2022/6/14

EX6.5: 上三角行列の指数

上三角行列 A を考える。

(a) e^{tA} も上三角行列であることを示せ
(b) A の対角要素と e^{tA} の対角要素を関連づけよ。

ヒント：行列の指数の定義を利用せよ。
(a) 行列指数の定義より、

$$e^{tA}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k\ ,\ \forall t\in\mathbb{R} \tag{1}$$

上三角行列の累乗は上三角行列であり、上三角行列の和も上三角行列である。$\frac{t^k}{k!}$ は定数関数のため、e^{tA} も上三角行列である。
(b)　A の対角要素を a_{jj}、e^{tA} の対角要素を e^{tA}_{jj} とする。上三角行列の累乗の対角要素は、$(A^k)_{jj}=(a_{jj})^k$ を満たすため、

$$e^{tA}_{jj}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(a_{jj})^k\ ,\ \forall t\in\mathbb{R} \tag{2}$$

上三角行列の性質の説明。
$n\times n$ 行列 A が上三角行列であるとき、$a_{ij}=0(i>j)$ である。

上三角行列 A と B の和の $i>j$ である要素について考える。

$$a_{ij}+b_{ij}=0+0=0 \tag{3}$$

$i>j$ である要素は 0 なので上三角行列 A と B の和も上三角行列

上三角行列 A の 2 乗の $i>j$ である要素について考える。

$$(A^2)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}=\sum_{k=1}^{j}a_{ik}a_{kj}+\sum_{k=j+1}^{n}a_{ik}a_{kj}=0 \tag{4}$$

第一項については $a_{ik}=0$ 第二項については $a_{kj}=0$、$i>j$ である要素は 0 なので上三角行列 A の 2 乗も上三角行列

上三角行列 A の 2 乗の $i=j$ の要素について考える。

$$(A^2)_{jj}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}a_{kj}=\sum_{k=1}^{j-1}a_{jk}a_{kj}+a_{jj}a_{jj}+\sum_{k=j+1}^{n}a_{jk}a_{kj}=(a_{jj})^2 \tag{5}$$

第一項については $a_{jk}=0$ 第三項については $a_{kj}=0$、上三角行列の対角要素について、$(A^2)_{jj}=(a_{jj})^2$ が言える。