日付：4/19

Ex2.2

$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ を凸関数とし、c を定数とする。集合 $S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) \leq c\}$ は凸であることを示せ。

関数 f は $\mathbb{R}^n$ 上の凸関数である。任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, \lambda \in [0,1]$ に対して、

$$f((1-\lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}) \leq (1-\lambda)f(\boldsymbol{x}) + \lambda f(\boldsymbol{y}) \leq c \tag{1}$$

が成り立つ。したがって $(1-\lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y} \in S$ が成り立つため、集合 S は凸集合である。

Ex2.8

標準形の多面体 $\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} > 0\}$ があり、行列 $\boldsymbol{A}$ の行が線形独立であると仮定する。$\boldsymbol{x}$ を基底解とし、$J = \{j \mid x_j \neq 0\}$ とする。基底により基底解 $\boldsymbol{x}$ が求められることと、すべての列 $\boldsymbol{A}_j(j \in J)$ が基底に含まれることが同値であることを示せ。

まず、p54 の Produce for constructing absic solution より、基底により基底解を求めると、$i \neq B(1), ..., B(m)$ のとき $x_i = 0$ とするとあるため、基底解 $\boldsymbol{x}_j(j \in J)$ の時、列 $\boldsymbol{A}_j(j \in J)$ が基底に含まれることがわかる。

反対に、$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{A}_j], \boldsymbol{x}_B = [x_j](j \in J)$ とすると、$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{b}$ が成り立つため、列 $\boldsymbol{A}_j(j \in J)$ が基底にある時、基底解 $\boldsymbol{x}$ は $x_j \neq 0(j \in J)$ であることがわかる。

$|J| = m$ の時、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{2}$$

であり、得られている基底解が $\boldsymbol{x} = (0, 0, 4, 0, -12, 4, 6)$ の時、$x_j \neq 0$ を満たす列は $\{\boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_5, \boldsymbol{A}_6, \boldsymbol{A}_7\}$ であり、

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -12 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{3}$$

が成り立つ。

$|J| < m$ の時、得られている基底解が $\boldsymbol{x} = (4, 0, 2, 0, 0, 0, 6)$ の時、$x_j \neq 0$ を満たす列は $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_7\}$ であり、

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{4}$$

が成り立つ。また、任意の $\boldsymbol{A}_k$ をくわえても、

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | \\ 0 & 6 & 0 & \boldsymbol{A}_k \\ 1 & 0 & 0 & | \\ 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{5}$$

が成り立つ。s