ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(государственный технический университет)

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КУРСОВЫХ РАБОТ ПО ДИНАМИКЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Под редакцией О.В. Холостовой

Утверждено
на заседании редсовета
16 мая 2005 г.

Москва
Издательство МАИ
2005

И.А. Галиуллин, В.В. Зайцев, В.К. Зародов, Т.В. Руденко, В.А. Синицын, О.В. Холостова, Т.Н. Чеховская, П.С. Чудинов

Задания для курсовых работ по динамике механических систем: Учеб. пособие / Под ред. О.В. Холостовой. — М.: Изд-во МАИ, 2005. — 112 с.: ил.

Учебное пособие содержит задания для курсовых работ по теоретической механике. Задания включают вопросы по основным разделам курса и предполагают как аналитическое исследование механической системы, так и численный расчет нелинейных уравнений движения с использованием компьютера.

Предназначается для студентов авиационных и других технических вузов, изучающих курс теоретической механики.

Рецензенты:

кафедра механики и теории управления Ульяновского государственного университета (зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. А.С. Андреев);
д-р физ.-мат. наук, проф. Ю.Ф. Голубев (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

ISBN 5-7035-1616-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие содержит задания для курсовых работ по теоретической механике для студентов технических специальностей вузов. Каждое задание включает задачи по следующим основным разделам курса теоретической механики: кинематика сложного движения точки, динамика относительного движения точки, основные теоремы динамики систем, принцип Даламбера, общее уравнение аналитической механики, уравнения Лагранжа второго рода и их первые интегралы, устойчивость равновесия и малые колебания. Кроме того, в каждом варианте имеется задача, связанная с численным интегрированием нелинейных уравнений движения системы и построением графиков полученных решений на ЭВМ.

Бо́льшая часть предлагаемых для исследования механических систем заимствована из книги [1], которая более десяти лет использовалась на кафедре теоретической механики Московского авиационного института в качестве учебного пособия для студентов технических специальностей. По сравнению с [1] все задания переработаны и составлены по единой схеме, добавлен ряд новых вопросов, исправлены замеченные опечатки; одиннадцать вариантов являются новыми.

Задания, включенные в пособие, имеют различную степень сложности, от весьма простых по постановке задач до достаточно сложных и трудоемких, требующих от студента глубокого понимания курса и умения выполнять аналитические преобразования.

Пособие выпускается вместе с книгой [2], которая содержит основную теорию, методические рекомендации и большое количество примеров по всем рассматриваемым в курсовых работах вопросам.

В пособии имеются ссылки на следующие издания:

1. Задания для курсовых работ по динамике механических систем: Учеб. пособие / Н.Н. Безухова, В.К. Зародов, Н.Н. Крылова и др.; Под ред. В.К. Зародова. — М.: Изд-во МАИ, 1992. — 88 с.
2. *Руденко Т.В., Холостова О.В.* Исследование движений голономных механических систем: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МАИ, 2005. — 96 с.

ЗАДАНИЕ 1

Круглая трубка, имеющая форму колеса радиуса R, катится без проскальзывания в вертикальной плоскости по неподвижной горизонтальной направляющей. В трубке находится шарик B массы m, соединенный пружиной с точкой A трубки (рис. 1). Длина недеформированной пружины равна $2R$, жесткость пружины c. Масса колеса равномерно распределена по его ободу и равна M. Трением шарика о трубку пренебречь.

1. Ввести подвижную систему координат, связав ее начало с центром колеса и приняв, что оси движутся поступательно. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение шарика B. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Полагая $\psi = \omega t$, $\omega = \text{const}$, составить дифференциальное уравнение движения шарика B относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Считая функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ известными, определить величину силы трения между колесом и плоскостью, обеспечивающей качение колеса без проскальзывания. Воспользоваться теоремой об
М.М(изменении количества движения.) Показать, что

$$F_{\text{тр}} = (M+m)R\ddot{\psi} + mR\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right).$$

4. Считая, что $\psi = 0$ (трубка неподвижна), составить дифференциальное уравнение движения шарика, используя теорему об изменении кинетического момента.

5. Считая, что шарик прикреплен к трубке и в начальный момент времени находится на уровне центра колеса справа, найти скорость центра колеса в момент, когда шарик коснется пола. В начальный момент скорость центра колеса равна v_0. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, найти силы инерции шарика B, а также главный вектор и главный момент сил инерции колеса относительно центра масс.

7. Применяя принцип Даламбера, найти величину N силы давления шарика на трубку. Показать, что

$$N = m\left[g\cos\varphi + R\left(\dot{\varphi}^2 - \ddot{\psi}\sin\varphi\right)\right] + 2Rc\,(1-\cos\alpha)\cos\alpha,\quad \alpha = (\varphi+\psi)/2.$$

8. Полагая $c = 0$, составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и ψ. (φ и S)

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos\varphi = -2(c/m)\,(1-\cos\alpha)\sin\alpha - (g/R)\sin\varphi,$$

$$[1+2(M/m)]\,\ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi = -2(c/m)\,(1-\cos\alpha)\sin\alpha.$$

Записать интеграл энергии системы.

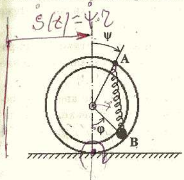

Рис. 1

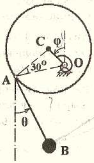

Рис. 2

11. Для условия п. 4 составить уравнение малых колебаний шарика в окрестности его нижнего положения равновесия. Найти период малых колебаний шарика.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m = 2$ кг, $M = 1$ кг, $R = 1$ м, $c = 40$ Н/м, $t_0 = 0$, $\varphi_0 = \pi/3$,

$\psi_0 = 0$, $\dot\varphi_0 = \dot\psi_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $N(t)$.

ЗАДАНИЕ 2

Однородный диск массы m_1 и радиуса r может вращаться вокруг горизонтальной оси O, расположенной на расстоянии $OC = e = r/\sqrt{3}$ от центра масс (рис. 2). Спиральная пружина жесткости c соединяет диск с неподвижной осью. К диску с помощью шарнира A подвешен невесомый стержень длины ℓ с точечным грузом B массы m_2, причем $AC \perp CO$.

1. Ввести подвижную систему координат, начало которой совпадает с точкой A, а оси движутся поступательно. Считая $\varphi(t)$ и $\theta(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение груза B. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec v_{\text{абс}}$ и $\vec w_{\text{абс}}$.

2. Считая $\varphi(t)$ заданной функцией времени, составить дифференциальное уравнение движения груза B относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1. ($\varphi(t) = \omega t$)

3. При помощи теоремы об изменении количества движения получить выражение для вертикальной проекции R реакции шарнира O. Показать, что она вычисляется по формуле (Т.о дв ч. Ма)

$$R = (m_1+m_2)g - m_1 e\left(\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi\right) +$$
$$+\ m_2\ell\left(\ddot\theta\sin\theta + \dot\theta^2\cos\theta\right) - 2m_2 e\left[\ddot\varphi\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right) - \dot\varphi^2\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

4. Полагая $m_2 = 0$, найти зависимость угловой скорости диска от угла φ, если при $\varphi = 0$ $\omega_0 = 0$. Применить теорему об изменении кинетического момента. ($\omega_0 = \pi\ c^{-1}$)

5. Полагая $m_2 = 0$, найти работу, совершаемую силами, приложенными к диску при изменении угла φ от 0 до $\pi/2$. Применяя

теорему об изменении кинетической энергии, определить наименьшую скорость, которую надо сообщить точке C при $\varphi = 0$, чтобы диск повернулся на угол $\varphi = \pi/2$. ($\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ $\varphi_1 > 2\pi$)

6. Считая $\varphi(t)$ и $\theta(t)$ заданными функциями времени, найти силы инерции точки B, а также главный вектор и главный момент относительно точки C сил инерции диска.

7. Используя принцип Даламбера, показать, что величина реакции шарнира A определяется формулой $R_{oy} = ?$

$$N_A = m_2\left(g\cos\theta + \ell\dot\theta^2\right) - 2m_2 e\left(\ddot\varphi\cos\alpha - \dot\varphi^2\sin\alpha\right),\quad \alpha = \varphi - \theta - (\pi/6).$$

8. Полагая $m_2 = 0$, составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и θ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$[(5/6)m_1 + (4/3)m_2]\,r^2\ddot\varphi + 2m_2\ell e\left[\ddot\theta\sin\alpha - \dot\theta^2\cos\alpha\right] =$$
$$= \left[m_1\sin\varphi + 2m_2\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)\right]eg - c\varphi,$$
$$2e\left[\ddot\varphi\sin\alpha + \dot\varphi^2\cos\alpha\right] + \ell\ddot\theta = -g\sin\theta.$$

Записать интеграл энергии системы.

11. Полагая $m_2 = 0$, найти, при каком условии положение равновесия $\varphi = 0$ диска будет устойчивым. Найти период малых колебаний в окрестности этого положения равновесия.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 0,2$ кг, $r = 0,2$ м, $\ell = 0,2$ м, $c = 1,95$ Н·м, $t_0 = 0$, $\varphi_0 = \pi/12$, $\theta_0 = 0$, $\dot\varphi_0 = \pi/36$, $\dot\theta_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $\theta(t)$, $R_A(t)$.

ЗАДАНИЕ 3

Тележка 1 с четырьмя колесами 4 перемещается по горизонтальной плоскости без скольжения. На тележке находятся цилиндр 2 и груз 3, соединенные гибкой нерастяжимой нитью (рис. 3). Цилиндр катается по тележке без проскальзывания. Цилиндр 2 и колеса 4 представляют собой сплошные однородные диски, имеющие радиусы r_2 и r_4 соответственно. Массы тел 1–4 равны m_1, m_2, m_3, m_4. На тележку действует сила $F = F(t)$. Угол наклона боковой поверхности тележки к горизонтали равен α.

ℓ-дл. недеф. пр-ны

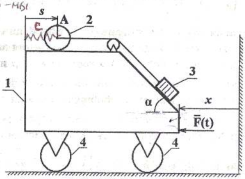

Рис. 3

1. Ввести движущуюся поступательно систему координат, связанную с тележкой. Полагая $x(t)$ и $s(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки A цилиндра. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Полагая, что тележка движется по закону $x(t) = a \sin pt$, а нить отсутствует, записать уравнение движения груза 3 относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1. Коэффициент трения между грузом и боковой поверхностью тележки равен f.

3. Найти величину N силы давления тележки на плоскость, применив теорему о движении центра масс системы. Показать, что

$$N = (m_1 + m_2 + m_3 + 4m_4)g - m_3 \ddot{s} \sin\alpha.$$

$\vec{F}_{4\,\text{сц}} = ?$

4. Пусть тележка неподвижна. Полагая $s(t)$ известной функцией, найти силу трения в точке контакта цилиндра и тележки. Применить теорему об изменении кинетического момента относительно центра масс.

5. Считая тележку неподвижной, найти скорость груза 3 в тот момент, когда пройденный им путь равен S. Применить теорему об изменении кинетической энергии. Движение начинается из состояния покоя. Коэффициент трения между грузом и плоскостью равен f.

6. Считая $x(t)$ и $s(t)$ заданными функциями времени, найти главные векторы сил инерции тележки и груза, а также главные векторы и главные моменты относительно центров масс сил инерции цилиндра и колес.

7. Полагая, что нить отсутствует, найти величину N_1 силы давления груза на тележку. Применить принцип Даламбера. Показать, что

$$N_1 = m_3 (g \cos\alpha - \ddot{x} \sin\alpha).$$

$\left(\vec{F}_{3\,\text{скольж}} = ?\right)$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты x и s.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы. $(f_{4\,\text{кач}} \neq 0)(f_{3\,\text{ск}} \neq$

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$(m_1 + m_2 + m_3 + 6m_4)\ddot{x} - (m_2 + m_3 \cos\alpha)\ddot{s} = F,$$

$$[m_3 + (3/2)m_2]\,\ddot{s} - (m_2 + m_3 \cos\alpha)\ddot{x} = m_3 g \sin\alpha.$$

При условии $F \equiv 0$ выписать циклический интеграл и интеграл энергии системы.

11. Полагая, что тележка неподвижна, а центр масс цилиндра 2 связан с тележкой при помощи горизонтальной пружины жесткости c, определить значение координаты s в положении равновесия

системы и проверить его устойчивость. Составить уравнение малых колебаний системы, найти период малых колебаний.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 10$ кг, $m_2 = 3$ кг, $m_3 = 2$ кг, $m_4 = 1$ кг, $F = F_0 \sin \omega t$, $F_0 = 3$ Н, $\omega = 0{,}5 c^{-1}$; $t_0 = 0$, $x_0 = 0{,}5$ м, $s_0 = 0{,}3$ м, $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{s}_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $x(t)$, $s(t)$, $N(t)$, $N_1(t)$.

ЗАДАНИЕ 4

Однородный круглый цилиндр 1 массы m_1 и радиуса R катится без скольжения по горизонтальной неподвижной плоскости (рис. 4). К нему приложена пара сил с моментом $M = M_0 \cos \omega t$. К оси цилиндра шарнирно прикреплен физический маятник 2 массы m_2. Момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку O перпендикулярно основанию цилиндра, равен J_0. Центр масс маятника находится в точке A на расстоянии $OA = h$. Точка O соединена горизонтальной пружиной 3 с неподвижной опорой. Жесткость пружины равна c, ℓ_0 — длина недеформированной пружины.

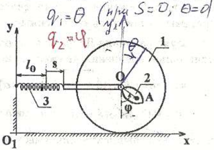

Рис. 4

1. Ввести подвижную систему координат, начало которой совмещено с центром цилиндра, а оси движутся поступательно. Считая $s(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки A. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Полагая, что масса маятника сосредоточена в точке A (случай математического маятника), а $s(t)$ — известная функция времени, составить дифференциальное уравнение движения точки A относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. При помощи теоремы о движении центра масс показать, что величина силы давления цилиндра на опорную плоскость определяется формулой

$$N = (m_1 + m_2)g + m_2 h \left(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi\right).$$

$F_{ин} = ?$

4. Полагая $s = \text{const}$, составить дифференциальное уравнение вращения физического маятника. Применить теорему об изменении кинетического момента. Найти наименьшую угловую скорость, которую необходимо сообщить маятнику в левом горизонтальном положении, чтобы он совершал круговое движение.

5. Полагаем, что $M_0 = 0$, а маятник жестко прикреплен к цилиндру и в начальный момент находится в нижнем положении, при этом пружина не деформирована. Какую наименьшую скорость надо сообщить точке O, чтобы маятник достиг верхнего вертикального положения? Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $s(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, найти для цилиндра и маятника главные векторы и главные моменты сил инерции относительно точки O.

7. Применяя принцип Даламбера, показать, что проекции R_{Ox} и R_{Oy} реакции шарнира O определяются соотношениями

$$R_{Ox} = m_2 \left[\ddot{s} + h \left(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi\right)\right],$$

$$R_{Oy} = m_2 \left[g + h \left(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi\right)\right].$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты s и φ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{aligned}
[(3/2)m_1 + m_2]\,\ddot{s} + m_2 h\,(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) &= (M_0/R)\cos\omega t - cs,\\
m_2 h\ddot{s}\cos\varphi + J_O\ddot{\varphi} &= -\,m_2 g h\sin\varphi.
\end{aligned}$$

11. Полагая, что угол φ мал, момент пары сил равен нулю ($M_0 = 0$), а пружина отсутствует ($c = 0$), составить уравнение малых колебаний маятника в окрестности его нижнего положения. Найти период малых колебаний маятника.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 40$ кг, $m_2 = 10$ кг, $R = 0{,}1$ м, $h = 0{,}06$ м, $J_O = 0{,}04$ кг·м^2, $M_0 = 39{,}2$ Н·м, $\omega = \pi c^{-1}$, $t_0 = 0$, $s_0 = 0$, $\varphi_0 = 0{,}5$, $\dot{s}_0 = \dot{\varphi}_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $s(t)$, $\varphi(t)$, $R_{Ox}(t)$, $R_{Oy}(t)$.

ЗАДАНИЕ 5

Сплошной однородный цилиндр массы m и радиуса R, разматывая нить, опускается вниз и одновременно раскачивается вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса нити O (рис. 5). Массой нити пренебречь.

За обобщенные координаты принять угол φ отклонения нити от вертикальной оси x и расстояние ξ от точки O до точки касания цилиндра и нити.

1. Ввести подвижную систему координат $O\xi\eta$, связанную с нитью. Считая $\varphi(t)$ и $\xi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение центра масс C цилиндра. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Полагая в этом пункте, что вместо цилиндра по оси ξ может без трения перемещаться колечко массы m, а $\varphi = \omega t$, $\omega = \text{const}$, составить дифференциальное уравнение движения колечка относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1. Проинтегрировать это уравнение при начальных условиях $\xi_0 = 0$, $\dot{\xi}_0 = 0$.

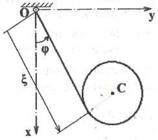

Рис. 5

3. Считая $\varphi(t)$ и $\xi(t)$ заданными функциями времени, найти проекции R_x и R_y реакции в точке O. Применить теорему о движении центра масс. Показать, что

$$\begin{aligned}
R_x &= m\Big[\ddot{\xi}\cos\varphi - \ddot{\varphi}\,(\xi\sin\varphi + R\cos\varphi) - 2\dot{\xi}\dot{\varphi}\sin\varphi - \\
&\quad - \dot{\varphi}^2\,(\xi\cos\varphi - R\sin\varphi) - g\Big],\\
R_y &= m\Big[\ddot{\xi}\sin\varphi + \ddot{\varphi}\,(\xi\cos\varphi - R\sin\varphi) + 2\dot{\xi}\dot{\varphi}\cos\varphi - \\
&\quad - \dot{\varphi}^2\,(\xi\sin\varphi + R\cos\varphi)\Big].
\end{aligned}$$

4. Полагая, что $\xi = \ell = \text{const}$, найти зависимость углового ускорения нити от угла φ. Применить теорему об изменении кинетического момента.

5. Для условия п. 4 найти зависимость угловой скорости ω нити от угла φ, если при $t = 0$ $\varphi = 0$, $\omega = \omega_0$. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая движение нити и цилиндра заданными, найти главный вектор и главный момент сил инерции цилиндра относительно

точки O.

7. Применяя принцип Даламбера, найти натяжение N нити. Показать, что
$$N = mR\left[(\ddot{\xi}/R) - \ddot{\varphi}\right]/\,2.$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид
$$\ddot{\xi} - R\ddot{\varphi} = (2/3)\left(\xi\dot{\varphi}^2 + g\cos\varphi\right), \quad \xi\ddot{\varphi} + 2\dot{\xi}\dot{\varphi} - R\dot{\varphi}^2 = -g\sin\varphi.$$

Записать интеграл энергии системы.

11. Для условия п. 4 найти положение равновесия цилиндра, проверить условие его устойчивости и вычислить период малых колебаний около этого положения равновесия.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m = 0,1$ кг, $R = 0,1$ м, $t_0 = 0$, $\varphi_0 = \pi/2$, $\xi_0 = 0,1$ м, $\dot{\varphi}_0 = 0$, $\dot{\xi}_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $\xi(t)$, $N(t)$.

ЗАДАНИЕ 6

Диск массы m_1 и радиуса r катится без проскальзывания в вертикальной плоскости по наклонной прямой, образующей с горизонтом угол α (рис. 6). Центр масс C диска находится на расстоянии a от геометрического центра O; момент инерции диска относительно оси, проходящей через точку C перпендикулярно плоскости диска, равен J. К диску с помощью шарнира прикреплен невесомый стержень OA длины ℓ с точечным грузом массы m_2 на конце.

1. Ввести подвижную систему координат с началом в точке O и поступательно движущимися осями. Полагая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютные скорости и абсолютные ускорения точек A и C. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{A_{абс}}$, $\vec{w}_{A_{абс}}$ и $\vec{v}_{C_{абс}}$, $\vec{w}_{C_{абс}}$.

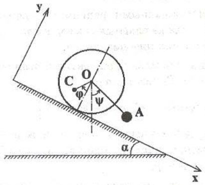

Рис. 6

2. Полагая, что $\varphi = kt^2/2$, $k = \text{const}$, составить дифференциальное уравнение движения точки A относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Используя теорему о движении центра масс, найти выражения для проекций R_x и R_y реакции, действующей на диск со стороны плоскости. Показать, что
$$\begin{aligned} R_x &= (m_1+m_2)r\ddot{\varphi} - m_1 a\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) + \\ &+ m_2\ell\left[\ddot{\psi}\cos(\alpha+\psi) - \dot{\psi}^2\sin(\alpha+\psi)\right] + (m_1+m_2)g\sin\alpha, \\ R_y &= m_1 a\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) + \\ &+ m_2\ell\left[\ddot{\psi}\sin(\alpha+\psi) + \dot{\psi}^2\cos(\alpha+\psi)\right] + (m_1+m_2)g\cos\alpha. \end{aligned}$$

4. Полагая $\varphi = \text{const}$, составить дифференциальное уравнение движения стержня OA, применяя теорему об изменении кинетического момента.

5. Считая $m_2 = 0$, определить, какую наименьшую угловую скорость надо сообщить диску, чтобы он прокатился вверх по наклонной плоскости ℓ метров. В начальный момент времени прямая OC была перпендикулярна наклонной плоскости и центр масс C диска находился в наинизшем положении. Воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии.

6. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, найти силы инерции точки A, а также главный вектор и главный момент относительно центра масс сил инерции диска.

7. Используя принцип Даламбера, определить величину R_O силы давления в шарнире O. Показать, что

$$R_O = m_2 \left[g\cos\psi - r\ddot{\varphi}\sin(\alpha+\psi) + \ell\dot{\psi}^2 \right].$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и ψ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$\left[m_1\left(a^2+r^2-2ar\cos\varphi\right)+J+m_2r^2\right]\ddot{\varphi}+m_1ar\dot{\varphi}^2\sin\varphi+$$

$$+m_2\ell r\left[\ddot{\psi}\cos(\alpha+\psi)-\dot{\psi}^2\sin(\alpha+\psi)\right]=$$

$$=(m_1+m_2)gr\sin\alpha-m_1ga\sin(\alpha+\varphi),\quad r\ddot{\varphi}\cos(\alpha+\psi)+\ell\ddot{\psi}=-g\sin\psi.$$

Записать интеграл энергии системы.

11. Полагая $m_2 = 0$, определить положения равновесия диска и исследовать их устойчивость. Записать уравнение малых колебаний диска в окрестности устойчивого положения равновесия. Показать, что период малых колебаний вычисляется по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\left[r^2+a^2-2ra\sin(\alpha+\varepsilon)\right]+J}{mga\sin\varepsilon}},\qquad \cos\varepsilon=\frac{r}{a}\sin\alpha.$$

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 0,5$ кг, $J = 0,2$ кг·м^2, $r = 0,5$ м, $a = 0,25$ м, $\ell = 1$ м, $\alpha = \pi/12$, $t_0 = 0$, $\varphi_0 = \pi/4$, $\psi_0 = \pi/6$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, $\dot{\psi}_0 = 0,2\ c^{-1}$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $R_O(t)$.

ЗАДАНИЕ 7

К тележке посредством цилиндрического шарнира A и спиральной пружины жесткости c присоединен невесомый стержень AB с точечным грузом на конце. Вес платформы P_1, длина стержня ℓ, вес груза P_2. К стержню AB приложен момент сопротивления, пропорциональный первой степени угловой скорости $\dot{\varphi}$: $M_c = -k\dot{\varphi}$.

Четыре колеса представляют собой сплошные однородные диски веса P_3 каждый и могут катиться по неподвижной плоскости без скольжения (рис. 7).

1. Ввести подвижную систему координат, начало которой совпадает с точкой A, а оси движутся поступательно. Считая $s(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки B. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{абс}$ и $\vec{w}_{абс}$.

2. Считая, что тележка движется по закону $s = \beta\sin\gamma t$ и при этом $c = 0$ и $k = 0$, составить дифференциальное уравнение движения точки B относительно подвижной системы координат, введенной в п.1.

3. Полагая, что $c \neq 0$, $k \neq 0$, а $s = \beta\sin\gamma t$, составить дифференциальное уравнение движения стержня AB, используя теорему об изменении кинетического момента.

4. С помощью теоремы о движении центра масс найти величину силы давления тележки на плоскость. Показать, что

$$N = P_1 + P_2 + 4P_3 + (P_2\ell/g)\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right).$$

5. Полагая, что тележка неподвижна ($s = \text{const}$), определить, какую наименьшую скорость необходимо сообщить точке B в нижнем положении стержня, чтобы он мог отклониться на угол $\pi/4$. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая движение тележки и точки B заданными, найти силы инерции точки B, а также главные векторы и главные моменты относительно центров масс сил инерции колес.

7. Определить величину R_A силы давления в шарнире A, используя принцип Даламбера. Показать, что

$$R_A = (P_2/g)\left(g\cos\varphi + \ell\dot\varphi^2 - \ddot s\sin\varphi\right) \quad \text{при} \quad k = 0, \quad c = 0.$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты s и φ.

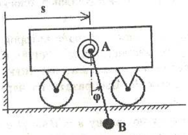

Рис. 7

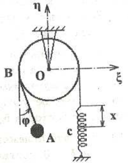

Рис. 8

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{aligned}
(P_1 + P_2 + 6P_3)\ddot s + P_2\ell\left(\ddot\varphi\cos\varphi - \dot\varphi^2\sin\varphi\right) &= 0,\\
\ddot s\cos\varphi + \ell\ddot\varphi + g\sin\varphi + g\left(k\dot\varphi + c\varphi\right)/(P_2\ell) &= 0.
\end{aligned}$$

11. Считая, что $k = 0$, $c = 0$, а угол φ мал, составить уравнение малых колебаний стержня AB в окрестности его нижнего положения. Найти период малых колебаний.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $P_1 = 50$ Н, $P_2 = 10$ Н, $P_3 = 5$ Н, $\ell = 0{,}5$ м, $k = 0$, $c = 0$, $t_0 = 0$, $s_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\dot s_0 = 0$, $\dot\varphi_0 = 0{,}1c^{-1}$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $s(t)$, $\varphi(t)$, $R_A(t)$.

ЗАДАНИЕ 8

На абсолютно гибкой нерастяжимой нити, перекинутой через блок массы M и радиуса r, висит точечный груз массы m (рис. 8). Другой конец нити прикреплен к пружине жесткости c. В положении равновесия в однородном поле силы тяжести длина участка AB нити равна ℓ_0. Блок — круглый однородный диск, его ось горизонтальна. Трением на оси блока и массами нити и пружины пренебречь. Считать, что нить натянута и ее скольжение по блоку отсутствует.

1. Ввести подвижную систему координат с началом в точке B и поступательно движущимися осями. Считая $x(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки A (при рассмотрении относительного движения использовать полярную систему координат $\ell = |AB|$, φ). Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec v_{\text{абс}}$ и $\vec w_{\text{абс}}$.

2. Считая $x(t)$ заданной функцией времени, составить дифференциальное уравнение движения груза A относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Считая $x(t)$ и $\varphi(t)$ зданными функциями времени, найти проекции N_ξ и N_η реакции оси блока. Воспользоваться теоремой о движении центра масс. Показать, что справедливы формулы

$$N_\xi = -m\left(\ell\ddot\varphi + r\dot\varphi^2 + 2\dot\ell\dot\varphi\right)\cos\varphi - m\left(\ddot x - \ell\dot\varphi^2\right)\sin\varphi, \quad \ell = \ell_0 + x - r\varphi,$$

$$N_\eta = -m\left(\ell\ddot\varphi + r\dot\varphi^2 + 2\dot\ell\dot\varphi\right)\sin\varphi + m\left(\ddot x - \ell\dot\varphi^2\right)\cos\varphi - cx - (M+m)g.$$

4. Применяя теорему об изменении момента количества движения относительно подвижного центра B, составить дифференциальное уравнение движения груза A.

5. Считая, что $\varphi \equiv 0$, получить дифференциальное уравнение вращения блока. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $x(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, выписать силы инерции груза A, а также главный момент сил инерции блока относительно точки O.

7. С помощью принципа Даламбера найти натяжение N нити на участке AB. Показать, что $N = mg\cos\varphi - m\left(\ddot x - \ell\dot\varphi^2\right)$.

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты x и φ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид ($\ell \geq 0$, $\varphi > -\pi$)

$$\begin{aligned}
[(M/2)+m]\ddot x - m\ell\dot\varphi^2 &= mg\cos\varphi - c(x+\delta), \qquad \delta = mg/c,\\
\ell\ddot\varphi + \dot\varphi\,(2\dot x - r\dot\varphi) &= -\,g\sin\varphi.
\end{aligned}$$

Написать интеграл энергии системы.

11. Полагая $\varphi \equiv 0$, найти значение x в положении равновесия системы. Проверить его устойчивость и найти период малых колебаний в окрестности этого положения равновесия.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $M = 1$ кг, $m = 0{,}1$ кг, $r = 0{,}4$ м, $\ell_0 = 1$ м, $c = 50$ Н/м; $t_0 = 0$, $x_0 = 0{,}02$ м, $\varphi_0 = \pi/6$, $\dot x_0 = 0$, $\dot\varphi_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $x(t)$, $\varphi(t)$, $N_\xi(t)$, $N_\eta(t)$.

ЗАДАНИЕ 9

Однородный стержень OC массы m_1 и длины ℓ может вращаться вокруг оси O. В точке C стержень при помощи шарнира соединен с однородным диском массы m_2 и радиуса r, к краю диска жестко прикреплена материальная точка A массы m_3. Вращению диска препятствует спиральная пружина жесткости c, прикрепленная к стержню (рис. 9). При $\varphi = \psi = 0$ пружина не деформирована.

1. Ввести подвижную систему координат, начало которой совпадает с точкой C, а оси движутся поступательно. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки A. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec v_{\text{абс}}$ и $\vec w_{\text{абс}}$.

2. Считая, что $\varphi = \omega t$, $\omega = \text{const}$, написать векторное уравнение движения точки A относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ известными, найти проекции R_x и R_y реакции в шарнире O. Применить теорему о движении центра масс механической системы. Показать, что

$$\begin{aligned}
R_x &= -\left[(m_1/2)+m_2+m_3\right]\ell\left(\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi\right) + \\
&\quad + m_3 r\left(\ddot\psi\sin\psi + \dot\psi^2\cos\psi\right) - (m_1+m_2+m_3)g,\\
R_y &= \left[(m_1/2)+m_2+m_3\right]\ell\left(\ddot\varphi\cos\varphi - \dot\varphi^2\sin\varphi\right) + \\
&\quad + m_3 r\left(\ddot\psi\cos\psi - \dot\psi^2\sin\psi\right).
\end{aligned}$$

4. Полагая, что $\psi \equiv 0$ и $c = 0$ (пружина отсутствует), составить дифференциальное уравнение вращения механической системы вокруг оси O. Применить теорему об изменении кинетического момента.

5. Считая $\varphi \equiv 0$, найти максимальный угол, на который повернется диск, если при $\psi_0 = 0$ его закрутили с угловой скоростью ω_0. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, найти главный вектор и главный момент относительно оси O сил инерции системы.

7. С помощью принципа Даламбера найти проекции N_x и N_y реакции шарнира C. Показать, что

$$N_x = (m_2+m_3)\left[g - \ell\left(\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi\right)\right] + m_3 r\left(\ddot\psi\sin\psi + \dot\psi^2\cos\psi\right),$$

$$N_y = (m_2+m_3)\ell\left(\ddot\varphi\cos\varphi - \dot\varphi^2\sin\varphi\right) + m_3 r\left(\ddot\psi\cos\psi - \dot\psi^2\sin\psi\right).$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и ψ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

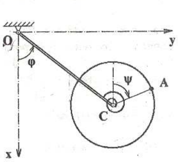

Рис. 9

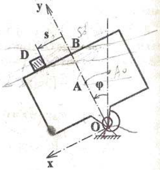

Рис. 10

10. Показать, что уравнения движения механической системы в форме уравнений Лагранжа второго рода имеют вид

$$\left[(m_1/3) + m_2 + m_3\right]\ell\ddot\varphi + m_3 r\left[\ddot\psi\cos(\varphi+\psi) - \dot\psi^2\sin(\varphi+\psi)\right] =$$

$$= \left[(m_1/2) + m_2 + m_3\right] g\sin\varphi - (c/\ell)(\varphi+\psi),$$

$$m_3\ell\left[\ddot\varphi\cos(\varphi+\psi) - \dot\varphi^2\sin(\varphi+\psi)\right] + \left[(m_2/2) + m_3\right] r\ddot\psi =$$

$$= m_3 g\sin\psi - (c/r)(\varphi+\psi).$$

Записать интеграл энергии системы.

11. Полагая $\psi \equiv 0$, показать, что положение равновесия $\varphi^* = 0$ является устойчивым, и найти период малых колебаний около этого положения равновесия.

12. Задавая численные значения параметров: $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 3$ кг, $m_3 = 1$ кг, $\ell = 1$ м, $r = 0,5$ м, $c = 10$ Н·м и начальные условия: $t_0 = 0$, $\varphi_0 = \psi_0 = 0$, $\dot\varphi_0 = 0,5\ c^{-1}$, $\dot\psi_0 = -0,5\ c^{-1}$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $R_x(t)$, $R_y(t)$.

ЗАДАНИЕ 10

Твердое тело массы M удерживается с помощью цилиндрического шарнира O и спиральной пружины жесткости c (рис. 10). Центр тяжести тела находится в точке A, где $OA = a$, $OB = b$. Когда OA находится на вертикали, пружина не напряжена. Момент инерции тела относительно горизонтальной оси O, перпендикулярной плоскости рисунка, равен J_0. По поверхности тела движется точка D массы m, при перемещении которой возникает сила сопротивления $F = -k\dot s$, $k = \mathrm{const}$, пропорциональная относительной скорости точки.

1. Ввести подвижную систему координат, связав ее с вращающимся телом. Считая $s(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки A. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec v_{\text{абс}}$ и $\vec w_{\text{абс}}$.

2. Считая $\varphi(t)$ заданной функцией времени, составить дифференциальное уравнение движения точки D относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. С помощью теоремы о движении центра масс найти выражения для проекций R_x и R_y реакции шарнира O. Показать, что они

вычисляются по формулам

$$R_x = \quad Ma\ddot{\varphi} \; + \; m\left(\ddot{s} + b\ddot{\varphi} - s\dot{\varphi}^2\right) \; - \; (M+m)g\sin\varphi,$$

$$R_y = -Ma\dot{\varphi}^2 - m\left(s\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi}^2 + 2\dot{s}\dot{\varphi}\right) + (M+m)g\cos\varphi.$$

4. Полагая, что $s = \alpha\cos\gamma t$, получить дифференциальное уравнение движения системы. Использовать теорему об изменении кинетического момента.

5. Полагая, что точка D прикреплена к телу, т.е. $s = s_0 = \mathrm{const}$, определить, какую наименьшую угловую скорость необходимо сообщить телу, чтобы оно отклонилось на угол $\pi/6$. В начальный момент прямая OA находилась на вертикали. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $s(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, найти силы инерции точки D, а также главный вектор и главный момент сил инерции тела относительно точки O.

7. Используя принцип Даламбера, показать, что давление точки на поверхность тела определяется формулой

$$N = m\left(s\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi}^2 + 2\dot{s}\dot{\varphi}\right) - mg\cos\varphi.$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты s и φ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi} + m(b\ddot{s} + 2s\dot{s}\dot{\varphi}) \quad &= \quad [(Ma + mb)\sin\varphi + ms\cos\varphi]\,g - c\varphi, \\ b\ddot{\varphi} + \ddot{s} - s\dot{\varphi}^2 \quad &= \quad g\sin\varphi - (k/m)\dot{s}, \qquad J = J_0 + m(b^2 + s^2). \end{aligned}$$

11. Считая, что тело D закреплено в точке B ($s \equiv 0$), найти условие устойчивости верхнего ($\varphi = 0$) положения равновесия системы. Определить период малых колебаний в окрестности устойчивого положения равновесия.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $M = 50$ кг, $m = 20$ кг, $a = 1$ м, $b = 1{,}5$ м, $J_0 = 100$ кг·м^2, $c = 10^4$ Н·м, $k = 50$ Н·с/м, $t_0 = 0$, $\varphi_0 = \pi/20$, $s_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = \dot{s}_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $s(t)$, $N(t)$.

ЗАДАНИЕ 11

Полая трубка кольцевой формы радиуса R может вращаться вокруг вертикальной оси Oz (рис. 11). Момент инерции трубки относительно оси Oz равен J_z. Внутри трубки без трения движется материальная точка массы m. На трубку действует момент внешних сил относительно оси Oz, равный $M_{Oz}^{(e)} = -c\varphi$ (φ — угол поворота трубки вокруг оси Oz, c — постоянная).

1. Ввести подвижную систему координат $Oxyz$, связанную с вращающейся трубкой. Считая $\varphi(t)$ и $\theta(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение материальной точки. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Полагая $\varphi = \omega t$, $\omega = \mathrm{const}$, составить дифференциальное уравнение движения точки относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Показать, что величины N_1 и N_2 составляющих силы давления материальной точки на стенки трубки, лежащих соответственно в плоскости трубки и перпендикулярно ей, определяются формулами

$$N_1 = m\left[R\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) + g\cos\theta\right], \qquad N_2 = mR\left(\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right).$$

Применить теорему об изменении количества движения.

4. Считая $\theta(t)$ известной функцией времени, показать, что дополнительный момент внешних сил, прилагаемых к трубке, обеспечивающий ее равномерное вращение с угловой скоростью $\dot{\varphi} =$

$= \Omega =$ const, вычисляется по формуле $M_{Oz} = mR^2\Omega\dot\theta\sin 2\theta + c\varphi$. Воспользоваться теоремой об изменении кинетического момента.

5. Полагая, что материальная точка закреплена в трубке ($\theta = \theta_0 =$ const), определить наименьшую угловую скорость, которую необходимо сообщить трубке, чтобы она сделала n оборотов. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $\varphi(t)$ и $\theta(t)$ заданными функциями времени, найти силы инерции точки и трубки.

7. Считая $\varphi(t)$ и $\theta(t)$ заданными функциями времени, определить проекцию R_{Oz} реакции подпятника O, а также проекции R_{Bx} и R_{By} реакции подшипника B. Считать массу трубки равной M, $AB = OD = a$. Применить принцип Даламбера. Показать, что

$$\begin{aligned}
R_{Oz} &= (M+m)g + mR\left(\ddot\theta\sin\theta + \dot\theta^2\cos\theta\right),\\
R_{Bx} &= -mR\left(\ddot\varphi\sin\theta + 2\dot\varphi\dot\theta\cos\theta\right)(1-k\cos\theta)\Big/2,\\
R_{By} &= -(m/2)kg\sin\theta + (mR/2)\left[\ddot\theta\cos\theta - \left(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\right)\sin\theta -\right.\\
&\left. - \; k\left(\ddot\theta + \dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta\right)\right], \qquad k = R/(R+a).
\end{aligned}$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и θ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$\left(J_z + mR^2\sin^2\theta\right)\ddot\varphi + mR^2\dot\varphi\dot\theta\sin 2\theta + c\varphi = 0,$$

$$R\left(\ddot\theta - \dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta\right) + g\sin\theta = 0.$$

Записать интеграл энергии системы.

11. Из уравнения п. 2 найти положения относительного равновесия материальной точки, исследовать их устойчивость. Найти период малых колебаний точки вблизи устойчивых положений относительного равновесия.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m = 1$ кг, $J_z = 0{,}5$ кг·м^2, $R = 0{,}5$ м, $c = 2$ Н·м, $t_0 = 0$, $\varphi_0 = -0{,}3$, $\theta_0 = 0{,}6$, $\dot\varphi_0 = -0{,}2\ c^{-1}$, $\dot\theta_0 = 0{,}3\ c^{-1}$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $\theta(t)$, $N_n(t)$, $N_b(t)$.

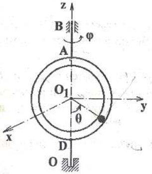

Рис. 11

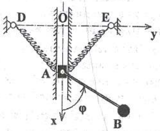

Рис. 12

ЗАДАНИЕ 12

К ползуну A массы m_1, помещенному между вертикальными направляющими, прикреплены две пружины жесткости c каждая, расположенные в вертикальной плоскости (рис. 12). Невесомый стержень AB длины ℓ, на конце которого укреплен груз B массы m_2, соединен шарнирно с ползуном A. Стержень AB и груз B движутся в вертикальной плоскости. Концы пружин D и E расположены на одной горизонтали, причем $DO = OE = a$. Когда ползун A находится на линии DE (в точке O), пружины не напряжены.

1. Ввести подвижную систему координат, начало которой совпадает с точкой A, а оси движутся поступательно. Считая $x = x_A(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки B. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Считая $x(t)$ заданной функцией времени, составить дифференциальное уравнение движения точки B относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Получить уравнение п. 2 при помощи теоремы об изменении кинетического момента.

4. Считая, что $\varphi = \omega t$, $\omega = \text{const}$, составить дифференциальное уравнение движения ползуна A. Воспользоваться теоремой об изменении количества движения.

5. Полагая, что $m_2 = 0$, а ползуну A в положении $x = x_0$ сообщена начальная скорость v_0, направленная вверх, определить его скорость в момент прохождения точки O. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $x(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, найти силы инерции точки B и ползуна A.

7. Применяя принцип Даламбера, определить величину R_A реакции вертикальных направляющих. Показать, что справедлива формула

$$R_A = m_2\ell\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right).$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты x и φ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$(m_1 + m_2)(\ddot{x} - g) - m_2\ell\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) =$$
$$= -2cx\left[1 - \left(a^2/\sqrt{x^2 + a^2}\right)\right], \qquad \ddot{x}\sin\varphi - \ell\ddot{\varphi} = g\sin\varphi.$$

Записать интеграл энергии системы.

11. Показать, что значения обобщенных координат $x = x_0$ и $\varphi = \varphi_0$ в положениях равновесия определяются соотношениями

$$\varphi_0^{(1)} = 0, \quad \varphi_0^{(2)} = \pi, \quad 2c\left(\sqrt{x_0^2 + a^2} - a\right)x_0 = (m_1 + m_2)g\sqrt{x_0^2 + a^2}.$$

Какие из этих положений равновесия устойчивы? Считая $\varphi \equiv 0$, составить уравнение малых колебаний ползуна A в окрестности его равновесного положения $x = x_0$. Найти период малых колебаний.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = m_2 = 1$ кг, $a = \ell = 1$ м, $c = 5$ Н/м, $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $\varphi_0 = 1$, $\dot{x}_0 = 0{,}5$ м/с, $\dot{\varphi}_0 = 1$ c^{-1}, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $x(t)$, $\varphi(t)$, $R_A(t)$.

ЗАДАНИЕ 13

Однородный тонкостенный цилиндр A_1 радиуса r_1 и массы m_1 висит на шероховатом неподвижном цилиндрическом штифте радиуса r_3 с центром в точке O. Внутри цилиндра A_1 находится также однородный тонкостенный цилиндр A_2 радиуса r_2 и массы m_2, который может катиться по внутренней шероховатой поверхности цилиндра A_1 (рис. 13). В точках соприкосновения K_1 и K_2 при движении системы проскальзывание отсутствует.

1. Ввести подвижную систему координат, начало которой совпадает с точкой C_1, а оси движутся поступательно. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение центра масс C_2 цилиндра A_2. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Считая в этом пункте, что вместо цилиндра A_2 по внутренней поверхности цилиндра A_1 движется материальная точка массы m_2, составить дифференциальное уравнение движения точки относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Считая функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ известными, определить величины N_1 нормальной реакции и $F_{\text{тр}_1}$ силы трения в точке K_1. Применить теорему о движении центра масс системы. Показать, что

$$N_1 = (m_1 + m_2)\left(g\cos\varphi + a\dot{\varphi}^2\right) + m_2 b\left[\ddot{\psi}\sin(\psi-\varphi) + \dot{\psi}^2\cos(\psi-\varphi)\right],$$

$$F_{\text{тр}_1} = (m_1 + m_2)\left(g\sin\varphi + a\ddot{\varphi}\right) + m_2 b\left[\ddot{\psi}\cos(\psi-\varphi) - \dot{\psi}^2\sin(\psi-\varphi)\right],$$

где $a = r_1 - r_3$, $\quad b = r_1 - r_2$.

4. Полагая, что $m_2 = 0$, составить дифференциальное уравнение движения цилиндра A_1. Применить теорему об изменении кинетического момента относительно точки K_1.

5. Полагая, что $\varphi \equiv 0$, определить, какую угловую скорость приобретет цилиндр A_2 при прохождении через нижнее ($\psi = 0$) положение, если в начальный момент времени он отклонен на угол $\psi = 2\pi/3$ и отпущен без начальной скорости.

6. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, найти главные векторы и главные моменты относительно центров масс сил инерции цилиндров A_1 и A_2.

7. С помощью принципа Даламбера найти величины N_2 нормальной реакции и $F_{\text{тр}_2}$ силы трения в точке K_2. Показать, что

$$N_2 = m_2\left\{g\cos\psi + b\dot{\psi}^2 + a\left[\dot{\varphi}^2\cos(\psi-\varphi) - \ddot{\varphi}\sin(\psi-\varphi)\right]\right\},$$

$$F_{\text{тр}_2} = m_2\left\{g\sin\psi + b\ddot{\psi} + a\left[\dot{\varphi}^2\sin(\psi-\varphi) + \ddot{\varphi}\cos(\psi-\varphi)\right]\right\}.$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и ψ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$(m_1 + m_2)\left(2a\ddot{\varphi} + g\sin\varphi\right) - m_2 b\left\{[1-\cos(\psi-\varphi)]\,\ddot{\psi} + \sin(\psi-\varphi)\dot{\psi}^2\right\} = 0,$$

$$a\left\{[1-\cos(\psi-\varphi)]\ddot{\varphi} - \sin(\psi-\varphi)\dot{\varphi}^2\right\} - 2b\ddot{\psi} = g\sin\psi.$$

Написать интеграл энергии системы.

11. Для условия п. 5 составить уравнение малых колебаний цилиндра A_2 в окрестности устойчивого положения равновесия. Определить период малых колебаний.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 2$ кг, $r_1 = 1$ м, $r_2 = 0,125$ м, $r_3 = 0,05$ м, $t_0 = 0$, $\varphi_0 = \pi/6$, $\psi_0 = \pi/3$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, $\dot{\psi}_0 = \pi/3\text{c}^{-1}$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $N_1(t)$, $F_{\text{тр}_1}(t)$.

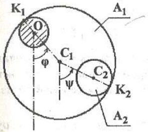

Рис. 13

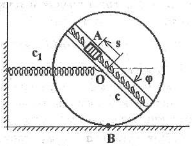

Рис. 14

ЗАДАНИЕ 14

Однородный тонкий обруч массы m_1 и радиуса r может катиться без проскальзывания по неподвижной горизонтальной прямой, оставаясь в вертикальной плоскости (рис. 14). Одновременно по идеальной направляющей, расположенной по диаметру обруча, может двигаться грузик A массы m, помещенный между невесомыми пружинами с равными жесткостями c. В недеформированном состоянии пружины имеют длину r и грузик A находится в центре O обруча. К оси обруча прикреплен конец горизонтальной пружины жесткости c_1. При $\varphi = 0$ пружина не деформирована.

1. Ввести подвижную систему координат начало которой совпадает с точкой O, а оси движутся поступательно. Считая $\varphi(t)$ и $s(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение грузика A (в относительном движении s и φ рассматривать как полярные координаты). Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Считая $\varphi(t)$ заданной функцией времени, составить дифференциальное уравнение движения точки A относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. С помощью теоремы о движении центра масс определить величину $F_{\text{тр}}$ силы трения в точке B, считая функции $\varphi(t)$ и $s(t)$ заданными. Показать, что

$$F_{\text{тр}} = (m_1 + m)r\ddot{\varphi} - m\left(\ddot{s} - s\dot{\varphi}^2\right)\cos\varphi + m\left(2\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi}\right)\sin\varphi + c_1 r\varphi.$$

4. Полагая, что $s = \text{const} = 0$ (обруч и груз составляют единое абсолютно твердое тело), получить дифференциальное уравнение для обобщенной координаты φ. Воспользоваться теремой об изменении кинетического момента.

5. Для условия п. 4 найти зависимость угловой скорости обруча от угла поворота φ. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $\varphi(t)$ и $s(t)$ заданными функциями времени, найти силы инерции грузика A, а также главный вектор и главный момент относительно точки O сил инерции обруча.

7. С помощью принципа Даламбера найти величину N силы давления обруча на плоскость. Показать, что

$$N = m\left[\left(\ddot{s} - s\dot{\varphi}^2\right)\sin\varphi + \left(2\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi}\right)\cos\varphi\right] + (m_1 + m)g.$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и s.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа II рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид ($s \leq r$)

$$\left[(2m_1 + m)r^2 + ms^2 + 2mrs\sin\varphi\right]\ddot{\varphi} - mr\left(\ddot{s} - s\dot{\varphi}^2\right)\cos\varphi +$$
$$+ 2m(s + r\sin\varphi)\dot{s}\dot{\varphi} = -c_1 r^2\varphi - mgs\cos\varphi,$$
$$-r\cos\varphi\,\ddot{\varphi} + \ddot{s} - s\dot{\varphi}^2 = -2(c/m)s - g\sin\varphi.$$

Записать интеграл энергии системы.

11. Для условия п. 4 найти значение φ в положении равновесия системы. Проверить устойчивость этого положения равновесия и найти период малых колебаний в его окрестности.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 1$ кг, $m = 0,5$ кг, $r = 1$ м, $c = c_1 = 5$ Н/м; $t_0 = 0$, $\varphi_0 = \pi/2$, $s_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 1\ c^{-1}$, $\dot{s}_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $s(t)$, $F_{\text{тр}}(t)$, $N(t)$.

ЗАДАНИЕ 15

Тело A массы m_1 скользит без трения по неподвижной плоскости, наклоненной под углом α к горизонту (рис. 15). К телу с помощью шарнира прикреплен невесомый стержень AB длины ℓ с точечным грузом массы m_2 на конце.

1. Ввести подвижную систему координат, связанную с телом A и поступательно движущимися осями. Считая $s(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки B. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Считая $s(t)$ заданной функцией времени, составить дифференциальное уравнение движения точки B относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Полагая, что тело A движется по наклонной плоскости вверх равномерно со скоростью v, а стержень вращается по заданному закону $\varphi = \varphi(t)$, определить величину силы, приложенной к телу A. Воспользоваться теоремой об изменении количества движения системы. Показать, что справедлива формула

$$F = (m_1 + m_2)g\sin\alpha + m_2\ell\left[\ddot\varphi\cos(\varphi - \alpha) - \dot\varphi^2\sin(\varphi - \alpha)\right].$$

4. Принять, что тело A неподвижно. Вдоль стержня AB равномерно со скоростью v движется колечко массы m, масса точки B равна m_2. Определить момент M, приложенный к стержню AB и обеспечивающий равномерное вращение стержня с угловой скоростью ω. В начальный момент стержень находился в нижнем положении. Применить теорему об изменении кинетического момента. Показать, что

$$M = 2m\omega v^2 t + (mvt + m_2\ell)g\sin\omega t.$$

5. Принимая, что тело A неподвижно, определить, какую наименьшую скорость v_0, направленную вниз, необходимо сообщить однородному стержню AB массы m, находящемуся в горизонтальном положении слева, чтобы стержень мог совершать круговое движение. Применить теорему об изменении кинетической энергии системы.

6. Считая $s(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, найти силы инерции тела A и точки B.

7. Применяя принцип Даламбера, найти усилие N стержня AB. Показать, что оно определяется формулой

$$N = m_2\left[g\cos\varphi + \ell\dot\varphi^2 + \ddot s\sin(\varphi - \alpha)\right].$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты s и φ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$(m_1 + m_2)(\ddot s - g\sin\alpha) - m_2\ell\left[\ddot\varphi\cos(\varphi - \alpha) - \dot\varphi^2\sin(\varphi - \alpha)\right] = 0,$$

$$\ell\ddot\varphi - \ddot s\cos(\varphi - \alpha) + g\sin\varphi = 0.$$

Записать интеграл энергии системы.

11. Для случая $\alpha = 0$ (плоскость горизонтальна) получить уравнение малых колебаний стержня AB в окрестности его нижнего положения и найти период малых колебаний.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 0{,}5$ кг, $\ell = 0{,}5$ м, $t_0 = 0$, $s_0 = 0$, $\varphi_0 = \pi/6$, $\dot s_0 = 0$, $\dot\varphi_0 = 12c^{-1}$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $s(t)$, $\varphi(t)$, $N(t)$ для двух значений параметра α: $\alpha = \pi/12$ и $\alpha = \pi/4$.

получ. ур-е дв-я

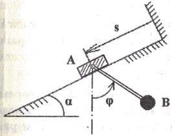

Рис. 15

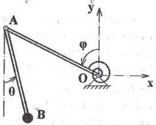

Рис. 16

ЗАДАНИЕ 16

Невесомый стержень OA длины ℓ закреплен шарнирно в точке O (рис. 16). Спиральная пружина жесткости c соединяет стержень с неподвижной осью O. При вертикальном положении стержня пружина не деформирована. К концу A стержня шарнирно прикреплен невесомый стержень AB длины ℓ с точечным грузом массы m на конце B.

1. Ввести подвижную систему координат, начало которой совпадает с точкой A, а оси движутся поступательно. Считая $\varphi(t)$ и $\theta(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки B. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Считая $\varphi = \omega t$, $\omega = \text{const}$, составить дифференциальное уравнение движения точки B относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Для условия п. 2 выразить величину N реакции стержня AB как функцию угла θ и угловой скорости $\dot{\theta}$. Воспользоваться теоремой об изменении количества движения. Показать, что

$$N = m\ell\left[\dot{\theta}^2 - \omega^2\cos(\theta - \omega t)\right] + mg\cos\theta.$$

Для случая $\omega = 0$ найти зависимость реакции от угла θ, полагая, что в начальный момент времени $\theta_0 = 0$, а скорость точки B равна v_0. Найти наименьшее значение скорости v_0, при котором стержень AB будет растянут при любом значении угла θ.

4. Используя результат п. 3, определить (при помощи теоремы об изменении кинетического момента) момент, который необходимо приложить к стержню OA, чтобы обеспечить его равномерное вращение. Принять, что OA — однородный стержень массы m_1.

5. Полагая $m = 0$, $m_{OA} = m_1$ (однородный стержень), найти скорость центра тяжести стержня OA в момент прохождения стержня через верхнее вертикальное положение, если в начальный момент времени он отклонен на угол $\pi/3$ и отпущен без начальной скорости. Применить теорему об изменении кинетической энергии. Какому условию должна удовлетворять масса m_1, чтобы стержень прошел через вертикальное положение?

6. Считая $\varphi(t)$ и $\theta(t)$ заданными функциями времени, найти силы инерции точки B.

7. Считая $\varphi(t)$ и $\theta(t)$ заданными функциями времени, определить проекции R_x и R_y реакции шарнира O. Применив принцип Даламбера, показать, что

$$R_x = m\ell\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta - \ddot{\varphi}\cos\varphi + \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right),$$

$$R_y = m\ell\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta - \ddot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) + mg.$$

8. Считая, что, кроме указанных в условии задания сил, движению стержней OA и OB препятствуют соответственно моменты $M_1 = -k_1\dot{\varphi}$ и $M_2 = -k_2\dot{\theta}$, составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и θ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. С помощью уравнений Лагранжа второго рода составить дифференциальные уравнения движения системы. Показать, что уравнения имеют вид

$$\ddot{\varphi} - \ddot{\theta}\cos(\varphi - \theta) - \dot{\theta}^2\sin(\varphi - \theta) = \quad (g/\ell)\sin\varphi - (c\varphi + k_1\dot{\varphi})/(m\ell^2),$$

$$\ddot{\theta} - \ddot{\varphi}\cos(\varphi - \theta) + \dot{\varphi}^2\sin(\varphi - \theta) = -(g/\ell)\sin\theta - k_2\dot{\theta}/(m\ell^2).$$

11. Полагая, что $k_1 = k_2 = 0$, $m = 0$, а $m_{OA} = m_1$ (однородный стержень), получить условие устойчивости верхнего ($\varphi = 0$) положения равновесия стержня OA. Найти период малых колебаний стержня в окрестности устойчивого положения равновесия.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m = 0{,}3$ кг, $\ell = 1$ м, $c = 2$ Н·м, $k_1 = k_2 = 1$ Н·м·с, $t_0 = 0$, $\varphi_0 = \pi/3$, $\theta_0 = -\pi/3$, $\dot{\varphi}_0 = \dot{\theta}_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $\theta(t)$, $N_x(t)$, $N_y(t)$.

ЗАДАНИЕ 17

Двойной маятник составлен из двух материальных точек M_1 и M_2 одинаковой массы m, невесомых стержней длины $\ell_1 \ell_2$ и пружины жесткости c (рис. 17). Пружина поддерживается в горизонтальном положении с помощью невесомого ползуна D. При $\varphi = 0$ пружина не напряжена.

1. Ввести подвижную систему координат, начало которой совпадает с точкой M_1, а оси движутся поступательно. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M_2. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Пусть стержень OM_1 вращается с угловой скоростью $\omega = \text{const}$. Составить дифференциальное уравнение движения точки M_2 относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, найти проекции R_x и R_y реакции шарнира O. Используя теорему о движении центра масс механической системы, показать, что

$$R_x = -2mg - m\left[2\ell_1\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) + \ell_2\left(\ddot{\psi}\sin\psi + \dot{\psi}^2\cos\psi\right)\right],$$

$$R_y = c\ell_1\sin\varphi + m\left[2\ell_1\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) + \ell_2\left(\ddot{\psi}\cos\psi - \dot{\psi}^2\sin\psi\right)\right].$$

4. Пусть стержни OM_1 и M_1M_2 движутся как одно тело $(\varphi = \psi)$. Составить дифференциальное уравнение движения системы. Применить теорему об изменении кинетического момента. Найти зависимость угловой скорости маятника от угла φ, если в начальный момент времени $\varphi_0 = 0$ и точке M_2 сообщена скорость v_0.

5. Полагая массу точки M_2 равной нулю, определить минимальную скорость, которую надо сообщить точке M_1 в нижнем положении, чтобы стержень OM_1 достиг горизонтального положения. Использовать теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, найти силы инерции точек M_1 и M_2.

7. Применяя принцип Даламбера, найти величину N реакции стержня M_1M_2. Показать, что она определяется формулой

$$N = m\left\{g\cos\psi - \ell_1\left[\ddot{\varphi}\sin(\psi-\varphi) - \dot{\varphi}^2\cos(\psi-\varphi)\right] + \ell_2\dot{\psi}^2\right\}.$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и ψ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$2\ell_1\ddot{\varphi} + \ell_2\left[\ddot{\psi}\cos(\psi-\varphi) - \dot{\psi}^2\sin(\psi-\varphi)\right] = -\left[2g + (c\ell_1/m)\cos\varphi\right]\sin\varphi,$$

$$\ell_1\left[\ddot{\varphi}\cos(\psi-\varphi) + \dot{\varphi}^2\sin(\psi-\varphi)\right] + \ell_2\ddot{\psi} = -g\sin\psi.$$

Записать интеграл энергии системы.

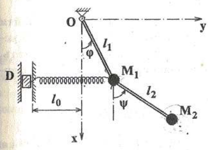

Рис. 17

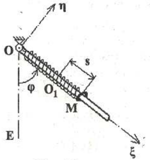

Рис. 18

11. Для условия п. 4 составить уравнение малых колебаний маятника в окрестности нижнего положения равновесия. Найти период малых колебаний.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m = 0,1$ кг, $\ell_1 = \ell_2 = 0,5$ м, $c = 5$ Н/м, $t_0 = 0$, $\varphi_0 = \pi/10$, $\psi_0 = \pi/10$, $\dot\varphi_0 = \dot\psi_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $N(t)$.

ЗАДАНИЕ 18

Колечко M веса P прикреплено к концу пружины OM и может скользить вдоль стержня, который качается в вертикальной плоскости вокруг шарнира O (рис. 18). Жесткость пружины c. Длина недеформированной пружины $OO_1 = \ell$.

1. Ввести подвижную систему координат, связав ее со стержнем. Считая $\varphi(t)$ и $s(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec v_{абс}$ и $\vec w_{абс}$.

2. Считая $\varphi(t)$ заданной функцией времени, составить дифференциальное уравнение движения точки M относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Считая $\varphi(t)$ и $s(t)$ заданными функциями времени, найти реакцию шарнира O. Воспользоваться теоремой об изменении количества движения. Вес стержня равен P_1, его длина L. Показать, что для проекций R_ξ и R_η реакции шарнира O справедливы формулы

$$R_\xi = -(P_1 + P)\cos\varphi - [(P/g)(\ell + s) + (1/2)(P_1/g)L]\,\dot\varphi^2 + (P/g)\ddot s,$$

$$R_\eta = \quad (P_1 + P)\sin\varphi + [(P/g)(\ell + s) + (1/2)(P_1/g)L]\,\ddot\varphi \; + \; 2(P/g)\dot\varphi\dot s.$$

4. Считая $\varphi(t)$ и $s(t)$ заданными функциями времени, а стержень невесомым, определить момент, приложенный к стержню и обеспечивающий заданное движение. Воспользоваться теоремой об изменении кинетического момента.

5. Полагая $\varphi = \pi/4$, определить скорость колечка в момент, когда деформация пружины увеличится на величину статического удлинения (в положении равновесия колечку сообщена скорость v_0 вниз). Использовать теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $\varphi(t)$ и $s(t)$ заданными функциями времени, найти силы инерции колечка.

7. Применяя принцип Даламбера, найти величину N силы давления колечка на стержень. Показать, что

$$N = P\sin\varphi + (P/g)\,[(\ell + s)\ddot\varphi + 2\dot\varphi\dot s].$$

8. Считая, что колечко испытывает действие силы сопротивления $\vec F = -\mu\vec v_{отн}$, составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и s.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$\ddot s + (\mu g/P)\dot s + (cg/P)s - (\ell + s)\dot\varphi^2 - g\cos\varphi = 0,$$

$$(\ell + s)\ddot\varphi + \dot s\dot\varphi + g(\ell + s)\sin\varphi = 0.$$

11. Для условия п. 5 составить уравнение малых колебаний колечка в окрестности его положения равновесия на стержне. Проинтегрировать это уравнение для трех значений параметра μ: $\mu = 0$, $\mu = 2$ Н·с/м, $\mu = 10$ Н·с/м. Значения остальных параметров определены в п. 12. Построить графики функций $s(t)$.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $P = 10$ Н, $\ell = 0,5$ м, $c = 20$ Н/м, $t_0 = 0$, $\varphi_0 = \pi/10$, $s_0 = 0$, $\dot\varphi_0 = 0,3\ c^{-1}$, $\dot s_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $s(t)$, $N(t)$ для значений μ, указанных в п. 11.

ЗАДАНИЕ 19

Проволочный круговой обруч массы M и радиуса R вращается вокруг своего вертикального диаметра под действием внешнего момента $M_z = \alpha\varphi^2$, $\alpha = \text{const}$. На обруч надета бусинка A массы m, соединенная с наивысшей точкой окружности пружиной жесткости c (рис. 19). Длина ненапряженной пружины равна ℓ_0.

1. Ввести подвижную систему координат $Oxyz$, связанную с вращающимся обручем. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение бусинки A. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Считая $\varphi(t)$ заданной функцией времени, составить дифференциальное уравнение движения точки A относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Применяя теорему о движении центра масс, показать, что проекции N_1 и N_2 силы давления бусинки на обруч, лежащие соответственно в плоскости обруча и перпендикулярно ей, вычисляются по формулам

$$N_1 = mR\left(4\dot\psi^2 + \dot\varphi^2\sin^2 2\psi\right) + mg\cos 2\psi - c\,(2R\cos\psi - \ell_0)\cos\psi,$$

$$N_2 = mR\left(\ddot\varphi\sin 2\psi + 4\dot\varphi\dot\psi\cos 2\psi\right).$$

4. Полагая обруч неподвижным, составить дифференциальное уравнение движения бусинки. Применить теорему об изменении кинетического момента относительно точки O.

5. Для условия п. 4 определить, какую скорость надо сообщить бусинке, находящейся в наинизшем положении, чтобы она достигла положения, в котором $\psi = \pi/3$.

6. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, найти силы инерции бусинки и обруча.

7. Применяя принцип Даламбера, показать, что вертикальная проекция Z_B реакции подпятника B, а также проекции X_C и Y_C реакции подшипника C на оси системы координат, введенной

в п. 1, вычисляются по формулам

$$Z_B = (M+m)g + 2mR\left(\ddot\psi\sin 2\psi + 2\dot\psi^2\cos 2\psi\right),$$

$$X_C = -mR(1 - k\cos 2\psi)\left(\ddot\varphi\sin 2\psi + 4\dot\varphi\dot\psi\cos 2\psi\right)\Big/\,2,$$

$$Y_C = -(mg/2)k\sin 2\psi - (mR/2)\sin 2\psi(1 - k\cos 2\psi)\dot\varphi^2 +$$

$$+\, mR(\cos 2\psi - k)\ddot\psi - 2mR\dot\psi^2\sin 2\psi, \qquad k = R/(R+a).$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и ψ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

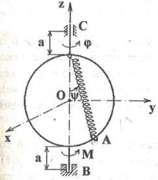

Рис. 19

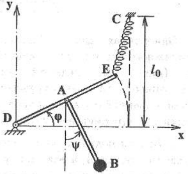

Рис. 20

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$\left[(M/2) + m\sin^2 2\psi\right]R^2\ddot\varphi + 2mR^2\dot\varphi\dot\psi\sin 4\psi = \alpha\varphi^2,$$

$$mR\left(4\ddot\psi - \dot\varphi^2\sin 4\psi\right) + 2mg\sin 2\psi - 2c(2R\cos\psi - \ell_0)\sin\psi = 0.$$

Для условия $\alpha = 0$ записать интеграл энергии и циклический интеграл.

11. Для условия п. 4 найти положения равновесия бусинки и исследовать их устойчивость. Найти период малых колебаний в окрестности нижнего ($\psi = 0$) положения равновесия (при выполнении условия его устойчивости).

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $M = 1$ кг, $m = 0,1$ кг, $R = 0,3$ м, $c = 20$ Н/м, $t_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = \pi/6$, $\dot\varphi_0 = 0,5c^{-1}$, $\dot\psi_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $N_1(t)$, $N_2(t)$.

ЗАДАНИЕ 20

Однородная балка DE длины $2a$ и массы m_1 закреплена в неподвижном шарнире D и концом E соединена с пружиной жесткости c (рис. 20). К середине балки прикреплен невесомый стержень AB длины b с точечным грузом массы m_2 на конце B. Длина недеформированной пружины равна ℓ_0; при горизонтальном положении балки DE пружина вертикальна.

1. Ввести подвижную систему координат, начало которой совпадает с точкой A, а оси движутся поступательно. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение груза B. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec v_{\text{абс}}$ и $\vec w_{\text{абс}}$.

2. Полагая $\varphi = \omega t$, $\omega = \text{const}$, составить дифференциальное уравнение движения точки B относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Считая $m_2 = 0$, а $\varphi(t)$ заданной функцией времени, определить проекции R_x и R_y реакции шарнира D. Воспользоваться теоремой о движении центра масс. Показать, что

$$R_x = -m_1 a\left(\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi\right) + 2ca\left[(\ell_0/\ell) - 1\right](1-\cos\varphi),$$

$$R_y = \quad m_1 a\left(\ddot\varphi\cos\varphi - \dot\varphi^2\sin\varphi\right) + c\left[(\ell_0/\ell) - 1\right](\ell_0 - 2a\sin\varphi) + m_1 g.$$

4. Для условия п. 3 найти момент, который необходимо приложить к балке DE, чтобы обеспечить заданное движение по закону $\varphi = \varphi(t)$. Применить теорему об изменении кинетического момента.

5. Для условия п. 3 найти наименьшую угловую скорость, которую необходимо сообщить балке DE в горизонтальном положении вверх, чтобы она достигла вертикального положения. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, найти силы инерции точки B, а также главный вектор и главный момент сил инерции балки DE относительно точки D.

7. Используя принцип Даламбера, показать, что величина N реакции шарнира A вычисляется по формуле

$$N = m_2\left\{g\cos\psi + b\dot\psi^2 + a\left[\ddot\varphi\cos(\psi-\varphi) + \dot\varphi^2\sin(\psi-\varphi)\right]\right\}.$$

8. Полагая $c = 0$, составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и ψ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$[(4/3)m_1 + m_2]a\ddot\varphi + m_2 b\left[\ddot\psi\sin(\psi-\varphi) + \dot\psi^2\cos(\psi-\varphi)\right] =$$

$$= -(m_1+m_2)g\cos\varphi + c\left[(\ell_0/\ell) - 1\right](4a\sin\varphi - 2\ell_0\cos\varphi),$$

$$a\left[\ddot\varphi\sin(\psi-\varphi) - \dot\varphi^2\cos(\psi-\varphi)\right] + b\ddot\psi = -g\sin\psi,$$

где $\ell = \sqrt{8a^2(1-\cos\varphi) + \ell_0(\ell_0 - 4a\sin\varphi)}$.

Записать интеграл энергии системы.

11. Считая, что $m_2 = 0$, записать уравнение для определения величины угла φ^* в положении равновесия балки DE.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 50$ кг, $m_2 = 0,5$ кг, $a = b = \ell_0 = 1$ м, $c = 250$ Н/м, $t_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = \pi/18$, $\dot{\varphi}_0 = \dot{\psi}_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $N(t)$.

ЗАДАНИЕ 21

Однородный диск радиуса r и массы m_1, прикрепленный шарниром к середине стержня AB, качается в вертикальной плоскости около горизонтальной оси O, перпендикулярной плоскости рисунка (рис. 21). Стержень AB длины ℓ и массы m_2 подвешен на двух параллельных невесомых стержнях AA_1 и BB_1 одинаковой длины ℓ, которые качаются в одной плоскости с диском. Трением в шарнирах пренебречь. Расстояние от шарнира O до центра масс диска равно $OC = b$. К диску приложен момент сопротивления $M = -k\dot{\theta}$, $k = \text{const}$, пропорциональный угловой скорости.

1. Ввести подвижную систему координат, начало которой совпадает с точкой O, а оси движутся поступательно. Считая $\varphi(t)$ и $\theta(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки C. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Принять в этом пункте, что вместо диска к точке O прикреплен невесомый стержень OC длины b с точечной массой m_1 на конце C. Считая $\varphi(t)$ заданной функцией времени, записать уравнение движения точки C относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Полагая, что $\varphi(t)$ и $\theta(t)$ — заданные функции времени, найти проекции R_x и R_y реакции шарнира O. Применить теорему об изменении количества движения системы. Показать, что

$$R_x = -m_1\left[\ell\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) + b\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\right] - m_1 g,$$

$$R_y = \quad m_1\left[\ell\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) + b\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right)\right].$$

4. Найти момент, который надо приложить к диску для условий п. 3, чтобы обеспечить заданное вращение по закону $\theta = \theta(t)$. Применить теорему об изменении кинетического момента.

5. Считая $\varphi = \text{const}$, определить скорость центра диска в момент прохождения верхнего положения, если в нижнем положении ему сообщена скорость v_0. Применить теорему об изменении кинетической энергии. Найти условие, которому удовлетворяет наименьшая угловая скорость диска в нижнем положении, необходимая для достижения диском верхнего положения.

6. Считая $\varphi(t)$ и $\theta(t)$ заданными функциями времени, найти главный вектор и главный момент относительно точки C сил инерции диска, а также главные векторы и главные моменты сил инерции стержней AA_1 и BB_1 относительно точек подвеса.

7. Используя принцип Даламбера, найти усилия N_A и N_B в стержнях AA_1 и BB_1, полагая, что шарнир O прикреплен к середине стержня AB. Показать, что справедлива формула

$$N_A = N_B = \Big\{(m_1 + m_2)\left(g\cos\varphi + \ell\dot{\varphi}^2\right) +$$

$$+ m_1 b\left[\ddot{\theta}\sin(\theta - \varphi) + \dot{\theta}^2\cos(\theta - \varphi)\right]\Big\}\Big/2.$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и θ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что

дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$(m_1+m_2)\left(\ell\ddot{\varphi}+g\sin\varphi\right)+m_1 b\left[\ddot{\theta}\cos(\theta-\varphi)-\dot{\theta}^2\sin(\theta-\varphi)\right]=0,$$

$$\ell\left[\ddot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)+\dot{\varphi}^2\sin(\theta-\varphi)\right]+\left(\frac{r^2}{2b}+b\right)\ddot{\theta}=-g\sin\theta-\frac{k\dot{\theta}}{m_1 b}.$$

11. Считая, что $\varphi=\mathrm{const}$, составить уравнение малых колебаний диска в окрестности его нижнего ($\theta=0$) положения равновесия. Проинтегрировать это уравнение для двух значений параметра k: $k=1$ Н·м·с и $k=10$ Н·м·с. Значения остальных параметров задачи приведены в п. 12. Построить графики функций $\theta(t)$.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1=5$ кг, $m_2=5$ кг, $r=0,25$ м, $\ell=1$ м, $b=0,125$ м, $k=10$ Н·м·с, $t_0=0$, $\varphi_0=\pi/2$, $\theta_0=\pi/2$, $\dot{\varphi}_0=0$, $\dot{\theta}_0=0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $\theta(t)$, $N_A(t)$.

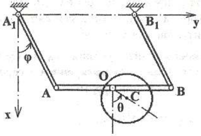

Рис. 21

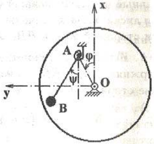

Рис. 22

ЗАДАНИЕ 22

Однородный диск массы m_1 и радиуса R вращается вокруг горизонтальной неподвижной оси, перпендикулярной его плоскости

и проходящей через центр O (рис. 22). В точке A ($OA=a$) к диску шарнирно прикреплен невесомый стержень AB длины ℓ с грузом B массы m_2 на конце. Спиральная пружина жесткости c прикреплена своими концами к диску и стержню. Пружина не деформирована при $\varphi=\psi=0$. Трение на оси O отсутствует.

1. Ввести подвижную систему координат, начало которой совпадает с точкой A, а оси движутся поступательно. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение груза B. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Считая, что $\varphi(t)$ — заданная функция времени, жесткость пружины $c=0$, а к точке B приложена сила сопротивления $\vec{R}=-k\vec{v}_{\text{отн}}$, пропорциональная относительной скорости движения точки, составить дифференциальное уравнение движения груза B относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Полагая $\varphi=\pi/6$, составить дифференциальное уравнение движения однородного стержня AB массы m с точечным грузом массы m_2 на конце B. Жесткость спиральной пружины c. Применить теорему об изменении кинетического момента.

4. Для условия п. 3 найти проекции реакции шарнира A как функции угла ψ, если в момент времени t_0 $\psi_0=-\pi/2$, $\dot{\psi}_0=0$. Применить теорему об изменении количества движения.

5. Для условия п. 3 определить, на какой угол отклонится стержень AB, если в его нижнем положении точке B сообщена скорость v_0. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, найти силы инерции груза B, а также главный вектор и главный момент относительно точки O сил инерции диска.

7. Используя принцип Даламбера, показать, что вертикальная проекция N_{Ox} реакции оси диска определяется соотношением

$$N_{Ox}=(m_1+m_2)g-m_2\left[a\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi+\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)-\ell\left(\ddot{\psi}\sin\psi+\dot{\psi}^2\cos\psi\right)\right].$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и ψ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{aligned}(m_1R^2+2m_2a^2)\ddot{\varphi}+2m_2a\ell\left[\ddot{\psi}\cos(\varphi+\psi)-\dot{\psi}^2\sin(\varphi+\psi)\right] &- \\ -2m_2ga\sin\varphi+2c(\varphi+\psi) &= 0,\\ m_2\ell\left\{a\left[\ddot{\varphi}\cos(\varphi+\psi)-\dot{\varphi}^2\sin(\varphi+\psi)\right]+\ell\ddot{\psi}\right\} &+ \\ +m_2g\ell\sin\psi+c(\varphi+\psi) &= 0.\end{aligned}$$

Записать интеграл энергии системы.

11. Найти соотношение между углами φ и ψ в положении равновесия системы. Считая, что диск неподвижен ($\varphi\equiv\varphi_0=\mathrm{const}$), найти условие устойчивости соответствующего положения равновесия $\psi=\psi_0$ стержня AB, составить уравнение малых колебаний стержня в окрестности устойчивого положения равновесия и найти период малых колебаний.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1=m_2=1$ кг, $R=\ell=1$ м, $a=0,5$ м, $c=1$ Н·м, $t_0=0$, $\varphi_0=\pi/6$, $\psi_0=0$, $\dot{\varphi}_0=\dot{\psi}_0=0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $N_{Ox}(t)$ для двух значений коэффициента сопротивления $k=1$ Н·с/м и $k=10$ Н·с/м.

ЗАДАНИЕ 23

Однородное кольцо радиуса R и массы m_1 вращается под действием пары сил с моментом $M=M_0\sin\gamma t$ вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через точку O_1. Внутри кольца скользит без трения однородный стержень AB массы m_2 и длины 2ℓ. К кольцу приложен момент сопротивления $M_c=-k\dot{\varphi}$, пропорциональный первой степени угловой скорости (рис. 23).

1. Ввести подвижную систему координат, начало которой совпадает с точкой O, а оси движутся поступательно. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение середины C стержня. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Принять в этом пункте, что вместо стержня внутри кольца движется материальная точка C массы m. Считая $\varphi(t)$ заданной функцией времени, составить дифференциальное уравнение движения точки C относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Полагая $\varphi=0$, составить дифференциальное уравнение движения стержня. Воспользоваться теоремой об изменении кинетического момента. Найти зависимость углового ускорения стержня, а также его угловой скорости от угла ψ, если в начальный момент времени $\psi_0=0$, $\dot{\psi}_0=\omega_0$.

4. Для условия п. 3 найти зависимость от угла ψ величин реакций кольца на стержень в точках A и B. Применить теорему о движении центра масс.

5. Полагая $\psi=\varphi$ (стержень прикреплен к кольцу), составить дифференциальное уравнение движения системы, применив теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме.

6. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, найти главные векторы и главные моменты относительно центров масс сил инерции стержня AB и кольца.

7. С помощью принципа Даламбера найти выражения для проекций N_x и N_y реакции шарнира O_1. Показать, что

$$N_x = -(m_1+m_2)R\left(\ddot\varphi\cos\varphi - \dot\varphi^2\sin\varphi\right) - $$
$$- m_2\sqrt{R^2-\ell^2}\left(\ddot\psi\cos\psi - \dot\psi^2\sin\psi\right),$$
$$N_y = -(m_1+m_2)\left[R\left(\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi\right) + g\right] - $$
$$- m_2\sqrt{R^2-\ell^2}\left(\ddot\psi\sin\psi + \dot\psi^2\cos\psi\right).$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и ψ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$(2m_1+m_2)R^2\ddot\varphi + m_2R\sqrt{R^2-\ell^2}\left[\ddot\psi\cos(\psi-\varphi) - \dot\psi^2\sin(\psi-\varphi)\right] +$$
$$+ (m_1+m_2)gR\sin\varphi = M_0\sin\gamma t - k\dot\varphi, \qquad \left[R^2-(2/3)\ell^2\right]\ddot\psi +$$
$$+ \sqrt{R^2-\ell^2}\left\{R\left[\ddot\varphi\cos(\psi-\varphi) + \dot\varphi^2\sin(\psi-\varphi)\right] + g\sin\psi\right\} = 0.$$

11. Записать уравнение, полученное в п. 5, для малых значений угла φ. Найти решение этого уравнения в случае, когда $m_2 = 0$, $M_0 = 0$, для двух значений коэффициента сопротивления: $k = 1$ Н·м·с и $k = 10$ Н·м·с, полагая, что в начальный момент времени $\varphi_0 = 0$, $\dot\varphi_0 = 0,2\text{с}^{-1}$. Значения остальных параметров взять из п. 12. Построить графики полученных решений $\varphi = \varphi(t)$. Найти также частное решение уравнения при $k = 0$, $\gamma = \sqrt{g/(2R)}$, $M_0 \neq 0$.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 1$ кг, $R = 0,5$ м, $\ell = 0,25$ м, $M_0 =$

$= 15$ Н·м, $\gamma = 3\pi/2\text{с}^{-1}$, $k = 10$ Н·м·с, $t_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = \pi/6$, $\dot\varphi_0 = \dot\psi_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $N(t) = \sqrt{N_x^2 + N_y^2}$.

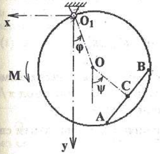

Рис. 23

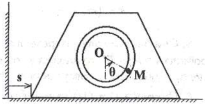

Рис. 24

ЗАДАНИЕ 24

Невесомая трубка, выгнутая в форме кругового кольца радиуса r, закреплена на платформе, которая имеет массу m_1 и может скользить без трения по горизонтальной плоскости (рис. 24). В трубке движется без трения точечный груз M массы m_2.

1. Ввести подвижную систему координат, связанную с платформой. Считая $s(t)$ и $\theta(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec v_{\text{абс}}$ и $\vec w_{\text{абс}}$.

2. Считая, что $s(t)$ — заданная функция времени, а точка M испытывает действие силы сопротивления $\vec R = -k\vec v_{\text{отн}}$, $k = \text{const}$, составить дифференциальное уравнение движения точки M относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Составить дифференциальное уравнение, полученное в п. 2, при помощи теоремы об изменении кинетического момента.

4. Считая $s(t)$ и $\theta(t)$ заданными функциями времени, найти величину F горизонтальной силы, приложенной к платформе и обеспечивающей заданное движение. Применить теорему о движении центра масс. Показать, что

$$F = (m_1 + m_2)\ddot{s} + m_2 r \left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta\right).$$

5. Считая $s = \text{const}$, определить, какую скорость v_0 необходимо сообщить точке M, отклонив ее от нижнего положения на угол $\pi/6$ влево, чтобы точка совершала круговое движение.

6. Считая $s(t)$ и $\theta(t)$ заданными функциями времени, найти силы инерции груза M и платформы.

7. Применяя принцип Даламбера, показать, что выражения, определяющие величины R реакции плоскости и N силы давления груза M на стенки кольца, имеют вид

$$R = (m_1 + m_2)g + m_2 r \left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2 \cos\theta\right),$$

$$N = m_2 \left(g\cos\theta - \ddot{s}\sin\theta + r\dot{\theta}^2\right).$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты s и θ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$(m_1 + m_2)\ddot{s} + m_2 r \left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta\right) = 0, \qquad \ddot{s}\cos\theta + r\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0.$$

Записать интеграл энергии системы и циклический интеграл.

11. Считая угол θ малым, составить уравнение малых колебаний точки M в окрестности ее нижнего положения. Найти период малых колебаний.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 20$ кг, $m_2 = 5$ кг, $r = 0{,}4$ м, $t_0 = 0$, $s_0 = 0$, $\theta_0 = 0$, $\dot{s}_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 2$ c^{-1}, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $s(t)$, $\theta(t)$, $N(t)$, $R(t)$.

ЗАДАНИЕ 25

Однородный цилиндр массы m_1 и радиуса r может катиться без скольжения внутри неподвижного полого цилиндра радиуса R (рис. 25). К центру O_1 подвижного цилиндра подвешен невесомый стержень OA длины ℓ с точечной массой m_2 на конце A.

1. Ввести подвижную систему координат, начало которой совпадает с точкой O_1, а оси движутся поступательно. Считая $\theta(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение груза A. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Считая $\theta(t)$ заданной функцией времени, составить дифференциальное уравнение движения груза A относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Считая $\theta(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, найти величину P силы давления подвижного цилиндра на неподвижный цилиндр. Применить теорему об изменении количества движения. Показать, что

$$P = (m_1 + m_2)\left[g\cos\theta + (R - r)\dot{\theta}^2\right] + m_2\ell\left[\ddot{\varphi}\sin(\varphi - \theta) + \dot{\varphi}^2\cos(\varphi - \theta)\right].$$

4. Полагая $m_2 = 0$, найти силу сцепления в точке соприкосновения цилиндров как функцию угла θ. Применить теорему об изменении кинетического момента.

5. Для условия п. 4 определить, какую минимальную скорость необходимо сообщить точке O_1 в нижнем положении, чтобы центр цилиндра поднялся до уровня горизонтального диаметра неподвижного цилиндра. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $\theta(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, найти силы инерции точки A, а также главный вектор и главный момент относительно центра масс сил инерции цилиндра.

7. С помощью принципа Даламбера определить величину N реакции стержня O_1A. Показать, что

$$N = m_2 \left\{ g\cos\varphi - (R-r)\left[\ddot\theta \sin(\varphi-\theta) - \dot\theta^2\cos(\varphi-\theta)\right] + \ell\dot\varphi^2 \right\}.$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты θ и φ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$[(3/2)m_1 + m_2](R-r)\ddot\theta + m_2\ell\left[\ddot\varphi\cos(\varphi-\theta) - \dot\varphi^2\sin(\varphi-\theta)\right] =$$

$$= -(m_1+m_2)g\sin\theta,$$

$$(R-r)\left[\ddot\theta\cos(\varphi-\theta) + \dot\theta^2\sin(\varphi-\theta)\right] + \ell\ddot\varphi = -g\sin\varphi.$$

Записать интеграл энергии системы.

11. Для условия п. 4 записать уравнение малых колебаний цилиндра в окрестности его нижнего положения. Найти период малых колебаний.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 1$ кг, $r = 0{,}1$ м, $R = 0{,}5$ м, $\ell = 0{,}5$ м, $t_0 = 0$, $\theta_0 = \pi/4$, $\varphi_0 = 0$, $\dot\theta_0 = \dot\varphi_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\theta(t)$, $\varphi(t)$, $N(t)$.

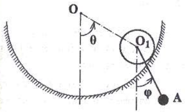

Рис. 25

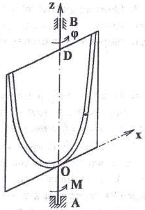

Рис. 26

ЗАДАНИЕ 26

Прямоугольная пластина может вращаться без трения вокруг вертикальной оси симметрии AB (рис. 26). По каналу, вырезанному в форме параболы согласно уравнению $2pz = x^2$, может двигаться без сопротивления точечный груз массы m. Момент инерции пластины относительно оси AB равен J. Положение пластины задается углом ее поворота φ, а положение точки на пластине — координатой x.

1. Ввести подвижную систему координат, связав ее с пластиной. Считая $\varphi(t)$ и $x(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение груза. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec v_{\text{абс}}$ и $\vec w_{\text{абс}}$.

2. Считая $\varphi(t)$ заданной функцией времени, составить дифференциальное уравнение движения груза относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Считая $\varphi(t)$ и $x(t)$ заданными функциями времени, определить проекцию N_y силы давления груза на стенку канала. Применить теорему об изменении количества движения. Показать, что

$$N_y = m\,(2\dot{\varphi}\dot{x} + \ddot{\varphi}x)\,.$$

4. Считая, что в начальный момент времени $\varphi_0 = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = \omega_0$, найти угловую скорость ω_1 пластины при $x = p$. Применить теорему об изменении кинетического момента.

5. Считая, что груз прикреплен к пластине в положении, где $x = p$, и что к пластине приложены постоянный вращающий момент M и момент сопротивления $M_c = -\alpha\dot{\varphi}$, определить число оборотов пластины к тому моменту, когда ее угловая скорость станет равной ω_1. Начальная угловая скорость пластины равна нулю. Применить теорему об изменении кинетической энергии системы.

6. Считая $\varphi(t)$ и $x(t)$ заданными функциями времени, найти силы инерции груза и пластины.

7. Используя принцип Даламбера, определить вертикальную проекцию R_{Az} реакции подпятника A, а также проекции R_{Bx} и R_{By} реакции подшипника B. Масса пластины равна m_1, ее высота $OD = b$, расстояния $AO = DB = a$. Показать, что

$$R_{Az} = (m + m_1)g + (m/p)(x\ddot{x} + \dot{x}^2),$$

$$R_{Bx} = \frac{m}{2a+b}\left[-gx - x\dot{\varphi}^2\left(a + \frac{x^2}{2p}\right) + \ddot{x}\left(a - \frac{x^2}{2p}\right) - \frac{x\dot{x}^2}{p}\right],$$

$$R_{By} = \frac{m}{2a+b}\,(x\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{x})\left(a + \frac{x^2}{2p}\right).$$

8. Учитывая действие моментов M и M_c, составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения динамики и приняв за обобщенные координаты φ и x.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$(J + mx^2)\ddot{\varphi} + 2mx\dot{x}\dot{\varphi} = M - \alpha\dot{\varphi},$$

$$\ddot{x}\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right) + \frac{x\dot{x}^2}{p^2} + \left(\frac{g}{p} - \dot{\varphi}^2\right)x = 0.$$

11. Считая угловую скорость $\dot{\varphi} = \omega$ пластины постоянной, найти положения относительного равновесия точечного груза и исследовать их устойчивость. Определить, при каком соотношении между параметрами существует не одно положение относительного равновесия. Найти период малых колебаний точки вблизи устойчивого положения равновесия.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m = 5$ кг, $J = 3$ кг·м^2, $p = 1$ м, $\alpha = 5$ Н·м·с, $t_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $x_0 = 0,5$ м, $\dot{\varphi}_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $x(t)$, $N_y(t)$ для трех значений величины M: $M = 0; 5; 10$ Н·м.

ЗАДАНИЕ 27

Зубчатое колесо 2 массы m_2 и радиуса r находится во внутреннем зацеплении с зубчатым колесом 1 массы m_1 и радиуса R, вращающимся вокруг неподвижной горизонтальной оси O под действием постоянного момента M_1. Кривошип OA массы m_3 в точке O насажен на ту же ось, а в точке A шарнирно соединен с центром колеса 2 (рис. 27). К кривошипу приложен постоянный момент M_2 и упругий момент спиральной пружины жесткости c. При $\varphi = 0$ пружина не деформирована.

1. Ввести подвижную систему координат, связанную с колесом 1. Считая $\theta(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, вы-

числить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки A. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Принять в этом пункте, что $M_2 = 0$, $c = 0$, колесо 2 невесомо, а в его центре A закреплена точечная масса m_2. Считая $\theta(t)$ заданной функцией времени, составить векторное дифференциальное уравнение движения точки A относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Считая $\theta(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, найти проекции R_{Ox} и R_{Oy} реакции шарнира O. Применить теорему о движении центра масс. Показать, что

$$R_{Ox} = \quad [m_2 + (m_3/2)]\,(R - r)\,(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)\,,$$

$$R_{Oy} = -[m_2 + (m_3/2)]\,(R - r)\,(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) + (m_1 + m_2 + m_3)g.$$

4. Считая, что $\theta \equiv \mathrm{const}$, составить дифференциальное уравнение движения системы, воспользовавшись теоремой об изменении кинетического момента системы относительно осей O и A.

5. Для условия п. 4 определить, какую угловую скорость будет иметь стержень OA в горизонтальном положении, если в верхнем вертикальном положении ему сообщена угловая скорость ω. Определить также, при каком условии стержень достигнет горизонтального положения. Применить теорему об изменении кинетической энергии системы.

6. Считая функции $\theta(t)$ и $\varphi(t)$ заданными, определить главные векторы и главные моменты относительно центров масс сил инерции колес и стержня.

7. Используя принцип Даламбера, найти проекции N_{Ax} и N_{Ay} реакции шарнира A, а также величину $F_{\text{сц}}$ силы сцепления в точке касания колес 1 и 2. Показать, что

$$N_{Ax} = m_2(R - r)\,(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)\,,$$

$$N_{Ay} = m_2\left[-(R - r)\,(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) + g\right],$$

$$F_{\text{сц}} = m_2\left[R\ddot{\theta} + (R - r)\ddot{\varphi}\right]\Big/2.$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты θ и φ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$\left[(3m_2 + (2/3)m_3)\,(R - r)\ddot{\varphi} + m_2R\ddot{\theta} - (2m_2 + m_3)g\sin\varphi\right](R - r) =$$

$$= -2c\varphi + 2M_2, \qquad \left[(m_1 + m_2)R\ddot{\theta} + m_2(R - r)\ddot{\varphi}\right]R = 2M_1.$$

Для случая $M_1 = M_2 = 0$ записать интеграл энергии и циклический интеграл системы.

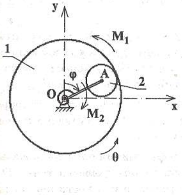

Рис. 27

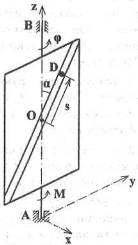

Рис. 28

11. Полагая, что $M_1 = M_2 = 0$, получить условие устойчивости верхнего ($\varphi = 0$) положения относительного равновесия колеса 2. Найти период его малых колебаний в окрестности этого положения равновесия.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 1$ кг, $m_3 = 1$ кг, $R = 1$ м, $r = 0,2$ м, $c = 2$ Н·м, $M_1 = 0,5$ Н·м, $M_2 = 0,2$ Н·м, $t_0 = 0$, $\theta_0 = \Pi/2$, $\varphi_0 = \pi/6$, $\dot\theta_0 = 2c^{-1}$, $\dot\varphi_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\theta(t)$, $\varphi(t)$, $N_{A_x}(t)$, $N_{A_y}(t)$.

ЗАДАНИЕ 28

К однородной пластине, которая может вращаться вокруг вертикальной оси AB без трения, приложен момент $M = -c\varphi$, $c = \mathrm{const}$, пропорциональный углу φ поворота пластины (рис. 28). По прямолинейному каналу, вырезанному в пластине под углом α к оси z, движется материальная точка D массы m. На точку действует сила сопротивления, равная $-k\vec{v}_{\text{отн}}$, $k = \mathrm{const}$. Момент инерции пластины относительно оси AB равен J, расстояния AO и OB равны ℓ.

1. Ввести подвижную систему координат $Axyz$, связанную с пластиной. Считая $\varphi(t)$ и $s(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки D. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Считая $\varphi(t)$ заданной функцией времени, составить дифференциальное уравнение движения точки D относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Считая $\varphi(t)$ и $s(t)$ заданными функциями времени, показать, что величины P_1 и P_2 составляющих силы давления точки D на стенки канала, лежащих соответственно в плоскости пластины и перпендикулярно ей, вычисляются по формулам

$$P_1 = m\left(g + s\dot\varphi^2\cos\alpha\right)\sin\alpha, \qquad P_2 = m\left(s\ddot\varphi + 2\dot s\dot\varphi\right)\sin\alpha.$$

4. Считая $s(t)$ заданной функцией времени, определить момент, который необходимо приложить к пластине, чтобы преодолеть упругий момент и обеспечить равномерное вращение пластины с угловой скоростью ω. Воспользоваться теоремой об изменении кинетического момента.

5. Считая, что точка D прикреплена к пластине ($s = s_0 = \mathrm{const}$), определить число оборотов пластины от начала ее вращения с угловой скоростью ω_0 до остановки. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $\varphi(t)$ и $s(t)$ заданными функциями времени, найти силы инерции точки D и пластины.

7. Применяя принцип Даламбера, показать, что проекции N_{Bx} и N_{By} реакции подшипника B определяются формулами

$$N_{Bx} = -m\sin\alpha(\ell + s\cos\alpha)\left(s\ddot\varphi + 2\dot s\dot\varphi\right)/(2\ell),$$

$$N_{By} = -(m/2)\left\{(s/\ell)\sin\alpha[(\ell + s\cos\alpha)\dot\varphi^2 + g] - \ddot s\sin\alpha\right\}.$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и s.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$(J + ms^2\sin^2\alpha)\ddot\varphi + 2ms\dot s\dot\varphi\sin^2\alpha + c\varphi = 0,$$

$$m\ddot s - ms\dot\varphi^2\sin^2\alpha + mg\cos\alpha + k\dot s = 0.$$

11. Найти решение уравнения, полученного в п. 2, для случая $\varphi = \omega t$, $\omega = \mathrm{const}$, при следующих начальных условиях: $t_0 = 0$, $s_0 = 0$, $\dot s_0 = 0$. Полагая $k = 0$, найти скорость вылета точки D из трубки, если длина трубки равна L.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m = 1$ кг, $J = 3$ кг·м^2, $\alpha = \pi/6$, $k = 10$ Н·с/м, $c = 10$ Н·м, $\ell = 3$ м, $t_0 = 0$, $\varphi_0 = \pi/6$, $s_0 = 0$, $\dot\varphi_0 = 0$, $\dot s_0 = 20$ м/с, составить

программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $s(t)$, $N_{B_x}(t)$, $N_{B_y}(t)$.

ЗАДАНИЕ 29

Однородный диск массы m_1 и радиуса R может вращаться вокруг горизонтальной оси O, перпендикулярной его плоскости. В точке A к диску прикреплен невесомый стержень AB длины ℓ с грузом B массы m_2 на конце (рис. 29). Спиральная пружина жесткости c прикреплена своими концами к диску и к неподвижной опоре. Пружина не деформирована при $\varphi = \varphi^*$. Момент сопротивления в шарнире A равен $M_c = -k(\dot{\psi} - \dot{\varphi})$, $k = \text{const}$.

1. Ввести подвижную систему координат, начало которой совпадает с точкой A, а оси движутся поступательно. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение груза B. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Считая, что $k = 0$, а $\varphi(t)$ — заданная функция времени, составить дифференциальное уравнение движения точки B относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Используя теорему об изменении количества движения, показать, что проекции R_{Ox} и R_{Oy} реакции оси диска определяются соотношениями

$$R_{Ox} = m_2\left[R\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) + \ell\left(\ddot{\psi}\cos\psi - \dot{\psi}^2\sin\psi\right)\right],$$

$$R_{Oy} = m_2\left[R\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) + \ell\left(\ddot{\psi}\sin\psi + \dot{\psi}^2\cos\psi\right)\right] + (m_1 + m_2)g.$$

4. Полагая, что $\varphi = \text{const}$, а AB — однородный стержень массы m_1, составить дифференциальное уравнение его движения. Воспользоваться теоремой об изменении кинетического момента.

5. Полагая $k = 0$, а $\psi = \varphi$ (стержень жестко прикреплен к диску), определить, на какой угол повернется система, если в положении, когда $\varphi = \varphi^*$, ей сообщили угловую скорость ω_0. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, найти силы инерции груза B и диска.

7. Применяя принцип Даламбера, найти усилие N стержня AB, считая, что $k = 0$. Показать, что оно вычисляется по формуле

$$N = m_2\left\{g\cos\psi + \ell\dot{\psi}^2 + R\left[\ddot{\varphi}\sin(\varphi - \psi) + \dot{\varphi}^2\cos(\varphi - \psi)\right]\right\}.$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и ψ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$[(m_1/2) + m_2]R\ddot{\varphi} + m_2\ell\left[\ddot{\psi}\cos(\varphi - \psi) + \dot{\psi}^2\sin(\varphi - \psi)\right] +$$
$$+ m_2 g\sin\varphi + (c/R)(\varphi - \varphi^*) - (k/R)(\dot{\psi} - \dot{\varphi}) = 0,$$

$$\ddot{\varphi}\cos(\varphi - \psi) + (\ell/R)\ddot{\psi} - \dot{\varphi}^2\sin(\varphi - \psi) + (g/R)\sin\psi +$$
$$+ k\left(\dot{\psi} - \dot{\varphi}\right)/(m_2 R\ell) = 0.$$

11. Принять в уравнении, полученном в п. 4, угол ψ малым. Найти решение этого уравнения и построить зависимость $\psi(t)$ для двух значений параметра k: $k = 1$ Н·м·с и $k = 5$ Н·м·с при следующих начальных условиях: $t_0 = 0$, $\psi_0 = 0$, $\dot{\psi}_0 = 0{,}2c^{-1}$. Численные значения остальных параметров взять из п. 12.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 0{,}1$ кг, $m_2 = 0{,}05$ кг, $R = \ell = 1$ м, $c = 1$ Н·м, $\varphi^* = 0$,

$k = 0$, $T_0 = 0$, $\varphi_0 = \psi_0 = \pi/2$, $\dot\varphi_0 = \dot\psi_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $R_{Ox}(t)$.

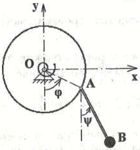

Рис. 29

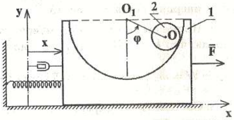

Рис. 30

ЗАДАНИЕ 30

В брусе 1 массы m_1 сделана цилиндрическая выточка радиуса R, в которой катается без скольжения однородный круглый цилиндр 2 массы m_2 и радиуса r (рис. 30). Оси выточки и цилиндра параллельны. Брус двигается по гладкой горизонтальной плоскости под действием горизонтальной силы $F = F_0 \sin pt$, силы упругости $F_{\text{упр}} = -cx$ и силы сопротивления $F_{\text{сопр}} = -k\dot x$. Ось пружины горизонтальна. Пружина не деформирована при $x = 0$.

1. Ввести подвижную систему координат, связанную с брусом 1. Считая $x(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение центра цилиндра 2. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec v_{\text{абс}}$ и $\vec w_{\text{абс}}$. Найти угловую скорость и угловое ускорение цилиндра.

2. Принять в этом пункте, что вместо цилиндра 2 по цилиндрической выточке движется материальная точка массы m_2. Считая, что $x(t)$ является заданной функцией времени, составить дифференциальное уравнение движения этой точки относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Считая $x(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, определить величины $F_{\text{тр}}$ силы трения между цилиндром и брусом и P силы давления цилиндра на брус. Применить теорему о движении центра масс. Показать, что

$$F_{\text{тр}} = m_2\left[\ \ddot x\cos\varphi + (R-r)\ddot\varphi\ +\ g\sin\varphi\right],$$

$$P = m_2\left[-\ddot x\sin\varphi + (R-r)\dot\varphi^2 + g\cos\varphi\right].$$

4. При $x = \text{const}$ записать дифференциальное уравнение движения цилиндра, воспользовавшись теоремой об изменении кинетического момента.

5. Для условия п. 4 найти минимальную скорость, которую необходимо сообщить центру цилиндра в его нижнем положении, чтобы он мог подняться в положение, при котором $\varphi = \pi/3$. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $x(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, найти главный вектор сил инерции цилиндра и их главный момент относительно центра цилиндра.

7. Применяя принцип Даламбера, показать, что величина силы давления системы на плоскость определяется формулой

$$N = (m_1 + m_2)g + m_2(R-r)(\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi).$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты x и φ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$(m_1 + m_2)\ddot x - m_2(R-r)\left[\ddot\varphi\cos\varphi + \dot\varphi^2\sin\varphi\right] + k\dot x + cx = F_0\sin pt,$$

$$\ddot x\cos\varphi + (3/2)(R-r)\ddot\varphi + g\sin\varphi = 0.$$

11. Полагая, что $c = 0$, $k = 0$, $F_0 = 0$, получить уравнение малых колебаний цилиндра в окрестности его нижнего ($\varphi = 0$) положения. Вычислить период малых колебаний.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 5m_2 = 5$ кг, $R = 1$ м, $r = 0,1$ м, $F_0 = 1$ Н, $p = 0,4\ c^{-1}$, $c = 10$ Н/м, $k = 3$ Н$\cdot$с/м, $t_0 = 0$, $x_0 = 0,1$ м, $\varphi_0 = 1$, $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $x(t)$, $\varphi(t)$, $N(t)$.

ЗАДАНИЕ 31

Полый цилиндр массы m_1 и радиуса R катится без скольжения по горизонтальной плоскости под действием горизонтальной силы $F = F_0 \sin \gamma t$ и силы упругости пружины жесткости c. Внутри цилиндра 1 катится без скольжения полый цилиндр 2 массы m_2 и радиуса r (рис. 31). Пружина не деформирована при $\varphi = 0$.

1. Ввести подвижную систему координат, начало которой совпадает с точкой O, а оси движутся поступательно. Полагая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки B. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Принять в этом пункте, что вместо цилиндра 2 по внутренней поверхности цилиндра 1 движется материальная точка B массы m_2. Считая $\varphi(t)$ заданной функцией времени, составить дифференциальное уравнение движения точки B относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Считая функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ известными, определить величины F_A силы трения и N_A силы давления системы на плоскость в точке A. Применить теорему о движении центра масс. Показать, что

$$F_A = (m_1 + m_2)R\ddot{\varphi} + m_2(R - r)\left(\ddot{\psi}\cos\psi - \dot{\psi}^2 \sin\psi\right) + cR\varphi - F,$$

$$N_A = (m_1 + m_2)\,g\, +\, m_2(R - r)\left(\ddot{\psi}\sin\psi + \dot{\psi}^2\cos\psi\right).$$

4. Полагая $m_2 = 0$, составить дифференциальное уравнение движения цилиндра 1, применяя теорему об изменении кинетического момента. При начальных условиях $t_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$ найти решение полученного дифференциального уравнения для двух значений частоты γ возмущающей силы: $\gamma = \sqrt{c/m_1}$ и $\gamma = \sqrt{c/(2m_1)}$.

5. Полагая, что цилиндр 1 неподвижен ($\varphi \equiv \text{const}$), определить, какую угловую скорость надо сообщить цилиндру 2, чтобы он из своего нижнего положения мог достигнуть положения, при котором $\psi = 2\pi/3$.

6. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, найти главные векторы и главные моменты сил инерции цилиндров 1 и 2 относительно центров масс.

7. Применяя принцип Даламбера, найти величины F_D силы трения и N_D силы давления в точке D. Показать, что

$$F_D = m_2\left[g\sin\psi + R\ddot{\varphi}\cos\psi + (R - r)\ddot{\psi}\right],$$

$$N_D = m_2\left[g\cos\psi - R\ddot{\varphi}\sin\psi + (R - r)\dot{\psi}^2\right].$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и ψ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$2(m_1 + m_2)R\ddot{\varphi} + m_2(R - r)\left[(1 + \cos\psi)\ddot{\psi} - \dot{\psi}^2 \sin\psi\right] + cR\varphi =$$

$$= F_0 \sin\gamma t, \qquad R(1 + \cos\psi)\ddot{\varphi} + 2(R - r)\ddot{\psi} + g\sin\psi = 0.$$

11. Для условия п. 5 получить уравнение малых колебаний цилиндра 2 в окрестности устойчивого положения равновесия. Найти период малых колебаний.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 5$ кг, $m_2 = 1$ кг, $R = 1$ м, $r = 0,1$ м, $c = 10$ Н/м, $F_0 = 1$ Н, $\gamma = \pi$ c^{-1}, $t_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = \pi/6$, $\dot\varphi = \dot\psi = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $F_A(t)$, $N_A(t)$.

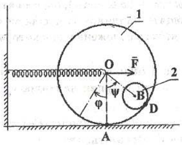

Рис. 31

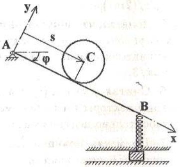

Рис. 32

ЗАДАНИЕ 32

По балке AB веса P_1 и длины ℓ катится без скольжения диск веса P_2 и радиуса r (рис. 32). Один конец балки укреплен в цилиндрическом шарнире A, другой соединен с пружиной. При горизонтальном положении балки пружина не деформирована. Жесткость пружины такова, что в состоянии равновесия балка (без диска) отклоняется от горизонтали на угол φ^*. Отклонением пружины от вертикали пренебречь.

1. Ввести подвижную систему координат Axy, связанную с балкой. Считая $s(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки . Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Принять в этом пункте, что вместо цилиндра вдоль балки AB движется точечный груз веса P_2. Считая, что $\varphi(t)$ — заданная функция времени, составить дифференциальное уравнение движения груза относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Полагая $P_2 = 0$, составить дифференциальное уравнение вращения балки. Воспользоваться теоремой об изменеии кинетического момента. Приняв, что при $t = 0$ балка находилась в горизонтальном положении и ее угловая скорость $\omega_0 = 0$, найти зависимость угловой скорости от угла φ.

4. Для условия п. 3 найти проекции R_x и R_y реакции шарнира A как функции угла φ. Воспользоваться теоремой об изменении количества движения.

5. Для условия п. 3 найти наибольший угол отклонения балки, если она отпущена без начальной угловой скорости из горизонтального положения. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $\varphi(t)$ и $s(t)$ заданными функциями времени, найти главные векторы и главные моменты сил инерции балки и диска.

7. С помощью принципа Даламбера определить величину силы нормального давления N диска на балку. Показать, что

$$N = (P_2/g)[g\cos\varphi - (2\dot{s} + r\dot\varphi)\dot\varphi - s\ddot\varphi].$$

8. Для условия п. 3 составить дифференциальное уравнение движения балки, исходя из общего уравнения аналитической динамики.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$[(P_1/3)\ell^2 + P_2 s^2]\,\ddot\varphi + 2P_2 s\,\dot\varphi\dot{s} + (3/2)P_2 r^2\,[(\ddot{s}/r) + \ddot\varphi] =$$

$$= (P_1/2)g\ell\,[1 - (\sin\varphi/\sin\varphi^*)]\cos\varphi + P_2 g(s\cos\varphi + r\sin\varphi),$$

$$(3/2)\,(\ddot{s} + r\ddot\varphi) - s\dot\varphi^2 = g\sin\varphi.$$

Записать интеграл энергии системы.

11. Считая, что $s = s_0 = \text{const}$, получить уравнение для определения угла φ в положении равновесия балки. Для случая $P_2 = 0$ составить уравнение малых колебаний балки в окрестности ее положения равновесия и найти период малых колебаний.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $P_1 = 50$ Н, $P_2 = 5$ Н, $\ell = 10$ м, $r = 0,1$ м, $\varphi^* = \pi/36$, $t_0 = 0$, $s_0 = 0$, $\varphi_0 = \pi/18$, $\dot{s} = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $s(t)$, $\varphi(t)$, $N(t)$.

ЗАДАНИЕ 33

Однородный диск 1 массы m_1 катится без скольжения по горизонтальной плоскости (рис. 33). К центру диска шарнирно прикреплен одним концом стержень 4 длины ℓ. К стержню приложена пара сил с моментом M. Другой конец стержня шарнирно прикреплен к ползуну 2 массы m_2, движущемуся в вертикальных направляющих. К ползуну с помощью пружины 5, жесткость которой c, подвешен груз 3 массы m_3. Массой стержня 4 пренебречь. При $\varphi = 0$, $s = 0$ пружина не деформирована.

1. Ввести подвижную систему координат $B\xi\eta$, начало которой совпадает с точкой B, а оси движутся поступательно. Считая $\varphi(t)$ и $s(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение груза 3 в сложном движении. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$. Вычислить угловую скорость и угловое ускорение диска 1, если его радиус равен R.

2. Считая $\varphi(t)$ заданной функцией времени, составить дифференциальное уравнение движения груза 3 относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1. Полагая $\varphi = \omega t$, $\omega = \text{const}$, найти частное решение этого уравнения для двух значений ω: $\omega = \sqrt{2c/m_3}$ и $\omega = \sqrt{c/m_3}$.

3. Полагая $\varphi(t)$ и $s(t)$ известными функциями, выразить вертикальную проекцию R_y реакции шарнира B, используя теорему о движении центра масс. Показать, что

$$R_y = m_2\ell\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) + m_2 g + c(\ell\sin\varphi - s).$$

4. Полагая $\varphi(t)$ известной функцией, найти силу трения в точке K. Применить теорему об изменении кинетического момента.

5. Найти зависимость угловой скорости стержня от угла φ, если $m_3 = 0$, масса стержня равна m_4, в начальный момент времени система находилась в покое, а стержень занимал горизонтальное положение. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $\varphi(t)$ и $s(t)$ заданными функциями времени, найти силы инерции ползуна 2 и груза 3, а также главный вектор и главный момент относительно центра масс сил инерции диска.

7. При помощи принципа Даламбера показать, что проекции N_x и N_y реакции в точке K вычисляются по формулам

$$N_x = -m_1\ell\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)/2,$$

$$N_y = m_2\ell\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) + m_3\ddot{s} + (m_1 + m_2 + m_3)g.$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и s.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$2\left(3m_1\sin^2\varphi + 2m_2\cos^2\varphi\right)\ell^2\ddot{\varphi} + (3m_1 - 2m_2)\ell^2\dot{\varphi}^2\sin 2\varphi +$$

$$+ 4\left[c(\ell\sin\varphi - s) + m_2 g\right]\ell\cos\varphi = 4M,$$

$$m_3\ddot{s} - c(\ell\sin\varphi - s) = -m_3 g.$$

11. В уравнении, полученном в п. 2, принять, что $\varphi \equiv \varphi_0 = \mathrm{const}$. Определить положение равновесия груза 3 и исследовать его устойчивость. Найти период малых колебаний.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 2$ кг, $m_2 = m_3 = 0{,}2$ кг, $\ell = 1$ м, $M = 3$ Н·м, $c = 5$ Н/м, $t_0 = 0$, $s_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{s}_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = \pi/3\ c^{-1}$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $s(t)$, $\varphi(t)$, $N_x(t)$, $N_y(t)$.

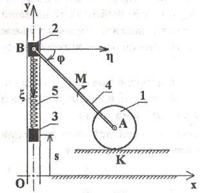

Рис. 33

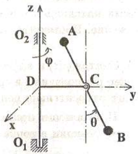

Рис. 34

ЗАДАНИЕ 34

Маятник Томсона — Тета состоит из двух равных точечных масс, закрепленных на концах невесомого стержня AB длины $2b$ (рис. 34). Середина стержня AB прикреплена к концу невесомого стержня CD длины a. Стержень CD свободно вращается вокруг вертикальной оси O_1O_2, а стержень AB — вокруг горизонтальной оси. AB движется в вертикальной плоскости, проходящей через CD.

Движению точечных масс препятствуют силы сопротивления $\vec{R}_i = -k\vec{v}_i$, $\vec{v}_i$ — абсолютная скорость i-й массы, $i = 1, 2$.

1. Ввести подвижную систему координат, связав ее с вращающимся стержнем CD. Положение стержня CD определяется углом поворота φ. Считая $\varphi(t)$ и $\theta(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютные скорости и абсолютные ускорения точек A и B. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Считая массу точки A равной нулю, угловую скорость вращения стержня CD постоянной, $\varphi = \omega t$, и полагая $k = 0$, составить дифференциальное уравнение движения точки B относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Полагая $\varphi = \omega t$, показать с помощью теоремы о движении центра масс, что проекции R_x, R_y, R_z главного вектора внешних сил, действующих на систему, вычисляются по формулам

$$R_x = -2ak\omega, \quad R_y = -2ma\omega^2, \quad R_z = 2mg.$$

4. Применяя теорему об изменении кинетического момента системы, найти зависимость угловой скорости вращения стержня AB от угла θ, а также зависимость угла от времени. Считать стержень CD неподвижным. В начальный момент времени $t_0 = 0$, $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = \omega_0$.

5. Полагая, что $\theta = \theta_0 = \mathrm{const}$, $k = 0$, а к системе приложен момент внешних сил $M_{Dz}^{(e)} = -c\varphi$, $c = \mathrm{const}$, относительно оси Dz, определить число оборотов стержня CD до его остановки, если вначале он имел угловую скорость ω. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $\varphi(t)$ и $\theta(t)$ заданными функциями времени, найти силы инерции точек A и B.

7. Найти величину N силы, препятствующей перемещению стержня AB вдоль оси C. Показать, что $N = 2a\,(m\ddot{\varphi} + k\dot{\varphi})$.

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и θ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$m\ddot{\theta} + k\dot{\theta} - m\dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta = 0,$$

$$(m\ddot{\varphi} + k\dot{\varphi})\,(a^2 + b^2 \sin^2\theta) + mb^2 \dot{\varphi}\,\dot{\theta} \sin 2\theta = 0.$$

11. Считая $\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$, $k = 0$, указать положения относительного равновесия стержня AB и исследовать их устойчивость. Найти период малых колебаний стержня в окрестности устойчивых положений равновесия.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m = 1$ кг, $a = 1$ м, $b = 0,25$ м, $k = 0,75$ Н·с/м, $t_0 = 0$, $\varphi_0 = \theta_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0,2\ c^{-1}$, $\dot{\theta}_0 = 0,2\ c^{-1}$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $\theta(t)$, $N(t)$.

ЗАДАНИЕ 35

На гладкой наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α, скользит призма B массы m_1 (рис. 35). К призме посредством цилиндрического шарнира и спиральной пружины жесткости c присоединен тонкий однородный стержень OA массы m_2 и длины ℓ. Стержень совершает колебания вокруг оси O, перпендикулярной плоскости Oxy. К стержню приложен момент сопротивления $M = -k\dot{\varphi}$.

1. Ввести подвижную систему координат Oxy, связанную с призмой и движущуюся поступательно. Считая $s(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютные скорости и абсолютные ускорения центра тяжести C и точки A стержня. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Принять, что стержень OA невесомый, в точке A сосредоточена масса m, $k = 0$, жесткость пружины $c = 0$, $s(t)$ — заданная

функция времени. Составить дифференциальное уравнение движения точки A относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1. Полагая $s = at^2/2$, найти зависимость скорости точки A от угла φ, если в верхнем положении скорость равна нулю.

3. Полагая $s = \text{const}$, составить дифференциальное уравнение движения стержня. Применить теорему об изменении кинетического момента. Найти зависимость угловой скорости стержня от угла φ, если в верхнем вертикальном положении угловая скорость равна нулю. Какова должна быть жесткость пружины, чтобы стержень совершал колебания с угловой амплитудой, равной $\pi/4$?

4. Для условия п. 3 найти динамическую реакцию $\vec{R}$ шарнира O. Применить теорему о движении центра масс.

5. Полагая $s = \text{const}$, $k = 0$, найти наименьшую угловую скорость, которую надо сообщить стержню в верхнем вертикальном положении, чтобы стержень достиг положения, параллельного наклонной плоскости. Воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии.

6. Считая $s(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, для стержня OA найти главный вектор и главный момент сил инерции относительно точки B.

7. При помощи принципа Даламбера определить величину N силы давления призмы на наклонную плоскость. Показать, что справедливо равенство

$$N = (m_1 + m_2) g \cos\alpha - (m_2/2)\ell \left[\ddot{\varphi} \sin(\varphi + \alpha) + \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi + \alpha)\right].$$

8. Для системы, описанной в п. 2, составить дифференциальное уравнение движения, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты s и φ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$2(m_1 + m_2)\,(\ddot{s} - g \sin\alpha) - m_2\ell \left[\ddot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi + \alpha)\right] = 0,$$

$$(m_2/3)\ell^2\ddot{\varphi} - (m_2/2)\ell\,[\ddot{s}\cos(\varphi+\alpha) + g\sin\varphi] + k\dot{\varphi} + c\varphi = 0.$$

11. Полагая, что $s = \text{const}$, $k = 0$, определить условие устойчивости верхнего, $\varphi = 0$, положения равновесия стержня OA. Получить уравнение малых колебаний стержня в окрестности устойчивого положения равновесия. Найти период малых колебаний.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 0,25$ кг, $\ell = 0,2$ м, $\alpha = 0,01$, $c = 0,1$ Н·м, $t_0 = 0$, $s_0 = 0$, $\varphi_0 = -0,5236$, $\dot{s}_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 4\ c^{-1}$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $s(t)$, $\varphi(t)$, $N(t)$ для двух значений коэффициента k: $k = 0,005$ Н·м·с и $k = 0,03$ Н·м·с.

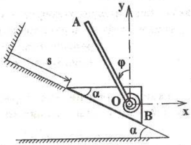

Рис. 35

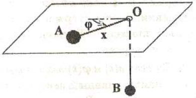

Рис. 36

ЗАДАНИЕ 36

К концам нити A и B, пропущенной через отверстие O, сделанное в гладкой горизонтальной неподвижной плоскости, присоединены две точечные массы m_1 и m_2 (рис. 36). Масса A все время остается на плоскости, тогда как масса B движется по вертикали, проходящей через точку O. Нить считать невесомой и нерастяжимой. Движению точечной массы A препятствует сила сопротивления $\vec{R} = -k\vec{v}_A$, где $\vec{v}_A$ — скорость точки A.

1. Ввести подвижную систему координат, связав ее с нитью OA и поместив начало в точку O. Считая $x(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки A. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$. Принимая x и φ за полярные координаты массы A, найти компоненты скорости и ускорения точки A в полярных координатах.

2. Считая $\varphi(t)$ заданной функцией времени, составить дифференциальное уравнение движения точки A относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Используя теорему об изменении количества движения, показать, что натяжение нити на участке OA определяется формулой

$$N = m_1\,(x\dot{\varphi}^2 - \ddot{x}) - k\dot{x}.$$

4. Получить соотношение $x^2\dot{\varphi} = x_0^2\dot{\varphi}_0$ при отсутствии силы сопротивления ($k = 0$). Воспользоваться теоремой об изменении момента количества движения для точки A.

5. Применяя теорему об изменении кинетической энергии механической системы и используя соотношение, полученное в п.4, найти зависимость скорости массы B от координаты x. Считать $k = 0$. Полагая $\dot{x}_0 = 0$, найти значения координаты x, при которых скорость точки B обращается в нуль.

6. Считая $x(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, найти силы инерции точек A и B.

7. Провести проверку результатов, полученных в п. 3, при помощи принципа Даламбера.

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты x и φ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$(m_1+m_2)\ddot{x} - m_1 x\dot{\varphi}^2 + k\dot{x} + m_2 g = 0, \qquad m_1\left(x\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{x}\right) + kx\dot{\varphi} = 0.$$

Из второго уравнения получить интеграл $x^2\dot{\varphi}\exp\left(kt/m_1\right) = x_0^2\dot{\varphi}_0$.

11. Считая $\varphi = \mathrm{const}$, записать дифференциальное уравнение движения точки A и проинтегрировать его, приняв, что при $t=0$ $x = x_0$, $\dot{x} = 0$.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 1$ кг, $t_0 = 0$, $x_0 = 0,5$ м, $\varphi_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 2$ м/с, $\dot{\varphi}_0 = 0,2$ c^{-1}, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $x(t)$, $\varphi(t)$, $N(t)$ для двух значений параметра k: $k=0$ и $k=1$ Н·с/м. В случае $k=0$ построить траекторию точки A.

ЗАДАНИЕ 37

Два однородных стержня OA и OB, массы и длины которых соответственно равны m_1, m_2 и ℓ_1, ℓ_2, расположены в вертикальной плоскости, связаны между собой пружиной ED жесткости c и шарнирно прикреплены к неподвижной опоре O (рис. 37); $OD = OE = a$. Угол AOB, при котором пружина не напряжена, равен φ_0.

1. Ввести подвижную систему координат, связав ее со стержнем OA. Считая $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки B. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Принимая, что масса стержня OB сосредоточена в точке E, а $\varphi_1 = \varepsilon t^2/2$, $\varepsilon = \mathrm{const}$, составить дифференциальное уравнение движения точки E относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Используя теорему о движении центра масс, найти проекции R_x и R_y реакции шарнира O. Показать, что они определяются формулами

$$R_x = -(1/2)\left[m_1\ell_1\left(\ddot{\varphi}_1\sin\varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2\cos\varphi_1\right) + m_2\ell_2\left(\ddot{\varphi}_2\sin\varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2\cos\varphi_2\right)\right],$$

$$R_y = \quad (1/2)\left[m_1\ell_1\left(\ddot{\varphi}_1\cos\varphi_1 - \dot{\varphi}_1^2\sin\varphi_1\right) + m_2\ell_2\left(\ddot{\varphi}_2\cos\varphi_2 - \dot{\varphi}_2^2\sin\varphi_2\right)\right] + (m_1+m_2)g.$$

4. Получить дифференциальные уравнения движения системы, применив последовательно к каждому стержню теорему об изменении кинетического момента. Показать, что уравнения имеют вид

$$\frac{m_1}{3}\ell_1^2\ddot{\varphi}_1 = \quad a^2 c\left[\sin(\varphi_2-\varphi_1) - 2\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right] - \frac{m_1}{2}g\ell_1\cos\varphi_1,$$

$$\frac{m_2}{3}\ell_2^2\ddot{\varphi}_2 = -a^2 c\left[\sin(\varphi_2-\varphi_1) - 2\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right] - \frac{m_2}{2}g\ell_2\cos\varphi_2.$$

5. Полагая, что $\varphi_2 \equiv \pi$, а при $t=0$ $\varphi_1 = \varphi_{1_0} = \pi/2$, найти наименьшую угловую скорость, которую надо сообщить стержню OA в направлении часовой стрелки, чтобы он достиг горизонтального положения. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ заданными функциями времени, найти главные векторы и главные моменты относительно точки O сил инерции стержней OA и OB.

7. Проверить результаты п. 3, используя принцип Даламбера.

8. Считая $\varphi_2(t)$ заданной функцией времени, составить дифференциальное уравнение движения стержня OA, исходя из общего уравнения аналитической динамики.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. С помощью уравнений Лагранжа II рода составить дифференциальные уравнения движения системы, приняв за обобщенные координаты φ_1 и φ_2. Записать интеграл энергии системы.

11. Считая, что система расположена в горизонтальной плоскости, а $\varphi_1 \equiv 0$, найти положения равновесия стержня OB и исследовать их устойчивость. Определить период малых колебаний стержня OB в окрестности устойчивого положения равновесия.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 0,6$ кг, $\ell_1 = \ell_2 = 1$ м, $a = 0,4$ м, $c = 200$ Н/м, $t_0 = 0$, $\varphi_{1_0} = 0$, $\varphi_{2_0} = 0,7$, $\dot\varphi_{1_0} = 10\ c^{-1}$, $\dot\varphi_{2_0} = 0\ c^{-1}$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $R_x(t)$, $R_y(t)$.

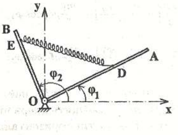

Рис. 37

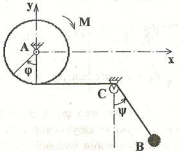

Рис. 38

ЗАДАНИЕ 38

Барабан массы m_1 вращается вокруг своей горизонтально расположенной оси A под действием внешнего момента $M = \alpha\varphi$, $\alpha = \text{const}$, и посредством невесомого нерастяжимого троса поднимает груз B массы m_2 (рис. 38).

Барабан считать сплошным однородным цилиндром радиуса R. Трос по барабану не скользит, начальная длина свешивающейся части троса BC равна ℓ_0.

1. Ввести подвижную систему координат с началом в точке схода нити с блока C и поступательно движущимися осями. Считая

$\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение груза B. (При рассмотрении относительного движения использовать полярную систему координат $\rho = |CB|$, ψ.) Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec v_{\text{абс}}$ и $\vec w_{\text{абс}}$.

2. Считая закон $\varphi(t)$ вращения барабана заданной функцией времени, составить дифференциальное уравнение дижения груза B относительно подвижной системы, введенной в п. 1.

3. Используя теорему о движении центра масс системы, определить натяжение троса. Показать, что

$$T = m_2\left[R\ddot\varphi + (\ell_0 - R\varphi)\dot\psi^2 + g\cos\psi\right].$$

4. Считая, что груз B движется по вертикали ($\psi \equiv 0$), получить дифференциальное уравнение движения системы. Применить теорему об изменении кинетического момента.

5. Для условия п. 4 определить, какую скорость приобретет груз B в момент, когда он поднимется на высоту h. В начальный момент система находилась в покое. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

7. С помощью принципа Даламбера определить проекции R_{Ax}, R_{Ay} реакции шарнира A.

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и ψ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$[(m_1/2) + m_2]\, R^2\ddot\varphi + m_2 R\left[(\ell_0 - R\varphi)\dot\psi^2 + g\cos\psi\right] = \alpha\varphi,$$

$$(\ell_0 - R\varphi)\ddot\psi - 2R\dot\varphi\dot\psi + g\sin\psi = 0.$$

Получить интеграл энергии системы при условии $\alpha = 0$.

11. Определить положение равновесия системы и показать его неустойчивость. Для условия п. 4 получить дифференциальное уравнение движения системы и найти его решение при начальных условиях $t = 0$ $\varphi_0 = \pi/6$, $\dot\varphi_0 = 0$.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 5$ кг, $m_2 = 1$ кг, $\ell_0 = 5$ м, $t_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0,03$, $\dot\varphi_0 = 0,01c^{-1}$, $\dot\psi_0 = 0,01c^{-1}$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $T(t)$.

ЗАДАНИЕ 39

Система состоит из однородного стержня OA длины ℓ и массы m_1 и невесомой платформы ED, несущей ползун B массы m_2, который перемещается вдоль нее без трения под действием растяжения – сжатия двух одинаковых пружин жесткости c_2. К ползуну приложена постоянная по величине вертикальная сила P. Платформа вместе со стержнем образует твердое тело, которое может поворачиваться вокруг опорного шарнира, имеющего спиральную пружину жесткости c_1 (рис. 39).

1. Ввести подвижную систему координат, связанную со стержнем OA. Считая $\varphi(t)$ и $s(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение ползуна A. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Считая $\varphi(t)$ заданной функцией времени, составить дифференциальное уравнение движение ползуна A относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Считая функции $\varphi(t)$ и $s(t)$ известными, найти проекции R_x и R_y реакции шарнира O. Воспользоваться теоремой об изменении количества движения. Показать, что

$$\begin{aligned} R_x \;&=\; [(m_1/2) + m_2]\,\ell\left(\ddot\varphi\cos\varphi - \dot\varphi^2\sin\varphi\right) \;+\\ &+\; m_2\left[(\ddot s - s\dot\varphi^2)\cos\varphi - (2\dot s\dot\varphi + s\ddot\varphi)\sin\varphi\right],\\ R_y \;&=\; -[(m_1/2) + m_2]\,\ell\left(\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi\right) \;-\\ &-\; m_2\left[(\ddot s - s\dot\varphi^2)\sin\varphi + (2\dot s\dot\varphi + s\ddot\varphi)\cos\varphi\right] + (m_1+m_2)g + P. \end{aligned}$$

4. Полагая, что ползун закреплен в точке A и $P = 0$, с помощью теоремы об изменении кинетического момента составить дифференциальное уравнение вращательного движения системы.

5. Для условия п. 4 найти угловую скорость ω_0, которую надо сообщить стержню в вертикальном положении, чтобы он смог отклониться на угол φ_0. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $\varphi(t)$ и $s(t)$ заданными функциями времени, выписать силы инерции ползуна, а также главный вектор и главный момент относительно точки O сил инерции стержня OA.

7. Применяя принцип Даламбера, найти величину N реакции, действующей на ползун со стороны платформы. Показать, что

$$N = (P + m_2 g)\cos\varphi - m_2\left(s\ddot\varphi + 2\dot s\dot\varphi + \ell\dot\varphi^2\right).$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и s.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{aligned} &(m_1/3)\ell^2\ddot\varphi + m_2\left[2s\,\dot s\,\dot\varphi + (\ell^2 + s^2)\ddot\varphi + \ell\ddot s\right] \;=\\ &\quad=\; (m_1/2)g\ell\sin\varphi + (P + m_2 g)(\ell\sin\varphi + s\cos\varphi) - c_1\varphi,\\ &m_2\left(\ddot s + \ell\ddot\varphi - s\dot\varphi^2\right) = (P + m_2 g)\sin\varphi - 2c_2 s. \end{aligned}$$

11. Для условия п. 4 определить интервал жесткости спиральной пружины, для которого верхнее вертикальное положение равновесия системы будет устойчивым. Составить уравнение малых

колебаний системы в окрестности устойчивого положения равновесия, найти период малых колебаний.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 5$ кг, $m_2 = 1$ кг, $P = 10$ Н, $\ell = 1$ м, $c_1 = 150$ Н·м, $c_2 = 120$ Н/м; $t_0 = 0$, $\varphi_0 = 0,01$, $s_0 = 0,01$ м, $\dot{\varphi}_0 = 0,01c^{-1}$, $\dot{s}_0 = 0,01$ м/с, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $s(t)$, $R_x(t)$, $R_y(t)$.

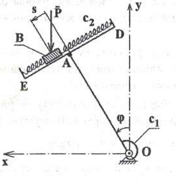

Рис. 39

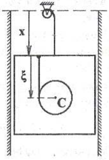

Рис. 40

ЗАДАНИЕ 40

Невесомая нерастяжимая нить намотана на боковую поверхность сплошной однородной катушки массы m и радиуса r. Один конец нити закрепляют относительно подвижного лифта массой M, движущегося без трения вдоль вертикальных направляющих и подвешенного на тросе, массой которого пренебрегаем. Движение лифта определяется координатой x, движение катушки — координатой ξ. Ось катушки перемещается вдоль вертикали, оставаясь горизонтальной и параллельной самой себе (рис. 40).

1. Ввести подвижную систему координат, связанную с лифтом. Считая $x(t)$ и $\xi(t)$ заданными функциями времени, найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение центра масс C катушки. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Считая, что вместо катушки на нить надето колечко той же массы, и полагая, что $\ddot{x} = w = \text{const}$, найти силу натяжения нити и закон относительного движения $\xi(t)$ колечка при начальных условиях $t_0 = 0$ $\xi_0 = \ell$, $\dot{\xi}_0 = v_0$. Определить, при каких значениях w будет наблюдаться относительное равновесие.

3. Считая функции $x(t)$ и $\xi(t)$ заданными, найти натяжение N нити. Применить теорему о движении центра масс. Показать, что

$$N = m\left(g - \ddot{x} - \ddot{\xi}\right).$$

4. Полагая, что лифт неподвижен, найти ускорение точки C, применяя теорему об изменении кинетического момента относительно точки касания катушки и нити.

5. Для условия п. 4 найти зависимость угловой скорости катушки от величины ξ, если при $t_0 = 0$ $\xi_0 = \ell$, $\omega_0 = 0$. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $x(t)$ и $\xi(t)$ заданными, найти главный вектор и главный момент относительно точки C сил инерции катушки.

7. С помощью принципа Даламбера найти натяжение T троса. Показать, что

$$T = (M + m)\,(g + \ddot{x}) + m\ddot{\xi}.$$

8. Считая, что вместо троса к лифту прикреплена пружина с натуральной длиной a и жесткостью c, составить дифференциальные уравнения движения системы. Применить общее уравнение динамики, приняв за обобщенные координаты x и ξ.

9. Для условия п. 8 составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа II рода, получить дифференциальные уравнения движения системы для условия п. 8

$$(M + m)\,(\ddot{x} - g) + m\ddot{\xi} + c(x - a) = 0, \qquad \ddot{x} + (3/2)\ddot{\xi} = g.$$

Записать интеграл энергии системы.

11. Считая, что катушка отсутствует, найти для условия п. 8 величину x^* в положении равновесия, исследовать его устойчивость и найти период малых колебаний около этого положения равновесия.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m = 1$ кг, $M = 100$ кг, $c = 100$ Н/м, $a = 0,1$ м; $t_0 = 0$, $\xi_0 = \ell = 0,1$ м, $\dot{\xi}_0 = v_0 = 0,1$ м/с, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $x(t)$, $\xi(t)$, $N(t)$.

ЗАДАНИЕ 41

Механическая система состоит из тонкого однородного стержня массы m_1 и длины ℓ, жестко спаянного с ним однородного тонкостенного цилиндра A массы m_2 и радиуса R и сплошного однородного цилиндра B массы m_3 и радиуса r, который может катиться без проскальзывания по внутренней поверхности цилиндра A. Система закреплена в точке O в неподвижном шарнире и находится в поле тяжести.

1. Ввести поступательно движущуюся систему координат с началом в центре цилиндра A. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение центра цилиндра B. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Полагая в этом пункте, что вместо цилиндра B по внутренней поверхности цилиндра A движется материальная точка массы m_3, составить уравнение движения точки относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Считая функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ известными, определить проекции R_{Ox} и R_{Oy} реакции шарнира O. Применить теорему о движении центра масс механической системы. Показать, что

$$
\begin{aligned}
R_{Ox} &= -[(m_1/2)\ell + (m_2+m_3)(R+\ell)]\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) - \\
&- m_3(R-r)\left(\ddot{\psi}\sin\psi + \dot{\psi}^2\cos\psi\right) - (m_1+m_2+m_3)g, \\
R_{Oy} &= [(m_1/2)\ell + (m_2+m_3)(R+\ell)]\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) + \\
&+ m_3(R-r)\left(\ddot{\psi}\cos\psi - \dot{\psi}^2\sin\psi\right).
\end{aligned}
$$

4. Полагая $m_3 = 0$, составить дифференциальное уравнение движения тела, состоящего из стержня и цилиндра A. Воспользоваться теоремой об изменении кинетического момента.

5. Для условия п. 4 определить, какую скорость нужно сообщить середине стержня, чтобы тело стержень–цилиндр, начиная двигаться из нижнего положения, достигло верхнего положения. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, найти главные векторы и главные моменты сил инерции стержня и цилиндров относительно их центров масс.

7. При помощи принципа Даламбера определить величины N нормальной реакции и $F_{\text{тр}}$ силы трения в точке соприкосновения цилиндров. Показать, что

$$
N = m_3\left\{g\cos\psi + (R-r)\dot{\psi}^2 + (R+\ell)\left[\ddot{\varphi}\sin(\varphi-\psi) + \dot{\varphi}^2\cos(\varphi-\psi)\right]\right\},
$$

$$
F_{\text{тр}} = m_3\left\{g\sin\psi + (R-r)\ddot{\psi} + (R+\ell)\left[\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\psi) - \dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\psi)\right]\right\}.
$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и ψ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\left\{(m_1/3)\ell^2 + (m_2+m_3)(R+\ell)^2 + [m_2 + (m_3/2)]R^2\right\}\ddot{\varphi} + \\
&+ m_3(R-r)\left\{(R+\ell)\left[\ddot{\psi}\cos(\varphi-\psi) + \dot{\psi}^2\sin(\varphi-\psi)\right] - (R/2)\ddot{\psi}\right\} =
\end{aligned}
$$

$$= -[(m_1/2)\ell + (m_2+m_3)(R+\ell)]\, g\sin\varphi, \qquad g\sin\psi +$$

$$+ (R+\ell)\left[\ddot\varphi\cos(\varphi-\psi) - \dot\varphi^2\sin(\varphi-\psi)\right] - (R/2)\ddot\varphi + (3/2)(R-r)\ddot\psi = 0.$$

Записать интеграл энергии системы.

11. Для условия п. 4 определить положения равновесия тела стержень–цилиндр и исследовать их устойчивость. Написать уравнение малых колебаний тела в окрестности устойчивого положения равновесия, найти период малых колебаний.

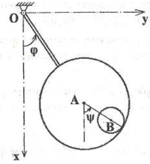

Рис. 41

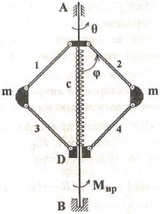

Рис. 42

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 5$ кг, $m_3 = 3$ кг, $\ell = 1$ м, $R = 0{,}5$ м, $r = 0{,}1$ м; $t_0 = 0$, $\varphi_0 = \pi/6$, $\psi_0 = \pi/3$, $\dot\varphi_0 = 0$, $\dot\psi_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $R_{Ox}(t)$, $R_{Oy}(t)$.

ЗАДАНИЕ 42

Центробежный тахометр состоит из вала AB, двух точечных грузов одинаковой массы m, соединенных невесомыми стержнями

1–4 длиной ℓ каждый, муфты D массы M и линейной пружины жесткости c (рис. 42). При $\varphi = 0$ пружина не деформирована. К валу приложен постоянный вращающий момент $M_{вр}$. При вращении вала грузы перемещают муфту тахометра и деформируют пружину.

1. Ввести подвижную систему координат, связанную с вращающимся валом. Считая $\theta(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, найти абсолютные скорости и абсолютные ускорения грузов. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec v_{абс}$ и $\vec w_{абс}$.

2. Считая $\theta(t)$ заданной функцией времени, составить векторное дифференциальное уравнение движения грузов относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Считая функции $\theta(t)$ и $\varphi(t)$ известными, найти вертикальную проекцию Z_B реакции подпятника B. Применить теорему об изменении количества движения. Показать, что

$$Z_B = (2m+M)g + 2(m+M)\ell\,(\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi)\,.$$

4. Полагая, что вал вращается с постоянной угловой скоростью ω, а $\varphi(t)$ является заданной функцией времени, найти зависимость $M_{вр}(t)$ вращающего момента, обеспечивающего указанное движение системы, от времени. Применить теорему об изменении кинетического момента.

5. Считая, что $\theta = \mathrm{const}$, грузы невесомые, а муфте, находящейся в начальный момент в наинизшем положении ($\varphi_0 = 0$), сообщена начальная скорость, равная v_0, найти максимальный угол отклонения стержней от вертикали. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $\theta(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, найти силы инерции грузов и муфты.

7. Для условия п. 4 найти усилия $T_1 - T_4$ в стержнях 1–4. Применить принцип Даламбера. Показать, что

$$T_1 = T_2 = m\left[(\ell/2)\omega^2 + (1/2)(g/\cos\varphi) + \ell\left(\dot\varphi^2 - \ddot\varphi\,\mathrm{ctg}\,2\varphi\right)\right],$$

$$T_3 = T_4 = m\left[(\ell/2)\omega^2 - (1/2)(g/\cos\varphi) - (\ell\ddot\varphi/\sin 2\varphi)\right].$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты θ и φ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$(m + 2M\sin^2\varphi)\ddot{\varphi} + \left[M\dot{\varphi}^2 - (m/2)\dot{\theta}^2\right]\sin 2\varphi = -(m+M)(g/\ell)\sin\varphi -$$

$$- 8c\sin\varphi\sin^2(\varphi/2), \qquad 2m\ell^2\left(\ddot{\theta}\sin^2\varphi + \dot{\theta}\dot{\varphi}\sin 2\varphi\right) = M_{\text{вр}}.$$

Для случая $M_{\text{вр}} = 0$ выписать интеграл энергии и циклический интеграл системы.

11. Полагая, что вал вращается с постоянной угловой скоростью ω, найти положения относительного равновесия системы и исследовать их устойчивость. Получить уравнение малых колебаний в окрестности относительного равновесия $\varphi = 0$ при условии его устойчивости, найти период малых колебаний.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m = 1$ кг, $M = 2$ кг, $M_{\text{вр}} = 10$ Н·м, $\ell = 1$ м, $c = 5$ Н/м, $t_0 = 0$, $\varphi_0 = \pi/6$, $\theta_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 0,5c^{-1}$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\theta(t)$, $\varphi(t)$, $T_1(t)$, $T_3(t)$.

ЗАДАНИЕ 43

Однородный круглый цилиндр массы m_1 с центром O_1 и радиусом r и тонкостенный цилиндр массы m_2 с центром O_2 и тем же радиусом обмотаны двумя нерастяжимыми нитями. Первый цилиндр может вращаться вокруг оси O_1, а второй цилиндр, разматывая нить, падает так, что оси O_1 и O_2 остаются параллельными. Нити по цилиндрам не проскальзывают. К первому цилиндру

прикреплен конец спиральной пружины жесткости c, другой конец которой закреплен неподвижно (рис. 43). При $\varphi = 0$ пружина не деформирована.

1. Ввести подвижную систему координат, связанную с первым цилиндром. Считая $\varphi(t)$ и $x(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки O_2. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Полагая в этом пункте, что вместо второго цилиндра к нити прикреплена материальная точка той же массы, а $\varphi = \omega t$, $\omega = \text{const}$, составить дифференциальное уравнение движения материальной точки относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. С помощью теоремы о движении центра масс определить натяжение T нити. Показать, что $T = m_2(g - \ddot{x})$.

4. Считая $x = r\varphi$, найти угловое ускорение первого цилиндра. Применить теорему об изменении кинетического момента.

5. Для условия п. 4 найти угловую скорость первого цилиндра в зависимости от угла φ, если в начальный момент $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $\varphi(t)$ и $x(t)$ заданными функциями времени, найти главные векторы и главные моменты относительно оси O_1 сил инерции цилиндров.

7. С помощью принципа Даламбера найти выражения для проекций R_x и R_y реакции шарнира O_1. Показать, что

$$R_x = (m_1 + m_2)g - m_2\ddot{x}, \quad R_y = 0.$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и x.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$[(m_1/2) + m_2]\, r^2\ddot{\varphi} - m_2 r\ddot{x} = -c\varphi, \qquad 2\ddot{x} - r\ddot{\varphi} = g.$$

Записать интеграл энергии системы.

11. Для условия п. 4 найти значение угла φ в положении устойчивого равновесия системы. Найти период малых колебаний в его окрестности.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 20$ кг, $m_2 = 10$ кг, $r = 0,2$ м, $c = 20$ Н·м; $t_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $x(t)$, $T(t)$.

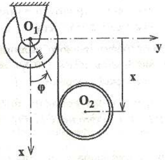

Рис. 43

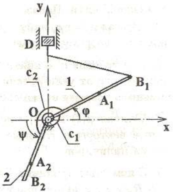

Рис. 44

ЗАДАНИЕ 44

Две панели 1 и 2 с массами m_1 и $m_2 = m_1/2$ удерживаются с помощью цилиндрического шарнира O и двух спиральных пружин с жесткостями c_1 и $c_2 = 2c_1$ соответственно (рис. 44).

Поршень демпфера D движется по вертикали, проходящей через шарнир O. Сопротивление в демпфере пропорционально его скорости с коэффициентом сопротивления k. Демпфер и панель 1 связаны невесомым стержнем длины ℓ. Центры тяжестей панелей находятся в точках A_1 и A_2, где $OA_1 = a_1$, $OA_2 = a_2 = a_1/2$, а $OB_1 = b_1$, $OB_2 = b_2$. Моменты инерции панелей относительно горизонтальной оси O, перпендикулярной плоскости рисунка, равны $J_1 = m_1 a_1^2/3$, $J_2 = m_2 a_2^2/3$.

Горизонтальное положение панелей является положением равновесия системы.

1. Ввести подвижную систему координат с началом в точке D и поступательно движущимися осями. Считая движение панелей заданными, показать, что скорость демпфера D вычисляется по формуле

$$v_D = b_1 \left[1 + \left(b_1 \sin\varphi \,/\, \sqrt{\ell^2 - b_1^2\cos^2\varphi}\right)\right] \cos\varphi\, \dot{\varphi}.$$

Вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки C — середины стержня DB_1. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Принимая, что $\varphi = \varepsilon t^2/2$, $\varepsilon = \text{const}$, а масса панели сосредоточена в точке B_2, составить дифференциальное уравнение движения точки B_2 относительно подвижной системы координат, связанной со стержнем OB_1.

3. Считая функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ известными, найти выражения для проекций R_x и R_y реакции шарнира O. Воспользоваться теоремой о движении центра масс системы. Показать, что

$$R_x = -m_1 a_1 \left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) + m_2 a_2 \left(\ddot{\psi}\sin\psi + \dot{\psi}^2\cos\psi\right),$$

$$R_y = m_1 a_1 \left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) - m_2 a_2 \left(\ddot{\psi}\cos\psi - \dot{\psi}^2\sin\psi\right) + $$

$$+ (m_1 + m_2)g + k v_D.$$

4. Полагая панель 1 неподвижной, составить дифференциальное уравнение движения панели 2. Применить теорему об изменении кинетического момента.

5. Составить дифференциальное уравнение движения системы, считая, что панели движутся как единое целое ($\varphi = \psi$). Воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме.

6. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, найти главные векторы и главные моменты относительно точки O сил инерции панелей.

7. С помощью принципа Даламбера найти усилие S в стержне B_1D. Показать, что

$$S = \frac{J_1\ddot{\varphi} + m_1 g a_1 \cos\varphi + c_1(\varphi - \delta_1) - c_2(\psi - \varphi + \delta_2)}{b_1 \cos\varphi \left(b_1 \sin\varphi + \sqrt{\ell^2 - b_1^2 \cos^2\varphi}\right)}\ell,$$

где $\delta_1 = (m_1 a_1 - m_2 a_2)(g/c_1)$, $\delta_2 = m_2 a_2 (g/c_2)$.

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и ψ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$J_1\ddot{\varphi} = -m_1 g a_1 \cos\varphi - c_1(\varphi - \delta_1) + c_2(\psi - \varphi + \delta_2) -$$

$$- k b_1^2 \left[1 + \left(b_1 \sin\varphi \,/\, \sqrt{\ell^2 - b_1^2 \cos^2\varphi}\right)\right]^2 \dot{\varphi} \cos^2\varphi,$$

$$J_2\ddot{\psi} = m_2 g a_2 \cos\psi - c_2(\psi - \varphi + \delta_2).$$

Записать интеграл энергии системы.

11. Для условия п. 5 получить уравнение малых колебаний системы. Решить полученное уравнение при отсутствии сопротивления в демпфере ($k = 0$) и при двух значениях коэффициента сопротивления: $k = 10$ Н·с/м и $k = 10^2$ Н·с/м. В начальный момент времени принять $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0{,}05$ c^{-1}.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 50$ кг, $\ell = 2$ м, $a_1 = 1$ м, $b_1 = 1{,}5$ м, $c_1 = 100$ Н·м, $t_0 = 0$, $\varphi_0 = \psi_0 = \pi/6$, $\dot{\varphi}_0 = \dot{\psi}_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $S(t)$ для трех значений коэффициента k: $k = 0$, $k = 10$ Н·с/м, $k = 10^3$ Н·с/м.

ЗАДАНИЕ 45

Однородный стержень BD, имеющий длину ℓ и массу M, может двигаться в вертикальной плоскости по однородному ободу радиуса R и массы m, который может двигаться по горизонтальному рельсу без скольжения (рис. 45). С правым концом стержня соединена пружина жесткости c, противоположный конец которой закреплен в некоторой точке A обода. Длина недеформированной пружины равна b.

1. Ввести подвижную систему координат, начало которой совпадает с центром обода, а оси движутся поступательно. Считая $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки B. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Заменив в этом пункте стержень BD колечком B (материальной точкой) той же массы, составить дифференциальное уравнение его движения относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Считая функции $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ известными, найти проекции R_x и R_y силы давления обода на рельс. Применить теорему о движе-

нии центра масс системы. Показать, что

$$R_x = -(m+M)R\ddot{\psi} - Md\left[\left(\ddot{\psi}+\ddot{\varphi}\right)\cos\theta - \left(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\right)^2\sin\theta\right],$$

$$R_y = -(M+m)\,g\; +\; Md\left[\left(\ddot{\psi}+\ddot{\varphi}\right)\sin\theta + \left(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\right)^2\cos\theta\right],$$

$$\theta = \psi + \varphi + \alpha, \qquad d = R\cos\alpha.$$

4. Полагая, что концы стержня закреплены на ободе так, что точки A, O и E находятся на одной прямой ($\varphi \equiv \pi - \alpha$), составить уравнение вращательного движения системы вокруг оси, проходящей через центр масс системы перпендикулярно плоскости чертежа. Применить теорему об изменении кинетического момента. Воспользоваться результатами п. 3.

5. Для условия п. 4 найти минимальную скорость центра обода, при которой стержень, занимающий в начальный момент нижнее горизонтальное положение, переходит в верхнее горизонтальное положение.

6. Считая $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, найти главные векторы и главные моменты относительно центров масс сил инерции обода и стержня.

7. Применяя принцип Даламбера, найти величины N_B и N_D сил давления обода на стержень. Показать, что

$$\begin{aligned} N_B \;=\;& (M/\sin 2\alpha)\left\{-g\sin(\theta+\alpha) + R\ddot{\psi}\cos(\theta+\alpha) + \right.\\ &\left. +\; d\left(\ddot{\theta}\cos\alpha + \dot{\theta}^2\sin\alpha\right) + (c/M)\left[2R\sin(\varphi/2) - b\right]\cos\left[(\varphi/2) + 2\alpha\right]\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_D \;=\;& (M/\sin 2\alpha)\left\{\;g\sin(\psi+\varphi) - R\ddot{\psi}\cos(\psi+\varphi) - \right.\\ &\left. -\; d\left(\ddot{\theta}\cos\alpha - \dot{\theta}^2\sin\alpha\right) - (c/M)\left[2R\sin(\varphi/2) - b\right]\cos(\varphi/2)\right\}. \end{aligned}$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты ψ и φ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{aligned} &\left\{(M+2m)R^2 + M\left[d^2 + (\ell^2/12) + 2Rd\cos\theta\right]\right\}\ddot{\psi} + \\ &+ M\left[d^2 + (\ell^2/12) + Rd\cos\theta\right]\ddot{\varphi} - Md\left[R\left(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\right)^2 + g\right]\sin\theta = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &M\left\{\left[d^2 + (\ell^2/12) + Rd\cos\theta\right]\ddot{\psi} + \left[d^2 + (\ell^2/12)\right]\ddot{\varphi}\right\} - Mgd\sin\theta + \\ &+ c\left[2R\sin(\varphi/2) - b\right]R\cos(\varphi/2) = 0. \end{aligned}$$

11. Полагая, что обод неподвижен, точка A занимает крайнее верхнее положение, а пружина отсутствует, найти положения равновесия стержня и исследовать их устойчивость. Получить уравнение малых колебаний в окрестности устойчивого положения равновесия, найти период малых колебаний.

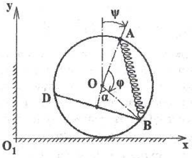

Рис. 45.

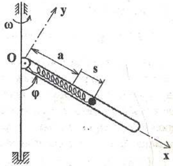

Рис. 46.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $M = 1$ кг, $m = 0,5$ кг, $\ell = 1$ м, $R = 1$ м, $c = 50$ Н/м, $b = 1$ м; $t_0 = 0$, $\psi_0 = 0$, $\varphi_0 = \pi/4$, $\dot{\psi}_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\psi(t)$, $\varphi(t)$, $R_x(t)$, $R_y(t)$.

ЗАДАНИЕ 46

Конец O невесомой трубки при помощи шарнира соединен с валом, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикали. Внутри трубки находится шарик массы m, связанный с точкой O пружиной жесткости c (рис. 46). Длина недеформированной пружины a. Размерами шарика и его трением о трубку пренебречь.

1. Ввести подвижную систему координат $Oxyz$, связанную с вращающейся трубкой, ось Ox направить вдоль трубки. Считая $\varphi(t)$ и $s(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение шарика. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Считая $\varphi(t)$ заданной функцией времени, составить дифференциальное уравнение движения шарика относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Применяя теорему об изменении количества движения, определить вертикальную проекцию P силы давления трубки на точку O. Показать, что

$$P = m\left\{g + \left[\dot{\varphi}^2(a+s) - \ddot{s}\right]\cos\varphi + \left[\ddot{\varphi}(a+s) + 2\dot{\varphi}\dot{s}\right]\sin\varphi\right\}.$$

4. Пусть трубка составляет с валом угол $\alpha = \text{const}$, а скорость ее вращения вокруг вертикали может меняться. В начальный момент трубке сообщена угловая скорость ω_0, при этом шарик находился в положении $s = s_0$ и покоился относительно трубки. Найти зависимость $\omega(s)$ угловой скорости трубки от положения шарика. Применить теорему об изменении кинетического момента.

5. Считая, что $\varphi \equiv \alpha$, $\omega \equiv 0$, а шарику в положении $s = a$ сообщена скорость v_0, направленная вдоль трубки вниз, определить скорость шарика в момент, когда деформация пружины будет равна ее статическому удлинению. Применить теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $\varphi(t)$ и $s(t)$ заданными функциями времени, выписать силы инерции шарика.

7. С помощью принципа Даламбера определить проекции N_1 и N_2 реакции, действующей на шарик со стороны трубки. Показать, что

$$N_1 = m\left[g\sin\varphi + \left(\ddot{\varphi} - \omega^2\sin\varphi\cos\varphi\right)(a+s) + 2\dot{\varphi}\dot{s}\right],$$

$$N_2 = 2m\omega\left[\dot{s}\sin\varphi + (a+s)\dot{\varphi}\cos\varphi\right].$$

8. Полагая $\omega = 0$, составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и s.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$\left(\ddot{\varphi} - \omega^2\sin\varphi\cos\varphi\right)(a+s) + 2\dot{\varphi}\dot{s} = -g\sin\varphi,$$

$$\ddot{s} - \left(\dot{\varphi}^2 + \omega^2\sin^2\varphi\right)(a+s) = \quad g\cos\varphi - (c/m)s.$$

Выписать обобщенный интеграл энергии.

11. Найти положения относительного равновесия $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, $s = s_0 = \text{const}$ шарика в трубке. Определить условия устойчивости решения $\varphi_0 = 0$, $s_0 = mg/c$. Составить уравнения малых колебаний в окрестности этого положения относительного равновесия, определить частоты малых колебаний.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m = 0,2$ кг, $\omega = 20c^{-1}$, $c = 4$ кН/м, $a = 3$ см, $t_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $s_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 1c^{-1}$, $\dot{s}_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $s(t)$, $P(t)$.

ЗАДАНИЕ 47

Однородный тонкий стержень AB массы m_1 и длины ℓ соединен в точке A при помощи шарнира с ползуном массы m_2, надетым на гладкую вертикальную направляющую. Ползун может перемещаться вдоль направляющей и вращаться вокруг нее. Другой конец B стержня опирается на гладкую горизонтальную плоскость (рис. 47).

1. Ввести подвижную систему координат $O\xi\eta\zeta$, ось $O\zeta$ которой идет вдоль направляющей, ось $O\eta$ содержит проекцию OB стержня на плоскость Oxy, а ось $O\xi$ перпендикулярна плоскости OAB. Считая $\theta(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютные скорости и абсолютные ускорения точки B и центра масс C стержня. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Считая в этом пункте, что $\theta = \Omega t$, $\Omega = \text{const}$, стержень и ползун невесомы, а в точке C сосредоточена масса m_1, составить векторное уравнение движения точки C относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Считая $\varphi(t)$ и $\theta(t)$ заданными функциями времени, найти проекции $R_{A\xi}$ и $R_{A\eta}$ реакции вертикальной направляющей, действующей на ползун A, и величину R_B реакции в точке B. Применить теорему о движении центра масс. Показать, что

$$R_{A\xi} = -m_1\ell\left(\ddot\theta\sin\varphi + 2\dot\varphi\dot\theta\cos\varphi\right)\Big/2,$$

$$R_{A\eta} = \quad m_1\ell\left[\ddot\varphi\cos\varphi - \left(\dot\varphi^2 + \dot\theta^2\right)\sin\varphi\right]\Big/2,$$

$$R_B = -\left[(m_1/2) + m_2\right]\ell\left(\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi\right) + (m_1 + m_2)g.$$

4. Считая, что $\theta = \Omega t$, $\Omega = \text{const}$, найти момент внешних сил относительно оси Oz, обеспечивающих это движение. Применить теорему об изменении кинетического момента системы.

5. Полагая, что $\theta = \text{const}$, определить зависимость угловой скорости вращения стержня от расстояния точки C до плоскости Oxy. Считать, что при $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$, $\dot\varphi = 0$. Воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии.

6. Считая функции $\varphi(t)$ и $\theta(t)$ заданными, найти главный вектор и главный момент относительно точки C сил инерции стержня, а также силу инерции ползуна.

7. Проверить результаты п. 3, используя принцип Даламбера.

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты θ и φ.

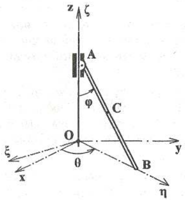

Рис. 47

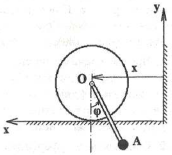

Рис. 48

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$\left[(m_1/3) + m_2\sin^2\varphi\right]\ell\ddot\varphi + \left[m_2\dot\varphi^2 - (m_1/3)\dot\theta^2\right]\ell\sin\varphi\cos\varphi -$$

$$- \left[(m_1/2) + m_2\right]g\sin\varphi = 0, \qquad \ddot\theta\sin\varphi + 2\dot\theta\dot\varphi\cos\varphi = 0.$$

Записать интеграл энергии системы и циклический интеграл.

11. Считая, что $\theta = \Omega t$, $\Omega = \text{const}$, найти положение относительного равновесия стержня и доказать его неустойчивость.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 1$ кг, $\ell = 1$ м, $t_0 = 0$, $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 2c^{-1}$, $\varphi_0 = \pi/6$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\theta(t)$, $\varphi(t)$, $R_B(t)$.

ЗАДАНИЕ 48

Однородный диск массы M катится без скольжения по прямолинейному рельсу. К центру диска шарнирно прикреплен однородный стержень длины ℓ и массы m_1, на конце которого находится точечный груз A массы m_2 (рис. 48).

1. Ввести подвижную систему координат, начало которой совпадает с точкой O, а оси движутся поступательно. Считая $x(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютные скорости и ускорения точки A и центра масс C стержня. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Составить дифференциальное уравнение движения точки A относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1, если $m_1 = 0$, а $x(t) = a \sin pt$, a и p — постоянные величины.

3. Считая функции $x(t)$ и $\varphi(t)$ известными, найти проекции R_x и R_y реакции шарнира O. Применить теорему о движении центра масс системы. Показать, что

$$R_x = (m_1 + m_2)\ddot{x} - [(m_1/2) + m_2]\,\ell\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi\right),$$

$$R_y = (m_1 + m_2)g + [(m_1/2) + m_2]\,\ell\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2 \cos\varphi\right).$$

4. Полагая, что точка O движется с постоянной скоростью v_0, составить дифференциальное уравнение движения стержня. Воспользоваться теоремой об изменеии кинетического момента системы.

5. Считая диск и стержень жестко скрепленными, найти, какую минимальную угловую скорость необходимо сообщить диску,

чтобы точка O переместилась вдоль оси x на расстояние s. Использовать теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $x(t)$ и $\varphi(t)$ заданными функциями времени, найти силы инерции точки A, а также главные векторы и главные моменты относительно точки O сил инерции диска и стержня.

7. При помощи принципа Даламбера найти величину N нормального давления системы на плоскость. Показать, что справедливо равенство

$$N = (M + m_1 + m_2)g + [(m_1/2) + m_2]\,\ell\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right).$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты x и φ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$[3M + 2(m_1 + m_2)]\,\ddot{x} - (m_1 + 2m_2)\ell\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) = 0,$$

$$2\,[(m_1/3) + m_2]\,\ell\ddot{\varphi} - (m_1 + 2m_2)\left(\ddot{x}\cos\varphi - g\sin\varphi\right) = 0.$$

Записать интеграл энергии системы и циклический интеграл.

11. Считая угол φ малым, составить уравнение малых колебаний стержня в окрестности его нижнего положения. Показать, что период T малых колебаний вычисляется по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{3g}\,\frac{6M(m_1 + 3m_2) + m_1(m_1 + 4m_2)}{(m_1 + 2m_2)[3M + 2(m_1 + m_2)]}}.$$

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $M = 10$ кг, $\ell = 1$ м, $t_0 = 0$, $\varphi_0 = \pi/6$, $\dot{x}_0 = 0{,}5$ м/с, $\dot{\varphi}_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $x(t)$, $\varphi(t)$, $N(t)$.

ЗАДАНИЕ 49

Однородный стержень AB массы m и длины ℓ падает под действием силы тяжести, скользя без трения своими концами A и B по вертикальной и горизонтальной стенкам. На стержень помещен однородный диск массы m_1 и радиуса r, который может катиться по стержню без проскальзывания (рис. 49). При движении система остается в одной и той же вертикальной плоскости.

1. Ввести подвижную систему координат, связанную со стержнем. Считая $\varphi(t)$ и $s(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение центра C диска. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Считая в этом пункте, что вместо диска по стержню движется материальная точка C массы m_1, составить дифференциальное уравнение движения этой точки относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1, полагая $\varphi(t)$ заданной функцией времени.

3. Применяя теорему об изменении количества движения системы, определить величины N_A и N_B реакций, действующих на стержень в точках A и B. Показать, что

$$\begin{aligned} N_A &= -[(m/2)\ell + m_1 s]\left(\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi\right) + \\ &+ m_1\left[r\left(\ddot\varphi\cos\varphi - \dot\varphi^2\sin\varphi\right) + \ddot s\cos\varphi - 2\dot s\dot\varphi\sin\varphi\right], \\ N_B &= [(m/2)\ell + m_1(\ell - s)]\left(\ddot\varphi\cos\varphi - \dot\varphi^2\sin\varphi\right) - \\ &- m_1\left[r\left(\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi\right) + \ddot s\sin\varphi + 2\dot s\dot\varphi\cos\varphi\right] + (m + m_1)\,g. \end{aligned}$$

4. Полагая в этом пункте, что $m_1 = 0$ (диск отсутствует), и применяя результат п. 3, составить дифференциальное уравнение движения стержня AB. Применить теорему об изменении кинетического момента.

5. Считая, что $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, а в начальный момент времени $s = \ell/4$, $\dot s = 0$, определить скорость центра масс диска в тот момент, когда диск коснется горизонтальной плоскости.

6. Считая $\varphi(t)$ и $s(t)$ заданными функциями времени, найти главные векторы и главные моменты сил инерции стержня и диска относительно их центров масс.

7. Считая $\varphi(t)$ и $s(t)$ заданными функциями времени, определить величины N_K нормальной реакции и $F_{\text{тр}K}$ силы трения в точке K касания стержня и диска. Применить принцип Даламбера. Показать, что

$$N_K = m_1\left[g\cos\varphi + \ell\cos\varphi\left(\ddot\varphi\cos\varphi - \dot\varphi^2\sin\varphi\right) - s\ddot\varphi - (r\dot\varphi + 2\dot s)\,\dot\varphi\right],$$

$$F_{\text{тр}K} = (m_1/2)\,(\ddot s + r\ddot\varphi).$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и s.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{aligned} \left\{(m/3)\ell^2 + m_1\left[s^2 + (\ell - 2s)\ell\cos^2\varphi - \ell r\sin 2\varphi\right]\right\}\ddot\varphi &+ \\ + (m_1/2)(3r - \ell\sin 2\varphi)\ddot s + 2m_1(s - \ell\cos^2\varphi)\dot\varphi\dot s &- \\ - m_1\ell\left\{[(\ell/2) - s]\sin 2\varphi + r\cos 2\varphi\right\}\dot\varphi^2 + (m/2)g\ell\cos\varphi &+ \\ + m_1 g[(\ell - s)\cos\varphi - r\sin\varphi] &= 0, \\ (1/2)(3r - \ell\sin 2\varphi)\ddot\varphi + (3/2)\ddot s + \left(\ell\sin^2\varphi - s\right)\dot\varphi^2 &= g\sin\varphi. \end{aligned}$$

Записать интеграл энергии системы.

11. Пусть стержень AB неподвижен и его угол наклона $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$. К центру масс диска прикреплена пружина с жесткостью c и натуральной длиной a, параллельная стержню AB; другой конец пружины закреплен на вертикальной стенке. Найти положение равновесия диска, составить уравнение малых колебаний

в окрестности этого положения равновесия и найти период малых колебаний.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m = 5$ кг, $m_1 = 3$ кг, $\ell = 2$ м, $r = 0,02$ м; $t_0 = 0$, $\varphi_0 = \pi/4$, $s_0 = 0,5$ м, $\dot\varphi_0 = 0$, $\dot s_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $s(t)$, $N_A(t)$, $N_B(t)$.

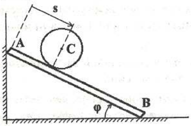

Рис. 49

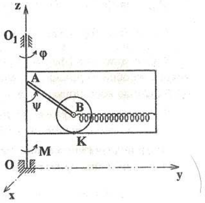

Рис. 50

ЗАДАНИЕ 50

К прямоугольной рамке длины a, вращающейся вокруг вертикальной оси Oz, приложена пара сил с моментом $M = -\alpha\varphi$, $\alpha = \text{const}$, пропорциональным углу φ поворота рамки. Момент инерции рамки относительно оси Oz равен J. В плоскости рамки движется однородный стержень AB массы m и длины ℓ. Конец A стержня скользит без трения по вертикальной стороне рамки. Конец B стержня прикреплен шарнирно к центру масс однородного

диска массы m_1 и радиуса r (рис. 50). Диск катится без проскальзывания по горизонтальной стороне рамки. К точке B прикреплена пружина жесткости c, второй конец которой закреплен на другой вертикальной стороне рамки. Длина пружины в недеформированном состоянии равна a.

1. Ввести подвижную систему координат, связанную с вращающейся рамкой. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, найти абсолютные скорости и абсолютные ускорения точки B и центра масс C стержня. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec v_{\text{абс}}$ и $\vec w_{\text{абс}}$.

2. Считая в этом пункте, что в точке C закреплена материальная точка массы m_2, а $\varphi = \omega t$, $\omega = \text{const}$, составить векторное дифференциальное уравнение движения точки C относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Полагая, что $\varphi = \text{const}$, а $\psi(t)$ — заданная функция времени, определить из уравнений плоскопараллельного движения системы величину R_A реакции в точке A, а также величины N_K нормальной реакции и $F_{\text{тр}_K}$ силы трения в точке K касания диска и рамки. Показать, что

$$R_A = (m + 3m_1)\ell\left(\ddot\psi\cos\psi - \dot\psi^2\sin\psi\right)/2,$$

$$N_K = -(m/2)\ell\left(\ddot\psi\sin\psi + \dot\psi^2\cos\psi\right) + (m + m_1)g,$$

$$F_{\text{тр}_K} = \quad m_1\ell\left(\ddot\psi\cos\psi - \dot\psi^2\sin\psi\right)/2.$$

4. Вычислить кинетический момент системы относительно оси Oz. При помощи теоремы об изменении кинетического момента составить дифференциальное уравнение вращательного движения системы относительно этой оси.

5. Считая $\varphi = \text{const}$, получить дифференциальное уравнение движения системы, используя теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме.

6. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, найти главные векторы и главные моменты относительно центров масс сил инерции стержня и диска.

7. Записать уравнения "динамического равновесия" системы (уравнения сил и уравнения моментов), учитывая реакции подпятника O и подшипника O_1. Применить принцип Даламбера.

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и ψ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$\left\{J + [(m/3) + m_1]\,\ell^2 \sin^2\psi + (m_1/4)r^2\right\}\ddot{\varphi} +$$

$$+\ [(m/3) + m_1]\,\ell^2 \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin 2\psi = -\alpha\varphi, \qquad [(m/3) + (3/2)m_1\cos^2\psi]\,\ddot{\psi} -$$

$$-\ (1/2)\left\{[(m/3) + m_1]\,\dot{\varphi}^2 + (3/2)m_1\dot{\psi}^2\right\}\sin 2\psi\ =$$

$$=\ (1/2)\,[(mg/\ell)\sin\psi - c\sin 2\psi]\,.$$

Считая, что момент M создается силами упругости, получить первый интеграл системы.

11. Считая $\varphi = \omega t$, $\omega = \mathrm{const}$, найти значение координаты ψ в положении относительного равновесия системы. Доказать неустойчивость этого равновесия.

12. Задавая численные значения параметров и начальные условия: $m = 2$ кг, $m_1 = 1$ кг, $J = 20$ кг$\cdot$м^2, $\ell = 1$ м, $r = 0,1$ м, $a = 3$ м, $\ell_0 = 1$ м, $\alpha = 30$ Н$\cdot$м, $c = 20$ Н/м; $t_0 = 0$, $\varphi_0 = \pi/6$, $\psi_0 = \pi/12$, $\dot{\varphi}_0 = 0,1c^{-1}$, $\dot{\psi}_0 = 0$, составить программу решения системы дифференциальных уравнений и на ЭВМ построить зависимости $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $Z_O(t)$, $X_{O_1}(t)$, $Y_{O_1}(t)$.

Содержание

Тем. план 2005, поз. 48

Галиуллин Ильяс Абдельхакович
Зайцев Владимир Васильевич
Зародов Владимир Константинович
Руденко Татьяна Владимировна
Синицын Валерий Александрович
Холостова Ольга Владимировна
Чеховская Татьяна Николаевна
Чудинов Петр Сергеевич

Задания для курсовых работ
по динамике механических систем

Редактор: *Е.Л. Мочина*
Компьютерная верстка в пакете LaTeX:
О.В. Холостова, Т.В. Руденко
Компьютерная графика: *Т.В. Руденко*

Подписано в печать 7.11.05.
Бум. писчая. Формат 60x84 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,51. Уч.-изд. л. 7,0. Тираж 500 экз.
Зак. 3218/1959. С. 388.

Издательство МАИ
«МАИ», Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993
Типография Издательства МАИ
«МАИ», Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993