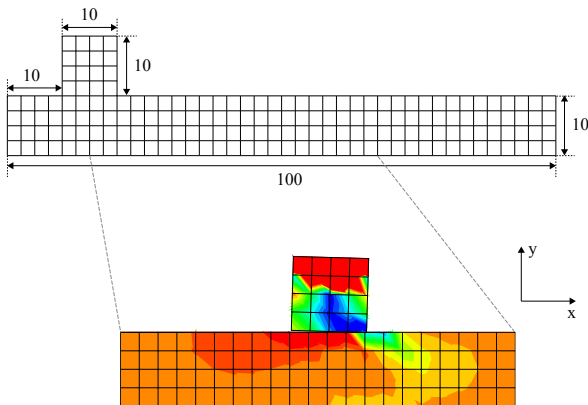


Data-assimilaatio kitkamallissa

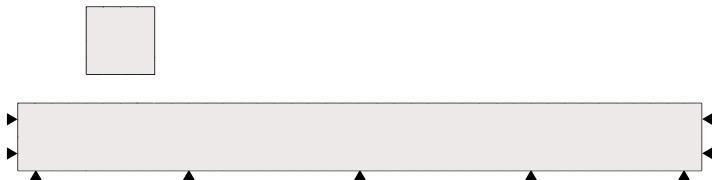
Tom Gustafsson

5. syyskuuta 2012

- Lähtökohtana: Onnistuuko huonosti tunnettujen parametrien ennustaminen elastisesta kitkamallista *data-assimilaation* tarjoamien keinojen avulla?

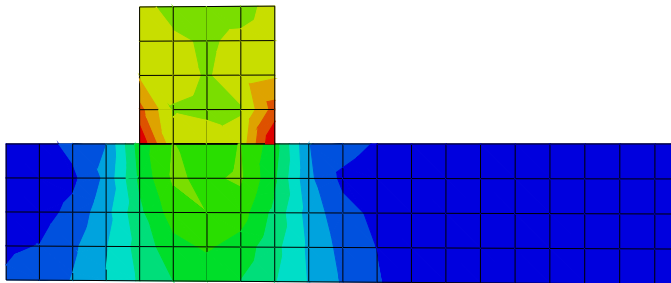


- Alkutila: Painin, laatta
- Reunaehdot



- Abaqus/Standard 6.12-1, simulaatiot CSC:n koneella

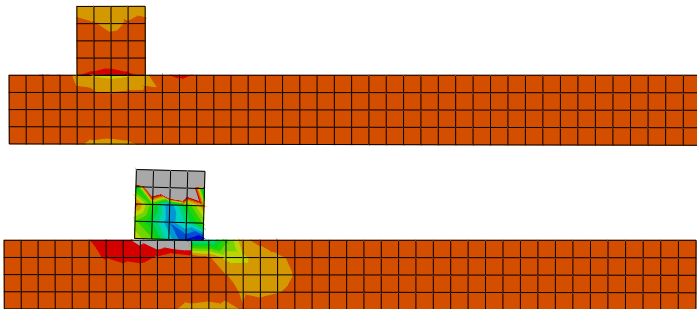
- Vaihe 1: 5 kN voima



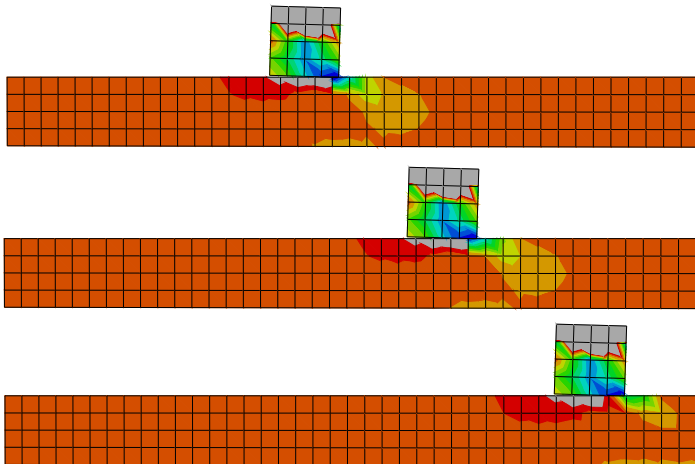
- Vaihe 2: Yläreunan siirto 70 cm oikealle

Simulaation vaiheet: Yläreunan siirtymä

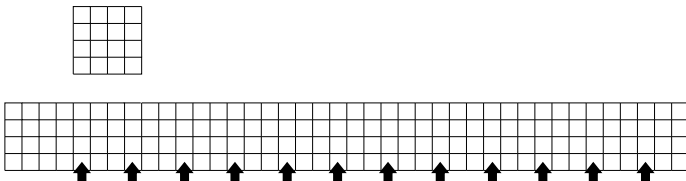
- Siirto reunaehdolla, ns. "hidas siirtymä"



Simulaation vaiheet: Yläreunan siirtymä 2



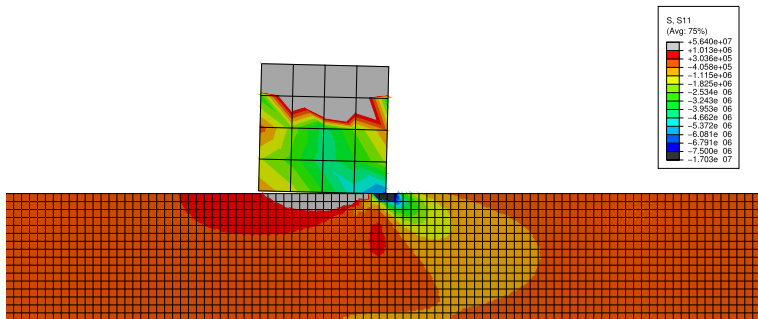
- Pyritään estimoimaan kitkakerroin μ
- *A priori* -tietona x -suuntaiset jännitykset mittapisteissä (\sim venymäliuskamittaus)



- Mittadata synteettistä

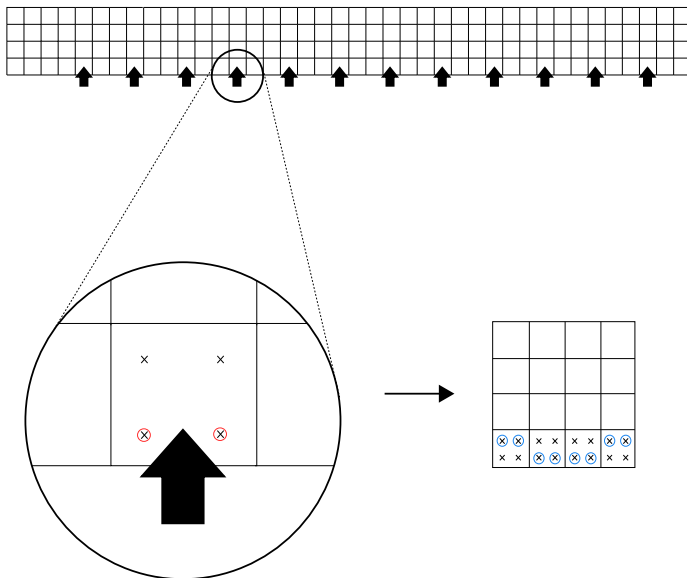
Synteettisen mittadatan generointi

- Minimoidaan inversiorikosta → mittadata tiheämmästä verkosta



- Miten verrata tiheämmän ja harvemman verkon antamia jännityksiä?

Synteettisen mittadatan generointi 2



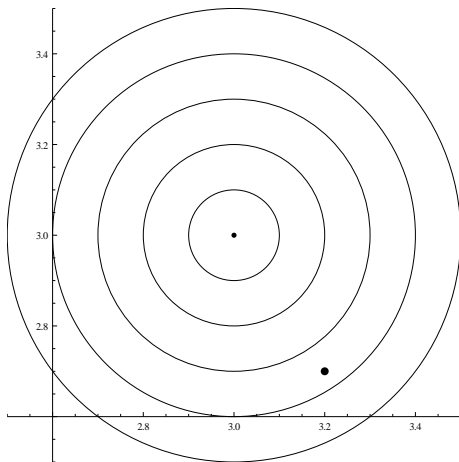
- Estimoitava suure: Kitkakerroin $\mu = 0,5$
- *A priori* -tieto: x -suuntaiset jännitykset mittapisteissä
- Menetelmät: *Data-assimilaatio*

- Pohjimmiltaan havaintojen ja mallin tuotaman informaation yhteensulauttamista
- Perinteisiä sovelluskohteita: Säähavaintomallit, valtamerimallit
- Data-assimilaation menetelmiä
 - 3DVar, 4DVar
 - Kalman Filter, Extended-, Ensemble-, ...
 - ...
- Tässä työssä *Ensemble Smoother*, eli ES
- Perustuu samaan ideaan kuin *Ensemble Kalman Filter*, eli EnKF

- Systeemin (todellinen) tila $\boldsymbol{\psi}^t \in \mathbb{R}^N$
- Mittaus $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^M$
 - Ei tarkka
 - Suhde tilaan $\boldsymbol{d} = \mathbf{M}\boldsymbol{\psi}^t + \boldsymbol{\epsilon}$
 - Mittamatriisi $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{M \times N}$
 - Virhe $\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}_M(0, \boldsymbol{\Sigma})$
 - Kovarianssimatriisi $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{M \times M}$
- Estimoitu tila $\boldsymbol{\psi}^f \in \mathbb{R}^N$
 - Aluksi esim. mittauksien perusteella

Data-assimilaatio, esimerkki

$$N = M = 2, \mathbf{M} = \mathbf{I}, \mathbf{\Sigma} = \sigma \mathbf{I}$$

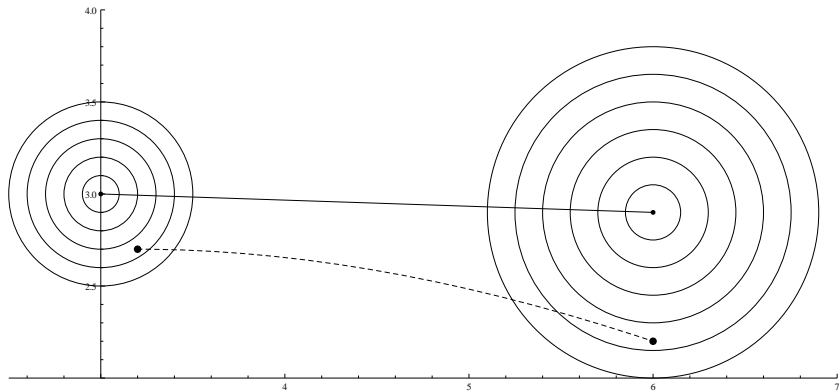


- Todellinen tila ψ^t muuttuu ajan kuluessa
- Malli estimaatin aikakehityksestä:

$$\psi_{t+\Delta t}^f = \psi_t^f + \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{G}(\psi_t^f, t) dt$$

- Malli epätäydellinen, eli estimaatin virhe kasvaa aikakehitettäessä

Data-assimilaatio, esimerkki 2



- Tulkitaan normaalijakauma todennäköisyysfunktiona $f(\psi, t)$
- Tällöin f :n aikakehitystä kuvaa *Fokker-Planck* -yhtälö

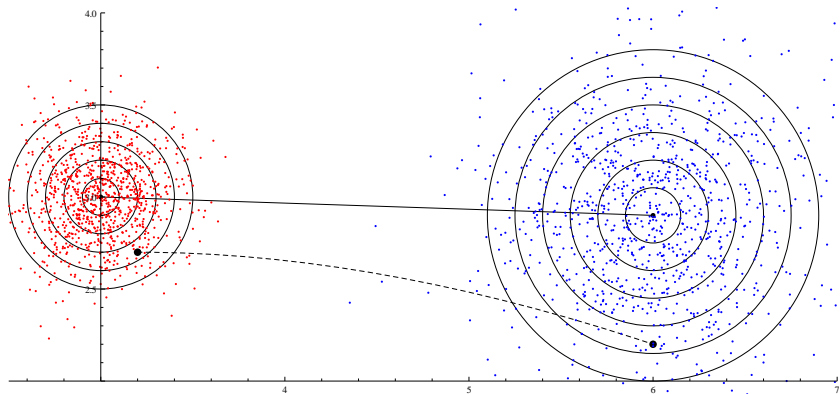
$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial (G_i f)}{\partial \psi_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 (Q_{ij} f)}{\partial \psi_i \partial \psi_j}$$

- *Hurja*, mutta ei niin hurja miltä näyttää (sij. $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ ja $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$)
- Yleinen tapaus ei ratkea analyyttisesti \rightarrow EnKF

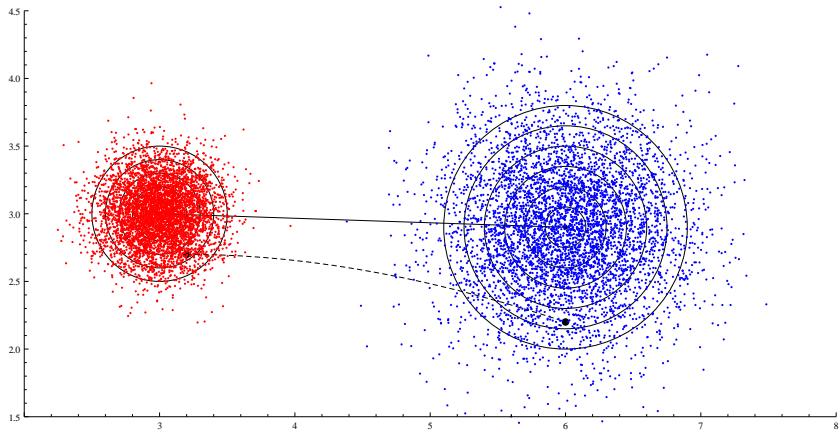
- Idea: Otetaan n -kappaletta realisaatioita alkutilan normaalijakaumasta
- Aikakehitetään näin saadun *kokoelman* jokaista tilaa erikseen operaattorin \mathbf{G} avulla
- Etu: Estimaatin kovarianssimatriisia ei tarvitse aikakehittää (linearisessa $\mathcal{O}(N)$, epälinearisessa $\mathcal{O}(N^k)$, jossa k käytettävän Taylor-approksimaation aste), koska sitä voidaan approksimoida lausekkeella

$$\Sigma \approx \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \left(\psi_j^f - \overline{\psi^f} \right) \left(\psi_j^f - \overline{\psi^f} \right)^T$$

Ensemble Kalman Filter, esimerkki



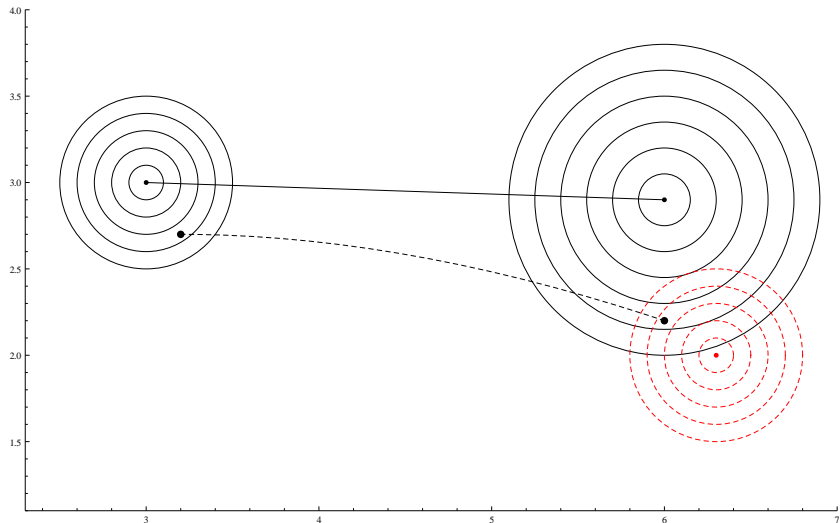
Ensemble Kalman Filter, esimerkki jatkuu



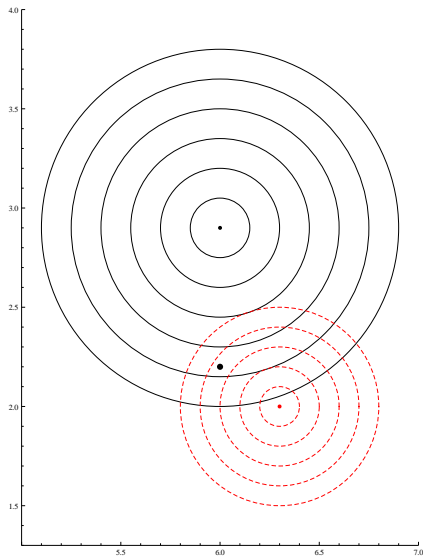
Ensemble Kalman Filter, analyysiongelma

- Tyypillisesti mittadataa muulloinkin, kuin alkuhetkellä
- Analyysiongelma: *Miten yhdistää optimaalisesti mallin ennuste ψ^f ja uusi mittaus d ?*

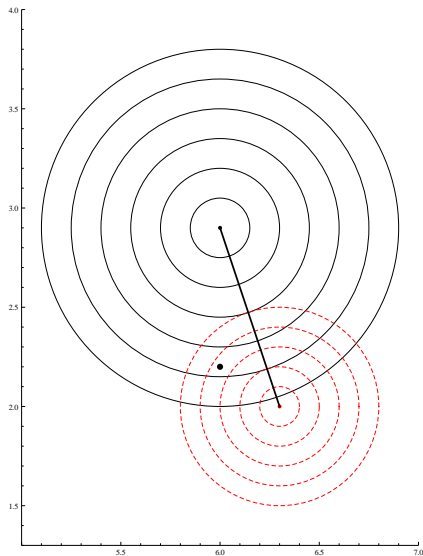
Ensemble Kalman Filter, analyysiongelma 2



Ensemble Kalman Filter, analyysiongelma 3



Ensemble Kalman Filter, analyysiongelma 4



- *Analysoitu tila* $\psi^a = \psi^f + K \left(d - \psi^f \right)$

- Jos varianssit samat, $K = \frac{1}{2}$
- Tässä tapauksessa

$$K = \frac{\sigma_\psi}{\sigma_\psi + \sigma_d}$$

- Yleisesti

$$\mathbf{K} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}_\psi}{\boldsymbol{\Sigma}_\psi + \boldsymbol{\Sigma}_d}$$

- Jos lisätään vielä mahdollisuus $N > M$, niin

$$\psi^a = \psi^f + \boldsymbol{\Sigma}_\psi \mathbf{M}^T \left(\boldsymbol{\Sigma}_d + \mathbf{M} \boldsymbol{\Sigma}_\psi \mathbf{M}^T \right)^{-1} \left(d - \mathbf{M} \psi^f \right)$$

- Jatketaan tilaa huonosti tunnetuilla parametreilla α

$$\hat{\psi}^f = (\psi^f, \alpha)^T$$

- Karsitaan lisätyt parametrit vertailuista mitattujen arvojen kanssa muokkaamalla mittamatriisia
- \rightarrow Estimoitavat parametrit loksahtavat kohdalleen automaattisesti!

Takaisin ongelmaan