特別研究報告書

境界積分方程式方による音場の数値解析と
移動する受音点におけるリアルタイム可聴化について

指導教員　　　吉川仁　准教授

京都大学工学部情報学科
数理工学コース
平成 26 年 4 月入学

石床　竜一

平成 30 年 1 月 26 日提出

摘要

本研究では，一つの音源に対し、このモデルを用いて効率的に卒業論文を作成するためのアルゴリズムを開発した．また，このアルゴリズムを用いて，実際に本報告を作成した．その結果，従来の自分で執筆する方法に比べて，65536 倍効率的に卒業論文を作成することが可能であることが確認された．

目次

1　序論

序論っす.

2　定式化

2.1　対象とする問題

ある閉じた領域の外部 D における、空間座標 x, 時刻 t を引数とするスカラー量 $u(x,t)$ についての次の初期値境界値問題を考える.

$$\ddot{u}(x,t) - c^2 u_{,ii}(x,t) = 0,\ x \in D,\ t > 0 \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0,\ x \in D \tag{2}$$

$$\dot{u}(x,0) = 0,\ x \in D \tag{3}$$

$$u(x,0) = \hat{u}(x,t),\ x \text{ on } S_D,\ t > 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = \hat{q}(x,t),\ x \text{ on } S_N,\ t > 0 \tag{5}$$

ここに $(\ )_{,i}$ は $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $(\dot{})$ は $\dfrac{\partial}{\partial t}$, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ は法線微分で $n_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $n(x)$ は境界上の点 x における領域の外向き単位法線ベクトル, S は領域 D の境界で $S = S_D \cup S_N$, c は波速である.

2.2　解の境界積分方程式による表現

次に, 初期値境界値問題の境界積分方程式法による解析について説明する. 初期値境界値問題の境界積分方程式による解は, 三次元波動方程式の基本解

$$\Gamma(x,t) = \frac{\delta(t - \frac{|x|}{c})}{4\pi|x|} \tag{6}$$

を用いて

$$u(x,t) = \iint \Gamma(x-y,t-s)\frac{\partial u}{\partial n}(y,s) - \iint \frac{\partial \Gamma}{\partial n}(x-y,t-s)\hat{u}(y,s)dsdS \tag{7}$$

と表すことができる. ここに $\delta(x)$ は Dirac のデルタ関数, t は時刻, x は領域内部の点, y は境界上の点である.

2.3 境界積分方程式の近似

本研究では, 受音点の各時刻での数値を境界積分方程式法を用いてリアルタイムに計算するが, 決められた時間内に特定の処理を終えなければならない制約ができる. そのため式 (7) を近似することを考える.

まず式 (7) 第一項は基本解を代入して

$$\iint \frac{\delta(t-s-\frac{|x-y|}{c})}{4\pi|x-y|}\frac{\partial u}{\partial n}(y,s)dsdS = \iint \frac{\delta(t-s-\frac{|x-y|}{c})}{4\pi|x-y|}\hat{q}(y,s)dsdS \tag{8}$$

$$= \int \frac{1}{4\pi|x-y|}\hat{q}(y,t-\frac{|x-y|}{c})dS \tag{9}$$

となる. ここで, 境界の面積分についての用いる. 境界面を三角形で分割し, その各面要素を S_j とし, その面積を S_j とする. 面積分における各面積要素の積分値のために要する値が全て重心での値と等しいとし, 面積の大きさ S_j との積をとることでその面積要素の積分値の近似とする. この近似を用いるとき重心の値を $()^g$ と表記すれば,

$$\int \frac{1}{4\pi|x-y|}\hat{q}(y,t-\frac{|x-y|}{c})dS = \sum_j \int \frac{1}{4\pi|x-y_j|}\hat{q}(y_j,t-\frac{|x-y_j|}{c})dS_j$$

$$= \sum_j \frac{1}{4\pi|x-y_j^g|}\hat{q}(y_j^g,t-\frac{|x-y_j^g|}{c})S_j \tag{10}$$

次に, 式 (7) 第二項に基本解を代入したものを考える.

$$\iint \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\delta(t-s-\frac{|x-y|}{c})}{4\pi|x-y|}\right)\hat{u}(y,s)dsdS = \iint \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\delta(t-s-\frac{|x-y|}{c})}{4\pi|x-y|}\right)\hat{u}(y,s)dsdS$$

$$= \iint -n_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\delta(t-s-\frac{|x-y|}{c})}{4\pi|x-y|}\right)\hat{u}(y,s)dsdS \tag{11}$$

式 (7) 第一項と同様に三角形に境界面を分割すれば,

$$\sum_j -n_i\frac{\partial}{\partial x_i}\iint\left(\frac{\delta(t-s-\frac{|x-y_j|}{c})}{4\pi|x-y_j|}\right)\hat{u}(y_j,s)dsdS_j \tag{12}$$

ここで, 時刻 t を時間ステップ n と時間刻み幅 Δt を用いて $t = n\Delta t$ とする. ここで, 境界量 $\hat{u}(x,t)$ の近似のため, 区分一定の空間内挿関 $M^m(t)$ を次のように定義する.

$$M^m(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\Delta t} - m + 1, & (m-1)\Delta t \le t \le m\Delta t \\ \dfrac{-t}{\Delta t} + m + 1, & m\Delta t \le t \le (m+1)\Delta t \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{13}$$

これを用いると上式は

$$\sum_j \sum_m -n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_{(m-1)\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \left(\frac{\delta(n\Delta t - s - \frac{|x-y_j|}{c})}{4\pi|x-y_j|} \right) \hat{u}(y_j, m\Delta t) M^m(s) ds dS_j \tag{14}$$

ここで $n\Delta t - s = \tau$ とすれば,

$$\begin{aligned} &\sum_j \sum_m -n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_{(n-m-1)\Delta t}^{(n-m+1)\Delta t} \left(\frac{\delta(\tau - \frac{|x-y_j|}{c})}{4\pi|x-y_j|} \right) \hat{u}(y_j, m\Delta t) M^m(n\Delta t - \tau) d\tau dS_j \\ &= \sum_j \sum_m -n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_{(n-m-1)\Delta t}^{(n-m+1)\Delta t} \left(\frac{\delta(\tau - \frac{|x-y_j|}{c})}{4\pi|x-y_j|} \right) \hat{u}(y_j, m\Delta t) M^{n-m}(\tau) d\tau dS_j \end{aligned} \tag{15}$$

となる. ここで,$N^m(t)$ を次のように定義する.

$$N^m(t) = \begin{cases} -\dfrac{t}{\Delta t} + m, & 0 \le t \le m\Delta t \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{16}$$

$N^m(t)$ を用いて式 (15) を書き換えると,

$$\begin{aligned}
&\sum_j \sum_m -n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_0^{(n-m+1)\Delta t} \left(\frac{\delta(\tau - \frac{|x-y_j|}{c})}{4\pi|x-y_j|} \right) \hat{u}(y_j, m\Delta t) N^{n-m+1}(\tau) d\tau dS_j \\
&\quad + 2n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_0^{(n-m)\Delta t} \left(\frac{\delta(\tau - \frac{|x-y_j|}{c})}{4\pi|x-y_j|} \right) \hat{u}(y_j, m\Delta t) N^{n-m}(\tau) d\tau dS_j \\
&\quad - n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \iint_0^{(n-m-1)\Delta t} \left(\frac{\delta(\tau - \frac{|x-y_j|}{c})}{4\pi|x-y_j|} \right) \hat{u}(y_j, m\Delta t) N^{n-m-1}(\tau) d\tau dS_j \\
&= \sum_j \sum_m -n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \int \frac{((n-m+1)\Delta t - \frac{|x-y_j|}{c}) H((n-m+1)\Delta t - \frac{|x-y_j|}{c})}{4\pi|x-y_j|\Delta t} \hat{u}(y_j, m\Delta t) dS_j \\
&\quad + 2n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \int \frac{((n-m)\Delta t - \frac{|x-y_j|)}{c}) H((n-m)\Delta t - \frac{|x-y_j|}{c})}{4\pi|x-y_j|\Delta t} \hat{u}(y_j, m\Delta t) dS_j \\
&\quad - n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \int \frac{((n-m-1)\Delta t - \frac{|x-y_j|)}{c}) H((n-m-1)\Delta t - \frac{|x-y_j|}{c})}{4\pi|x-y_j|\Delta t} \hat{u}(y_j, m\Delta t) dS_j
\end{aligned} \tag{17}$$

ここに,$H(x)$ は Heaviside の階段関数である. 式 (17) に対して, 第一項に行ったように重心の値を代表値として近似を用いれば,

$$\begin{aligned}
&\sum_j \sum_m -n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{((n-m+1)\Delta t - \frac{|x-y_j^g|}{c}) H((n-m+1)\Delta t - \frac{|x-y_j^g|}{c})}{4\pi|x-y_j^g|\Delta t} \hat{u}(y_j^g, m\Delta t) S_j \right) \\
&\quad + 2n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{((n-m)\Delta t - \frac{|x-y_j^g|)}{c}) H((n-m)\Delta t - \frac{|x-y_j^g|}{c})}{4\pi|x-y_j^g|\Delta t} \hat{u}(y_j^g, m\Delta t) S_j \right) \\
&\quad - n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{((n-m-1)\Delta t - \frac{|x-y_j^g|)}{c}) H((n-m-1)\Delta t - \frac{|x-y_j^g|}{c})}{4\pi|x-y_j^g|\Delta t} \hat{u}(y_j^g, m\Delta t) S_j \right) \\
&= \sum_j \sum_m \frac{n_i(x_i - y_i^g)}{4\pi\Delta t|x-y_j^g|^3} \hat{u}(y_j^g, m\Delta t)(T^+ H(T^+) - 2TH(T) + T^- H(T^-)) S_j
\end{aligned} \tag{18}$$

となる. ただし $T^+ = (n-m+1)\Delta t,\ T = (n-m)\Delta t,\ T^- = (n-m-1)\Delta t$ である. m についての値を陽に表記すると式 (18) は

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_j \sum_m \frac{n_i(x_i - y_i^g)}{4\pi\Delta t|x-y_j^g|^3}\hat{u}(y_j^g, m\Delta t)(n-m+1)\Delta t S_j, & \dfrac{r}{c} < (n-m+1)\Delta t < \dfrac{r}{c} + \Delta t \\ \displaystyle\sum_j \sum_m \frac{n_i(x_i - y_i^g)}{4\pi\Delta t|x-y_j^g|^3}\hat{u}(y_j^g, m\Delta t)(m-n+1)\Delta t S_j, & \dfrac{r}{c} + \Delta t < (n-m+1)\Delta t < \dfrac{r}{c} + 2\Delta t \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

となり, 上記近似により式 (7) 第二項の計算量を大幅に減らすことができる.

以上の結果をまとめると, 式 (7) は

2.4 卒業論文のモデル化

…….

3 効率的なアルゴリズムの開発

本節では，前節までの結果を用いて，効率的に卒業論文を作成するためのアルゴリズムを開発する．…….

4 結論

本研究では，卒業論文を執筆する学生の数理モデルを構築した．

とりあえず境界積分方程式法を用いてがんばってけいさんしてみたけどクッソ遅かった。的な状況が結論になりそうですね。

今後の課題としては，修士論文にもこのアルゴリズムを適用することが考えられる．

謝辞

本研究に取り組むにあたって助言をいただいた吉川仁准教授に深く感謝する．

参考文献

[1] G. Polya, *How to solve it: a new aspect of mathematical method*, Princeton University Press, Princeton, 1945.

[2] 数理花子，数理モデルとその妥当性の検討，京都大学工学部情報学科数理工学コース特別研究報告，2010.

付録 A　意味のない付録

これは意味のない付録です．これは意味のない引用です [1].

表 1　これは意味のない表です．

	A	B
C	70	80
D	100	0

※線に沿って切り取って下さい。

特別研究報告書

境界積分方程式方による音場の数値解析と移動する受音点におけるリアルタイム可聴化について

指導教員　　　吉川仁　准教授

京都大学工学部情報学科
数理工学コース
平成 26 年 4 月入学

石床　竜一

平成 30 年 1 月 26 日提出

境界積分方程式方による音場の数値解析と移動する受音点におけるリアルタイム可聴化について

石床　竜一

平成29年度

境界積分方程式方による音場の数値解析と移動する受音点におけるリアルタイム可聴化について

石床　竜一

摘要

本研究では，一つの音源に対し、このモデルを用いて効率的に卒業論文を作成するためのアルゴリズムを開発した．また，このアルゴリズムを用いて，実際に本報告を作成した．その結果，従来の自分で執筆する方法に比べて，65536 倍効率的に卒業論文を作成することが可能であることが確認された．