. Calculer les points critiques. Est-ce cohérent avec la question 2 ?

Indication. On pourra utiliser la fonction `solve`.

Exercice 5 • Méthode du gradient pour la recherche de minima

On souhaite minimiser la fonction

$$f\colon \left| \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}, \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 + 2y^2 - 2xy - x. \end{array} \right.$$

Question 1. Calculer son gradient et ses points critiques.

Question 2. Tracer son graphe sur une partie bien choisie de $\mathbf{R}^2$ et conjecturer l'existence de minima locaux de la fonction f.

Question 3. En traçant des lignes de niveau, conjecturer une valeur approximative du minimum local ou des minima locaux.

Question 4. On va mettre en œuvre la méthode du gradient à pas fixe pour approximer un minimum local. L'algorithme est le suivant.

> *Entrée.* Un point initial $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ et des réels $\rho, \varepsilon > 0$
> *Sortie.* Une suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de points de $\mathbf{R}^2$
> *Algorithme.*
> $n \longleftarrow 0$
> Tant que $\|\nabla f(x_n, y_n)\| > \varepsilon$, faire
> $\quad (x_{n+1}, y_{n+1}) \longleftarrow (x_n, y_n) - \rho\nabla f(x_n, y_n)$
> $\quad n \longleftarrow n + 1$

Choisir différentes valeurs pour le point (x_0, y_0) et les réels ρ et ε, puis discuter du comportement des suites $(x_n, y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\nabla f(x_n, y_n))_{n\in\mathbf{N}}$. Pourquoi a-t-on mis un signe $-$ devant le réel ρ ?

Indication. On pourra essayer des valeurs ρ et ε très grandes (comme 1) puis avec des valeurs très petites (comme $0,01$).

Question 5. Reprendre l'exercice avec la fonction

$$f : \left| \begin{array}{l} [-1,1] \times [-1,1] \longrightarrow \mathbf{R}, \\ \qquad (x, y) \longmapsto \dfrac{\sin(\pi(x^2 + y^2))}{1 + x^2}. \end{array} \right.$$

Expliquer les difficultés nouvelles et proposer des réponses pour les contourner.

Indication. Pour éviter des problèmes de comparaison de réels, on remplacera `pi` par une valeur approchée comme `3.1415`.