

特別研究報告書

境界積分方程式法による音場の  
数値解析と移動する受音点における  
リアルタイム可聴化について

指導教員      吉川仁 准教授

京都大学工学部情報学科  
数理工学コース  
平成 26 年 4 月入学

石床 竜一

平成 30 年 1 月 26 日提出

## 摘要

本研究では波動方程式に支配される，散乱体の存在する音場の数値解析を行った．受音点の移動による波形の変化が観測できたが，計算時間によるリアルタイム可聴化は実現できなかった．

## 目次

1	序論	1
2	時間域境界積分方程式による音場解析	1
2.1	対象とする問題 . . . . .	1
2.2	解の積分表現 . . . . .	2
2.3	時間域境界積分方程式法 . . . . .	2
3	移動する受音点での音圧の計算	3
3.1	境界積分方程式の近似 . . . . .	3
4	数値結果	5
4.1	精度検証 . . . . .	5
4.2	数値シュミレーション . . . . .	5
5	結論	9
	参考文献	10
	付録 A 意味のない付録	10

# 1 序論

生活音や音楽また騒音に至るまで、音はいろいろな場所で聞くことが可能だが、散乱体が存在する場合、音は散乱体の影響で変化すると考えられる。コンサートホール、工事現場、カラオケなど音を扱う、あるいは発生する場において、音響のシミュレーションで音がどのように変化するかを確認することができれば、実際に壁を設営するか否かの指標になり、建設コスト削減や騒音被害等に寄与できると考えられる。このとき視覚、聴覚的な情報があり、どのような状況で音が変わったのかがわかりやすくなるはずである。音の変化を聴覚的、視覚的かつリアルタイムに観測できるようなシステムを作成し、本論文では、散乱体の存在する3次元空間での音のリアルタイム可聴化を目標とする。先行研究では解析手法にリアルタイム性が要求されるような場で一般的に用いられる幾何音響手法を用いていたが、ここでは境界値を事前に計算しておくことで、メモリの節約や高速化が見込める境界要素法を用いて計算を行うこととした。本論文の構成は次の通りである。まず、第2章で対象とする問題の時間域境界積分方程式による音場解析について述べる。第3章では第2章で導いた積分表現に適用した近似について述べる。第4章で近似の精度とその近似を用いた実際の計算を述べる。第5章で結論を述べる。

## 2 時間域境界積分方程式による音場解析

### 2.1 対象とする問題

ある閉じた3次元領域の外部領域  $D$  における、位置  $\mathbf{x}$ 、時刻  $t$  での音圧  $u(\mathbf{x}, t)$  について次の初期値境界値問題を考える。

$$\ddot{u}(\mathbf{x}, t) - c^2 u_{,ii}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in D, \quad t > 0 \quad (1)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in D \quad (2)$$

$$\dot{u}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in D \quad (3)$$

$$u(\mathbf{x}, t) = \bar{u}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \text{ on } S_D, \quad t > 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = \bar{q}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \text{ on } S_N, \quad t > 0 \quad (5)$$

$$u(\mathbf{x}, t) \rightarrow u^{\text{in}}(\mathbf{x}, t), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (6)$$

ここに、 $u^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$  は入射波を  $\bar{u}(\mathbf{x}, t), \bar{q}(\mathbf{x}, t)$  は既知関数である。また、 $(\cdot)_{,i}$  は  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ,

$(\dot{\cdot})$  は  $\frac{\partial}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial}{\partial n}$  は法線微分で  $n_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $n(\mathbf{x})$  は境界上の点  $\mathbf{x}$  における領域の外向き単位法

線ベクトル,  $S$  は領域  $D$  の境界で  $S = S_D \cup S_N$ ,  $c$  は波速である.

## 2.2 解の積分表現

初期値境界値問題の解は, 3次元波動方程式の基本解

$$\Gamma(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c})}{4\pi|\mathbf{x}|} \quad (7)$$

を用いて

$$u(\mathbf{x}, t) = u^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_S \int_0^t \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}, s) - \int_S \int_0^t \frac{\partial \Gamma}{\partial n}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) u(\mathbf{y}, s) ds dS \quad (8)$$

と表すことができる. ここに  $\delta(t)$  は Dirac のデルタ関数である.

境界条件 (式 (4), (5)) より,  $S_D$  上の  $u(\mathbf{x}, t)$  と  $S_N$  上の  $\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t)$  は与えられているが,  $S_N$  上の  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $S_0$  上の  $\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t)$  は未知である. これらの境界量を求めるために,  $\mathbf{x} \in D$  を境界  $S$  に極限移行し, 次の境界積分方程式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u(\mathbf{x}, t) &= u^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_S \int_0^t \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}, s) ds dS \\ &\quad - \int_S \int_0^t \frac{\partial \Gamma}{\partial n_y}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) u(\mathbf{y}, s) ds dS \quad , \mathbf{x} \in S, t > 0 \end{aligned} \quad (9)$$

まず, 式 (9) を  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{x} \in S_N$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{x} \in S_0$  について解く.

次に, 得られた境界量を用いて式 (7) により領域  $D$  の内点での解  $u(\mathbf{x}, t)$  を得る.

## 2.3 時間域境界積分方程式法

境界積分方程式 (9) を数値的に解くために, 境界  $S$  を境界要素  $S_j, j = 1, \dots, N$  に分割し, さらに境界量  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t)$  を空間内挿関数  $M_S^j(\mathbf{x})$  と時間内挿関数  $M_T^m(t)$  を用いて離散化する.

$$u(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{m=1}^{N_T} \sum_{j=1}^N u(\mathbf{p}^j, m\Delta t) M_S^j(\mathbf{x}) M_T^m(t), \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{m=1}^{N_T} \sum_{j=1}^N \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{p}^j, m\Delta t) M_S^j(\mathbf{x}) M_T^m(t), \quad (11)$$

ここに, 点  $\mathbf{p}^j$  は境界要素  $S_j$  の代表点で,  $\Delta t$  は時間増分,  $N_T$  は時間ステップ数である. このとき, ある時刻  $t = n\Delta t$ ,  $n = 1, \dots, N_T$  における離散化された境界積分方程式は次式

で得られる..

$$-\mathbf{u}_n^{\text{in}} = \sum_{m=1}^n \mathbf{U}_{n-m+1} \mathbf{q}_m - \sum_{m=1}^n \mathbf{W}_{n-m+1} \mathbf{u}_m, \quad (12)$$

$$\{\mathbf{u}_n^{\text{in}}\}_i := u^{\text{in}}(\mathbf{p}^i, n\Delta t), \quad (13)$$

$$\{\mathbf{u}_m\}_i := u(\mathbf{p}^i, m\Delta t), \quad (14)$$

$$\{\mathbf{q}_m\}_i := \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{p}^i, m\Delta t), \quad (15)$$

$$\{\mathbf{U}_{n-m+1}\}_{ij} := \int_S \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\mathbf{p}^i - \mathbf{y}, n\Delta t - s) M_S^j(\mathbf{y}) M_T^m(s) ds dS, \quad (16)$$

$$\{\mathbf{W}_{n-m+1}\}_{ij} := \int_S \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Gamma}{\partial n_y}(\mathbf{p}^i - \mathbf{y}, n\Delta t - s) M_S^j(\mathbf{y}) M_T^m(s) ds dS. \quad (17)$$

この代数方程式 (12) を各時間ステップにおいて逐次的に解く.

式 (12) を解き、境界量  $\mathbf{u}_m, \mathbf{q}_m, m = 1, \dots, N_T$  が得られたならば、領域  $D$  内の任意の点  $\mathbf{x}$  での時刻  $n\Delta t$  での値が次式で得られる.

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, n\Delta t) &= u^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) \\ &+ \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^N \left\{ \int_S \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}, n\Delta t - s) M_S^j(\mathbf{y}) M_T^m(s) ds dS \right\} \{\mathbf{q}_m\}_j \\ &- \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^N \left\{ \int_S \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Gamma}{\partial n_y}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, n\Delta t - s) M_S^j(\mathbf{y}) M_T^m(s) ds dS \right\} \{\mathbf{u}_m\}_j \end{aligned} \quad (18)$$

### 3 移動する受音点での音圧の計算

#### 3.1 境界積分方程式の近似

本研究では、VR 空間内を移動する人が聴く音を作り出すことを目標とし、音圧をリアルタイムで計算することを目的とする。移動する受音点の各時刻での内点計算 (式 (??)) の計算時間短縮のために次の近似を考える。

$$\begin{aligned}
& \int_S \int_0^{n\Delta t} \frac{\delta(n\Delta t - s - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c})}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}, s) ds dS \\
& \simeq \sum_{j=1}^N \int_{S_j} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}, n\Delta t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c}) H(n\Delta t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c}) dS \\
& \simeq \sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{p}^j|} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{p}^j, n\Delta t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{p}^j|}{c}) H(n\Delta t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{p}^j|}{c}) |S_j| \quad (19)
\end{aligned}$$

ここに,  $\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{p}^j, n\Delta t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{p}^j|}{c})$  は時刻  $n\Delta t - \text{int}\left(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{p}^j|}{c\Delta t}\right)\Delta t$  のと時刻  $(n+1)\Delta t - \text{int}\left(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{p}^j|}{c\Delta t}\right)\Delta t$  との  $\frac{\partial u}{\partial n}$  の値を線形補間することで求める. また  $H(t)$  はヘビサイド関数であり,  $|S_j|$  は境界要素  $S_j$  の面積である.

式 (8) 右辺第 3 項について

$$\begin{aligned}
& \int_S \int_0^{n\Delta t} \frac{\partial}{\partial n_y} \left( \frac{\delta\left(n\Delta t - s - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right) u(\mathbf{y}, s) ds dS \\
& \simeq \sum_{j=1}^N -n_i(\mathbf{P}^j) \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{S_j} \int_0^{n\Delta t} \frac{\delta\left(n\Delta t - s - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} u(\mathbf{y}, s) ds dS \\
& \simeq \sum_{j=1}^N -n_i(\mathbf{P}^j) \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{S_j} \int_0^{n\Delta t} \frac{\delta\left(n\Delta t - s - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \sum_{m=1}^n M_T^m(s) u(\mathbf{y}, m\Delta t) ds dS \\
& \simeq \sum_{j=1}^N -n_i(\mathbf{P}^j) \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{S_j} \sum_{m=1}^n \frac{M_T^m\left(n\Delta t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} u(\mathbf{y}, m\Delta t) H\left(n\Delta t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c}\right) dS \\
& \simeq \sum_{j=1}^N -n_i(\mathbf{P}^j) |S_j| \sum_{m=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{M_T^m\left(n\Delta t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{P}^j|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{P}^j|} u(\mathbf{y}, m\Delta t) \right\} H\left(n\Delta t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{P}^j|}{c}\right) dS
\end{aligned}$$

今回の解析では、時間内挿関数  $M_T^m(t)$  として  $2\Delta t$  のサポートを持つ区分線形関数を用いる. このとき、図 11 11 11 11 11 11 のように特定の時刻  $n\Delta t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{P}^j|}{c}$  において非ゼロの値を返す  $M_T^m(t)$  は 2 つのみであるから、式 (20) の添字  $m$  についての総和は 2 項の足し算に過ぎない.

決められた時間内に特定の処理を終えなければならない制約ができる. そのため式 (8) を近似することを考える.

以降この式を用いて、移動する内点  $\mathbf{x}$  の各時間ステップ毎の音圧を計算する.

## 4 数値結果

### 4.1 精度検証

3.1 節で示した近似式の精度を検証するために次のような境界値を持つ 3 次元の音場を考える．各辺がデカルト座標軸に平行な中心  $\mathbf{x}^s = (0.5, 0.5, 0.5)$ ，辺の長さ 1 の立方体の外部領域を考え、波動方程式に支配されているとする．立方体の表面  $S$  において

$$\begin{cases} u(\mathbf{x}, t) = \frac{1 - \cos \frac{2\pi}{\Lambda} \left( t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^s|}{c} \right)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}^s|}, & \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^s|}{c} < t < \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^s|}{c} + \Lambda \\ q(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) & , \text{otherwise} \end{cases} \quad (20)$$

ここに、 $\lambda = 3 \times 10^{-3}$  である．境界  $S$  を 1 辺の長さが 0.1 の三角形要素に分割し、 $\Delta t = 3 \times 10^{-4}$  とし、固定した内点  $\mathbf{x} = (-0.5, 0.5, 0.5)$  での音圧  $u(\mathbf{x}, t)$  を近似式 (20) を用いて求めた．得られた解を  $u_{app}(\mathbf{x}, m\Delta t)$  とする．この問題には解析解が存在し、これを  $u_{ans}(\mathbf{x}, t)$  とし誤差を次式で評価した．

$$\sum_m \frac{\{u_{ans}(\mathbf{x}, m\Delta t) - u_{app}(\mathbf{x}, m\Delta t)\}^2}{\{u_{ans}(\mathbf{x}, m\Delta t)\}^2} \quad (21)$$

である．この評価を用いた場合、計算結果は  $2.4 \times 10^{-3}$  となった．ここに、総ステップ数は  $f_s = 8000$  つまり 1 秒分のデータである．

### 4.2 数値シミュレーション

#### 4.2.1 シミュレーションシステム概要

リアルタイム可聴化に向け、移動する受音点の状況確認の補助のために音源、3 次元空間上の受音点は空間上を自由に移動できる受音点、壁を 'Unity Version 2017 .3.0f3 Personal' を用いて直接波と壁による散乱波による受音点での音圧の移動による変化を可視化した．

リアルタイムシミュレーションには、システム画面の硬直ができるだけ少な違法が望ましい．ゆえに、可視化の面ができるだけ滑らかとなるよう、受音点は Unity の可変フレームレート更新関数を用いることで制御した．ここに、1 秒間に  $n$  回更新を行う場合、フレームレートは  $n$  と定義する．可変フレームレート更新関数は実行処理が重い場合にフレームレートを下げ、軽い場合にできるだけ 60fps に近づけようとする更新関数である．この更新関数の各フレーム間の時間を Time クラスの `deltaTime` メソッドで取得した．このメソッドは最



後のフレームを完了するのに要した時間を取得するもので、この時取得した時間を  $\Delta t$  秒とする。受音点が秒速  $1.25[\text{m/s}]$  の一般的な人の歩く速度とし、可変フレーム更新関数で、受音点を  $1.25 \times \Delta t[\text{m}]$  各フレーム移動させる。一方、内点計算はできるだけ各時間ステップに遅延なく処理を終える必要がある。固定フレーム更新関数を用いた。固定フレーム更新関数は音源のサンプリング周波数  $8[\text{kHz}]$  と同じ固定フレームレートにするが、重い処理 A が呼び出されると、処理 A の終了を待機する仕様であるため必ずしもリアルタイムになるわけではない。以上の点を踏まえて、以下に示すシミュレーションを行う。

#### 4.2.2 問題設定

システムを次のような環境で実行する。3次元領域上に、各辺がデカルト座標軸に平行な中心  $(0.25, 0.25, 0.075)$  で、辺の長さが  $x, y, z$  軸方向に  $0.5, 0.5, 0.15[\text{m}]$  の壁と、点  $\boldsymbol{x}^s = (0.25, 0.25, -2)$  に音源が存在する3次元領域を考える。壁の境界条件として完全反射を仮定し、一辺の長さが  $0.05[\text{m}]$  の三角形メッシュを用い境界を総メッシュ数 640 でメッシュ分割した。波速は  $340.29[\text{m}]$  とし、音源は初期位置から動かず式 (??) の音圧を  $2[\text{sec}]$  発生させる。このとき、残りの境界条件は境界要素法により事前に取得したものをを用いる。また、時間離散化幅を  $1.25 \times 10^{-4}[\text{sec}]$  とし、総時間ステップ数は 16000 とする。

#### 4.2.3 数値結果

壁による散乱の影響を示すため、図 1, 2 のような経路で受音点が移動した場合に観測される音源からの直接波による音圧を図 3、壁からの散乱の音圧を図 4 に、音源からの直接波と散乱波による音圧を図 5 に図示する。図 1, 2 上の点は  $A(0.25, 0.25, -0.9), B(0.25, 0.25, -0.4), C(0.6, 0.25, -0.4), D(0.6, 0.25, 0.4), E(0.25, 0.25, 0.4)$  とした。

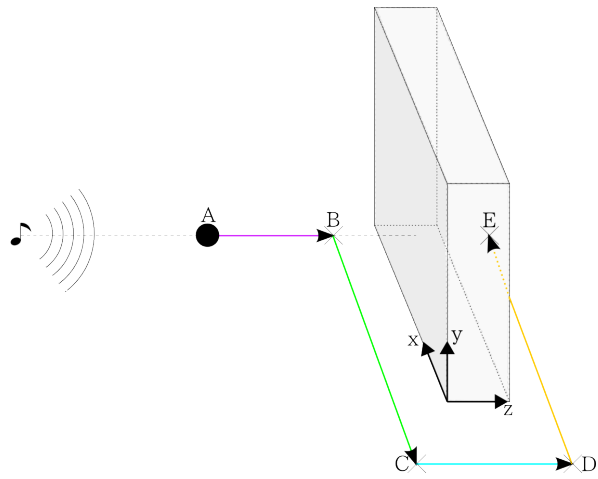


図 1 受信点の移動経路図

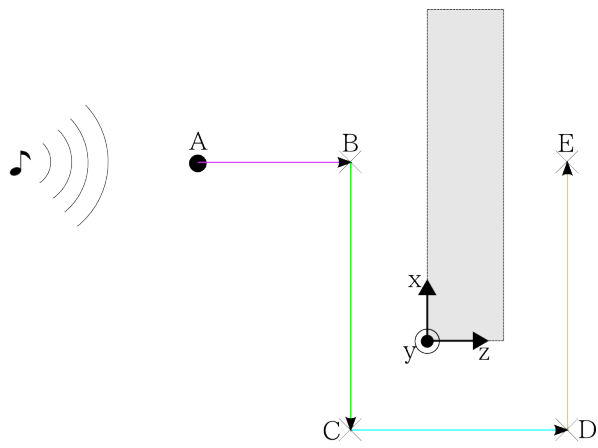


図 2 受信点の移動経路を y 軸正方向から見た図

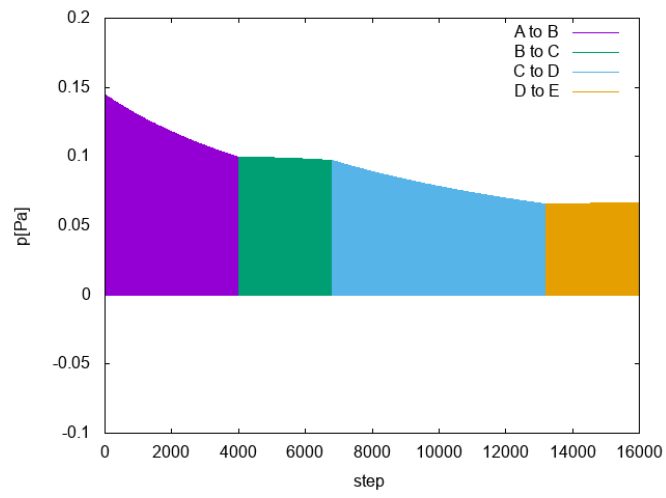


図3 移動しながら音源からの直接波のみを観測した場合の音圧

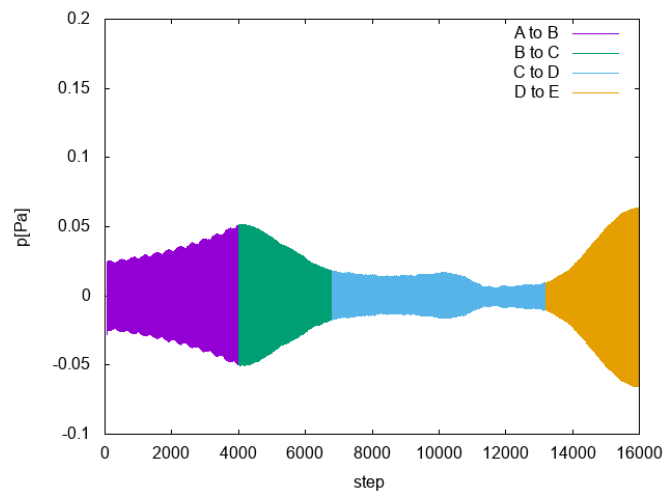


図4 移動しながら音源からの散乱波のみを観測した場合の音圧

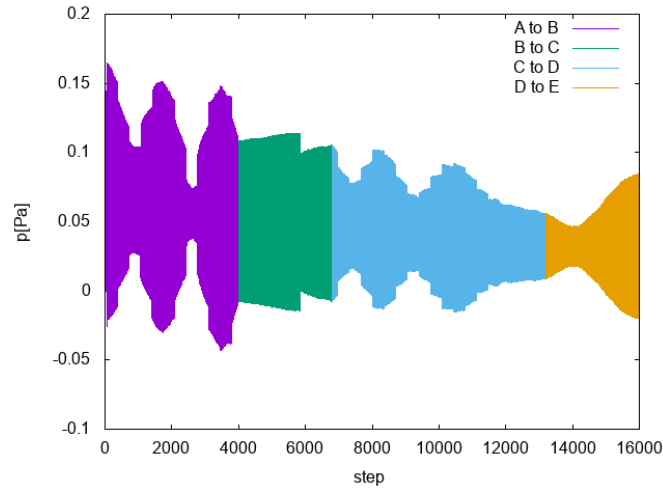


図5 移動しながら音源から音圧を観測した場合の音圧

## 5 結論

本論文は音圧を積分方程式法を近似することによる移動する受音点でのリアルタイム可聴化が目的である．しかしながら，作成したシステムでは実行中に求める速度と比較し，大きな遅延が生じた．4.2.2 節で行った実行環境下では要求実行時間 2[sec] に対し，およそ 10[sec] かかった．内点計算を各時間ステップ毎に実行するが，内点計算に要する時間が時間刻み幅  $1.25 \times 10^{-4}$ [sec] 以内に終了していないことが主な問題である．本システムでは内点計算の終了を待ち，その後次ステップの計算を開始するよう設計されているために遅延が発生したと思われる．また，受音点が 3 次元空間上を自由に動くことが可能であるため，画面の再描画も遅延の原因の一つである

今後の課題としては，リアルタイムでの処理に対応すべく並列計算等で高速化したい．

## 謝辞

本研究に取り組むにあたって助言をいただいた吉川仁准教授に深く感謝する。

## 参考文献

- [1] 田近伸二; 檜山和男; 志村正幸. VR 技術を用いた対話型道路交通騒音評価システムの構築. 応用力学論文集, 土木学会, 2010, 13: 231-240.
- [2] Unity の教科書 Unity 2017 完全対応版 2D3D スマートフォンゲーム入門講座 (EntertainmentIDEA)

## 付録 A 意味のない付録

これは意味のない付録です。これは意味のない引用です [?].

表 1 これは意味のない表です。

	A	B
C	70	80
D	100	0

※線に沿って切り取って下さい。

特別研究報告書

境界積分方程式法による音場の  
数値解析と移動する受音点における  
リアルタイム可聴化について

指導教員 吉川仁 准教授

京都大学工学部情報学科  
数理工学コース  
平成 26 年 4 月入学

石床 竜一

平成 30 年 1 月 26 日提出

境界積分方程式法による音場の数値解析と移動する受音点におけるリアルタイム可聴化について

石床 竜一

平成29年度

# 境界積分方程式法による音場の 数値解析と移動する受音点における リアルタイム可聴化について

石床 竜一

## 摘要

本研究では波動方程式に支配される，散乱体の存在する音場の数値解析を行った．受音点の移動による波形の変化が観測できたが，計算時間によるリアルタイム可聴化は実現できなかった．