Ex3.5

集合 $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, \boldsymbol{x} \geq 0\}$ とベクトル $\boldsymbol{x} = (0, 0, 1)$ を考える。$\boldsymbol{x}$ の実行可能方向を示せ。

実行可能方向 $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, d_3)$ とすると、正のスカラー θ を用いて $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta d} \in P$ が成り立つ必要がある。(定義 3.1 より) そのため、$(x_1 + \theta d_1) + (x_2 + \theta d_2) + (x_3 + \theta d_3) = 1$ つまり、$d_1 + d_2 + d_3 = 0$、$(x_1 + \theta d_1) \geq 0, (x_2 + \theta d_2) \geq 0, (x_3 + \theta d_3) \geq 0$ つまり、$d_1 \geq 0, d_2 \geq 0, d_3 \geq -1$ が成り立つ集合が実行可能方向の集合。よって、実行可能方向の集合は $\{\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^3 \mid d_1 + d_2 + d_3 = 0, d_1 \geq 0, d_2 \geq 0, d_3 \geq -1\}$

Ex4.1

下のような主問題のを考える。

$$
\begin{array}{cc}
\text{minimize} & x_1 - x_2 \\
\text{subject to} & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 0 \\
 & 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \geq 3 \\
 & -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\
 & x_1 \leq 0 \\
 & x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
\tag{1}
$$

これに対応する双対問題を示せ。

4.2 の対応表より、

$$
\begin{array}{cc}
\text{maximize} & 3p_2 - 6p_3 \\
\text{subject to} & p_1 \leq 0 \\
 & p_2 \geq 0 \\
 & p_3 \text{free} \\
 & 2p_1 + 3p_2 - p_3 \leq 1 \\
 & 3p_1 + p_2 - p_3 \geq -1 \\
 & -p_1 + 4p_2 + 2p_3 \leq 0 \\
 & p_1 - 2p_2 + p_3 = 0
\end{array}
\tag{2}
$$

Ex4.6

$\boldsymbol{A}$ を $m \times n$ の行列、$\boldsymbol{b}$ を $\mathbb{R}^m$ のベクトルとする。ここで、すべての $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ について $\|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|_\infty$ を最小化する問題を考える。ここで $\|\cdot\|_\infty$ は $\|\boldsymbol{y}\|_\infty = \max_i |y_i|$ で定義されるベクトルノルムである。また、最適コストの値を v とする。

(a) $\sum_{i=1}^m |p_i| \le 1, \boldsymbol{p}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}'$ を満たす任意の $\mathbb{R}^m$ ベクトル $\boldsymbol{p}$ を考える。$\boldsymbol{p}'\boldsymbol{b} \le v$ を示せ。

(b) (a) で考えた形式の最適な下限を得るために、線形計画問題を立てる。

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{p}'\boldsymbol{b} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{p}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}' \\ & \sum_{i=1}^m |p_i| \le 1 \end{array}$$

この問題における最適コストは v に等しいことを示せ。

(a)

$z = \|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|_\infty$ とすると今回の問題は下のように書ける。

$$\begin{array}{ll} \text{minimise} & z \\ \text{subject to} & \boldsymbol{Ax} + z\boldsymbol{e} \ge \boldsymbol{b} \\ & -\boldsymbol{Ax} + z\boldsymbol{e} \ge -\boldsymbol{b} \\ & z \ge 0 \end{array} \tag{3}$$

ここで $\boldsymbol{e}$ は要素が全て 1 であるベクトルである。この問題の双対問題は下のように書ける。

$$\begin{array}{ll} \text{maximise} & \boldsymbol{b}'\boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}'\boldsymbol{w} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}'\boldsymbol{u} - \boldsymbol{A}'\boldsymbol{w} = 0 \\ & \boldsymbol{e}'\boldsymbol{u} + \boldsymbol{e}'\boldsymbol{w} \le 1 \\ & \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \ge 0 \end{array} \tag{4}$$

あるベクトル $\boldsymbol{p}$ について、$p_i = s_i - t_i, |p_i| = s_i + t_i, s_i \ge 0, t_i \ge 0$ を満たすベクトル $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}$ を考える。このベクトル $\boldsymbol{p}$ が $\sum_{i=1}^m |p_i| \le 1, \boldsymbol{p}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}'$ を満たすとすると、$\boldsymbol{e}'\boldsymbol{s} + \boldsymbol{e}'\boldsymbol{t} \le 1, \boldsymbol{A}'\boldsymbol{s} - \boldsymbol{A}'\boldsymbol{t} = 0$ が成り立つため、$\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}$ は双対問題の実行可能解である。弱双対性より、$\boldsymbol{b}'\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b}'(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{t}) \le v$ が示せる。

(b)

(b) の問題の最適コストを v' とする。(a) より、$\boldsymbol{v}' \le v$。

$v = 0$ の時、$\boldsymbol{p} = 0$ は実行可能解であり、その時のコストは $\boldsymbol{b}'\boldsymbol{p} = 0$ となるため、$v' \ge 0 = v$ が成り立つ。

$v \neq 0$ の時、全ての i について、$(\boldsymbol{Ax} + z\boldsymbol{e})_i = b_i, (-\boldsymbol{Ax} + z\boldsymbol{e})_i = -b_i$ のどちらか一方は成立しない。$(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{w}^*)$ が双対最適解であると仮定すると、相補スラック条件より、$u_i^* w_i^* = 0$ である。そのため、$\boldsymbol{u}^* + \boldsymbol{w}^* = |\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{w}^*|$ が成り立つ。

$q = \boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{w}^*$ とすると、q は (b) の問題の実行可能解である。強双対性定理により、$\boldsymbol{b}'\boldsymbol{q} = \boldsymbol{b}'(\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{w}^*) = v$。$v'$ は (b) の問題に対する最適値であるので、$v' \ge \boldsymbol{b}'\boldsymbol{q} \ge v$

よって $v' = v$ が成り立つ。