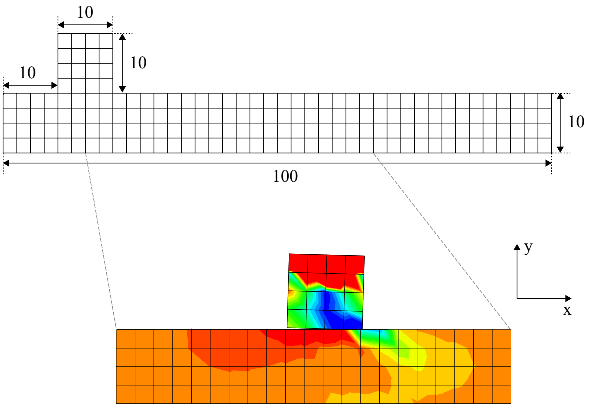
Data assimilation in an elastic friction model

Tom Gustafsson

20. September 2012

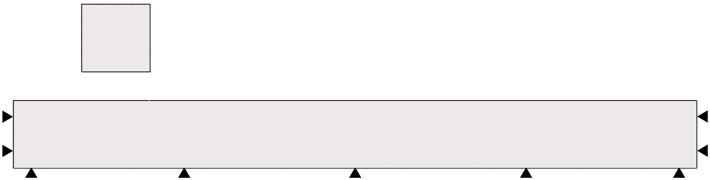
The problem

- Can we estimate weakly known parameters from a simple friction model by using tools of data assimilation?



Model, 2D

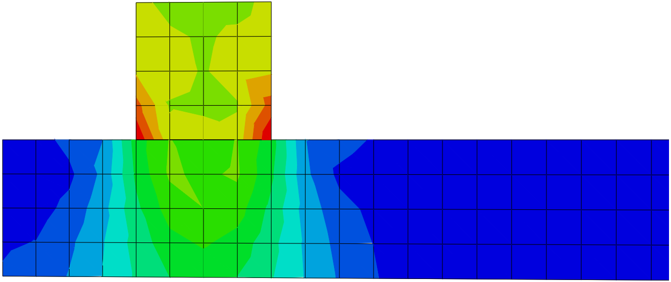
- Initial setting: Block, surface
- Boundary conditions



- Abaqus/Standard 6.12-1, simulations on CSC

Steps of the simulation

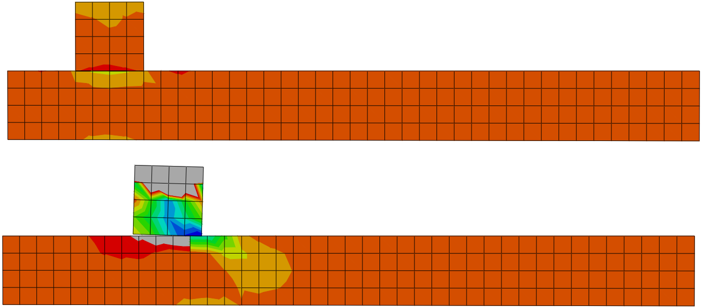
- Step 1: 5 kN force acting downwards



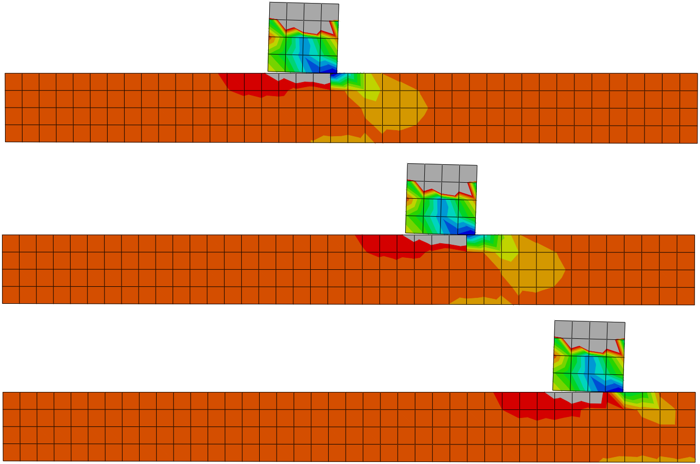
- Step 2: Displacement of block's upper boundary by 70 cm to the right

Steps of the simulation: Displacement of the block

- Done by using boundary conditions. Thus, a "slow displacement"

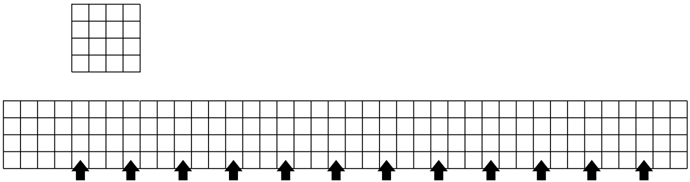


Steps of the simulation: Displacement of the block, 2

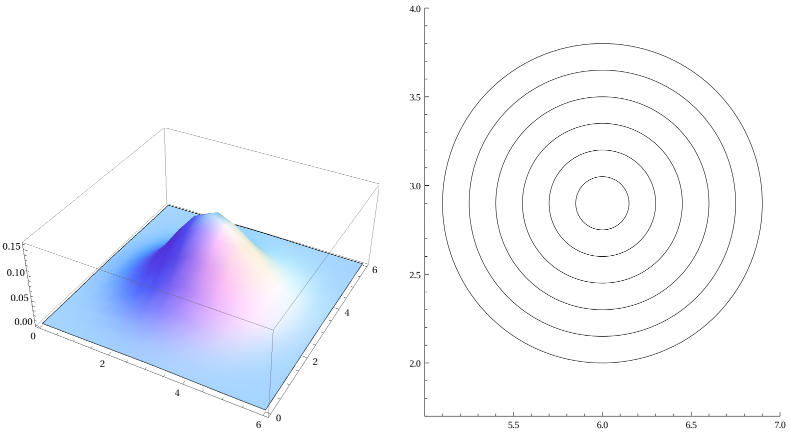


Inversion problem

- Attempting to estimate friction coefficient μ
- As *a priori* knowledge: x-directional stress in chosen measurement points
  ($\sim$ strain gauge)



Ennen kuin jatketaan



Ennen kuin jatketaan 2

- Useampiulotteisen normaalijakauman karakterisoi kovarianssimatriisi $\mathbf{\Sigma}$
- $\mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}_0, \mathbf{\Sigma})$, jossa $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{k \times k}$
- Neliömatriisi, diagonaalilla varianssit eri dimensioissa
- Muut alkiot kertovat dimensioiden välisen kovarianssin

Data-assimilaatio

- Pohjimmiltaan havaintojen ja mallin tuotaman informaation yhteensulauttamista
- Perinteisiä sovelluskohteita: Säähavaintomallit, valtamerimallit
- Data-assimilaation menetelmiä
  - 3DVar, 4DVar
  - Kalman Filter, Extended-, Ensemble-, ...
  - ...
- Tässä työssä *Ensemble Kalman Filter*, eli EnKF

Data-assimilaatio, yleistä

- Systeemin (todellinen) tila $\psi^t \in \mathbb{R}^N$
- Mittaus $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^M$
  - Ei tarkka
  - Suhde tilaan $\boldsymbol{d} = \mathbf{M}\psi^t + \boldsymbol{\epsilon}$
  - Mittamatriisi $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{M \times N}$
  - Virhe $\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}_M(0, \boldsymbol{\Sigma})$
  - Kovarianssimatriisi $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{M \times M}$
- Ennustettu tila $\psi^f \in \mathbb{R}^N$
  - Aluksi esim. mittauksien perusteella

Data-assimilaatio, yleistä 2

- Todellinen tila ψ^t muuttuu ajan kuluessa
- Systeemin malli

$$\dot{\psi} = \boldsymbol{G}(\psi, t)$$

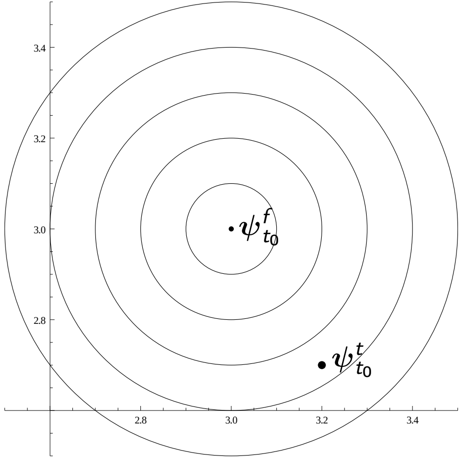
- Aikakehitys:

$$\psi^f_{t+\Delta t} = \psi^f_t + \int_t^{t+\Delta t} \boldsymbol{G}(\psi, t)\,\mathrm{d}t$$

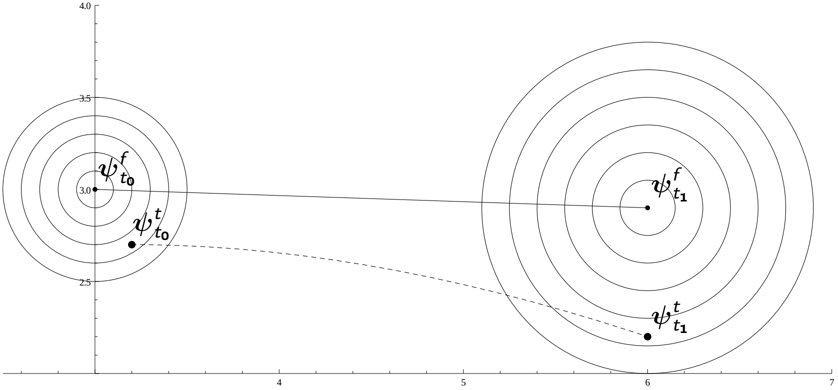
  - Malli epätäydellinen, eli ennusteen virhe kasvaa aikakehitettäessä
  - Virheen kasvua kuvaa kovarianssimatriisi $\mathbf{Q}$

Data-assimilaatio, esimerkki

$$N = M = 2,\ \mathbf{M} = \mathbf{I},\ \mathbf{\Sigma} = \sigma\mathbf{I}$$



Data-assimilaatio, esimerkki 2



Data-assimilaatio, yleistä 3

- Tulkitaan normaalijakauma todennäköisyystiheysfunktiona $f(\psi, t)$
- Tällöin f:n aikakehitystä kuvaa *Fokker-Planck -yhtälö*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial (G_i f)}{\partial \psi_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 (Q_{ij} f)}{\partial \psi_i \partial \psi_j}$$

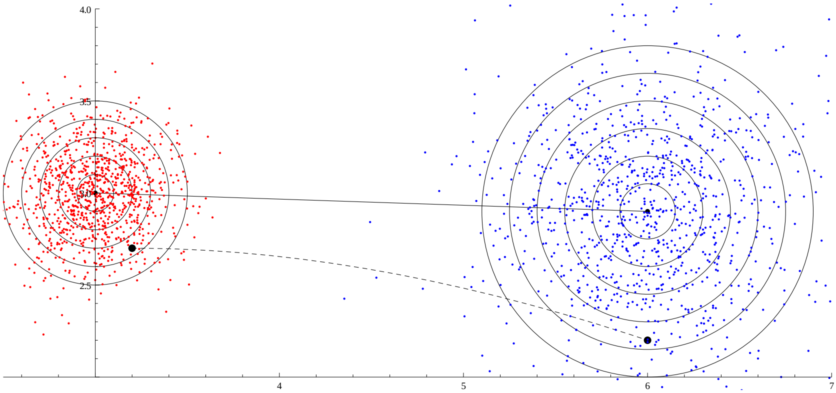
- Yleinen tapaus ei ratkea analyyttisesti $\rightarrow$ EnKF

Ensemble Kalman Filter

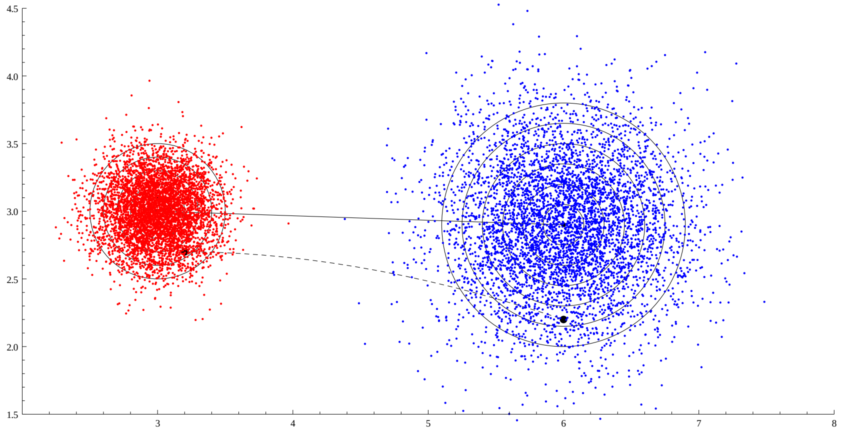
- Idea: Otetaan n-kappaletta realisaatioita alkutilan normaalijakaumasta ($\Rightarrow$ kokoelma)
- Aikakehitetään näin saadun *kokoelman* jokaista tilaa erikseen operaattorin $\boldsymbol{G}$ avulla
- Tällöin ennusteen kovarianssimatriisia voidaan approksimoida lausekkeella

$$\boldsymbol{\Sigma} \approx \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \left(\psi_j^f - \overline{\psi^f} \right) \left(\psi_j^f - \overline{\psi^f} \right)^{\mathrm{T}}$$

Ensemble Kalman Filter, esimerkki



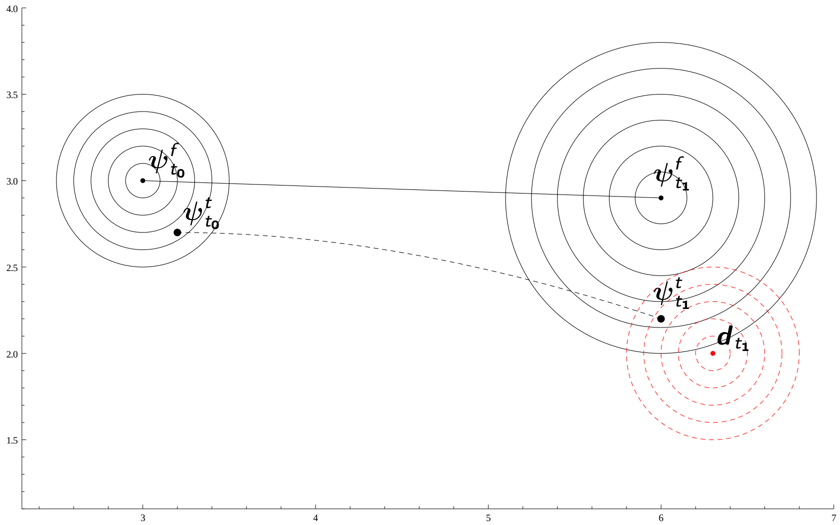
Ensemble Kalman Filter, esimerkki jatkuu



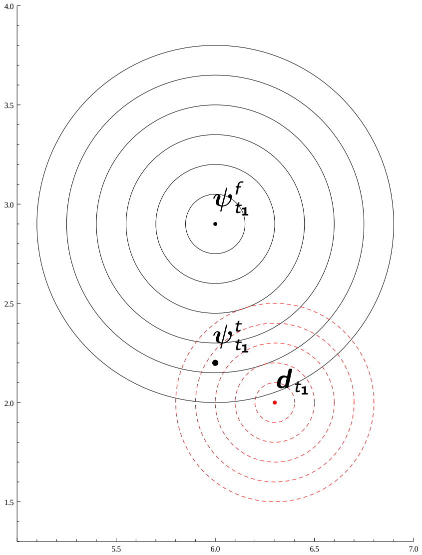
Ensemble Kalman Filter, analyysiongelma

- Tyypillisesti systeemistä saadaan mittadataa mittahetkillä $t_1, t_2, t_3, \ldots$
- Analyysiongelma: *Miten yhdistää optimaalisesti mallin ennuste* ψ^f *ja uusi mittaus* $\boldsymbol{d}$*?*

Ensemble Kalman Filter, analyysiongelma 2



Ensemble Kalman Filter, analyysiongelma 3



Ensemble Kalman Filter, analyysiongelman ratkaisu

- *Analysoitu tila* $\psi^a = \psi^f + K\left(\boldsymbol{d} - \psi^f\right)$
  - Jos varianssit samat, $K = \frac{1}{2}$
  - Tässä tapauksessa
$$K = \frac{\sigma_\psi}{\sigma_\psi + \sigma_{\boldsymbol{d}}}$$
  - Yleisesti
$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\Sigma}_\psi \left(\boldsymbol{\Sigma}_\psi + \boldsymbol{\Sigma}_d\right)^{-1}$$

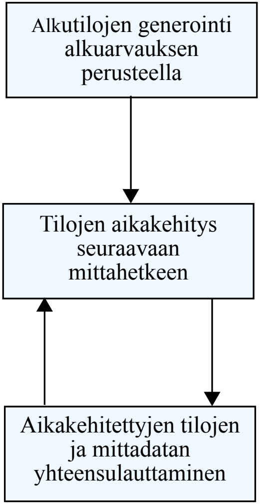
Ensemble Kalman Filter, analyysiongelman ratkaisu

- *Analysoitu tila* $\psi^a = \psi^f + K\left(\boldsymbol{d} - \psi^f\right)$
  - Jos varianssit samat, $K = \frac{1}{2}$
  - Tässä tapauksessa
$$K = \frac{\sigma_\psi}{\sigma_\psi + \sigma_d}$$
  - Yleisesti
$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\Sigma}_\psi \left(\boldsymbol{\Sigma}_\psi + \boldsymbol{\Sigma}_d\right)^{-1}$$
- Jos lisätään vielä mahdollisuus $N > M$, niin
$$\psi^a = \psi^f + \boldsymbol{\Sigma}_\psi \mathbf{M}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{\Sigma}_d + \mathbf{M}\boldsymbol{\Sigma}_\psi \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \left(\boldsymbol{d} - \mathbf{M}\psi^f\right)$$

Ensemble Kalman Filter, parametrien estimointi

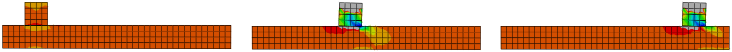
- Nyt malli on
$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\psi}, t; \boldsymbol{\alpha})$$
- Käytännössä jatketaan tilaa parametreilla $\boldsymbol{\alpha}$
$$\hat{\boldsymbol{\psi}}^f = \left(\boldsymbol{\psi}^f,\ \boldsymbol{\alpha}\right)^{\mathrm{T}}$$
- Karsitaan lisätyt parametrit vertailuista mitattujen arvojen kanssa muokkaamalla mittamatriisia
- $\rightarrow$ Estimoitavat parametrit loksahtavat kohdalleen ratkaistaessa analyysiongelma

Ensemble Kalman Filter, yhteenveto



Takaisin ongelmaan

- Malli



- Estimoitava parametri μ
- Määritellään tilaksi

$$\psi = (\sigma_x^1, \sigma_x^2, \sigma_x^3, \ldots, \sigma_x^N, \mu)^{\mathrm{T}}$$

- Alussa ei kosketusta $\Rightarrow$ jännitykset nollia
- Alkutilan määrää ainoastaan siis μ_0

Takaisin ongelmaan 2

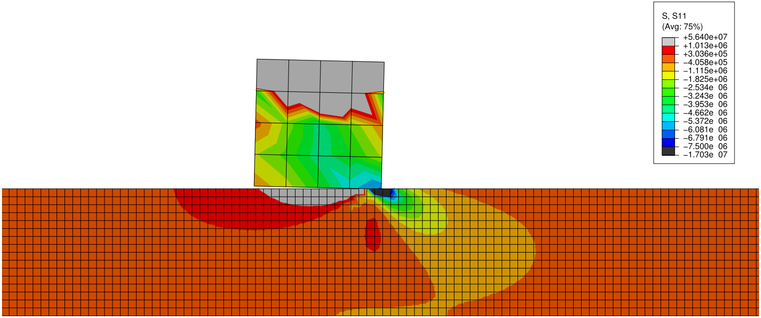
- Tarvitaan
  - Alkuarvaus $\mu_0 = 0{,}6$
  - Alkuarvauksen virhe $\sigma_0 = 0{,}1$
  - Kokoelman koko $n = 200$
  - Alkukokoelma jakaumasta $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$
- Alkukokoelman yksittäinen tila on siis muotoa

$$\psi_j = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 0,}_{N \text{ kpl}} \mu_0 + \epsilon)^{\mathrm{T}}, \ j = 1, \ldots, n$$

- Mitta"hetket": Yläreunan siirtymät $\Delta x = 7, 14, 21, \ldots, 70$
- Mittadata synteettisesti

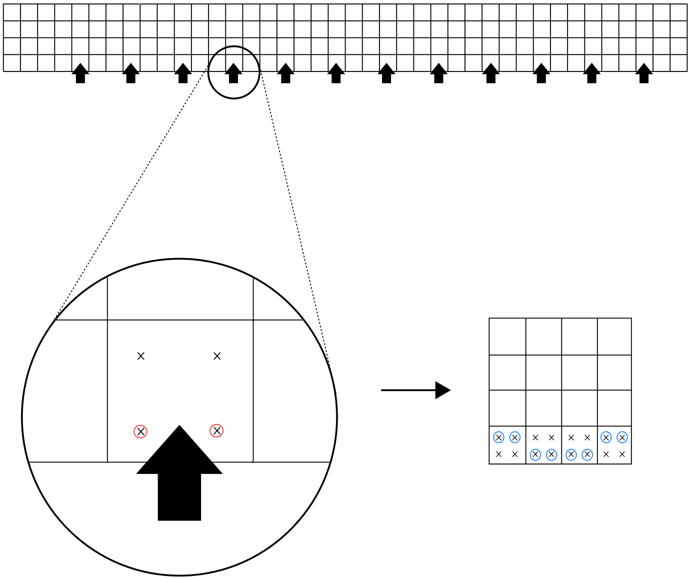
Synteettisen mittadatan generointi

- Minimoidaan inversiorikosta $\rightarrow$ mittadata tiheämmästä verkosta

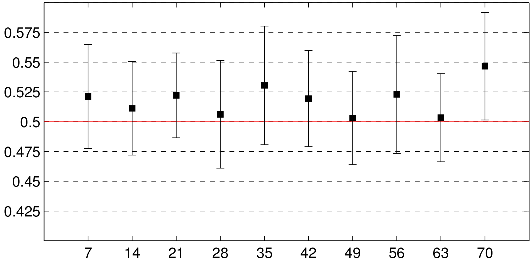


- Miten verrata tiheämmän ja harvemman verkon antamia jännityksiä?

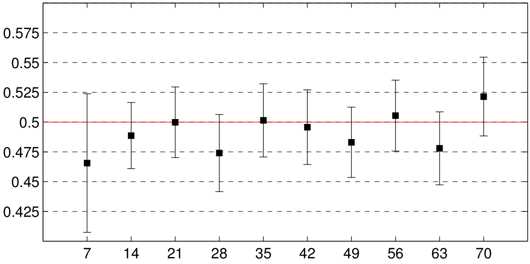
Synteettisen mittadatan generointi 2



Tuloksia, $Q = 0$

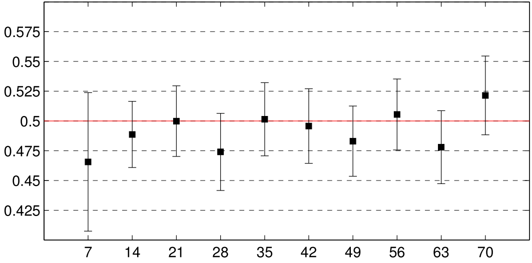


$n = 20$

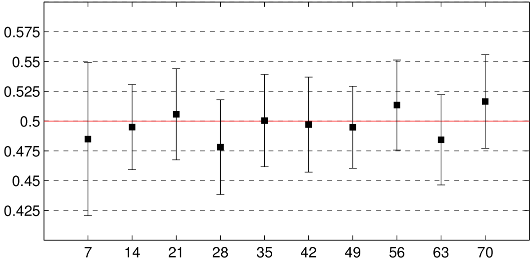


$n = 200$

Tuloksia, mallivirheen vaikutus, $n = 200$



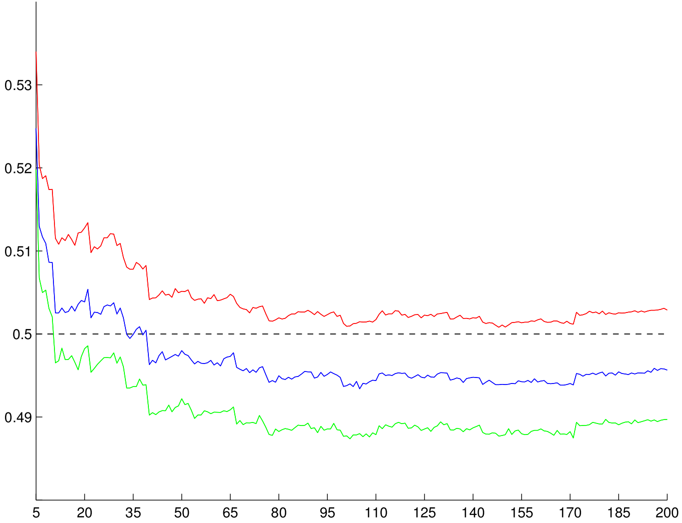
$\mathbf{Q} = 0$



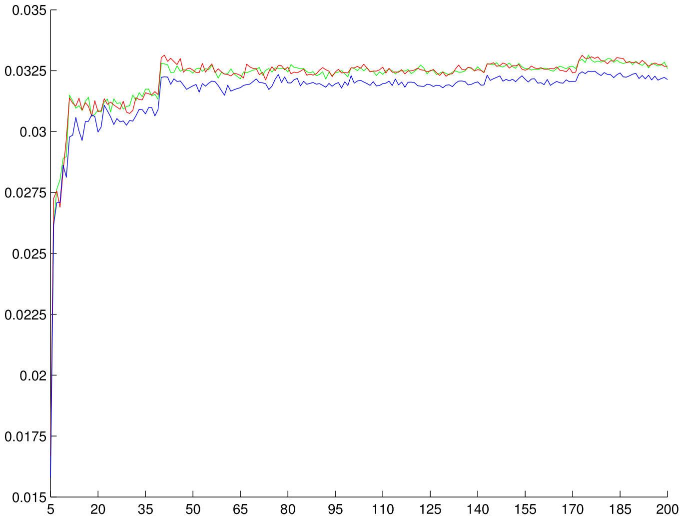
$\mathbf{Q} = \mathbf{I}\sigma$

Kokoelman koon vaikutus, keskiarvo

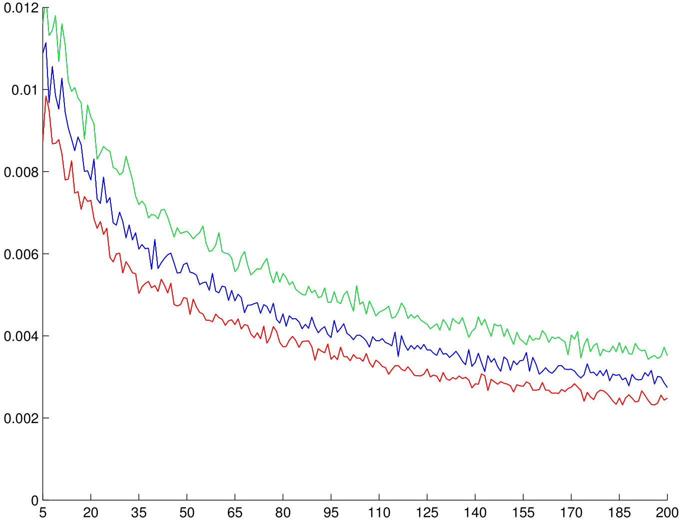
Punainen: $\Delta x = 70$, sininen: $\Delta x = 42$, vihreä: $\Delta x = 14$



Kokoelman hajonta



Peräkkäisten analyysien varianssi



Kysymyksiä?