

特別研究報告書

境界積分方程式法による音場の  
数値解析と移動する受音点における  
リアルタイム可聴化について

指導教員 吉川仁 准教授

京都大学工学部情報学科  
数理工学コース  
平成 26 年 4 月入学

石床 竜一

平成 30 年 1 月 26 日提出

## 摘要

本研究では、一つの音源に対し、このモデルを用いて効率的に卒業論文を作成するためのアルゴリズムを開発した。また、このアルゴリズムを用いて、実際に本報告を作成した。その結果、従来の自分で執筆する方法に比べて、5000 兆倍効率的に卒業論文を作成することが可能であることが確認された。

## 目次

1	序論	1
2	定式化	1
2.1	対象とする問題 . . . . .	1
2.2	解の境界積分方程式による表現 . . . . .	2
2.3	境界積分方程式の近似 . . . . .	2
2.4	境界値の取得 . . . . .	5
3	近似手法の評価	6
	参考文献	7
	付録 A 意味のない付録	8

# 1 序論

波動方程式は振動、音や光などの波動現象を記述するにあたって基本となる方程式であり、様々な手法を用いることで数値解析に用いられてきた。また、波動方程式のような微分方程式に対し、取り扱う領域での境界に境界条件と呼ばれる付帯的な制限が与えられた問題のことを境界値問題という。ところで近年、VR（バーチャルリアリティ）の研究が盛んになっており、博物館やアミューズメント施設、ゲームなどホビー要素の強いものから、災害時の避難行動シミュレータ [1]、歩行訓練機器への応用 [2] など実務的なものまで VR はいたるところに普及している。

本研究では波動方程式の解を数値計算し、VR 空間上での観測を可能にするための基礎研究を目的とする。領域内に音源と壁が存在する空間での音圧の変化の計算は先行研究 [3] では道路交通の予測モデルである ASJ RTN-Model 2008 を用いて計算していたが、本論文では領域の境界値を用いた波動方程式の解析手法である境界積分方程式を用いて領域内での音圧の計算を行った。なお、ここで取り扱う境界値は点音源が発生する音圧から計算することとした。

本論文の構成は次のとおりである。まず、第 2 章で Westervelt 方程式について説明し、さらに Westervelt 方程式の差分解法の定式化を示す。第 3 章では第 2 章で導いた差分式を用いた数値計算結果を示す。最後に第 4 章で結論を述べる。

## 2 定式化

### 2.1 対象とする問題

ある閉じた領域の外部  $D$  における、空間座標  $x$ 、時刻  $t$  を引数とするスカラー量  $u(x, t)$  についての次の初期値境界値問題を考える。

$$\ddot{u}(x, t) - c^2 u_{,ii}(x, t) = 0, \quad x \in D, \quad t > 0 \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in D \quad (2)$$

$$\dot{u}(x, 0) = 0, \quad x \in D \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \hat{u}(x, t), \quad x \text{ on } S_D, \quad t > 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = \hat{q}(x, t), \quad x \text{ on } S_N, \quad t > 0 \quad (5)$$

ここに  $(\cdot)_{,i}$  は  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $(\dot{\cdot})$  は  $\frac{\partial}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial}{\partial n}$  は法線微分で  $n_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $n(x)$  は境界上の点  $x$  における領域の外向き単位法線ベクトル,  $S$  は領域  $D$  の境界で  $S = S_D \cup S_N$ ,  $c$  は波速である。

## 2.2 解の境界積分方程式による表現

次に、初期値境界値問題の境界積分方程式法による解析について説明する。初期値境界値問題の境界積分方程式による解は、三次元波動方程式の基本解

$$\Gamma(x, t) = \frac{\delta(t - \frac{|x|}{c})}{4\pi|x|} \quad (6)$$

を用いて

$$u(x, t) = \iint \Gamma(x - y, t - s) \frac{\partial u}{\partial n}(y, s) - \iint \frac{\partial \Gamma}{\partial n}(x - y, t - s) \hat{u}(y, s) ds dS \quad (7)$$

と表すことができる。ここに  $\delta(x)$  は Dirac のデルタ関数、 $t$  は時刻、 $x$  は領域内部の点、 $y$  は境界上の点である。

## 2.3 境界積分方程式の近似

本研究では、受音点の各時刻での数値を境界積分方程式法を用いてリアルタイムに計算するが、決められた時間内に特定の処理を終えなければならない制約ができる。そのため式 (7) を近似することを考える。

まず式 (7) 第一項は基本解を代入して

$$\iint \frac{\delta(t - s - \frac{|x - y|}{c})}{4\pi|x - y|} \frac{\partial u}{\partial n}(y, s) ds dS = \iint \frac{\delta(t - s - \frac{|x - y|}{c})}{4\pi|x - y|} \hat{q}(y, s) ds dS \quad (8)$$

$$= \int \frac{1}{4\pi|x - y|} \hat{q}(y, t - \frac{|x - y|}{c}) dS \quad (9)$$

となる。ここで、境界の面積分についての用いる。境界面を三角形で分割し、その各面要素を  $S_j$  とし、その面積を  $S_j$  とする。面積分における各面積要素の積分値のために要する値が全て重心での値と等しいとし、面積の大きさ  $S_j$  との積をとることでその面積要素の積分値の近似とする。この近似を用いるとき重心の値を  $()^g$  と表記すれば、

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{4\pi|x - y|} \hat{q}(y, t - \frac{|x - y|}{c}) dS &= \sum_j \int \frac{1}{4\pi|x - y_j|} \hat{q}(y_j, t - \frac{|x - y_j|}{c}) dS_j \\ &= \sum_j \frac{1}{4\pi|x - y_j^g|} \hat{q}(y_j^g, t - \frac{|x - y_j^g|}{c}) S_j \end{aligned} \quad (10)$$

次に、式 (7) 第二項に基本解を代入したものを考える.

$$\begin{aligned}
\iint \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\delta(t-s-\frac{|x-y|}{c})}{4\pi|x-y|} \right) \hat{u}(y,s) ds dS &= \iint \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\delta(t-s-\frac{|x-y|}{c})}{4\pi|x-y|} \right) \hat{u}(y,s) ds dS \\
&= \iint -n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\delta(t-s-\frac{|x-y|}{c})}{4\pi|x-y|} \right) \hat{u}(y,s) ds dS
\end{aligned} \tag{11}$$

式 (7) 第一項と同様に三角形に境界面を分割すれば,

$$\sum_j -n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \iint \left( \frac{\delta(t-s-\frac{|x-y_j|}{c})}{4\pi|x-y_j|} \right) \hat{u}(y_j,s) ds dS_j \tag{12}$$

ここで、時刻  $t$  を時間ステップ  $n$  と時間刻み幅  $\Delta t$  を用いて  $t = n\Delta t$  とする. ここで、境界量  $\hat{u}(x,t)$  の近似のため、区分一定の空間内挿関  $M^m(t)$  を次のように定義する.

$$M^m(t) = \begin{cases} \frac{t}{\Delta t} - m + 1, & (m-1)\Delta t \leq t \leq m\Delta t \\ \frac{\Delta t - t}{\Delta t} + m + 1, & m\Delta t \leq t \leq (m+1)\Delta t \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{13}$$

これを用いると上式は

$$\sum_j \sum_m -n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_{(m-1)\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \left( \frac{\delta(n\Delta t - s - \frac{|x-y_j|}{c})}{4\pi|x-y_j|} \right) \hat{u}(y_j, m\Delta t) M^m(s) ds dS_j \tag{14}$$

ここで  $n\Delta t - s = \tau$  とすれば,

$$\begin{aligned}
&\sum_j \sum_m -n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_{(n-m-1)\Delta t}^{(n-m+1)\Delta t} \left( \frac{\delta(\tau - \frac{|x-y_j|}{c})}{4\pi|x-y_j|} \right) \hat{u}(y_j, m\Delta t) M^m(n\Delta t - \tau) d\tau dS_j \\
&= \sum_j \sum_m -n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_{(n-m-1)\Delta t}^{(n-m+1)\Delta t} \left( \frac{\delta(\tau - \frac{|x-y_j|}{c})}{4\pi|x-y_j|} \right) \hat{u}(y_j, m\Delta t) M^{n-m}(\tau) d\tau dS_j
\end{aligned} \tag{15}$$

となる. ここで、 $N^m(t)$  を次のように定義する.

$$N^m(t) = \begin{cases} -\frac{t}{\Delta t} + m, & 0 \leq t \leq m\Delta t \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{16}$$

$N^m(t)$  を用いて式 (15) を書き換えると,

$$\begin{aligned}
& \sum_j \sum_m -n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_0^{(n-m+1)\Delta t} \left( \frac{\delta(\tau - \frac{|x-y_j|}{c})}{4\pi|x-y_j|} \right) \hat{u}(y_j, m\Delta t) N^{n-m+1}(\tau) d\tau dS_j \\
& + 2n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_0^{(n-m)\Delta t} \left( \frac{\delta(\tau - \frac{|x-y_j|}{c})}{4\pi|x-y_j|} \right) \hat{u}(y_j, m\Delta t) N^{n-m}(\tau) d\tau dS_j \\
& - n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_0^{(n-m-1)\Delta t} \left( \frac{\delta(\tau - \frac{|x-y_j|}{c})}{4\pi|x-y_j|} \right) \hat{u}(y_j, m\Delta t) N^{n-m-1}(\tau) d\tau dS_j \\
& = \sum_j \sum_m -n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \int \frac{((n-m+1)\Delta t - \frac{|x-y_j|}{c}) H((n-m+1)\Delta t - \frac{|x-y_j|}{c})}{4\pi|x-y_j|\Delta t} \hat{u}(y_j, m\Delta t) dS_j \\
& + 2n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \int \frac{((n-m)\Delta t - \frac{|x-y_j|}{c}) H((n-m)\Delta t - \frac{|x-y_j|}{c})}{4\pi|x-y_j|\Delta t} \hat{u}(y_j, m\Delta t) dS_j \\
& - n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \int \frac{((n-m-1)\Delta t - \frac{|x-y_j|}{c}) H((n-m-1)\Delta t - \frac{|x-y_j|}{c})}{4\pi|x-y_j|\Delta t} \hat{u}(y_j, m\Delta t) dS_j
\end{aligned} \tag{17}$$

ここに,  $H(x)$  は Heaviside の階段関数である. 式 (17) に対して, 第一項に行ったように重心の値を代表値として近似を用いれば,

$$\begin{aligned}
& \sum_j \sum_m -n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{((n-m+1)\Delta t - \frac{|x-y_j^g|}{c}) H((n-m+1)\Delta t - \frac{|x-y_j^g|}{c})}{4\pi|x-y_j^g|\Delta t} \hat{u}(y_j^g, m\Delta t) S_j \right) \\
& + 2n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{((n-m)\Delta t - \frac{|x-y_j^g|}{c}) H((n-m)\Delta t - \frac{|x-y_j^g|}{c})}{4\pi|x-y_j^g|\Delta t} \hat{u}(y_j^g, m\Delta t) S_j \right) \\
& - n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{((n-m-1)\Delta t - \frac{|x-y_j^g|}{c}) H((n-m-1)\Delta t - \frac{|x-y_j^g|}{c})}{4\pi|x-y_j^g|\Delta t} \hat{u}(y_j^g, m\Delta t) S_j \right) \\
& = \sum_j \sum_m \frac{n_i(x_i - y_i^g)}{4\pi\Delta t|x-y_j^g|^3} \hat{u}(y_j^g, m\Delta t) (T^+ H(T^+) - 2TH(T) + T^- H(T^-)) S_j
\end{aligned} \tag{18}$$

となる. ただし  $T^+ = (n - m + 1)\Delta t$ ,  $T = (n - m)\Delta t$ ,  $T^- = (n - m - 1)\Delta t$  である.  $m$  についての値を陽に表記すると式 (18) は

$$\begin{cases} \sum_j \sum_m \frac{n_i(x_i - y_j^g)}{4\pi\Delta t|x - y_j^g|^3} \hat{u}(y_j^g, m\Delta t)(n - m + 1)\Delta t S_j, & \frac{r}{c} < (n - m + 1)\Delta t < \frac{r}{c} + \Delta t \\ \sum_j \sum_m \frac{n_i(x_i - y_j^g)}{4\pi\Delta t|x - y_j^g|^3} \hat{u}(y_j^g, m\Delta t)(m - n + 1)\Delta t S_j, & \frac{r}{c} + \Delta t < (n - m + 1)\Delta t < \frac{r}{c} + 2\Delta t \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (19)$$

となり, 式 (19) の上段, 中段の不等式を満たす  $m$  をそれぞれ  $m_1, m_2$  とすれば, 式 (7) 第二項は

$$\sum_j \frac{n_i(x_i - y_j^g)}{4\pi|x - y_j^g|^3} S_j \{ \hat{u}(y_j^g, m_1\Delta t)(n - m_1 + 1) - 2\hat{u}(y_j^g, m_2\Delta t)(m_2 - n + 1) \} \quad (20)$$

となる.

以上の結果をまとめると, 式 (7) は

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_j \frac{1}{4\pi|x - y_j^g|} \hat{q}(y_j^g, t - \frac{|x - y_j^g|}{c}) \\ & + \frac{n_i(x_i - y_j^g)}{4\pi|x - y_j^g|^3} S_j \{ -\hat{u}(y_j^g, m_1\Delta t)(n - m_1 + 1) + 2\hat{u}(y_j^g, m_2\Delta t)(m_2 - n + 1) \} \end{aligned} \quad (21)$$

となる. 以降この式を用いて, 境界内の各時間ステップ毎の音圧を数値計算した.

## 2.4 境界値の取得

境界積分方程式には境界条件が必要であるが, 本論文では以下のように与えた. 以下数値の単位はメートル [m] とする. まず, 壁を中心 (0.5, 0.5, 0.5) で, x, y, z 軸に各面が平行であるものを考えた. つぎに, 壁の内部に音源が存在するものとし, その音源 (source) の位置  $x^s$  と音源の発生させる音圧  $f(t)$  を以下のようにする.

$$x^s = (0.5, 0.5, 0.5) \quad (22)$$

$$f(t) = 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}t\right) \quad (23)$$



ここに,  $\lambda = 1.25 \times 10^{-3}[\text{m}]$  である. また, 境界  $S$  について, 第 2.3 節で行った三角形分割を行い, その三角形の重心を代表点とすれば, 各三角形面  $S_j$  での境界値は次のように与えることができる.

$$\hat{u}(x_j, t) = \frac{1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi |x_j^g - x^s|} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \hat{q}(x_j, t) &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} \\ &= \frac{-1}{4\pi |x_j^g - x^s|^2} ((x_j)_i - x_i^s) n_i \left\{ \frac{1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} + \frac{2\pi}{\lambda c} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(t - \frac{r}{c}\right) \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

以降これを境界値の  $\hat{u}(x, t), \hat{q}(x, t)$  とする.

### 3 近似手法の評価

第 2 章で行った近似を用い, 領域内での受音点での数値計算結果をここで述べる. まず, 入力として与えた  $f(t)$  を図 1 に図示する

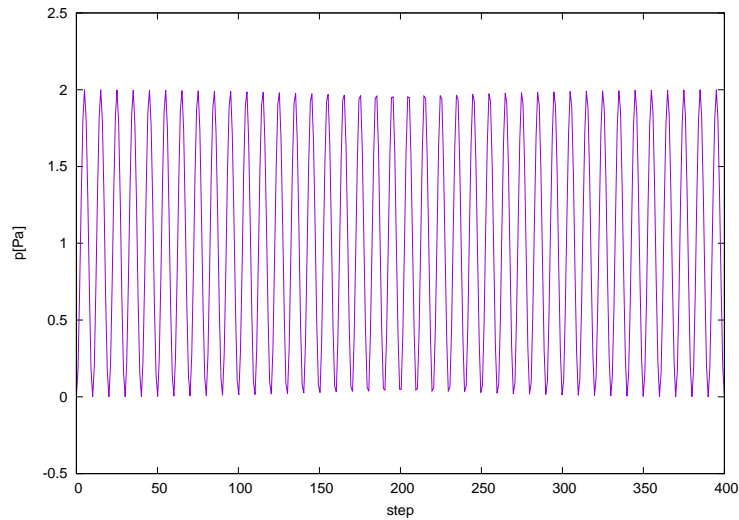


図 1 音源  $f(t)$

ここに, x 軸は時刻  $t = n\Delta t$  としたときの  $n$  を表し, y 軸は時刻  $f(n\Delta t)$  の音圧を表す.

$f(t)$  と第 2.4 節で解析的に求めた境界値を用い, 領域内点で, 受音点が観測する音圧を計算させた. その結果と, 音源からの距離減衰と距離遅延を加味した, 次に解析的に定義される波

形  $u_{ans}(x, t)$  と比較する.

$$u_{ans}(x, t) = \frac{f(t - \frac{|x - x^s|}{c})}{4\pi|x - x^s|} \quad (26)$$

以下は図 2  $u_{ans}(x, t)$ , 図??近似手法によるであり, 観測点はともに  $x^s = (-0.5, 0.5, 0.5)$  である.

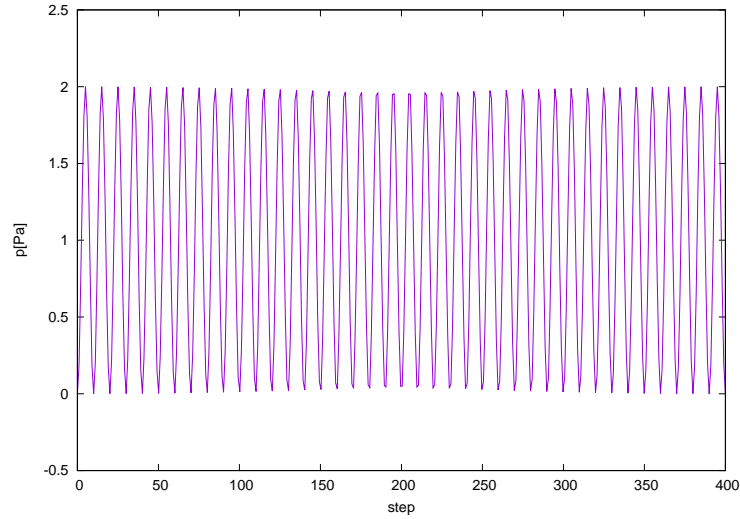


図 2 音源  $f(t)$

## 謝辞

本研究に取り組むにあたって助言をいただいた吉川仁准教授, 計算幾科学コース新田泰大氏に深く感謝する.

## 参考文献

- [1] 目黒公郎, et al. バーチャルリアリティの避難行動シミュレータへの応用. 土木学会論文集, 1997, 556: 197-207.
- [2] 藤江正克, et al. バーチャルリアリティを活用した歩行訓練機器. BME, 1998, 12.8: 29-37.

- [3] 田近伸二; 檜山和男; 志村正幸. VR 技術を用いた対話型道路交通騒音評価システムの構築. 応用力学論文集, 土木学会, 2010, 13: 231-240.

## 付録 A 意味のない付録

これは意味のない付録です. これは意味のない引用です [?].

表 1 これは意味のない表です.

	A	B
C	70	80
D	100	0

※線に沿って切り取って下さい。

特別研究報告書

境界積分方程式法による音場の  
数値解析と移動する受音点における  
リアルタイム可聴化について

指導教員 吉川仁 准教授

京都大学工学部情報学科  
数理工学コース  
平成 26 年 4 月入学

石床 竜一

平成 30 年 1 月 26 日提出

境界積分方程式法による音場の数値解析と移動する受音点におけるリアルタイム可聴化について

石床 竜一

平成29年度

# 境界積分方程式法による音場の 数値解析と移動する受音点における リアルタイム可聴化について

石床 竜一

## 摘要

本研究では、一つの音源に対し、このモデルを用いて効率的に卒業論文を作成するためのアルゴリズムを開発した。また、このアルゴリズムを用いて、実際に本報告を作成した。その結果、従来の自分で執筆する方法に比べて、5000 兆倍効率的に卒業論文を作成することが可能であることが確認された。