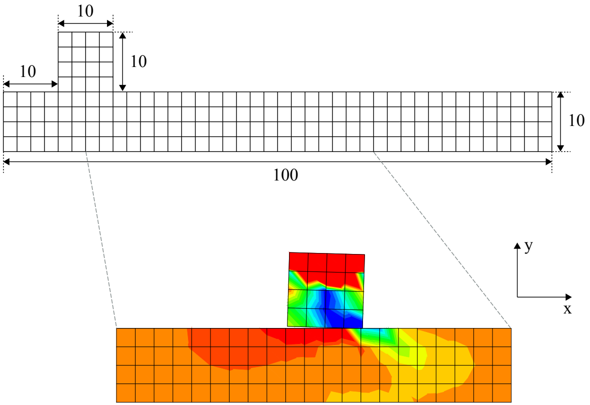
# Data-assimilaatio kitkamallissa

Tom Gustafsson

5. syyskuuta 2012

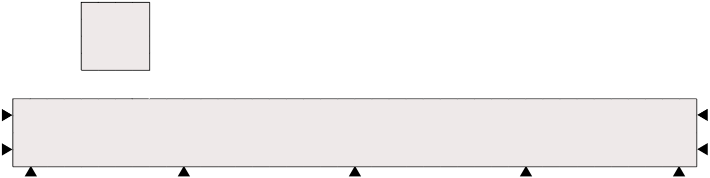
# Ongelma

- Lähtökohtana: Onnistuuko huonosti tunnettujen parametrien ennustaminen elastisesta kitkamallista *data-assimilaation* tarjoamien keinojen avulla?



# Malli, 2D

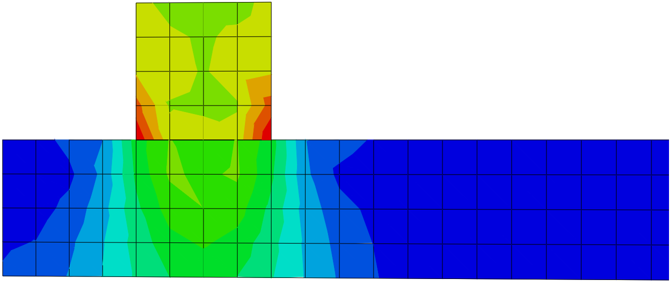
- Alkutila: Painin, laatta
- Reunaehdot



- Abaqus/Standard 6.12-1, simulaatiot CSC:n koneella

# Simulaation vaiheet

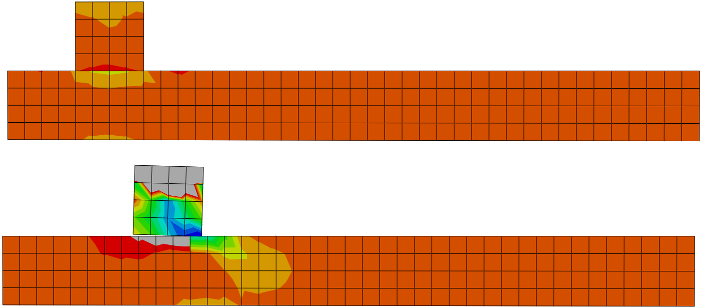
- Vaihe 1: 5 kN voima



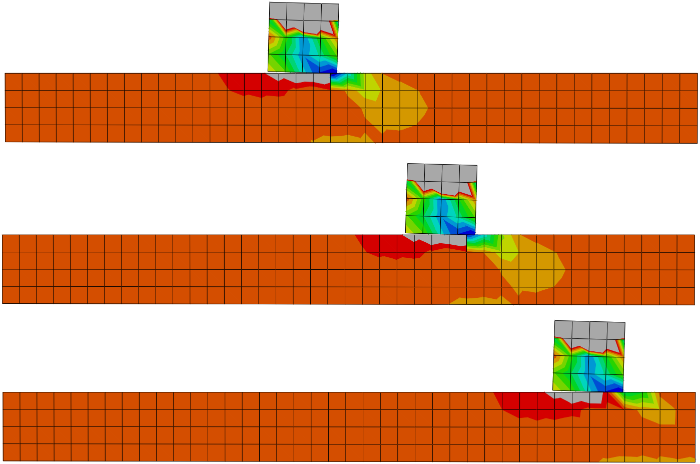
- Vaihe 2: Yläreunan siirto 70 cm oikealle

# Simulaation vaiheet: Yläreunan siirtymä

- Siirto reunaehdolla, ns. "hidas siirtymä"

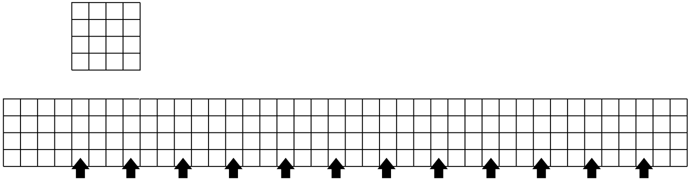


# Simulaation vaiheet: Yläreunan siirtymä 2



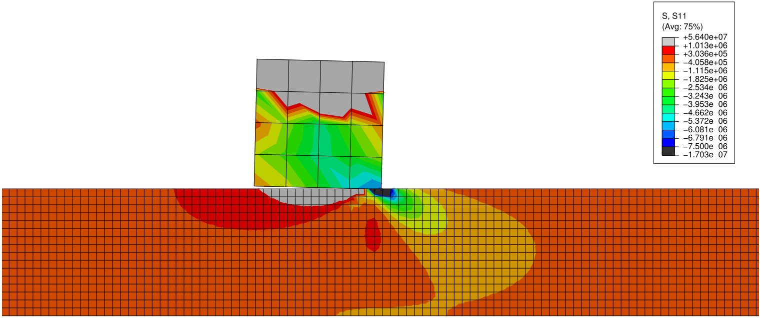
# Inversio-ongelma

- Pyritään estimoimaan kitkakerroin $\mu$
- *A priori* -tietona $x$-suuntaiset jännitykset mittapisteissä ($\sim$ venymäliuskamittaus)



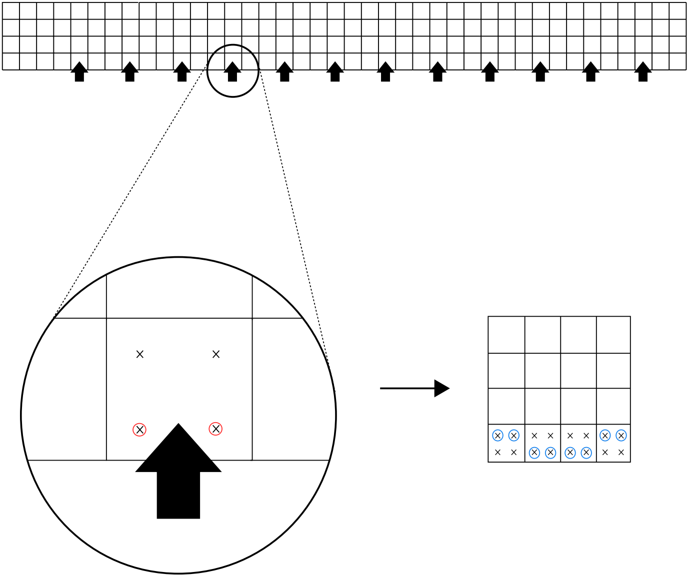
- Mittadata synteettistä

- Minimoidaan inversiorikosta $\rightarrow$ mittadata tiheämmästä verkosta




- Miten verrata tiheämmän ja harvemman verkon antamia jännityksiä?

# Synteettisen mittadatan generointi 2



# Ongelman yhteenveto

- Estimoitava suure: Kitkakerroin $\mu = 0{,}5$
- *A priori* -tieto: $x$-suuntaiset jännitykset mittapisteissä
- Menetelmät: *Data-assimilaatio*

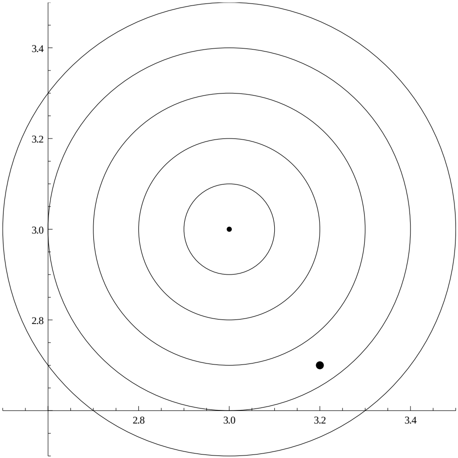
# Data-assimilaatio

- Pohjimmiltaan havaintojen ja mallin tuotaman informaation yhteensulauttamista
- Perinteisiä sovelluskohteita: Säähavaintomallit, valtamerimallit
- Data-assimilaation menetelmiä
  - 3DVar, 4DVar
  - Kalman Filter, Extended-, Ensemble-, ...
  - ...
- Tässä työssä *Ensemble Smoother*, eli ES
- Perustuu samaan ideaan kuin *Ensemble Kalman Filter*, eli EnKF

# Data-assimilaatio, yleistä

- Systeemin (todellinen) tila $\psi^t \in \mathbb{R}^N$
- Mittaus $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^M$
  - Ei tarkka
  - Suhde tilaan $\boldsymbol{d} = \mathbf{M}\psi^t + \epsilon$
  - Mittamatriisi $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{M \times N}$
  - Virhe $\epsilon \sim \mathcal{N}_M(0, \boldsymbol{\Sigma})$
  - Kovarianssimatriisi $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{M \times M}$
- Estimoitu tila $\psi^f \in \mathbb{R}^N$
  - Aluksi esim. mittauksien perusteella

$$N = M = 2, \ \mathbf{M} = \mathbf{I}, \ \mathbf{\Sigma} = \sigma \mathbf{I}$$



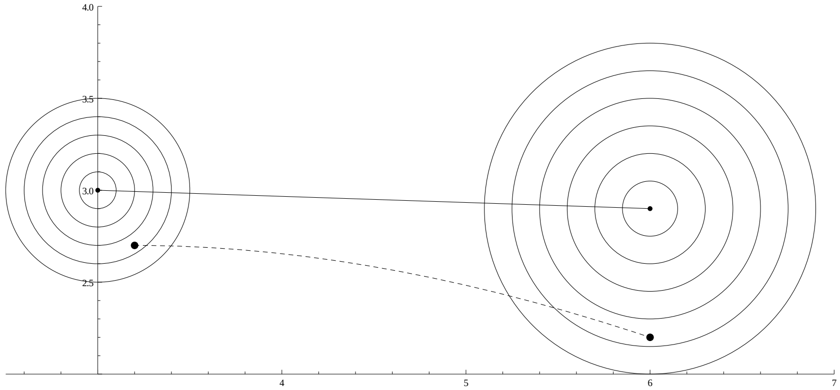
# Data-assimilaatio, yleistä 2

- Todellinen tila $\psi^t$ muuttuu ajan kuluessa
- Malli estimaatin aikakehityksestä:

$$\psi^f_{t+\Delta t} = \psi^f_t + \int_t^{t+\Delta t} \boldsymbol{G}(\psi^f_t, t)\,\mathrm{d}t$$

  - Malli epätäydellinen, eli estimaatin virhe kasvaa aikakehitettäessä

# Data-assimilaatio, esimerkki 2



# Data-assimilaatio, yleistä 3

- Tulkitaan normaalijakauma todennäköisyystiheysfunktiona $f(\boldsymbol{\psi}, t)$
- Tällöin $f$:n aikakehitystä kuvaa *Fokker-Planck -yhtälö*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial (G_i f)}{\partial \psi_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 (Q_{ij} f)}{\partial \psi_i \partial \psi_j}$$

- *Hurja*, mutta ei niin hurja miltä näyttää (sij. $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ ja $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$)
- Yleinen tapaus ei ratkea analyyttisesti $\rightarrow$ EnKF

# Ensemble Kalman Filter

- Idea: Otetaan $n$-kappaletta realisaatioita alkutilan normaalijakaumasta
- Aikakehitetään näin saadun *kokoelman* jokaista tilaa erikseen operaattorin $\boldsymbol{G}$ avulla
- Etu: Estimaatin kovarianssimatriisia ei tarvitse aikakehittää (lineaarisessa $\mathcal{O}(N)$, epälineaarisessa $\mathcal{O}(N^k)$, jossa $k$ käytettävän Taylor-approksimaation aste), koska sitä voidaan approksimoida lausekkeella

$$\boldsymbol{\Sigma} \approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{\psi}^f - \overline{\boldsymbol{\psi}^f}\right) \left(\boldsymbol{\psi}^f - \overline{\boldsymbol{\psi}^f}\right)^{\mathrm{T}}$$