1　EX7.4: 行列のべき乗と指数

行列 A を考える。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

A^{100} と e^{tA} を計算せよ。ヒント:A を対角化。
A を対角化する。

$$\det(A-\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2 \tag{2}$$

$\lambda = 2$ を考える。

$$A-\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

であるため、固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 0$ を考える。

$$A-\lambda = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

であるため、固有ベクトルは $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, よって、

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

それぞれ計算する。

$$A^{100} = PD^{100}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \tag{8}$$