2022/6/14

# 7.2: ジョルダン正規形による行列のべき乗の計算

$n \times n$ の行列 $A$ が与えられたとき、$J = PAP^{-1}$ を $A$ のジョルダン正規形とする。

$$J = PAP^{-1} \Leftrightarrow A = P^{-1}JP \tag{1}$$

なので、

$$A^t = P^{-1}J^tP = P^{-1}\begin{bmatrix} J_1^t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2^t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & j_l^t \end{bmatrix} P \tag{7.1}$$

である。ここで、$J_i$ は $A$ のジョルダンブロック。ジョルダンブロック $J_i$ から $J_i^t$ を計算するのは $t$ の帰納法で可能であるため、簡単である。

$$\begin{aligned} J_i &= \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i} \\ \Rightarrow J_i^t &= \begin{bmatrix} \lambda_i^t & t\lambda_i^{t-1} & \frac{t!\lambda_i^{t-2}}{(t-2)!2!} & \frac{t!\lambda_i^{t-3}}{(t-3)!3!} & \cdots & \frac{t!\lambda_i^{t-n_i+1}}{(t-n_i+1)!(n_i-1)!} \\ 0 & \lambda_i^t & t\lambda_i^{t-1} & \frac{t!\lambda_i^{t-2}}{(t-2)!2!} & \cdots & \frac{t!\lambda_i^{t-n_i+2}}{(t-n_i+2)!(n_i-2)!} \\ 0 & 0 & \lambda_i^t & t\lambda_i^{t-1} & \cdots & \frac{t!\lambda_i^{t-n_i+3}}{(t-n_i+3)!(n_i-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & t\lambda_i^{t-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & t\lambda_i^t \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7.2}$$

上の式は $O! = 1$ と $J_i^t$ のエントリのうち負の数の階乗を含むものを $0$ と仮定している。

式 (7.2) の $J_i^t$ のエントリを調べると，次のような結論が得られる。

1. $\lambda_i$ のマグニチュードが 1 より厳密に小さいとき、$t \to \infty$ として $J_i^t \to 0$
2. $\lambda_i$ のマグニチュードが 1 に等しく、ジョルダンブロックが $1 \times 1$(すなわち $n_i = 1$) のとき、$t \to \infty$ として $J_i^t$ は有界である。
3. $\lambda_i$ のマグニチュードが 1 より厳密に大きいか、または $\lambda_i$ のマグニチュードが 1 に等しく、ジョルダンブロックが $1 \times 1$ より大きいとき、$t \to \infty$ として $J_i^t$ は非有界である。

これらの考察は式 (7.1) と共に、$A$ の固有値と $t \to \infty$ においての $A^t$ に起こることの関係について、以前に見たことを確認し、さらなる考察を与えるもの。

1. $A$ のすべての固有値のマグニチュードが 1 よりも厳密に小さいとき、$t \to \infty$ としてすべての $J_i^t \to 0$ であり、したがって $t \to \infty$ として $A \to 0$ となる。
2. $A$ のすべての固有値のマグニチュードが 1 より小さいか等しく、マグニチュードが 1 に等しい固有値に対応するすべてのジョルダンブロックが $1 \times 1$ であるとき、$t \to \infty$ として全ての $J_i^t$ は有界であり、その結果、$t \to \infty$ として $A^t$ も有界。
3. $A$ の固有値のうち少なくとも 1 つが 1 より大きい、または 1 に等しい大きさで、対応するジョルダンブロックが $1 \times 1$ より大きいとき、$t \to \infty$ として $A^t$ は非有界。