4/21

Ex3.6

問題文

$$\dot{x} = f(t,x)\ ,\ x(t_0) = x_0 \tag{3.1}$$

$f(t,x)$ を、t について区分的に連続であり、x について局所リプシッツであり、

$$\|f(t,x)\| \le k_1 + k_2 \|x\|\,, (t,x) \in [t_0,\infty) \times \mathbb{R}^n$$

を満たすとする。

(a)(3.1) の解が存在するすべての t に対して次式を満たすことを示せ。

$$\|x(t)\| \le \|x_0\| \exp\left[k_2(t-t_0)\right] + \frac{k_1}{k_2}\{\exp\left[k_2(t-t_0)\right] - 1\}\ ,\ \forall t \ge t_0$$

(b) その解は有限の脱出時間を持つことができるか。

解答

(a)

(3.1) の解は以下のように書ける。

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x) ds$$

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &\le \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|f(s,x(s))\| ds \\
&\le \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} k_1 + k_2 \|x(s)\| ds \\
&\le \|x(t_0)\| + k_1(t-t_0) + k_2 \int_{t_0}^{t} \|x(s)\| ds
\end{aligned}$$

Gronwall-Bellman inequality より、

$$\|x(t)\| \le \|x(t_0)\| + k_1(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} [\|x_0\| + k_1(s-t_0)] k_2 \exp\{k_2(t-s)\} ds$$

計算して、

$$\|x(t)\| \le \|x_0\| \exp\left[k_2(t-t_0)\right] + \frac{k_1}{k_2}\{\exp\left[k_2(t-t_0)\right] - 1\}\ ,\ \forall t \ge t_0$$

が成り立つ。

(b) 解が有界でない場合、解は有限の脱出時間を持つ。しかし、(a) で式 (3.1) の解は有界であることが示されているため、解は有限の脱出時間を持つことができない。

```
[27] from sympy import integrate, Symbol, symbols, exp


     x_0 = Symbol("x_0")
     k_1,k_2 = symbols("k_1,k_2")
     s = Symbol("s")
     t,t_0 = symbols("t,t_0")


     ex = (x_0 + k_1*(s-t_0))*k_2*exp(k_2*(t-s))

     display(ex)
```

$k_2\left(k_1\left(s-t_0\right)+x_0\right)e^{k_2(-s+t)}$

```
[28] display(integrate(ex,(s,t_0,t)))
```

$$\begin{cases} -\frac{\left(-k_1-k_2x_0\right)e^{k_2\left(t-t_0\right)}}{k_2}+\frac{-k_1k_2t+k_1k_2t_0-k_1-k_2x_0}{k_2} & \text{for } k_2>-\infty \wedge k_2<\infty \wedge k_2\neq 0 \\ \frac{k_1k_2t^2}{2}-\frac{k_1k_2t_0^2}{2}+t\left(-k_1k_2t_0+k_2x_0\right)-t_0\left(-k_1k_2t_0+k_2x_0\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Gronwall–Bellman Inequality

Lemma A.1 *Let $\lambda : [a,b] \to R$ be continuous and $\mu : [a,b] \to R$ be continuous and nonnegative. If a continuous function $y : [a,b] \to R$ satisfies*

$$y(t) \le \lambda(t) + \int_a^t \mu(s)y(s)\,ds$$

for $a \le t \le b$, then on the same interval

$$y(t) \le \lambda(t) + \int_a^t \lambda(s)\mu(s)\exp\left[\int_s^t \mu(\tau)\,d\tau\right]\,ds$$

In particular, if $\lambda(t) \equiv \lambda$ is a constant, then

$$y(t) \le \lambda \exp\left[\int_a^t \mu(\tau)\,d\tau\right]$$

If, in addition, $\mu(t) \equiv \mu \ge 0$ is a constant, then

$$y(t) \le \lambda \exp[\mu(t-a)]$$

◇