

特別研究報告書

境界積分方程式法による音場の  
数値解析と移動する受音点における  
リアルタイム可聴化について

指導教員      吉川仁   准教授

京都大学工学部情報学科  
数理工学コース  
平成 26 年 4 月入学

石床   竜一

平成 30 年 1 月 26 日提出

## 摘要

本研究では、一つの音源に対し、このモデルを用いて効率的に卒業論文を作成するためのアルゴリズムを開発した。また、このアルゴリズムを用いて、実際に本報告を作成した。その結果、従来の自分で執筆する方法に比べて、5000 兆倍効率的に卒業論文を作成することが可能であることが確認された。

## 目次

|     |                       |    |
|-----|-----------------------|----|
| 1   | 序論                    | 1  |
| 2   | 時間域境界積分方程式による音場解析     | 2  |
| 2.1 | 対象とする問題 . . . . .     | 2  |
| 2.2 | 解の積分表現 . . . . .      | 2  |
| 2.3 | 時間域境界積分方程式法 . . . . . | 3  |
| 3   | 移動する受音点での音圧の計算        | 4  |
| 3.1 | 境界積分方程式の近似 . . . . .  | 4  |
| 4   | 数値結果                  | 5  |
| 4.1 | 精度検証 . . . . .        | 5  |
| 4.2 | 数値シュミレーション . . . . .  | 6  |
| 5   | 結論                    | 9  |
|     | 参考文献                  | 11 |
|     | 付録 A 意味のない付録          | 11 |

# 1 序論

音場の数値解析か幾何音響理論に基づく方法は、波動音響理論に基づく方法に比べて精度と適用性に難点があるが、簡便でかつリアルタイム計算が可能な長所がある。差分可聴化めざす。

生活音や音楽また騒音に至るまで、音はいまや生活に切り離せないものとなっている。また、

その中でも、視覚や聴覚情報を用いて騒音を再現する VR(バーチャル リアリティ) 技術による評価手法が注目されている。博物館やアミューズメント施設、ゲームなどホビー要素の強いものから、災害時の避難行動シミュレータ [1], 歩行訓練機器への応用 [2] など実務的なものまで VR はいたるところに普及している。

波動方程式は振動、音や光などの波動現象を記述するにあたって基本となる方程式であり、様々な手法を用いることで数値解析に用いられてきた。また、波動方程式のような微分方程式に対し、取り扱う領域での境界に境界条件と呼ばれる付帯的な制限が与えられた問題のことを境界値問題という。幾何音響波動音響

## 3 次元空間上

リアルタイム可聴化に向け、移動する受音点の状況確認の補助のために音源、受音点、壁を可視化した。可視化には 'Unity Version 2017 .3.0f3 Personal' を用いた。三次元空間上の受音点は図??のように 3 次元空間上を移動できる。音源は点音源であり、直接波と壁による散乱波が受音点の移動によって変化する様を描画した。

本論文の構成は次の通りである。まず、第 2 章で 対象とする問題の時間域境界積分方程式による音場解析について述べる。第 3 章では第 2 章で導いた積分表現に適用した近似について述べる。第 4 章では最後に第 4 章で結論を述べる。

## 2 時間域境界積分方程式による音場解析

### 2.1 対象とする問題

ある閉じた 3 次元領域の外部領域  $D$  における, 位置  $\mathbf{x}$ , 時刻  $t$  での音圧  $u(\mathbf{x}, t)$  について次の初期値境界値問題を考える.

$$\ddot{u}(\mathbf{x}, t) - c^2 u_{,ii}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in D, \quad t > 0 \quad (1)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in D \quad (2)$$

$$\dot{u}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in D \quad (3)$$

$$u(\mathbf{x}, t) = \bar{u}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \text{ on } S_D, \quad t > 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = \bar{q}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \text{ on } S_N, \quad t > 0 \quad (5)$$

$$u(\mathbf{x}, t) \rightarrow u^{\text{in}}(\mathbf{x}, t), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (6)$$

ここに,  $u^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$  は入射波を  $\bar{u}(\mathbf{x}, t), \bar{q}(\mathbf{x}, t)$  は既知関数である. また,  $(\cdot)_{,i}$  は  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ,

$(\cdot)$  は  $\frac{\partial}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial}{\partial n}$  は法線微分で  $n_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $n(\mathbf{x})$  は境界上の点  $\mathbf{x}$  における領域の外向き単位法線ベクトル,  $S$  は領域  $D$  の境界で  $S = S_D \cup S_N$ ,  $c$  は波速である.

### 2.2 解の積分表現

初期値境界値問題の解は, 3 次元波動方程式の基本解

$$\Gamma(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c})}{4\pi|\mathbf{x}|} \quad (7)$$

を用いて

$$u(\mathbf{x}, t) = u^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_S \int_0^t \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}, s) - \int_S \int_0^t \frac{\partial \Gamma}{\partial n}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) u(\mathbf{y}, s) ds dS \quad (8)$$

と表すことができる. ここに  $\delta(t)$  は Dirac のデルタ関数である.

境界条件 (式 (4), (5)) より,  $S_D$  上の  $u(\mathbf{x}, t)$  と  $S_N$  上の  $\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t)$  は与えられているが,  $S_N$  上の  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $S_D$  上の  $\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t)$  は未知である. これらの境界量を求めるために,  $\mathbf{x} \in D$  を境界  $S$  に極限移行し, 次の境界積分方程式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(\mathbf{x}, t) &= u^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_S \int_0^t \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}, s) ds dS \\ &\quad - \int_S \int_0^t \frac{\partial \Gamma}{\partial n_y}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) u(\mathbf{y}, s) ds dS \quad , \mathbf{x} \in S, t > 0 \end{aligned} \quad (9)$$

まず、式 (9) を  $u(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in S_N, \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in S_0$  について解く。  
次に、得られた境界量を用いて式 (7) により領域  $D$  の内点での解  $u(\mathbf{x}, t)$  を得る。

## 2.3 時間域境界積分方程式法

境界積分方程式 (9) を数値的に解くために、境界  $S$  を境界要素  $S_j, j = 1, \dots, N$  に分割し、さらに境界量  $u(\mathbf{x}, t), \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t)$  を空間内挿関数  $M_S^j(\mathbf{x})$  と時間内挿関数  $M_T^m(t)$  を用いて離散化する。

$$u(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{m=1}^{N_T} \sum_{j=1}^N u(\mathbf{p}^j, m\Delta t) M_S^j(\mathbf{x}) M_T^m(t), \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{m=1}^{N_T} \sum_{j=1}^N \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{p}^j, m\Delta t) M_S^j(\mathbf{x}) M_T^m(t), \quad (11)$$

ここに、点  $\mathbf{p}^j$  は境界要素  $S_j$  の代表点で、 $\Delta t$  は時間増分、 $N_T$  は時間ステップ数である。  
このとき、ある時刻  $t = n\Delta t, n = 1, \dots, N_T$  における離散化された境界積分方程式は次式で得られる..

$$-\mathbf{u}_n^{\text{in}} = \sum_{m=1}^n \mathbf{U}_{n-m+1} \mathbf{q}_m - \sum_{m=1}^n \mathbf{W}_{n-m+1} \mathbf{u}_m, \quad (12)$$

$$\{\mathbf{u}_n^{\text{in}}\}_i := u^{\text{in}}(\mathbf{p}^i, n\Delta t), \quad (13)$$

$$\{\mathbf{u}_m\}_i := u(\mathbf{p}^i, m\Delta t), \quad (14)$$

$$\{\mathbf{q}_m\}_i := \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{p}^i, m\Delta t), \quad (15)$$

$$\{\mathbf{U}_{n-m+1}\}_{ij} := \int_S \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\mathbf{p}^i - \mathbf{y}, n\Delta t - s) M_S^j(\mathbf{y}) M_T^m(s) ds dS, \quad (16)$$

$$\{\mathbf{W}_{n-m+1}\}_{ij} := \int_S \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Gamma}{\partial n_y}(\mathbf{p}^i - \mathbf{y}, n\Delta t - s) M_S^j(\mathbf{y}) M_T^m(s) ds dS. \quad (17)$$

この代数方程式 (12) を各時間ステップにおいて逐次的に解く。

式 (12) を解き、境界量  $\mathbf{u}_m, \mathbf{q}_m, m = 1, \dots, N_T$  が得られたならば、領域  $D$  内の任意の

点  $\mathbf{x}$  での時刻  $n\Delta t$  での値が次式で得られる．

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{x}, n\Delta t) &= u^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) \\
&+ \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^N \left\{ \int_S \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}, n\Delta t - s) M_S^j(\mathbf{y}) M_T^m(s) ds dS \right\} \{\mathbf{q}_m\}_j \\
&- \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^N \left\{ \int_S \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Gamma}{\partial n_y}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, n\Delta t - s) M_S^j(\mathbf{y}) M_T^m(s) ds dS \right\} \{\mathbf{u}_m\}_j \quad (18)
\end{aligned}$$

### 3 移動する受音点での音圧の計算

#### 3.1 境界積分方程式の近似

本研究では，VR 空間内を移動する人が聴く音を作り出すことを目標とし，音圧をリアルタイムで計算することを目的とする．移動する受音点の各時刻での内点計算 (式 (??)) の計算時間短縮のために次の近似を考える．

$$\begin{aligned}
&\int_S \int_0^{n\Delta t} \frac{\delta(n\Delta t - s - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c})}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}, s) ds dS \\
&\simeq \sum_{j=1}^N \int_{S_j} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}, n\Delta t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c}) H(n\Delta t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c}) dS \\
&\simeq \sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{p}^j|} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{p}^j, n\Delta t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{p}^j|}{c}) H(n\Delta t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{p}^j|}{c}) |S_j| \quad (19)
\end{aligned}$$

ここに， $\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{p}^j, n\Delta t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{p}^j|}{c})$  は時刻  $n\Delta t - \text{int}\left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{p}^j|}{c\Delta t}\right)\Delta t$  のと時刻  $(n+1)\Delta t - \text{int}\left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{p}^j|}{c\Delta t}\right)\Delta t$  との  $\frac{\partial u}{\partial n}$  の値を線形補間することで求める．また  $H(t)$  はヘビサイド関数であり， $|S_j|$  は境界要素  $S_j$  の面積である．

式 (8) 右辺第 3 項について

$$\begin{aligned}
& \int_S \int_0^{n\Delta t} \frac{\partial}{\partial n_y} \left( \frac{\delta \left( n\Delta t - s - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c} \right)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) u(\mathbf{y}, s) ds dS \\
& \simeq \sum_{j=1}^N -n_i(\mathbf{P}^j) \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{S_j} \int_0^{n\Delta t} \frac{\delta \left( n\Delta t - s - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c} \right)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} u(\mathbf{y}, s) ds dS \\
& \simeq \sum_{j=1}^N -n_i(\mathbf{P}^j) \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{S_j} \int_0^{n\Delta t} \frac{\delta \left( n\Delta t - s - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c} \right)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \sum_{m=1}^n M_T^m(s) u(\mathbf{y}, m\Delta t) ds dS \\
& \simeq \sum_{j=1}^N -n_i(\mathbf{P}^j) \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{S_j} \sum_{m=1}^n \frac{M_T^m \left( n\Delta t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c} \right)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} u(\mathbf{y}, m\Delta t) H \left( n\Delta t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c} \right) dS \\
& \simeq \sum_{j=1}^N -n_i(\mathbf{P}^j) |S_j| \sum_{m=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{M_T^m \left( n\Delta t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{P}^j|}{c} \right)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{P}^j|} u(\mathbf{y}, m\Delta t) \right\} H \left( n\Delta t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{P}^j|}{c} \right) dS
\end{aligned}$$

今回の解析では、時間内挿関数  $M_T^m(t)$  として  $2\Delta t$  のサポートを持つ区分的線形関数を用いる。このとき、図！！！！まだない！！！！のように特定の時刻  $n\Delta t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{P}^j|}{c}$  において非ゼロの値を返す  $M_T^m(t)$  は 2 つのみであるから、式 (20) の添字  $m$  についての総和は 2 項の足し算に過ぎない。

決められた時間内に特定の処理を終えなければならない制約ができる。そのため式 (8) を近似することを考える。

以降この式を用いて、移動する内点  $\mathbf{x}$  の各時間ステップ毎の音圧を計算する。

## 4 数値結果

### 4.1 精度検証

3.1 節で示した近似式の精度を検証するために次のような境界値を持つ 3 次元の音場を考える。各辺がデカルト座標軸に平行な中心  $\mathbf{x}^s = (0.5, 0.5, 0.5)$ 、辺の長さ 1 の立方体の外部領域を考え、波動方程式に支配されているとする。立方体の表面  $S$  において

$$\begin{cases} u(\mathbf{x}, t) = \frac{1 - \cos \frac{2\pi}{\Lambda} \left( t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^s|}{c} \right)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}^s|}, & \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^s|}{c} < t < \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^s|}{c} + \Lambda \\ q(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t), & \text{otherwise} \end{cases} \quad (20)$$



ここに、 $\lambda = 3 \times 10^{-3}$  である。境界  $S$  を 1 辺の長さが 0.1 の三角形要素に分割し、 $\Delta t = 3 \times 10^{-4}$  とし、固定した内点  $\mathbf{x}=(-0.5, 0.5, 0.5)$  での音圧  $u(\mathbf{x}, t)$  を近似式 ( ), ( ) を用いて求めた。得られた解を  $u_{app}(\mathbf{x}, m\Delta t)$  とする。この問題には解析解が存在し、これを  $u_{ans}(\mathbf{x}, t)$  とし誤差を次式で評価した。

$$\sum_m \frac{\{u_{ans}(\mathbf{x}, m\Delta t) - u_{app}(\mathbf{x}, m\Delta t)\}^2}{\{u_{ans}(\mathbf{x}, m\Delta t)\}^2} \quad (21)$$

である。この評価を用いた場合、計算結果は  $2.4 \times 10^{-3}$  となった。ここに、総ステップ数は  $f_s = 8000$  つまり 1 秒分のデータである。

## 4.2 数値シミュレーション

### 4.2.1 シミュレーションシステム概要

リアルタイム可聴化に向け、移動する受音点の状況確認の補助のために音源、3次元空間上の受音点は空間上を自由に移動できる受音点、壁を'Unity Version 2017 .3.0f3 Personal'を用いて直接波と壁による散乱波による受音点での音圧の移動による変化を可視化した。

リアルタイムシミュレーションには、システム画面の硬直ができるだけ少な違法が望ましい。ゆえに、可視化の面ができるだけ滑らかとなるよう、受音点は Unity の可変フレームレート更新関数を用いることで制御した。ここに、1秒間に  $n$  回更新を行う場合、フレームレートは  $n$  と定義する。可変フレームレート更新関数は実行処理が重い場合にフレームレートを下げ、軽い場合にできるだけ 60fps に近づけようとする更新関数である。この更新関数の各フレーム間の時間を Time クラスの deltaTime メソッドで取得した。このメソッドは最後のフレームを完了するのに要した時間を取得するもので、この時取得した時間を  $\Delta t$  秒とする。受音点が秒速 1.25[m/s] の一般的な人の歩く速度とし、可変フレーム更新関数で、受音点を  $1.25 \times \Delta t$ [m] 各フレーム移動させる。一方、内点計算はできるだけ各時間ステップに遅延なく処理を終える必要がある。固定フレーム更新関数を用いた。固定フレーム更新関数は音源のサンプリング周波数 8[kHz] と同じ固定フレームレートにするが、重い処理 A が呼び出されると、処理 A の終了を待機する仕様であるため必ずしもリアルタイムになるわけではない。以上の点を踏まえて、以下に示すシミュレーションを行う。

### 4.2.2 問題設定

システムを次のような環境で実行する。3次元領域上に、各辺がデカルト座標軸に平行な中心 (0.25, 0.25, 0.075) で、辺の長さが  $x, y, z$  軸方向に 0.5, 0.5, 0.15[m] の壁と、点  $\mathbf{x}^s = (0.25, 0.25, -2)$  に音源が存在する 3次元領域を考える。壁の境界条件として完全反射

を仮定し，一辺の長さが  $0.05[\text{m}]$  の三角形メッシュを用い境界を総メッシュ数  $640$  でメッシュ分割した．波速は  $340.29[\text{m}]$  とし，音源は初期位置から動かず式 (??) の音圧を  $2[\text{sec}]$  発生させる．このとき，残りの境界条件は境界要素法により事前に取得したものを用いる．また，時間離散化幅を  $1.25 \times 10^{-4}[\text{sec}]$  とし，総時間ステップ数は  $16000$  とする．

#### 4.2.3 数値結果

壁による散乱の影響を示すため，図 1, 2 のような経路で受信点が移動した場合に観測される音源からの直接波による音圧を図 3，壁からの散乱の音圧を図 4 に，音源からの直接波と散乱波による音圧を図 5 に図示する．図 1, 2 上の点は  $A(0.25, 0.25, -0.9), B(0.25, 0.25, -0.4), C(0.6, 0.25, -0.4), D(0.6, 0.25, 0.4), E(0.25, 0.25, 0.4)$  とした．

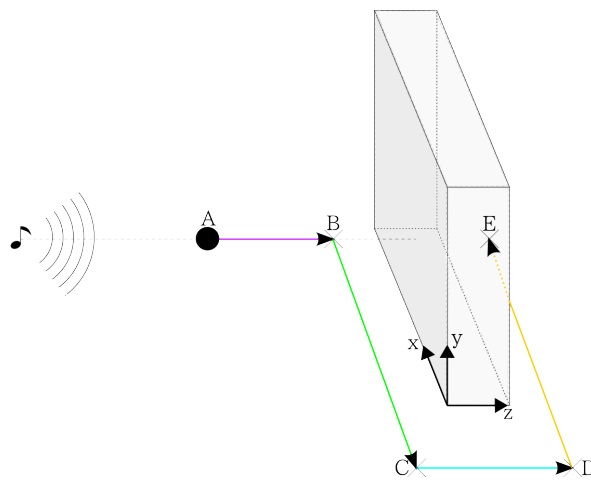


図 1 受信点の移動経路図

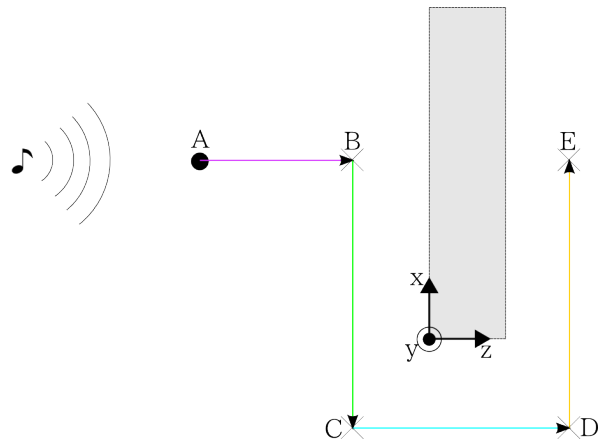


図 2 受音点の移動経路を y 軸正方向から見た図

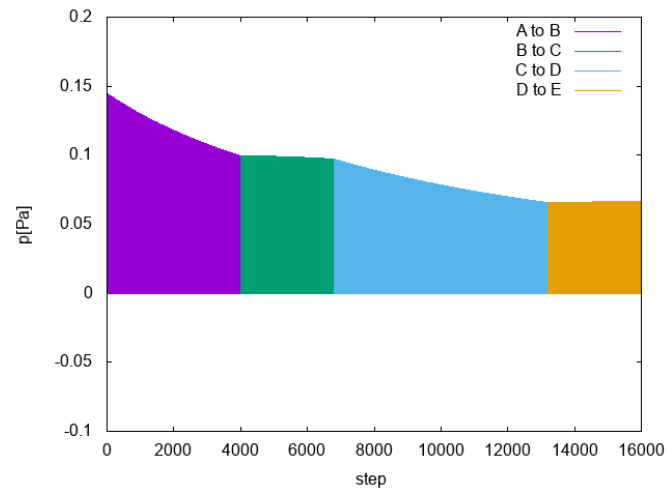


図 3 移動しながら音源からの直接波のみを観測した場合の音圧

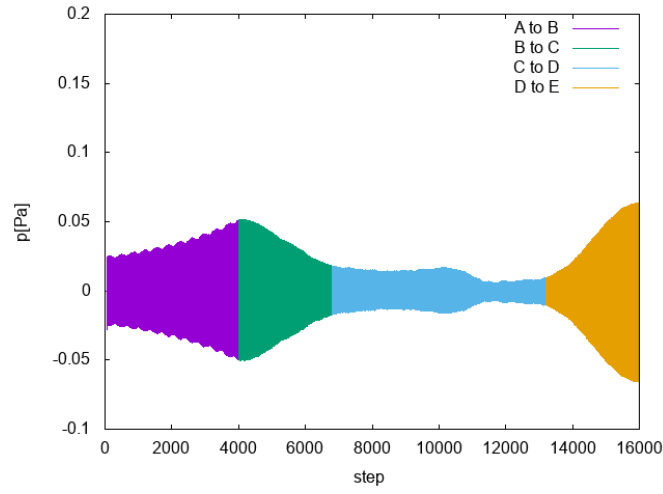


図 4 移動しながら音源からの散乱波のみを観測した場合の音圧

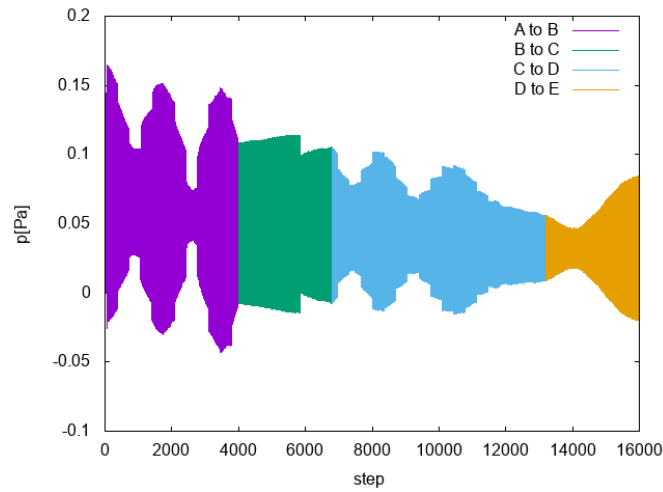


図 5 移動しながら音源から音圧を観測した場合の音圧

## 5 結論

本論文は音圧を積分方程式法を近似することによる移動する受音点でのリアルタイム可聴化が目的である．しかしながら，作成したシステムでは実行中に求める速度と比較し，大きな遅延が生じた．4.2.2 節で行った実行環境下では要求実行時間 2[sec] に対し，およそ 10[sec]

かかった．内点計算を各時間ステップ毎に実行するが，内点計算に要する時間が時間刻み幅  $1.25 \times 10^{-4}[\text{sec}]$  以内に終了していないことが主な問題である．本システムでは内点計算の終了を待ち，その後次ステップの計算を開始するよう設計されているために遅延が発生したと思われる．また，受信点が3次元空間上を自由に動くことが可能であるため，画面の再描画も遅延の原因の一つである

今後の課題としては，リアルタイムでの処理に対応すべく並列計算等で高速化したい．

## 謝辞

本研究に取り組むにあたって助言をいただいた吉川仁准教授に深く感謝する。

## 参考文献

- [1] 目黒公郎, et al. バーチャルリアリティの避難行動シミュレータへの応用. 土木学会論文集, 1997, 556: 197-207.
- [2] 藤江正克, et al. バーチャルリアリティを活用した歩行訓練機器. BME, 1998, 12.8: 29-37.
- [3] 田近伸二; 樫山和男; 志村正幸. VR 技術を用いた対話型道路交通騒音評価システムの構築. 応用力学論文集, 土木学会, 2010, 13: 231-240.

## 付録 A 意味のない付録

これは意味のない付録です。これは意味のない引用です [?].

表 1 これは意味のない表です。

|   | A   | B  |
|---|-----|----|
| C | 70  | 80 |
| D | 100 | 0  |

※線に沿って切り取って下さい。

特別研究報告書

境界積分方程式法による音場の  
数値解析と移動する受音点における  
リアルタイム可聴化について

指導教員 吉川仁 准教授

京都大学工学部情報学科  
数理工学コース  
平成 26 年 4 月入学

石床 竜一

平成 30 年 1 月 26 日提出

境界積分方程式法による音場の数値解析と移動する受音点におけるリアルタイム可聴化について

石床 竜一

平成29年度



# 境界積分方程式法による音場の 数値解析と移動する受音点における リアルタイム可聴化について

石床 竜一

## 摘要

本研究では、一つの音源に対し、このモデルを用いて効率的に卒業論文を作成するためのアルゴリズムを開発した。また、このアルゴリズムを用いて、実際に本報告を作成した。その結果、従来の自分で執筆する方法に比べて、5000 兆倍効率的に卒業論文を作成することが可能であることが確認された。