日付：4/12,13

## Ex1.6

Sec1.3 の最後で説明したロケット制御問題の 2 つの場合について線形計画法を用いて定式化せよ。

前提：
まっすぐな経路に沿って移動するロケットについて考える。
$x_t, v_t, a_t$ はそれぞれ時間 $t$ でのロケットの位置、速度、加速度。
時間は離散的に考え、$x_{t+1} = x_t + v_t, v_{t+1} = v_t + a_t$ が成り立つ。
$a_t$ は私たちの制御下にあると仮定。
ロケットは最初原点で静止、$x_0 = 0, v_0 = 0$ と仮定。
加速度の大きさ $|a_t|$ は時間 $t$ での燃料消費率に比例すると仮定。
$T$ 時間後、「ソフトに着陸」つまり、$x_T = 1, v_T = 0$ させる。

case1:
総燃料消費量、$\sum_{t=0}^{T-1} |a_t|$ が最小になるように考える。

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{t=0}^{T-1} z_t \\ \text{subject to} & a_t \le z_t \\ & -a_t \le z_t \\ & x_{t+1} = x_t + v_t \\ & v_{t+1} = v_t + a_t \\ & x_0 = 0 \\ & v_0 = 0 \\ & x_T = 1 \\ & v_T = 0 \\ & (t = 0, 1, ..., T-1) \end{array} \tag{1}$$

$|a_t| = z_t$ とおき、上 2 つの条件を追加した。
case2:
必要最大燃料、$max_t |a_t|$ 最小になるように考える。

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & z \\ \text{subject to} & a_t \le z \\ & -a_t \le z \\ & x_{t+1} = x_t + v_t \\ & v_{t+1} = v_t + a_t \\ & x_0 = 0 \\ & v_0 = 0 \\ & x_T = 1 \\ & v_T = 0 \\ & (t = 0, 1, ..., T-1) \end{array} \tag{2}$$

$max_t |a_t| = z$ とおき、上 2 つの条件を追加した。

## Ex1.12（Chebychev center）

線形不等式制約によって記述された集合 P を考える。つまり、$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \boldsymbol{a}_i' \boldsymbol{x} \leq b_i, i = 1, ..., m\}$。 中心が $\boldsymbol{y}$ で半径が $r$ の球は、$\boldsymbol{y}$ からユークリッド距離 $r$ 内にあるすべての点のセットとして定義されます。 集合 $P$ 内に完全に含まれる、可能な限り最大の半径を持つ球を見つけたい。（このような球の中心は $P$ のチェビチェフ中心と呼ばれる）。この問題を線形計画法を用いて定式化せよ。

$$\begin{array}{cc} \text{miximize} & r \\ \text{subject to} & \boldsymbol{a}_i' \boldsymbol{y} + r||\boldsymbol{a}_i|| \leq b_i \\ & (i = 1, ..., m) \end{array} \tag{3}$$

まず、線形不等式制約によって記述された集合 $P$ とは多面体である。簡単のため 2 次元的に記述した下の図でみると、5 角形の内部が集合 $P$ である。半径 $r$ を最大にしたい。そこで、円の中心からどれくらい離れているかを表すベクトル $\boldsymbol{u}$ を考える。$|\boldsymbol{u}| \leq r$ である。集合 $P$ の定義から考えると、

$$\boldsymbol{a}_i'(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{u}) \leq b_i \tag{4}$$

が成り立たなければならない。これは、

$$max_{\boldsymbol{u}}\{\boldsymbol{a}_i'(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{u}) \mid ||\boldsymbol{u}|| \leq r\} \leq b_i \tag{5}$$

と同義であるため、上の解答が導かれる。

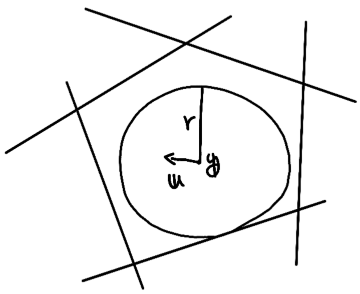


**図 1:** 2 次元での例