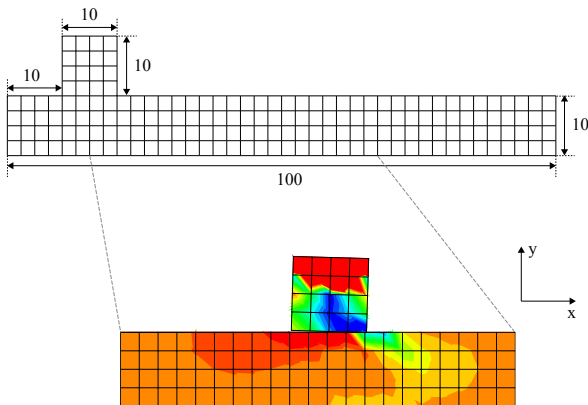


Data-assimilaatio kitkamallissa

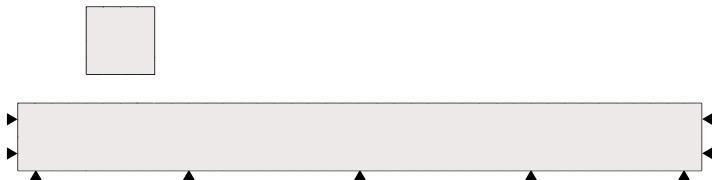
Tom Gustafsson

5. syyskuuta 2012

- Lähtökohtana: Onnistuuko huonosti tunnettujen parametrien ennustaminen elastisesta kitkamallista *data-assimilaation* tarjoamien keinojen avulla?

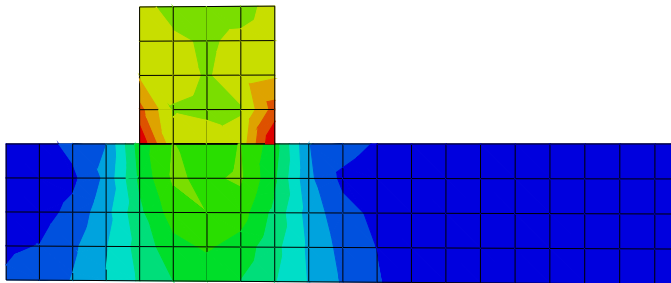


- Alkutila: Painin, laatta
- Reunaehdot



- Abaqus/Standard 6.12-1, simulaatiot CSC:n koneella

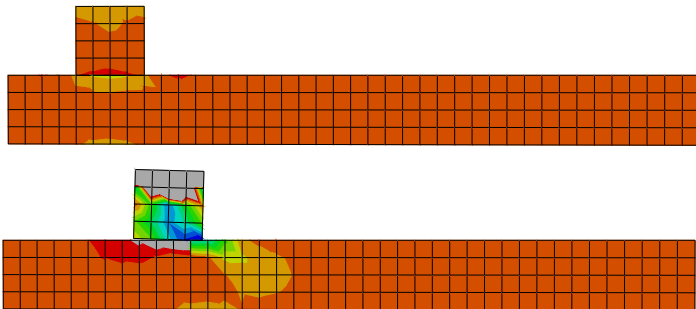
- Vaihe 1: 5 kN voima



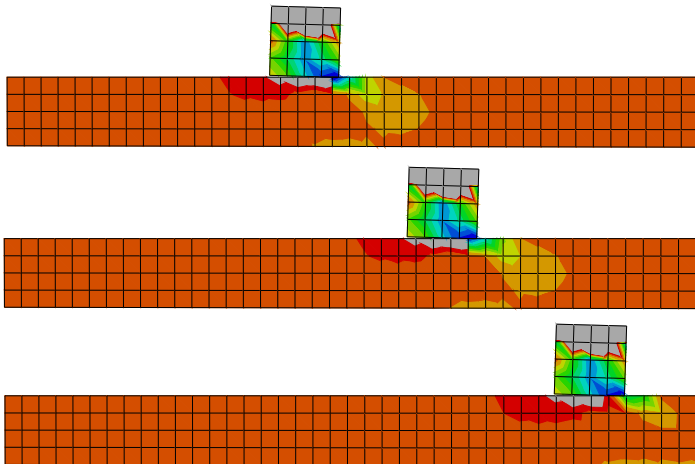
- Vaihe 2: Yläreunan siirto 70 cm oikealle

Simulaation vaiheet: Yläreunan siirtymä

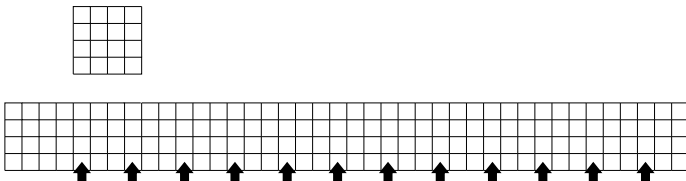
- Siirto reunaehdolla, ns. "hidas siirtymä"



Simulaation vaiheet: Yläreunan siirtymä 2



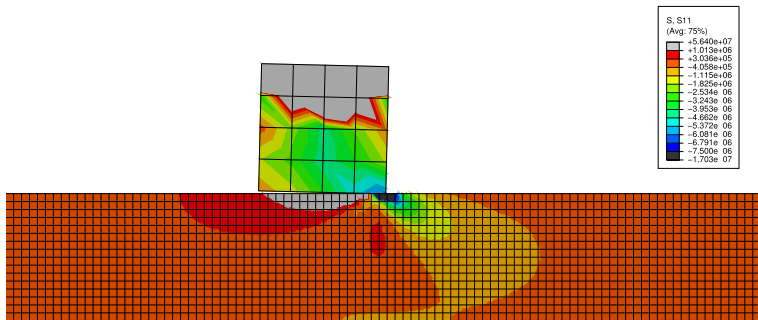
- Pyritään estimoimaan kitkakerroin μ
- Etukäteistietona x -suuntaiset jännitykset mittapisteissä (\sim venymäliuskamittaus)



- Mittadata synteettistä

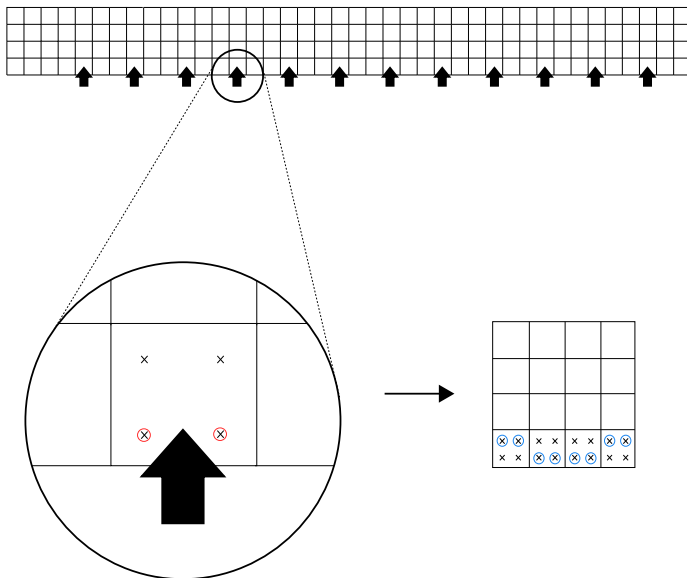
Synteettisen mittadatan generointi

- Minimoidaan inversiorikosta → mittadata tiheämmästä verkosta



- Miten verrata tiheämmän ja harvemman verkon antamia jännityksiä?

Synteettisen mittadatan generointi 2

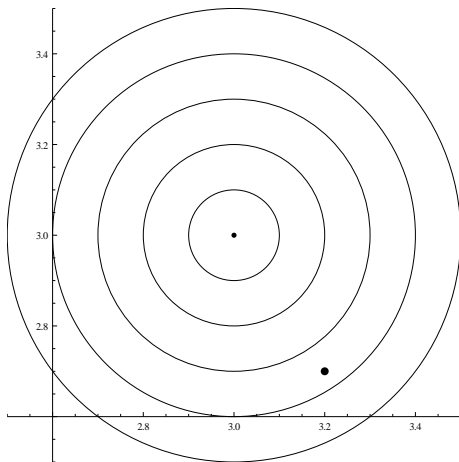


- Estimoitava suure: Kitkakerroin $\mu = 0,5$
- Etukäteistieto: x -suuntaiset jännitykset mittapisteissä
- *Data-assimilaatio*

- Pohjimmiltaan havaintojen ja mallin tuotaman informaation yhteensulauttamista
- Perinteisiä sovelluskohteita: Säähavaintomallit, valtamerimallit
- Data-assimilaation menetelmiä
 - 3DVar, 4DVar
 - Kalman Filter, Extended-, Ensemble-, ...
 - ...
- Tässä työssä *Ensemble Smoother*, eli ES
- Perustuu samaan ideaan kuin *Ensemble Kalman Filter*, eli EnKF

- Systeemin (todellinen) tila $\psi^t \in \mathbb{R}^N$
- Mittaus $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^M$
 - Ei tarkka
 - Suhde tilaan $\mathbf{d} = \mathbf{M}\psi^t + \epsilon$
 - Mittamatriisi $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{M \times N}$
 - Virhe $\epsilon \sim \mathcal{N}_M(0, \mathbf{\Sigma})$
 - Kovarianssimatriisi $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{M \times M}$
- Estimoitu tila $\psi^f \in \mathbb{R}^N$
 - Aluksi esim. mittauksien perusteella

$$N = M = 2, \mathbf{M} = \mathbf{I}, \mathbf{\Sigma} = \sigma \mathbf{I}$$

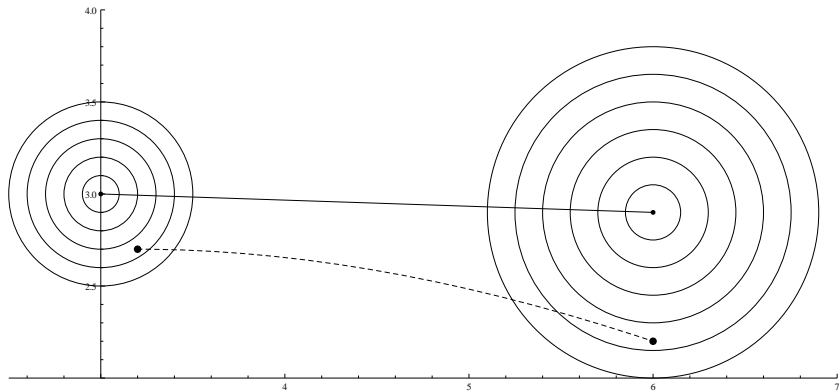


- Todellinen tila ψ^t muuttuu ajan kuluessa
- Malli estimaatin aikakehityksestä:

$$\psi_{t+\Delta t}^f = \psi_t^f + \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{G}(\psi_t^f, t) dt$$

- Malli epätäydellinen, eli estimaatin virhe kasvaa aikakehitettäessä

Data-assimilaatio, esimerkki 2



- Tulkitaan normaalijakauma todennäköisyysfunktiona $f(\psi, t)$
- Tällöin f :n aikakehitystä kuvaa *Fokker-Planck* -yhtälö

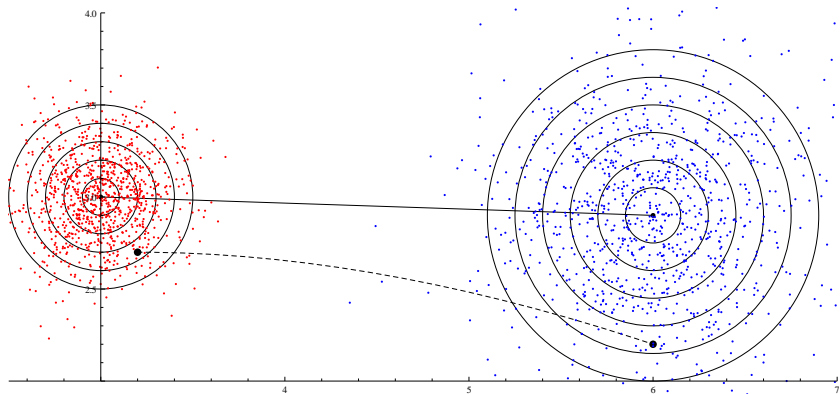
$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial (G_i f)}{\partial \psi_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 (Q_{ij} f)}{\partial \psi_i \partial \psi_j}$$

- *Hurja*, mutta ei niin hurja miltä näyttää (sij. $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ ja $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$)
- Yleinen tapaus ei ratkea analyyttisesti \rightarrow EnKF

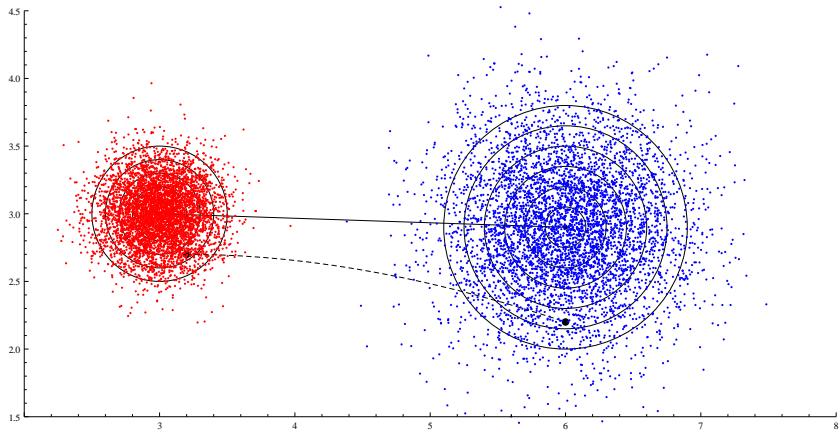
- Idea: Otetaan n -kappaletta realisaatioita alkutilan normaalijakaumasta
- Aikakehitetään näin saadun *kokoelman* jokaista tilaa erikseen operaattorin \mathbf{G} avulla
- Etu: Estimaatin kovarianssimatriisia ei tarvitse aikakehittää (raskasta), koska sitä voidaan approksimoida lausekkeella

$$\mathbf{\Sigma} \approx \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \left(\psi_j^f - \overline{\psi^f} \right) \left(\psi_j^f - \overline{\psi^f} \right)^T$$

Ensemble Kalman Filter, esimerkki

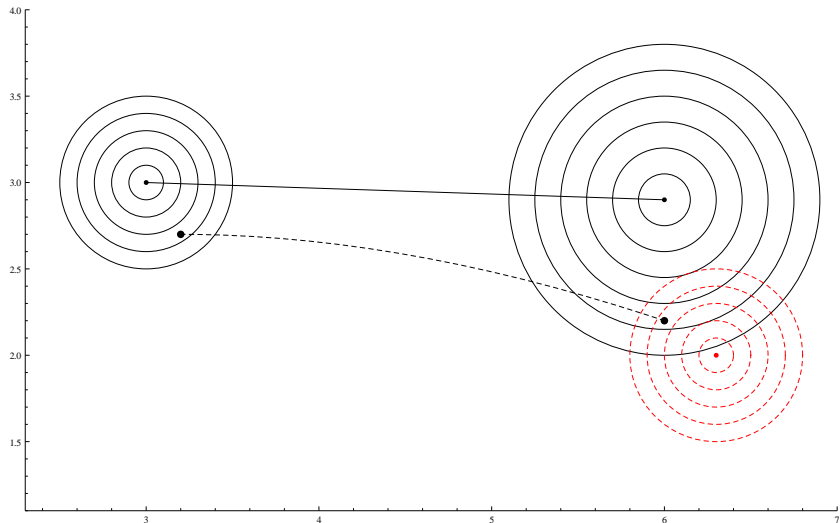


Ensemble Kalman Filter, esimerkki jatkuu

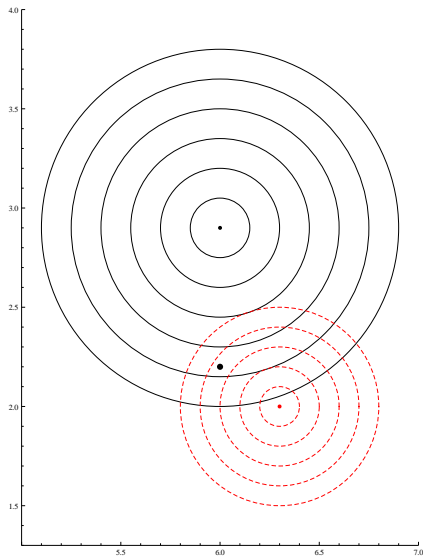


- Tyypillisesti mittadataa muulloinkin, kuin alkuhetkellä
- Analyysiongelma: *Miten yhdistää optimaalisesti mallin ennuste ψ^f ja uusi mittaus d ?*

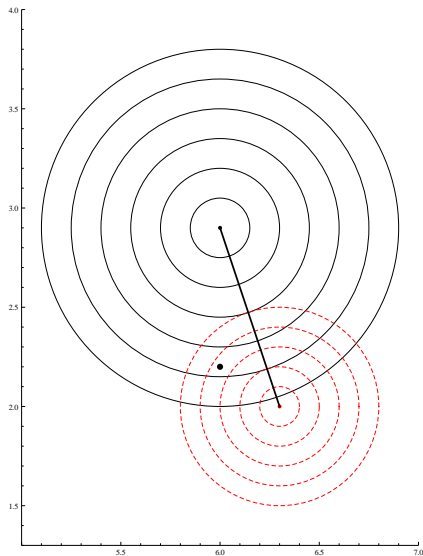
Ensemble Kalman Filter, analyysiongelma 2



Ensemble Kalman Filter, analyysiongelma 3



Ensemble Kalman Filter, analyysiongelma 4



- *Analysoitu tila* $\psi^a = \psi^f + K (d - \psi^f)$

- Jos varianssit samat, $K = \frac{1}{2}$
- Tässä tapauksessa

$$K = \frac{\sigma_\psi}{\sigma_\psi + \sigma_d}$$

- Yleisesti

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\Sigma}_\psi (\boldsymbol{\Sigma}_\psi + \boldsymbol{\Sigma}_d)^{-1}$$

- Jos lisätään vielä mahdollisuus $N > M$, niin

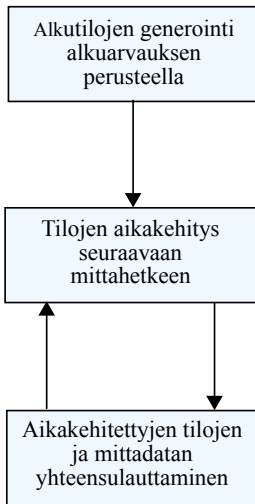
$$\psi^a = \psi^f + \boldsymbol{\Sigma}_\psi \mathbf{M}^T (\boldsymbol{\Sigma}_d + \mathbf{M} \boldsymbol{\Sigma}_\psi \mathbf{M}^T)^{-1} (d - \mathbf{M} \psi^f)$$

- Jatketaan tilaa huonosti tunnetuilla parametreilla α

$$\hat{\psi}^f = (\psi^f, \alpha)^T$$

- Karsitaan lisätyt parametrit vertailuista mitattujen arvojen kanssa muokkaamalla mittamatriisia
- → Estimoitavat parametrit loksahtavat kohdalleen automaattisesti!

Ensemble Kalman Filter, yhteenveto



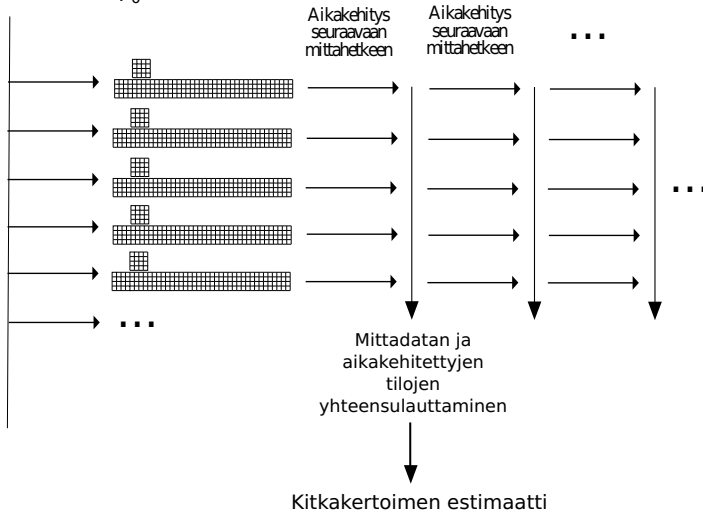
- Alussa ei jännityksiä, joten alkutilan määrää ainoastaan $\mu_0 = 0,6$
- Oletetaan jokin virhe; tässä $\sigma_0 = 0,1$ (myös mittavirheen keskihajonta)
- Päätetään kokoelman koko, esim. $n = 200$
- Generoidaan alkukokoelma jakaumasta $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$
- Alkukokoelman yksittäinen tila muotoa

$$\psi_j = (\underbrace{0, 0, \dots, 0, 0}_{N \text{ kpl}}, \mu_0 + \epsilon)^T, \quad j = 1, \dots, n$$

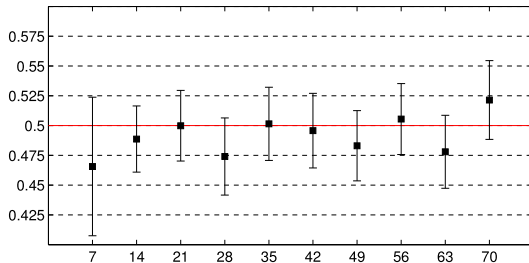
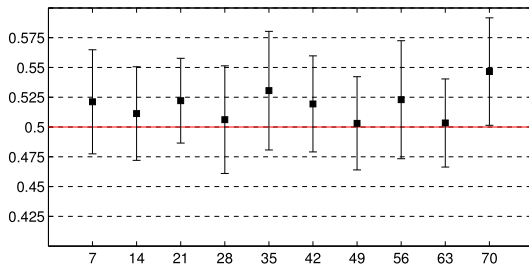
- Mitta"hetket": Yläreunan siirtymä $\Delta x = 7, 14, 21, \dots, 70$
- Simuloidaan seuraavaan mittahetkeen asti ja yhteensulautetaan mittaus ja kokoelma \Rightarrow kitkakertoimen estimaatti
- Mittahetkiä 10, estimaatteja 10

Simulointi kuvina

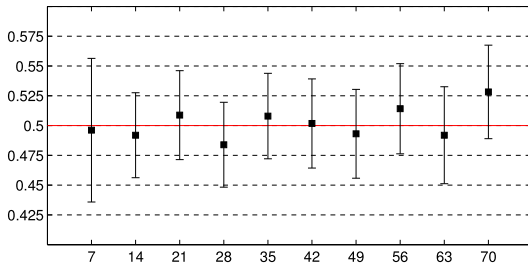
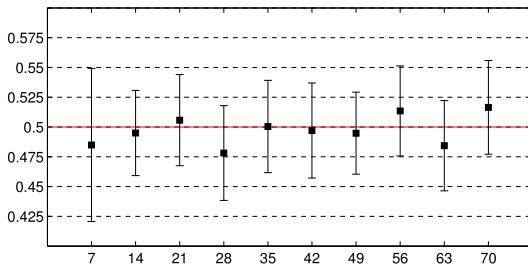
Alkuarvaus μ_0



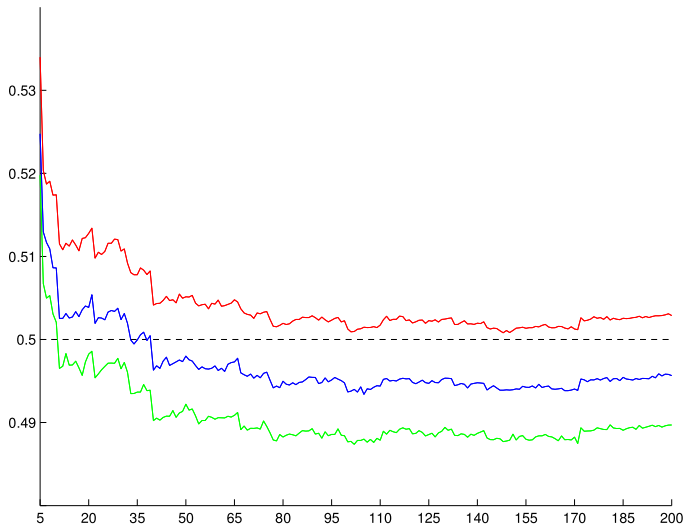
Tuloksia, ilman mallivirhettä (20, 200)



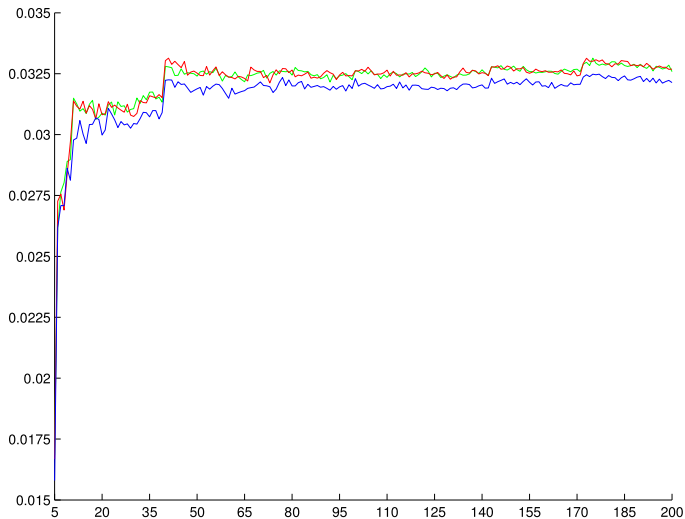
Tuloksia, mallivirheellä (200, 1000)



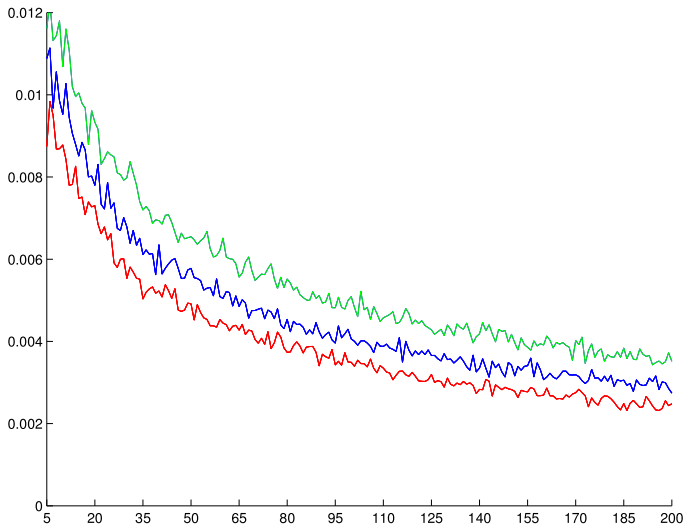
Kokoelman koon vaikutus, keskiarvo (2-6-10)



Kokoelman koon vaikutus, kokoelman hajonta (2-6-10)



Kokoelman koon vaikutus, peräkkäisten analyysien hajonta (2-6-10)



- Elastiset FEM-mallit ja analysoidun tilan aikakehittäminen
-