5.2 : 非斉次線形システムの解

非斉次 LTV 系である式 (5.6) の解を求める。

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u\ ,\ y = C(t)x(t) + D(t)u\ ,\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n\ ,\ t \geq 0 \tag{5.6}$$

定理 5.2: 定数の変化

式 (5.6) の一意解は

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \tag{5.7}$$

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t) \tag{5.8}$$

で与えられる。ここで、$\Phi(t, t_0)$ は状態遷移行列である。

式 (5.7) は定数の変化式 (variation of constants formula) として知られている。式 (5.8) の

$$y_h(t) := C(t)\Phi(t, t_0)x_0 \tag{1}$$

の項を斉次応答 (homogeneous response) と呼び、

$$y_f(t) := \int_{t_0}^{t} C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t) \tag{2}$$

の項を強制応答 (forced response) と呼ぶ。

定理 5.2 の証明

式 (5.7) が 式 (5.6) の解であることを確認するために、$t = t_0$ において 式 (5.7) の積分は消え、$x(t_0) = x_0$ となることに注意する。式 (5.7) の各辺を時間に関して微分すると

$$\dot{x} = \frac{d\Phi(t, t_0)}{dt}x_0 + \Phi(t, t)B(t)u(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{d\Phi(t, \tau)}{dt}B(\tau)u(\tau)d\tau = \quad A(t)\Phi(t, t_0)x_0 + B(t)u(t) + A(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau = A(t \tag{3}$$

となり、式 (5.7) は確かに式 (5.6) の解であることが分かる。解の一意性は、$x \mapsto A(t)x + B(t)u(t)$ が任意の固定 t に対してグローバル・リプシッツ写像であることから分かる。[1,Chapter1]

式 (5.8) の $y(t)$ の式は、$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u$ に $x(t)$ を代入することで得られる。□