



**马哥教育**  
IT 人的高薪职业学院

# Python树



**讲师：Wayne**

从业十余载，漫漫求知路

# 树

- 非线性结构，每个元素可以有多个前驱和后继
- 树是 $n(n \geq 0)$ 个元素的集合
  - $n = 0$ 时，称为空树
  - 树只有一个特殊的没有前驱的元素，称为树的根Root
  - 树中除了根结点外，其余元素只能有一个前驱，可以有零个或多个后继
- 递归定义
  - 树T是 $n(n \geq 0)$ 个元素的集合。 $n=0$ 时，称为空树
  - 有且只有一个特殊元素根，剩余元素都可以被划分为 $m$ 个互不相交的集合 $T_1$ 、 $T_2$ 、 $T_3$ 、...、 $T_m$ ，而每一个集合都是树，称为T的子树Subtree
  - 子树也有自己的根

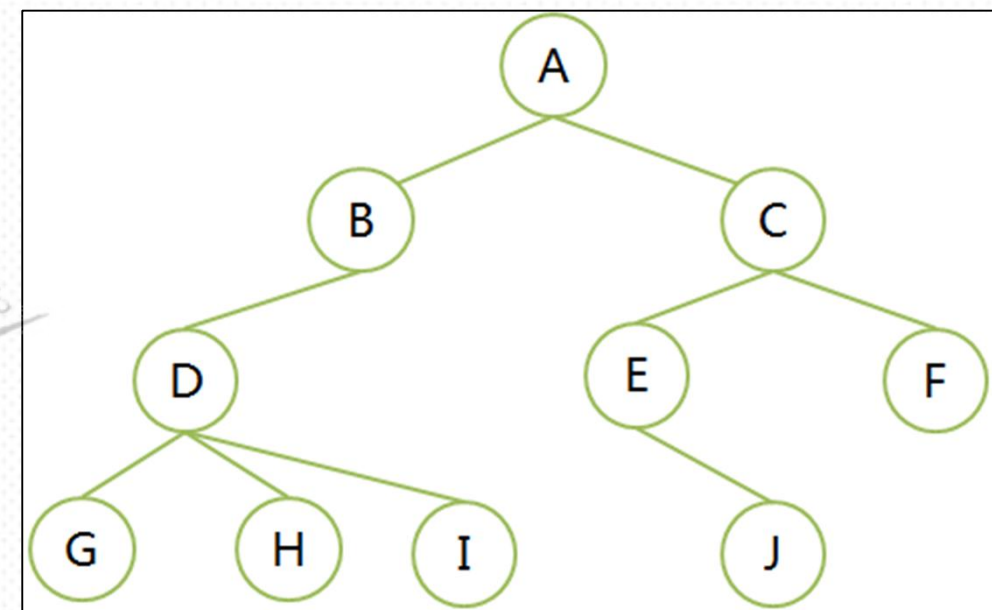


**马哥教育**  
IT 人的高薪职业学院



# 树的概念

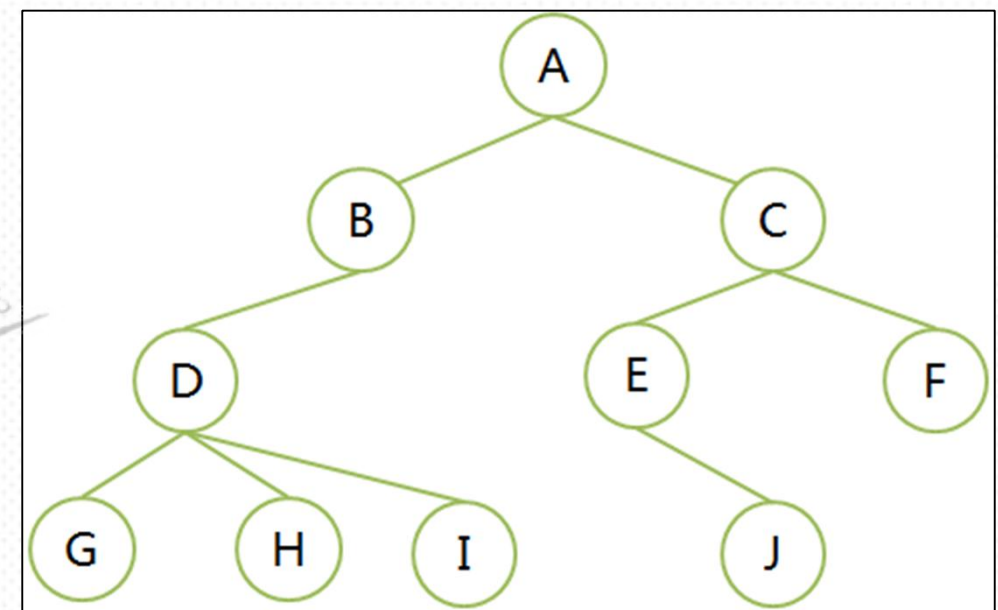
- 结点：树中的数据元素
- 结点的度degree：结点拥有的子树的数目称为度，记作 $d(v)$ 。
- 叶子结点：结点的度为0，称为叶子结点leaf、终端结点、末端结点
- 分支结点：结点的度不为0，称为非终端结点或分支结点
- 分支：结点之间的关系
- 内部结点：除根结点外的分支结点，当然也不包括叶子结点
- 树的度是树内各结点的度的最大值。D结点度最大为3，树的度数就是3



马哥教育  
IT 人的高薪职业学院

# 树的概念

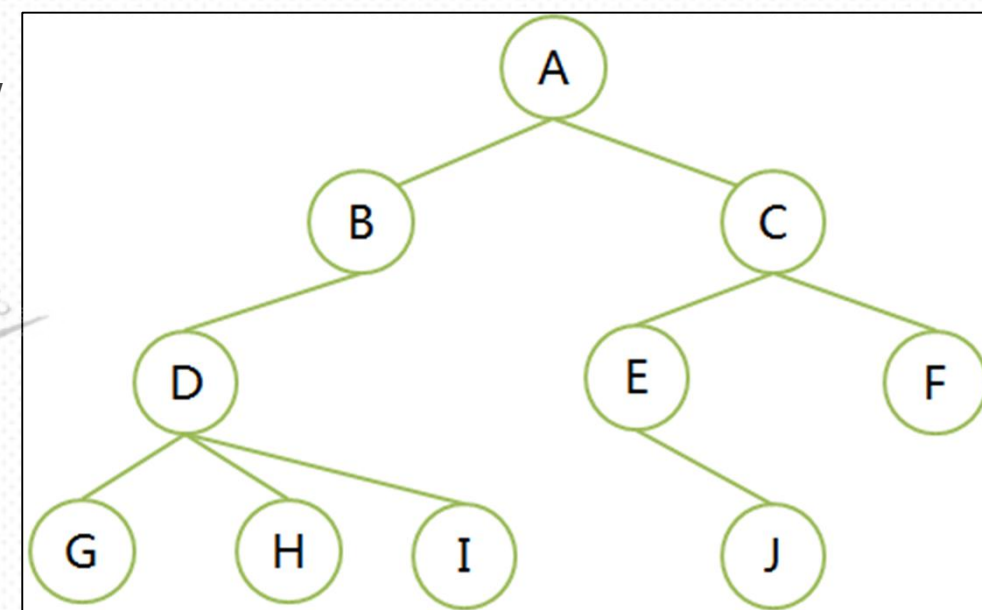
- ❑ 孩子（儿子Child）结点：结点的子树的根结点成为该结点的孩子
- ❑ 双亲（父Parent）结点：一个结点是它各子树的根结点的双亲
- ❑ 兄弟（Sibling）结点：具有相同双亲结点的结点
- ❑ 祖先结点：从根结点到该结点所经分支上所有的结点。A、B、D都是G的祖先结点
- ❑ 子孙结点：结点的所有子树上的结点都称为该结点的子孙。B的子孙是D、G、H、I
- ❑ 结点的层次（Level）：根节点为第一层，根的孩子为第二层，以此类推，记作 $L(v)$
- ❑ 树的深度（高度Depth）：树的层次的最大值。上图的树深度为4
- ❑ 堂兄弟：双亲在同一层的结点





# 树的概念

- 有序树：结点的子树是有顺序的（兄弟有大小，有先后次序），不能交换。
- 无序树：结点的子树是有无序的，可以交换。
- 路径：树中的 $k$ 个结点 $n_1$ 、 $n_2$ 、...、 $n_k$ ，满足 $n_i$ 是 $n_{i+1}$ 的双亲，成为 $n_1$ 到 $n_k$ 的一条路径。就是一条线串下来的，前一个都是后一个的父（前驱）结点。
- 路径长度=路径上结点数-1，也是分支数
- 森林： $m(m \geq 0)$ 棵不相交的树的集合
  - 对于结点而言，其子树的集合就是森林。A结点的2棵子树的集合就是森林



马哥教育  
IT 人的高薪职业学院

# 树

## □ 树的特点

- 唯一的根
- 子树不相交
- 除了根以外，每个元素只能有一个前驱，可以有零个或多个后继
- 根结点没有双亲结点（前驱），叶子结点没有孩子结点（后继）
- $v_i$  是  $v_j$  的双亲，则  $L(v_i) = L(v_j) - 1$ ，也就是说双亲比孩子结点的层次小1

## □ 堂兄弟的双亲是兄弟关系吗？



# 二叉树

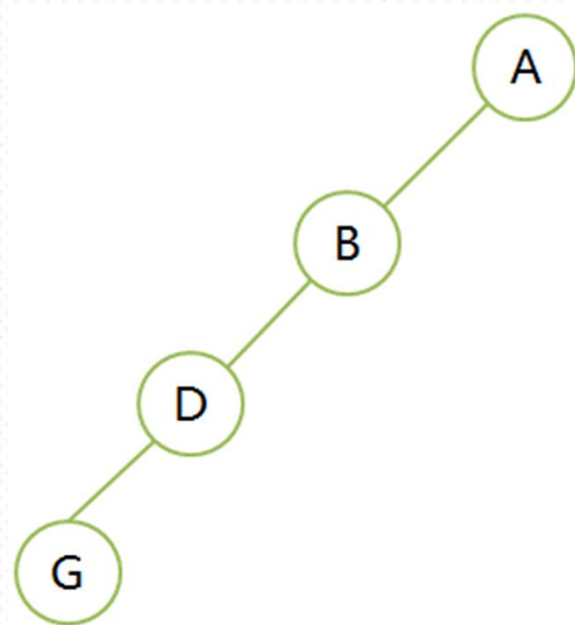
- 每个结点最多2棵子树
  - 二叉树不存在度数大于2的结点
- 它是有序树，左子树、右子树是顺序的，不能交换次序
- 即使某个结点只有一棵子树，也要确定它是左子树还是右子树
- 二叉树的五种基本形态
  - 空二叉树
  - 只有一个根结点
  - 根结点只有左子树
  - 根结点只有右子树
  - 根结点有左子树和右子树



**马哥教育**  
IT 人的高薪职业学院

# 斜树

- 左斜树，所有结点都只有左子树
- 右斜树，所有节点都只有右子树

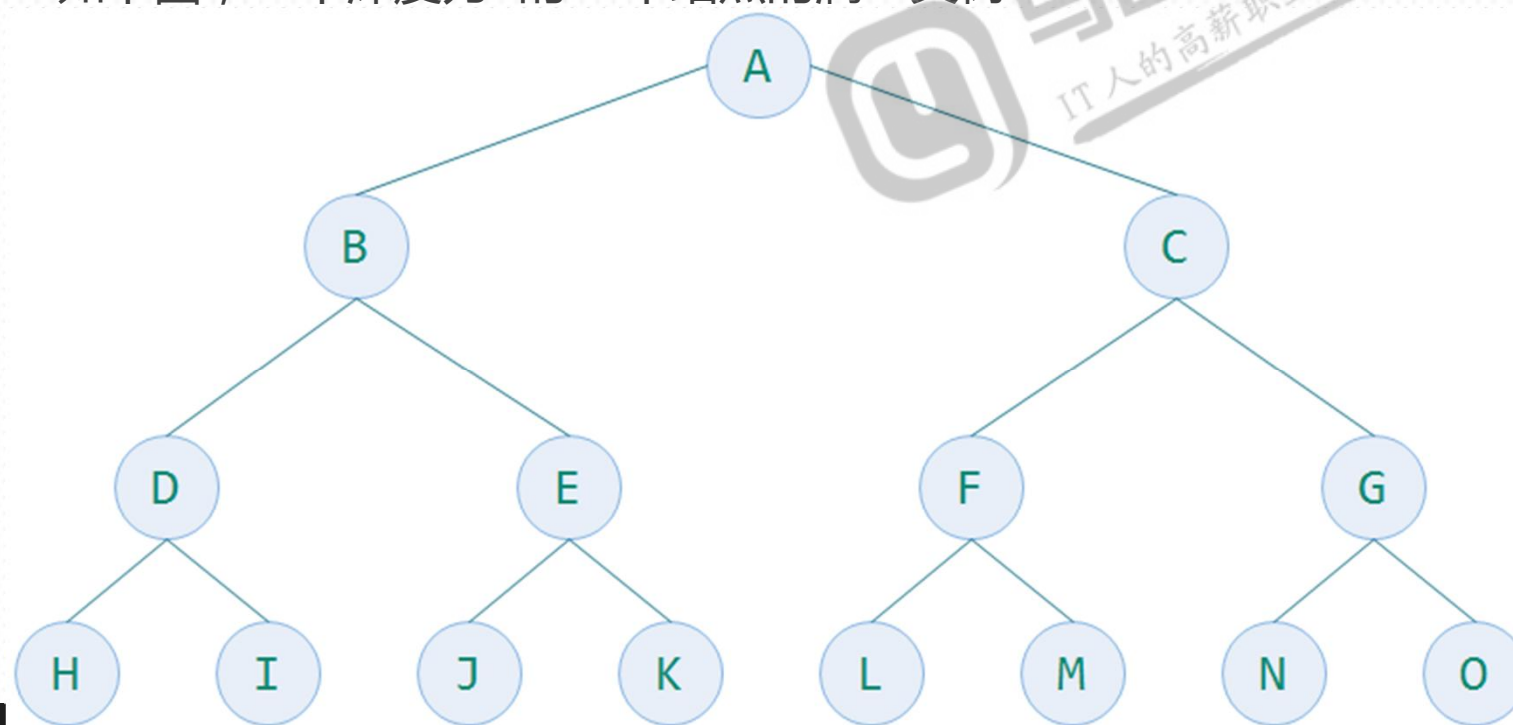


马哥教育  
IT人的高薪职业学院



# 满二叉树

- 一棵二叉树的所有分支结点都存在左子树和右子树，并且所有叶子结点只存在在最下面一层。
- 同样深度二叉树中，满二叉树结点最多。
- $k$  为深度 ( $1 \leq k \leq n$ )，则结点总数为  $2^k - 1$
- 如下图，一个深度为4的15个结点的满二叉树



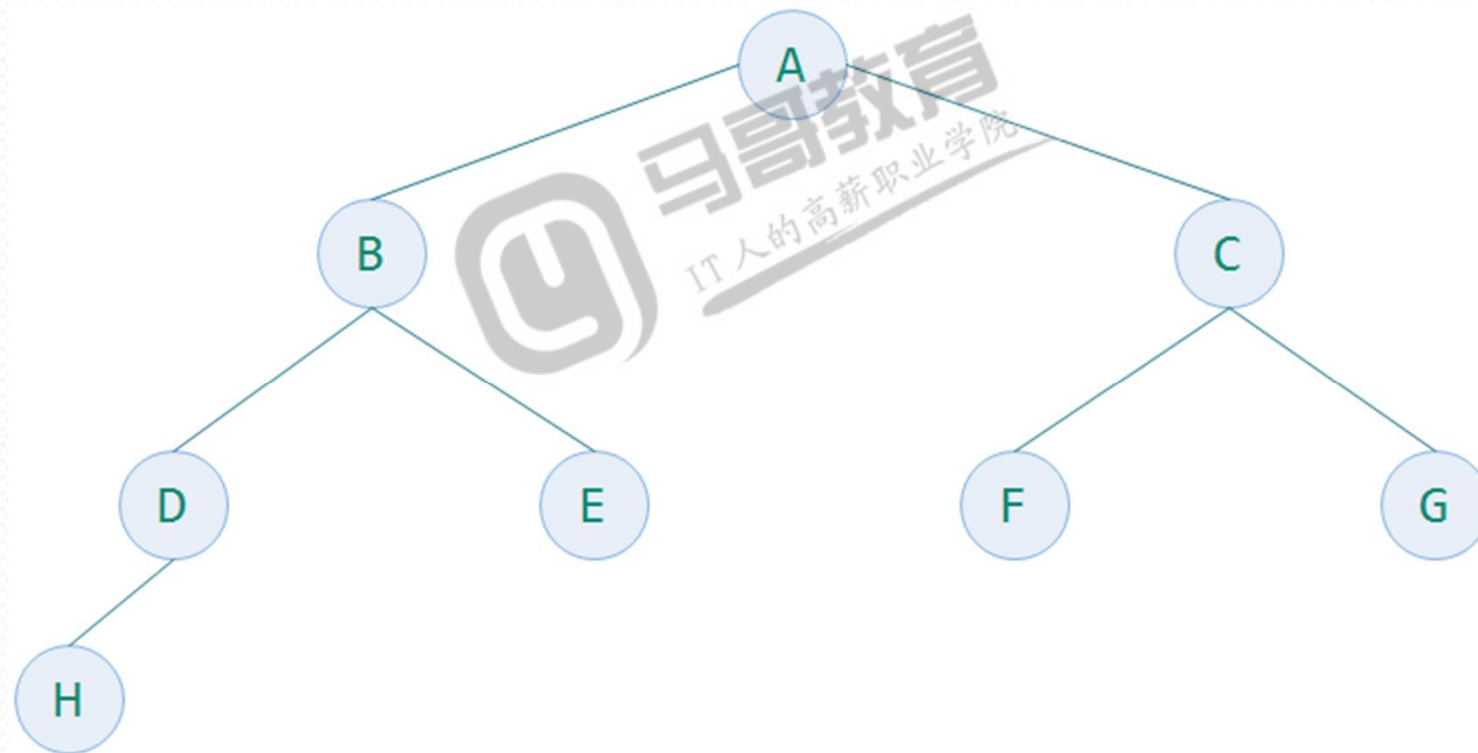
# 完全二叉树Complete Binary Tree

- 若二叉树的深度为 $k$ ，二叉树的层数从1到 $k-1$ 层的结点数都达到了最大个数，在第 $k$ 层的所有结点都集中在最左边，这就是完全二叉树
- 完全二叉树由满二叉树引出
- 满二叉树一定是完全二叉树，但完全二叉树不是满二叉树
- $k$ 为深度（ $1 \leq k \leq n$ ），则结点总数最大值为 $2^k - 1$ ，当达到最大值的时候就是满二叉树



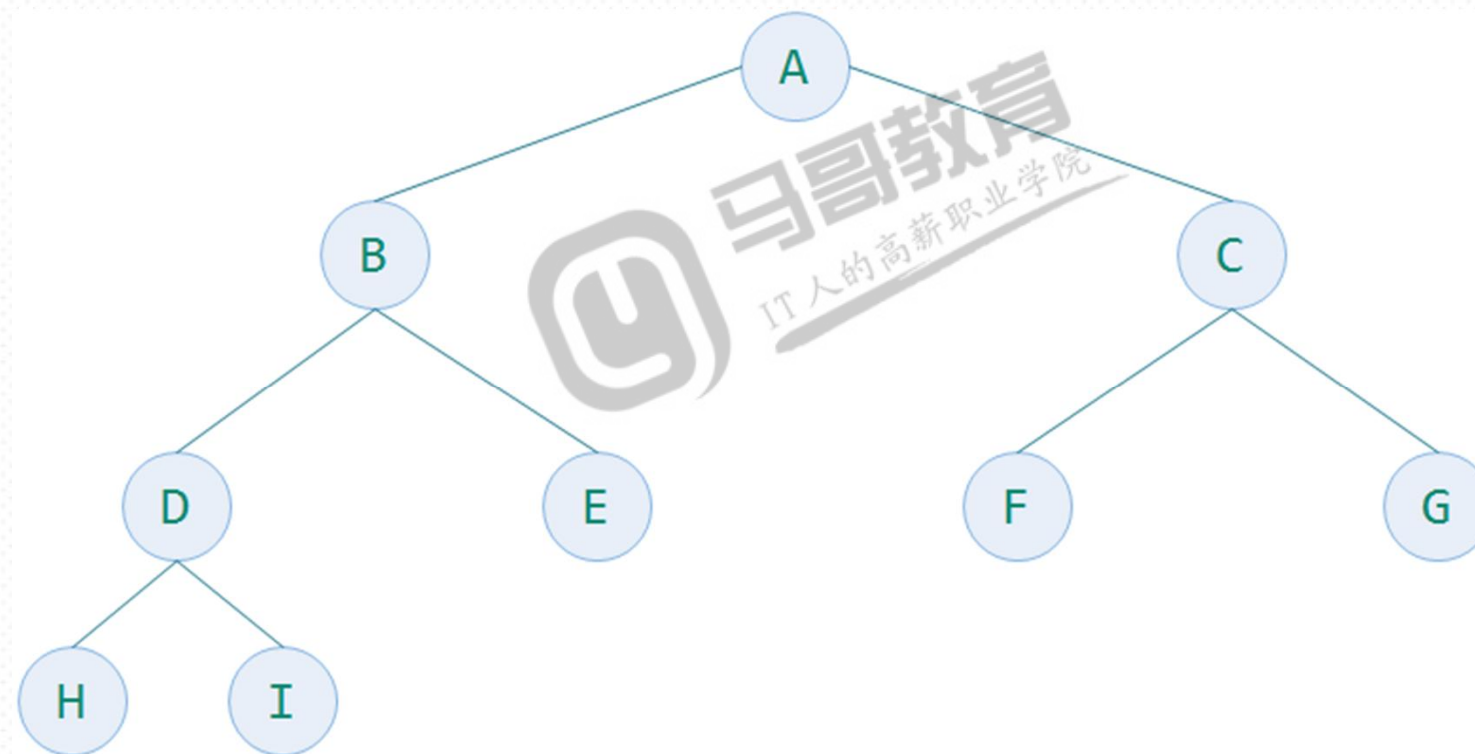
# 完全二叉树

□ 举例，完全二叉树，最下一层的叶子结点都连续的集中在左边



# 完全二叉树

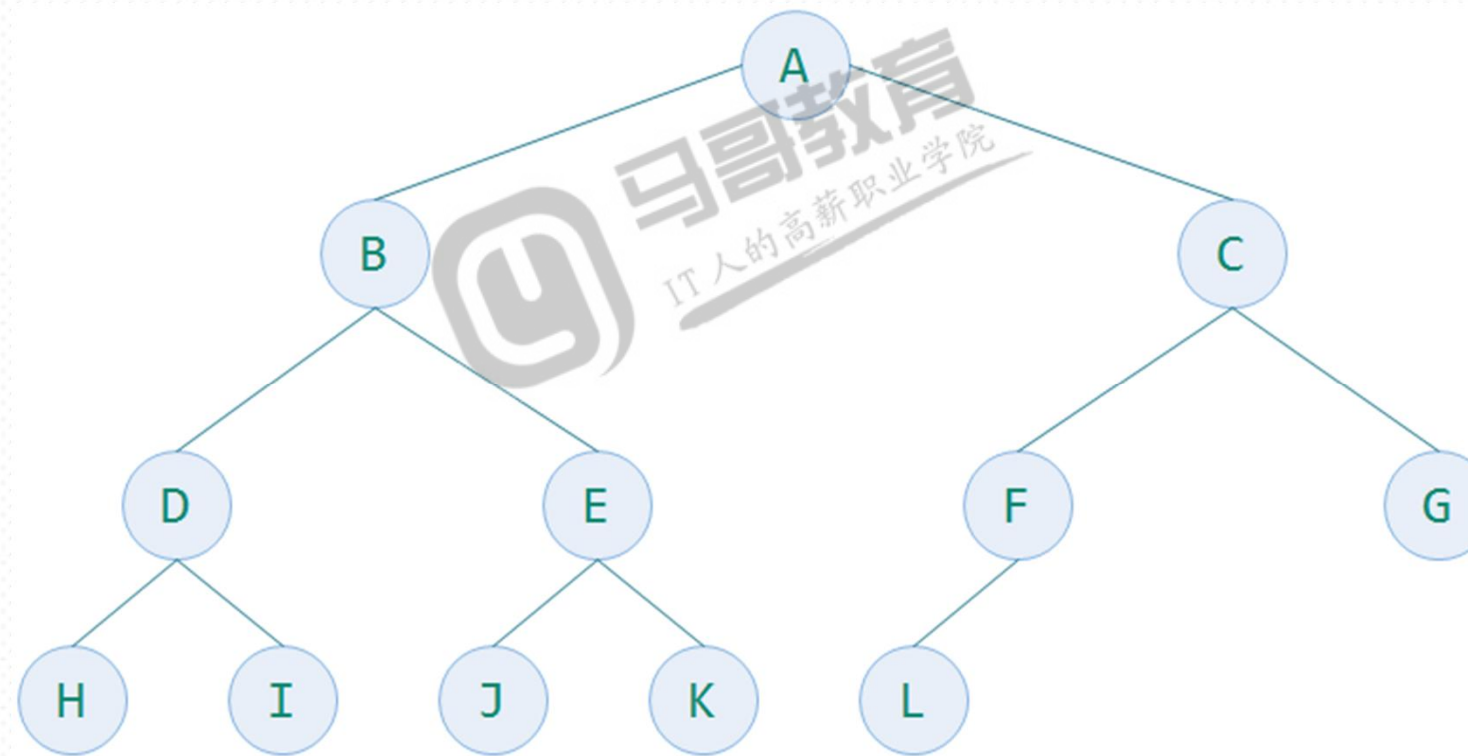
□ 举例，完全二叉树，最下一层的叶子结点都连续的集中在左边





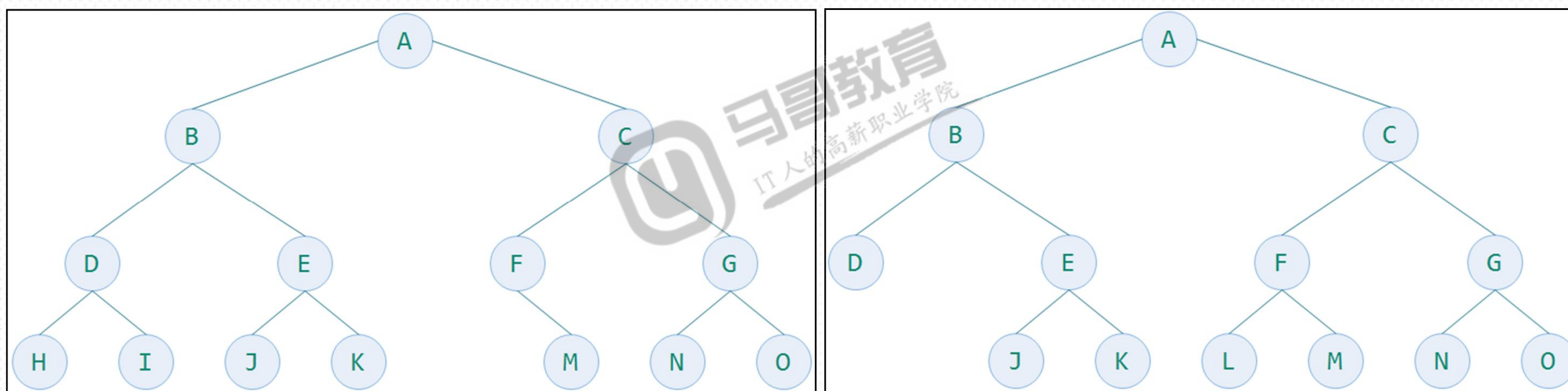
# 完全二叉树

□ 举例，完全二叉树，最下一层的叶子结点都连续的集中在左边



# 完全二叉树

□ 举例，**不是完全二叉树**





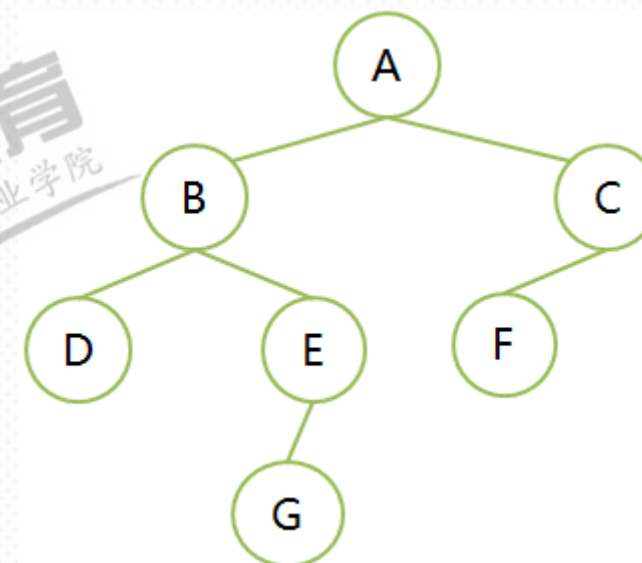
# 二叉树性质

## □ 性质1

- 在二叉树的第*i*层上至多有 $2^{(i-1)}$ 个结点( $i \geq 1$ )

## □ 性质2

- 深度为*k*的二叉树，至多有 $2^k - 1$ 个节点( $k \geq 1$ )
- 一层  $2^1 - 1 = 1$
- 二层  $2^2 - 1 = 1 + 2 = 3$
- 三层  $2^3 - 1 = 1 + 2 + 4 = 7$



# 二叉树性质

## □ 性质3

□ 对任何一棵二叉树T，如果其终端节点数为 $n_0$ ，度数为2的结点为 $n_2$ ，则有 $n_0 = n_2 + 1$

□ 换句话说，就是叶子结点数-1就等于度数为2的结点数。

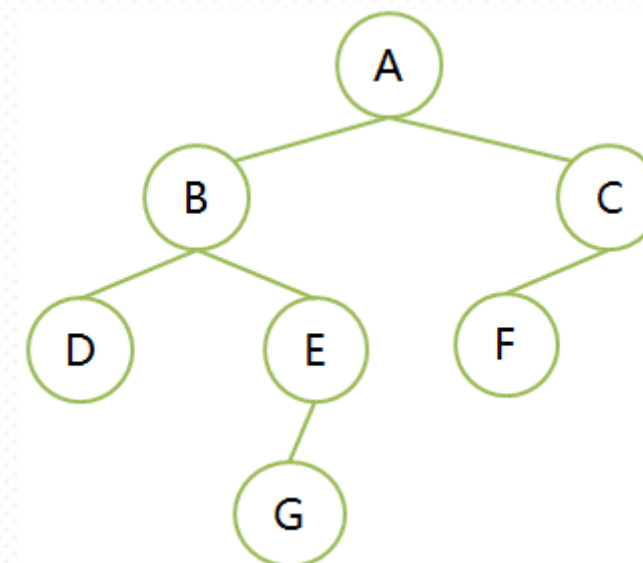
□ 证明：

□ 总结点数为 $n = n_0 + n_1 + n_2$ ， $n_1$ 为度数为1的结点总数。

□ 一棵树的分支数为 $n-1$ ，因为除了根结点外，其余结点都有一个分支，即 $n_0 + n_1 + n_2 - 1$ 。

□ 分支数还等于 $n_0 * 0 + n_1 * 1 + n_2 * 2$ ， $n_2$ 是2分支结点所以乘以2， $2 * n_2 + n_1$ 。

□ 可得 $2 * n_2 + n_1 = n_0 + n_1 + n_2 - 1 \Rightarrow n_2 = n_0 - 1$



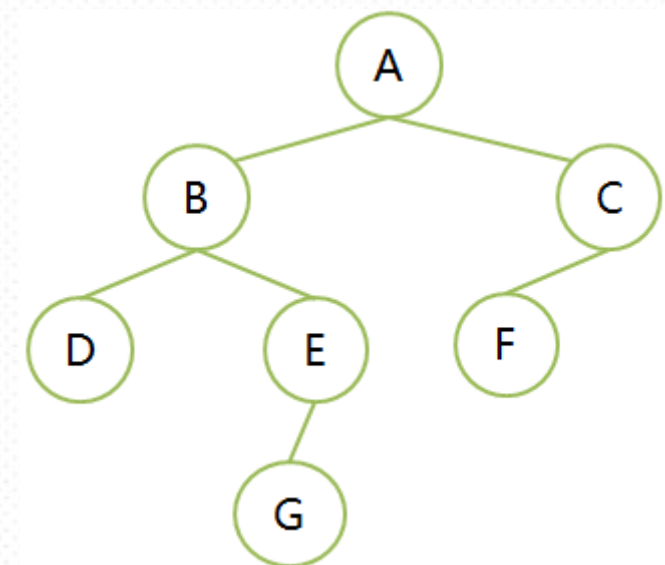
马哥教育  
IT人的高薪职业学院



# 二叉树性质

## □ 其他性质

- 高度为k的二叉树，至少有k个结点。
- 含有n (  $n \geq 1$  ) 的结点的二叉树高度至多为n。和上句一个意思
- 含有n (  $n \geq 1$  ) 的结点的二叉树的高度至多为n，最小为 $\text{math.ceil}(\log_2 (n+1))$ ，不小于对数值的最小整数，向上取整。
  - 假设高度为h， $2^h - 1 = n \Rightarrow h = \log_2 (n+1)$ ，层次数是取整。  
如果是8个节点，3.1699就要向上取整为4，为4层

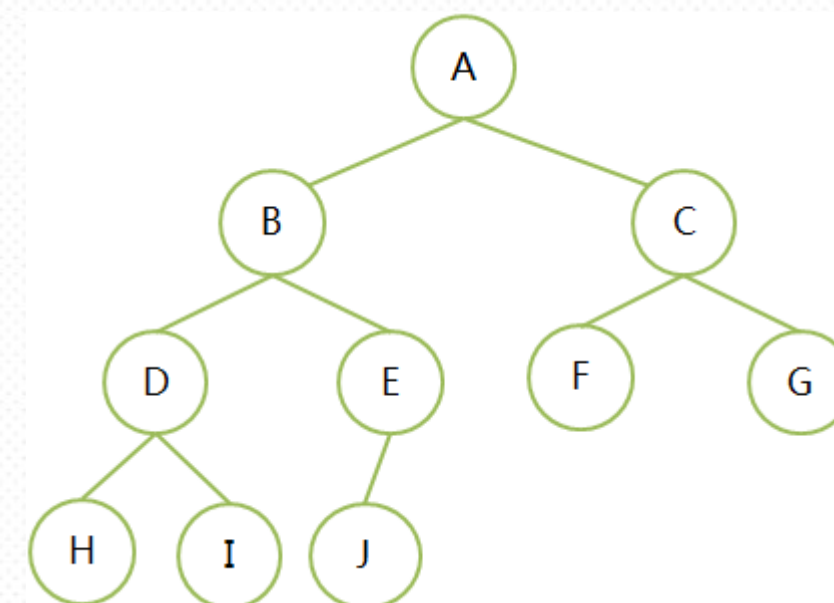


马哥教育  
IT 人的高薪职业学院

# 二叉树性质

## □ 性质4

- 具有n个结点的**完全二叉树**的深度为 $\text{int}(\log_2 n) + 1$ 或者 $\text{math.ceil}(\log_2(n+1))$

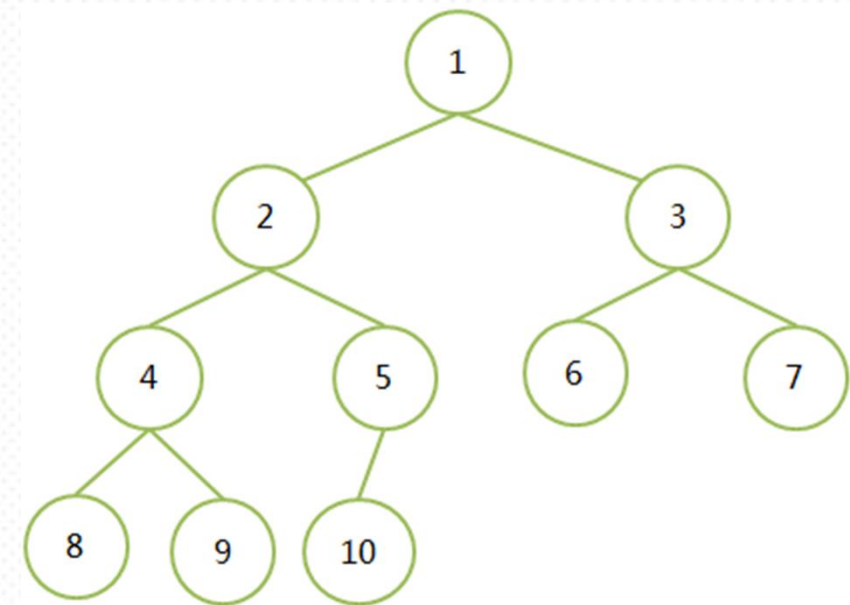




# 二叉树性质

## □ 性质5

- 如果有一棵n个结点的**完全二叉树**（深度为性质4），结点按照层序编号，如右图
- 如果 $i=1$ ，则结点 $i$ 是二叉树的根，无双亲；如果 $i>1$ ，则其双亲是 $\text{int}(i/2)$ ，向下取整。就是子节点的编号整除2得到的就是父结点的编号。父结点如果是 $i$ ，那么左孩子结点就是 $2i$ ，右孩子结点就是 $2i+1$ 。
- 如果 $2i>n$ ，则结点 $i$ 无左孩子，即结点 $i$ 为叶子结点；否则其左孩子结点存在编号为 $2i$ 。
- 如果 $2i+1>n$ ，则结点 $i$ 无右孩子，注意这里并不能说明结点 $i$ 没有左孩子；否则右孩子结点存在编号为 $2i+1$ 。



马哥教育  
IT 人的高薪职业学院

谢谢

咨询热线 400-080-6560

