1 FÓRMULA DE MACHIN

$$\frac{\pi}{6} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{3^k(2k+1)} + R_n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$|R_n| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{3^{n+1}}\cdot\frac{1}{2n+3}$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k+1}}{4k+1} - \frac{x^{4k+3}}{4k+3} = x^{4k+1}\left(\frac{1}{4k+1} - \frac{x^2}{4k+3}\right)$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^{2k}}\cdot\frac{\overbrace{\cancel{12}k + \cancel{9} - \cancel{4}k - \cancel{1}}^{8k+8=4(2k+2)}}{3(4k+1)(4k+3)}$$

$$\pi = \frac{\overset{2}{\cancel{6}}\cdot 4}{\sqrt{3}\cdot\cancel{3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^{2k}}\cdot\frac{2k+2}{(2(2k)+1)(2(2k)+3)} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{3^i}\frac{i+2}{(2i+1)(2i+3)}, i+=2$$

Tratamento de erro:

$$2(m+1) = 2m+2 < 2m+3 \rightarrow \frac{1}{2m+3} < \frac{1}{2m+1}$$

$$\therefore 6R_n \leq \frac{6}{2(n+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{3^{n+1}} \overset{?}{<} \epsilon$$

$$\therefore \frac{1}{\epsilon}\cdot\frac{6}{2\sqrt{3}} < 3^{n+1}(n+1) = \frac{1}{\epsilon}\cdot\sqrt{3}$$

Tratamento de erro no caso geral:

$$A\arctan\left(\frac{1}{a}\right) = AP_n\left(\frac{1}{a}\right) + AR_n\left(\frac{1}{a}\right) = A\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\cdot\frac{(\frac{1}{a})^{2k+1}}{2k+1} + AR_n\left(\frac{1}{a}\right),$$

$$\text{com } |R_n| \leq \frac{(\frac{1}{a})^{2m+3}}{2m+3}$$

$$A\cdot\frac{1}{a^{2m+3}}\cdot\frac{1}{2m+3} < \frac{1}{a^{2m+3}}\cdot\frac{1}{2(m+1)} \overset{?}{<} \frac{\epsilon}{7}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\epsilon}\cdot\frac{qA}{2a}} < a^{2(m+1)}\cdot(m+1)$$

Pode ser usada divisão inteira (floor division), pois o termo à direita é inteiro

$$\text{De } \epsilon = 10^{-d}\text{, tem-se: } 10^d\cdot\frac{9A}{2a} < a^{2(m+1)}\cdot(m+1)$$

<u>**Exercício:**</u>
Integrando por partes, tem-se:

$$\int\arctan(x)\,dx = x\cdot\arctan(x) - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} = \int_0^1 \arctan(x)\,dx + \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\text{Agora, } \int_0^1 \arctan(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^1 \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left[\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right]$$

$$\text{Por outro lado, } \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \text{ com, } -1 < x \leq 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln(2) = \ln(1+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right]$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \overbrace{(1+\frac{1}{2})}^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+2}\right] + \overbrace{(-1+\frac{1}{2})}^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4k+3} - \frac{1}{4k+4}\right]$$

$$\therefore \pi = 2\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{3}{4k+1} - \frac{3}{4k+2} - \frac{1}{4k+3} + \frac{1}{4k+4}\right]$$

<u>**Exercício:**</u>
Sejam $a > 0$, e $0 < \epsilon < a^2$. Prove que:

$$\min(a - \sqrt{a^2-\epsilon},\ \sqrt{a^2+\epsilon} - a) = \sqrt{a^2+\epsilon} - a$$

Demonstração: Observe que:

$$(a^2-\epsilon)(a^2+\epsilon) = a^4 - \epsilon^2 < a^4 \rightarrow$$

$$\sqrt{a^2-\epsilon}\sqrt{a^2+\epsilon} < a^2$$

$$2\sqrt{a^2-\epsilon}\sqrt{a^2+\epsilon} < 2a^2$$

$$2\sqrt{a^2-\epsilon}\sqrt{a^2+\epsilon} + \underbrace{2a^2}_{a^2+a^2=(a^2+\epsilon)+(a^2-\epsilon)} < 2a^2 + 2a^2 = 4a^2 = (2a)^2$$

$$\therefore (a^2+\epsilon) + 2\sqrt{a^2-\epsilon}\sqrt{a^2+\epsilon} + (a^2-\epsilon) < (2a)^2$$

$$(\sqrt{a^2-\epsilon} + \sqrt{a^2+\epsilon})^2 < (2a)^2$$

$$\sqrt{a^2-\epsilon} + \sqrt{a^2+\epsilon} \underset{\text{se } a>0}{<} 2a = a + a(*)$$

$$\therefore \boxed{\sqrt{a^2+\epsilon} - a < a - \sqrt{a^2-\epsilon}}$$

$$\underline{O/F}:(*) \rightarrow 1 < \frac{2a}{\sqrt{a^2+\epsilon}+\sqrt{a^2-\epsilon}} \rightarrow 1 - \frac{2a}{\sqrt{a^2+\epsilon}+\sqrt{a^2-\epsilon}} < 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -2\epsilon + \frac{2a \cdot \overbrace{2\epsilon}^{=\epsilon+\epsilon=a^2+\epsilon-a^2+\epsilon=(a^2+\epsilon)-(a^2-\epsilon)}}{\sqrt{a^2+\epsilon}+\sqrt{a^2-\epsilon}} > 0$$

$$-2\epsilon + 2a\frac{(\sqrt{a^2+\epsilon}-\sqrt{a^2-\epsilon})\cancel{(\sqrt{a^2+\epsilon}+\sqrt{a^2-\epsilon})}}{\cancel{\sqrt{a^2+\epsilon}+\sqrt{a^2-\epsilon}}} > 0$$

$$-2\epsilon + 2a(\sqrt{a^2+\epsilon} - \sqrt{a^2-\epsilon}) > 0$$

$$\therefore 0 < 2a\sqrt{a^2+\epsilon} - 2a\sqrt{a^2-\epsilon}\underbrace{-\epsilon + 2a^2 - 2a^2 - \epsilon}_{(a^2-\epsilon)+a^2-(a^2+\epsilon)-a^2}$$

$$= 2a\sqrt{a^2+\epsilon} - (a^2+\epsilon) - a^2 + (a^2-\epsilon) - 2a\sqrt{a^2-\epsilon} + a^2$$

$$= (\sqrt{a^2-\epsilon} - a)^2 - (\sqrt{a^2+\epsilon} - a)^2 = (\underbrace{a - \sqrt{a^2-\epsilon}}_{=:\delta_1})^2 - (\underbrace{\sqrt{a^2+\epsilon} - a}_{=:\delta_2})^2$$

$$\therefore \boxed{\delta_1^2 - \delta_2^2 > 0} \qquad (*)$$

Por outro lado, tem-se:

$$a^2 - \epsilon < a^2 \to \sqrt{a^2-\epsilon} < a \to 0 < a - \sqrt{a^2-\epsilon} = \delta_1$$

e analogamente:

$$a^2 + \epsilon > a^2 \to \sqrt{a^2+\epsilon} > a \to 0 < \sqrt{a^2+\epsilon} - a = \delta_2$$

$$\therefore \delta_1 > 0 \wedge \delta_2 > 0 \to \delta_1 + \delta_2 > 0 \qquad (**)$$

$$\therefore \delta_1 - \delta_2 = \frac{\overbrace{\delta_1^2 - \delta_2^2}^{>0 \text{ por } (*)}}{\underbrace{\delta_1 - \delta_2}_{>0 \text{ por } (**)}} > 0 \to \delta_1 > \delta_2$$

ou seja:

$$\boxed{\sqrt{a^2+\epsilon} - a < a - \sqrt{a^2-\epsilon}}$$

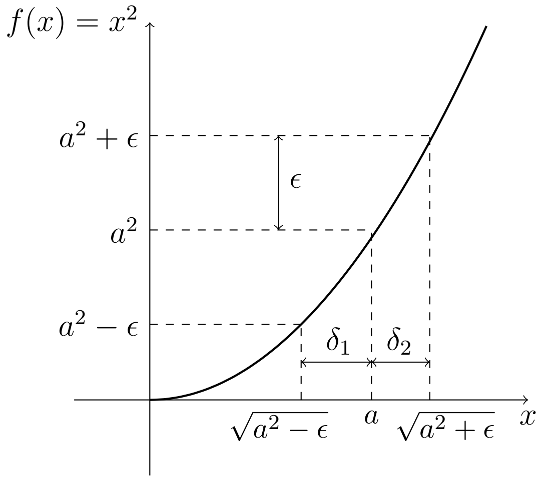
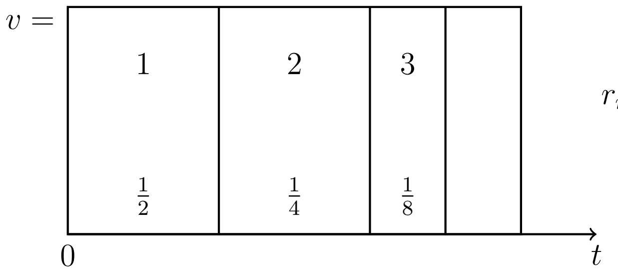


Figura 1

<u>Exercício:</u>
Nicole Oresme (1320-1382) foi um clérigo e matemático francês associado à Universidade de Paris, na Baixa Idade Média. (Katz, p. 392). Oresme determinou o espaço total percorrido por um móbil com velocidade variável, supondo que na primeira metade do tempo a velocidade é 1, no próximo quarto igual 2, etc. (Katz, p. 398). Portanto, o cálculo equivale a determinar a soma da série:



$$r_n = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 3 + ... + \frac{1}{2^n}\cdot n + ...$$

Ou seja, $r_n = \sum_{k=1}^{n} ka^k$, onde $a = \frac{1}{2}$

Figura 2

① Determine o valor de r_n em função de a

② Calcule o valor do limite $\lim_{n\to\infty} r_n$

Sugestão: Observe que $r_n = a\sum k = 1^n ka^{k-1} = a\cdot s_n'$, onde s_n é a soma da série geométrica, ou seja, $s_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Portanto:

$$\begin{aligned}
r_n &= a\frac{-(n+1)a^n(1-a) + (1-a^{n+1})}{(1-a)^2} \\
&= a\frac{1-a^{n+1} + (n+1)a^{n+1} - na^n - a^n}{(1-a)^2} \\
&= a\frac{1-\cancel{a^{n+1}} + na^{n+1} + \cancel{a^{n+1}} - na^n - a^n}{(1-a)^2} \\
&= a\frac{1-a^n - na^n(1-a)}{(1-a)^2} \\
&= a\frac{1-a^n}{(1-a)^2} - \frac{a\cdot na^n}{1-a}
\end{aligned}$$

Desta maneira, sabendo que $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ se $|a| < 1$, basta provar que $\lim_{n\to\infty} n\cdot a^n = 0$ para obter $\lim_{n\to\infty} r_n = \frac{a}{(1-a)^2}$. No caso particular $a = \frac{1}{2}$ tem-se: $\lim_{n\to\infty} r_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{2} = 2$, resultado obtido por Oresme através de um elegante argumento geométrico , vide Katz p. 398.
Por outro lado, observando que $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-a^n}{1-a} = \frac{1}{1-a}$, quando $|a| < 1$, tem-se: $a + a^2 + ... + a^n + ... = \frac{1}{1-a} - 1 = \frac{a}{1-a}$, igual a 1 no caso $a = \frac{1}{2}$.
Se a velocidade fosse constante $v = 2$ espaço percorrido seria o mesmo.

Exercício:
Calcule as 100 (cem) primeiras casas decimais de π usando a Fórmula de Machin original, ou seja,

$$\frac{\pi}{4} = 4\cdot\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})$$

Para tanto, implemente o código em alguma linguagem de programação com bibliotecas de precisão arbitrária. Por exemplo:

- C : GMP (GNU Multiple Precision Library)
- C++ : CLN (Class for Large Numbers)

- Java : BrgInteger & BigDecimal
- Python : Class "decimal"

<u>Exercício:</u>
Calcule as casas decimais de π quebrando algum recorde histórico pós-1949. Por exemplo, 2.037 casas decimais obtidos pelo ENIAC em setembro de 1949. Para tanto, use as fórmulas:

$$\frac{\pi}{4} = 12 \cdot \arctan(\frac{1}{49}) + 32 \cdot \arctan(\frac{1}{57}) - 5 \cdot \arctan(\frac{1}{239}) + 12 \cdot \arctan(\frac{1}{110.443})$$

(K. Takano, 1982)

$$\frac{\pi}{4} = 44 \cdot \arctan(\frac{1}{57}) + 7 \cdot \arctan(\frac{1}{239}) - 12 \cdot \arctan(\frac{1}{682} + 24 \cdot \arctan(\frac{1}{12.943})$$

(F.C.M. Størmer, 1896)

Usando a segunda fórmula para verificar o resultado obtido pela primeira. Observe que os termos com 57 e 239 podem ser reutilizados.