Ex2.6 (平衡付近の局所的な線形化:one-link robot)

図 2.9 のようなワンリンクロボットを考える。ここで、θ はリンクの水平に対する角度、τ は基礎にかかるトルク、(x, y) は先端の位置、l はリンクの長さ、I は慣性モーメント、m は先端の質量、g は重力加速度、b は摩擦係数を表します。この系は以下の式に従って進化する。

$$I\ddot{\theta} = -b\dot{\theta} - gm\cos\theta + \tau \tag{1}$$

(a) $u = \tau$ を入力とし、先端の垂直位置 y を出力としたときの系の状態空間モデルを計算しなさい。先端部の水平位置 x と混同しないように状態ベクトルを $\boldsymbol{z}$ とし、適当な関数 f, g に対して

$$\dot{z} = f(z, u), y = g(z, u) \tag{2}$$

という形でモデルを記述せよ。【ヒント：出力の式を忘れないように。】

まず、状態ベクトルを $\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$ とする。ここで、$\dot{\boldsymbol{z}}, y$ を考えると、

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{b}{I}\dot{\theta} - \frac{gm}{I}\cos\theta + \frac{\tau}{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\frac{b}{I}z_2 - \frac{gm}{I}\cos z_1 + \frac{u}{I} \end{bmatrix} = f(\boldsymbol{z}, u) \tag{3}$$

$$y = l\sin\theta = l\sin z_1 = g(\boldsymbol{z}, u) \tag{4}$$

(b) $\theta(t) = \frac{\pi}{2}, \tau(t) = 0$ が系の解であることを示し、この解を中心とした線形化を計算しなさい。この解答から、y からのフィードバックだけで、先端位置をこの形に近づけようとした場合、問題があるかどうか予測できますか？

$\theta(t) = \frac{\pi}{2}, \tau(t) = 0$ は式 (1) を満たすため、系の解である。
定義 2.5 より、この解を中心とした線形化を計算する。

$$\dot{\partial\boldsymbol{z}} = A(t)\partial\boldsymbol{z} + B(t)\partial u\ ,\ \partial y = C(t)\partial\boldsymbol{z} + D(t)\partial u \tag{5}$$

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{z},u)}{\partial\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{gm}{I}\sin z_1 & -\frac{b}{I} \end{bmatrix}\ ,\quad \frac{\partial f(\boldsymbol{z},u)}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial g(\boldsymbol{z},u)}{\partial\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} l\cos z_1 \\ 0 \end{bmatrix}\ ,\quad \frac{\partial g(\boldsymbol{z},u)}{\partial u} = 0$$

$\boldsymbol{z}, u$ に解を代入。

$$\begin{gathered} A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{gm}{I} & -\frac{b}{I} \end{bmatrix}\ ,\quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{bmatrix} \\ C(t) = \mathbf{0}\ ,\qquad D(t) = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

$$\dot{\partial\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{gm}{I} & -\frac{b}{I} \end{bmatrix}\partial\boldsymbol{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{bmatrix}\partial u\ ,\ \ \partial y = 0 \tag{7}$$

出力 y の変化がないため、y からのフィードバックだけでは問題がありそう。

Ex2.10(厳密フィードバック形式のシステムに対するフィードバック線形化)

2.4.4 節で説明した、次数 2 の厳密なフィードバック形式のシステムに対する手順を、

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1) + x_2 \\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + x_3 \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) + u
\end{aligned}
\tag{8}
$$

で与えられる任意の次数 $n \geq 2$ の厳密なフィードバックのシステムへ拡張せよ。

変数 z_2 を下のように定義する。

$$
z_2 := \dot{x}_1 = f_1(x_1) + x_2 \tag{9}
$$

微分を考える。

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_2 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1)\dot{x}_1 + \dot{x}_2 \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1)(f_1(x_1) + x_2) + (f_2(x_1, x_2) + x_3)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

変数 z_3 を下のように定義する。

$$
z_3 := \dot{z}_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1)(f_1(x_1) + x_2) + (f_2(x_1, x_2) + x_3) \tag{11}
$$

微分を考える。

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_3 =& \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(x_1)\dot{x}_1(f_1(x_1) + x_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1)\{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1)\dot{x}_1 + \dot{x}_2\} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2)\dot{x}_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2)\dot{x}_2 + \dot{x}_3 \\
=& \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(x_1)(f_1(x_1) + x_2)^2 + \{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1)\}^2(f_1(x_1) + x_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1)(f_2(x_1, x_2) + x_3) \\
&+ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2)(f_1(x_1) + x_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2)(f_2(x_1, x_2) + x_3) + (f_2(x_1, x_2, x_3) + x_4)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

同様に、$z_i = \dot{z}_{i-1}$ と考えると、z_n の微分は

$$
\dot{z}_n = \frac{\partial^{n-1} f_1}{\partial x_1^2}(x_1)(f_1(x_1) + x_2)^{n-1} + \cdots + f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) + u \tag{13}
$$

となり、$\dot{z}_n = v$ となるように v を定めると、

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= z_3 \\
&\vdots \\
\dot{z}_n &= v
\end{aligned}
\tag{14}
$$

となる。

$\dot{x}_{i-1} = z_i$ とした場合、$z_i = v_i$ をみたすような v_i を定められるため、そちらでもいい?? この場合、

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= v_2 \\
\{x_3 &= -\{\tfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1)(f_1(x_1) + x_2) + f_2(x_1, x_2)\} + v_2\} \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= z_n \\
\dot{z}_n &= v_n \\
\{u = -&\{\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_{n-1})(f_1(x_1) + x_2) + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2}(x_1, \ldots, x_{n-1})(f_1(x_1, x_2) + x_3) \\
&+ \cdots + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-1})(f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + x_n) + f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\} + v\}
\end{aligned}
\tag{15}
$$