

EX5.5:LTV システムの解

状態遷移行列 $\Phi(t, \tau)$ を持つ、斉次線形時変システム

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

を考える。また、入力 $x(t)$ が斉次システムの状態である非斉次システム

$$\dot{z} = A(t)z + x(t), \quad z(0) = z_0 \quad (2)$$

も考える。

(a) x_0, z_0, Φ の関数として $x(t)$ と $z(t)$ を計算せよ。答えに積分は含まれない。

(b) 与えられた時間 $T > 0$ において、 $z(T) = 0$ となるような x_0 と z_0 はどのように関係づけられるか？

(a) 定理 5.1 より、

$$x(t) = \Phi(t, 0)x_0 \quad (3)$$

定理 5.2 より、

$$\begin{aligned} z(t) &= \Phi(t, 0)z_0 + \int_0^t \Phi(t, \tau)x(\tau)d\tau \\ &= \Phi(t, 0)z_0 + \int_0^t \Phi(t, \tau)\Phi(\tau, 0)x_0d\tau \\ &= \Phi(t, 0)z_0 + tx_0\Phi(t, 0) \end{aligned} \quad (4)$$

(b) 式 (4) より、 $z(T) = 0$ は、

$$\begin{aligned} z(T) &= \Phi(T, 0)z_0 + tx_0\Phi(T, 0) = 0 \\ z_0 + tx_0 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$