2022/6/1

Ex4.4(LTI システムの出力の Z 変換)

$$x^+ = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du \tag{DLTI}$$

(DLTI) への出力の Z 変換が

$$\begin{aligned} \hat{y}(z) = \hat{\Psi}(z)x(0) + \hat{G}(z)\hat{u}(z), \quad &\hat{\Psi}(z) := C(zI-A)^{-1}z \\ &\hat{G}(z) := C(zI-A)^{-1}B + D \end{aligned} \tag{1}$$

で与えられることを示せ。

p41 の Note7 より、$Z\left[x(t+1)\right] = z(\hat{x}(z) - x(0))$。また、Z 変換の線形性より、(DLTI) の Z 変換はそれぞれ、

$$z(\hat{x}(z) - x(0)) = A\hat{x}(z) + B\hat{u}(z)\ ,\ \ \hat{y}(z) = C\hat{x}(z) + D\hat{u}(z) \tag{2}$$

で得られる。

$$\hat{x}(z) = (zI-A)^{-1}B\hat{u}(z) + (zI-A)^{-1}zx(0) \tag{3}$$

式変形して得られた $\hat{x}(z)$ を代入して、

$$\hat{y}(z) = \{C(zI-A)^{-1}z\}\hat{u}(z) + \{C(zI-A)^{-1}B + D\}\hat{u}(z) \tag{4}$$

Ex4.8（同等の実現）

次の 2 つのシステムを考える。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \ , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x \tag{5}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \ , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x \tag{6}$$

(a) これらのシステムはゼロ状態等価であるか。

(b) それらは代数的に等価であるか。

(a) それぞれの伝達関数を求める。

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{7}$$

$$\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{4.3}$$

式 (5)

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s-2 & -1 & -2 \\ 0 & s-2 & -2 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\det(sI - A) = (s-2)^2(s-1) \ , \ \operatorname{cof}(sI - A) = \begin{bmatrix} (s-2)(s-1) & 0 & 0 \\ (s-1) & (s-2)(s-1) & 0 \\ 2(s-1) & 2(s-2) & (s-2)^2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s-2)^2(s-1)} \begin{bmatrix} (s-2)(s-1) & (s-1) & 2(s-1) \\ 0 & (s-2)(s-1) & 2(s-2) \\ 0 & 0 & (s-2)^2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\hat{G}_5(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{(s-2)^2(s-1)} \begin{bmatrix} (s-2)(s-1) & (s-1) & 2(s-1) \\ 0 & (s-2)(s-1) & 2(s-2) \\ 0 & 0 & (s-2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-2)^2} \tag{11}$$

式 (6)

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s-2 & -1 & -1 \\ 0 & s-2 & -1 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\det(sI - A) = (s-2)^2(s-1) \ , \ \operatorname{cof}(sI - A) = \begin{bmatrix} (s-2)(s-1) & 0 & 0 \\ s-1 & (s-2)(s-1) & 0 \\ s-1 & s-2 & (s-2)^2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s-2)^2(s-1)} \begin{bmatrix} (s-2)(s-1) & s-1 & s-1 \\ 0 & (s-2)(s-1) & s-2 \\ 0 & 0 & (s-2)^2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\hat{G}_6(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{(s-2)^2(s-1)} \begin{bmatrix} (s-2)(s-1) & s-1 & s-1 \\ 0 & (s-2)(s-1) & s-2 \\ 0 & 0 & (s-2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-2)^2} \tag{15}$$

よって、伝達関数が等しいため、ゼロ状態等価である。

(b) それらは代数的に等価であるかを考える。

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}u \\ y = \bar{C}x + \bar{D}u \end{cases} \tag{16}$$

2 つの LTI システムについて、以下を満たす非特異行列 T が存在する時、代数的等価であるという。

$$\bar{A} = TAT^{-1}\ ,\ \bar{B} = TB\ ,\ \bar{C} = CT^{-1}\ ,\ \bar{D} = D \tag{17}$$

今回の問題では、

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T^{-1}\ ,\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\ ,\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} T^{-1} \tag{18}$$

を満たす T が存在するかを考える。式 (5),(6) の行列 A 部分の全ての要素が等しくないため、代数的に等価ではない。