

## T1题解

本题考查的知识点有：two-pointers(人类智慧了解一下,其实就是模拟), 二分(是个人都会吧), 并查集.

评价: 难度适中,同时对选手的思维习惯以及基础知识点的理解做出了要求. 算法极其常见,但考察同学对于常见模型的辨析能力以及对题目的转换能力.三个档次划分的很有道理:暴力分易拿,一旦选手能对题目进行转换便有70分,在此基础上稍加思考和优化便能得出正解,思维具有层次,可以区分门都摸不到,思维较灵活,以及OI素养高的同学.锦上添花的是这道题目的代码量较小,是一道不可多得的好题.

### 暴力档(35pts):

$n \leq 100$  (15pts) 留给用奇妙姿势乱搞过去的同学,我也不知道可以怎样做,不过应该没有人专门写这个档吧.

$k=1$  (20pts) 每次只删一个,排个序,two-pointers枚举一下删除的最小最大数就好了,这个分比较好拿.

此外还有 $q \leq 2$ 的点,留给有缘人.

### 性质档(70pts):

在这个档里面, $n \leq 2000$ .

这个档的做法有很多,说一个比较好理解的吧.

发现答案具有二分性:当我们确定了删除的数的最小值之后,最大值的可行性显然单调.

我们 $O(n)$ 枚举删除的数的最小值, $O(\log n)$ 二分被删除的数的最大值,之后如果我们能以 $O(n)$  或以下的复杂度判断是否可行,我们就能 $O(n^2 \log n)$ 顺利通过这个档.

考虑01二分: 设最小值最大值为 $mn, mx$ ,如果选择的长度为 $k$ 的区间内包含有小于 $mn$ 的数,那么会先把它们删掉,所以区间不能包括它们,这些位置将整个序列分成了很多段.

考虑每一段的贡献: 长度小于 $k$ 的显然没有贡献, 长度 $> k$ 的时候贡献为

$\min(Len - k + 1, \text{区间内小于等于 } mx \text{ 的数的个数})$ .

那么我们就在 $O(n)$ 的时间内算出来可以被删除的数的个数,判断该个数与 $q$ 的大小即可.

### 性质+优化档(100pts):

考虑优化上面的算法,发现枚举最小值的 $O(n)$ 是没有办法省去的,因为如果不枚举最小值的话,不好确定答案.而最大值随着最小值的增加而单调增加,二分似乎没什么必要了:我们two-pointers最小值和最大值,并时刻维护能删除的次数.

再度抽象一下这个问题:我们把小于 $mn$ 的数设成0,大于 $mx$ 的数设成2,其他数设成1,那么一段不包括0的区间的贡献就是 $\min(L - k + 1, \text{区间1的个数})$ ,随着 $mn$ 和 $mx$ 的从小到大移动,一个数是从2到1到0变化的,变化到0后就不再变动.而当出现一个0之后,原本的一个区间就被割成了2个区间.

这个东西似乎不太好处理,怎么办呢? 我们从大到小移动 $mn$ 和 $mx$ ,那么一个数就是从0->1->2了,而0->1相当于合并两段区间!于是我们可以用并查集维护每段区间的长度以及1的个数,之后不断合并两个区间即可.

总复杂度 $O(\alpha n + n \log n)$ ,  $n \log n$ 是排序的复杂度.

其中数据的梯度给 $n \log^2 n$ 的同学留下了一部分想象空间.

期望得分:70pts. 35pts属于没花时间或者没想到性质的同学,70pts属于观察性质的同学,100pts是思维灵活且代码能力较为充分的同学.

## T2题解

---

题目来源:bzoj4144 petrol

关键词：倍增，最小生成树，bfs

这题倒是没有什么好说的了，题目比较简单，和noip 2013 货车运输比较像。从题目所给信息中，稍有经验的同学都不难想到此题和最小生成树有关，在最小生成树上倍增更是常见技巧。而利用bfs判断多个点之间的距离，这是对选手代码经验的考察。题目模型较典型，相信接触过此一类题目的同学不会陌生，也容易想到做法。

简单说下:由于起点和终点都是加油站,我们只需要考虑加油站之间的距离即可.加油站之间的距离构成了一张图,同货车运输,我们求一个这张图的最小生成树,这样子两点之间的路径经过的边的最大值最小.然后利用倍增求LCA便可以 $O(\log s)$ 求两点间最长距离的最小值.于是就可以在 $O(q \log s)$ 的时间内解决这道题了.

现在的瓶颈是,不能快速求出两两加油站之间的最短路.考虑最小生成树的本质:两个加油站之间的路径可以通过其它加油站进行中继,所以只有两个加油站之间的路径不经过其它所有加油站,它们才可能对最小生成树有贡献,不然可以通过中间的加油站进行转移.

这样子的路径最多有 $O(M)$ 条,而两个加油站的路径上,前半部分点离起点较近,后半部分离终点较近,而处于分界点的这条边的两个端点,一个离起点较近,另一个离终点较近.于是从每个加油站开始BFS处理出每个点最近的加油站是哪一个,然后枚举每条边,如果这条边两边的点属于的加油站不一样,那么就找到了一条路径.对这 $O(M)$ 条路径做最小生成树即可.

具体而言,BFS可以利用堆优化的dijkstra,把超级起点向所有加油站连边即可.

其实这道题可以扔在平面图上的,可惜了.

对于 $n \leq 40$ 的情况,直接暴力最短路.

链的情况可以把相邻的加油站搞在一起.

$s$ 比较小的时候,对每个加油站跑一遍单源最短路就好了.倍增都不需要.

期望得分:50pts是正常分数,但我觉得人人都可以100pts.

## T3题解

---

此题正解略微超纲，但是考虑到10分钟打个暴力就有80pts，所以不影响整体情况。

前80pts是一个送分题,这是为了告诉同学:不能每道题都想做到100分,有些时候拿到足够多的部分分就好了,因为正解有可能根本没有学过或者技巧根本没有掌握,考试和做题不一样,以拿分为主.

然后把这个题目放到第三题,是为了告诉同学:题目难度和顺序无关,应该先看完所有题目之后再决定先做哪一道,考试时合理规划时间,优先拿好拿的分非常重要.

这道题没有拿到80pts的同学如果是因为"看到题目里有数学公式就吓走了","没时间看T3"这样的理由,应该反省一下自己的考试技巧.

首先可以利用前缀和将函数拆成  $S[r]-s[l-1]$ .

我们想到：如果函数的 $[l,r]$ 单调就很好做了，这样每次单点修改影响的函数都是一个区间,可以利用树状数组修改。但是询问的 $l, r$ 里面的函数不单调。

于是考虑将每 $\sqrt{n}$ 个函数分成一块,块内函数按照 $[l,r]$ 排序,每次修改在块内利用树状数组进行.维护每个块的函数和

查询时如果覆盖整块就直接查询,未覆盖整块的地方直接暴力,这样可以在 $O(q\sqrt{n}\log n)$ 的时间内解决这道题目了。

## 后记

这是我的博客：[blog.leanote.com/enfris](http://blog.leanote.com/enfris) 目前处于缓更状态。

这是我的QQ：543256564 有问题可以问。