はい、これは正しいです。この式は、A が非特異行列 P を用いてジョルダン形 J に変換できる場合に成り立ちます。ここで、J はブロック対角行列であり、各ブロック J_i は一次または二次のジョルダンブロックで構成されています。

具体的には、J の対角成分は、$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ となり、J_i は以下の形式のいずれかをとります。

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

ここで、P は A の固有ベクトルを列ベクトルとして並べた行列であり、P^{-1} は逆行列です。式 (4.11) は、指数関数のテイラー展開を用いて得られるものであり、$\exp(Jt)$ は各ジョルダンブロックに対する指数関数の行列で構成されます。各ジョルダンブロックの指数関数の行列は、式 (4.11) の右側で与えられる係数行列 R_{ik} とともに、各ブロックで異なる多項式関数で表されます

$\exp(Jt)$ は、ジョルダン形 J に対する指数関数の行列であり、以下のように定義されます。

$$\exp(Jt) = \text{block diag}[\exp(J_1 t), \exp(J_2 t), \ldots, \exp(J_r t)]$$

ここで、$\exp(J_i t)$ は、一次または二次のジョルダンブロック J_i に対する指数関数の行列であり、以下のように与えられます。

一次のジョルダンブロック $J_i = [\lambda_i]$ に対する指数関数の行列 $\exp([\lambda_i]t)$ は、次のようになります。

$$\exp([\lambda_i]t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

二次のジョルダンブロック $J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$ に対する指数関数の行列 $\exp\left(\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix} t\right)$ は、次のようになります。

$$\exp\left(\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix} t\right) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

このように、一次のジョルダンブロックに対する指数関数の行列は、対角成分に指数関数を取った行列であり、二次のジョルダンブロックに対する指数関数の行列は、対角成分に指数関数、上三角成分に t をかけたものを取った行列となります。

はい、n 次元の場合も同様に式 (4.11) と同様の式が成り立ちます。すなわち、n 次元の非特異行列 A は、n 次元の非特異行列 P を用いてジョルダン形 J に変換できるとき、以下が成り立ちます。

$$\exp(At) = P \exp(Jt) P^{-1} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_i} t^{k-1} \exp(\lambda_i t) R_{ik}$$

ここで、J は n 次元のブロック対角行列であり、各ブロック J_i は、一次または二次のジョルダンブロックで構成されます。また、P は A の固有ベクトルを列ベクトルとして並べた行列であり、P^{-1} は逆行列です。

n 次元の場合でも、一次のジョルダンブロックに対する指数関数の行列は、対角成分に指数関数を取った行列であり、二次のジョルダンブロックに対する指数関数の行列は、対角成分に指数関数、上三角成分に t をかけたものを取った行列となります。

はい、式 (4.11) の右辺は、行列の形式で表されます。具体的には、各要素がスカラーである k と i に対して、R_{ik} は n 次正方行列であり、式の右辺全体は n 次正方行列になります。

この行列式の意味は、指数関数のテイラー展開において、A のジョルダン形 J に対する係数行列 R_{ik} が各項の係数を与えることから来ています。各ジョルダンブロックの係数行列 R_{ik} は、指数関数の行列 $\exp(J_i t)$ とともに、k と i についての和をとっているため、最終的な行列 $\exp(At)$ は、各ジョルダンブロックの指数関数の行列とその係数行列の積の和によって与えられます。

R_{ik} は、A のジョルダン形 J に対する指数関数のテイラー展開において、各項の係数を与える係数行列です。

一次のジョルダンブロック $J_i=[\lambda_i]$ に対する指数関数の行列は、対角成分に指数関数をとる行列でした。従って、R_{ik} も同様に対角成分に指数関数をとる行列となります。

すなわち、$R_{ik}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_i t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$ となります。

二次のジョルダンブロック $J_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$ に対する指数関数の行列は、対角成分に指数関数、上三角成分に t をかけたものを取った行列でした。従って、R_{ik} も同様に対角成分に指数関数、上三角成分に t^k をかけたものを取った行列となります。すなわち、$R_{ik}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & ke^{\lambda_i t}t & \cdots & \frac{(k-1)!}{2!}(e^{\lambda_i t}t)^2 \\ 0 & e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{(k-2)!}{1!}(e^{\lambda_i t}t)^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$ となります。

したがって、式 (4.11) の右辺は、各ジョルダンブロックに対して、対角成分に指数関数、上三角成分に t^k をかけたものを取った係数行列 R_{ik} と指数関数の行列 $\exp(J_i t)$ の積で表されます。

$n\times n$ のジョルダン行列 J に対する指数関数 $\exp(Jt)$ は、以下のように与えられます。

$$\exp(Jt)=\begin{bmatrix} \exp(J_1 t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(J_2 t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \exp(J_r t) \end{bmatrix}$$

ここで、J は n 次元のブロック対角行列であり、各ブロック J_i は、一次または二次のジョルダンブロックで構成されます。また、r は J に含まれる異なる固有値の数であり、各固有値に対して、対応するジョルダンブロックが r 個あると仮定しています。

二次のジョルダンブロック $J_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$ に対する指数関数 $\exp\left(\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix} t\right)$ は、対角成分に指数関数、上三角成分に t をかけたものを取った行列でした。従って、$\exp(J_i t)$ も同様に対角成分に指数関数、上三角成分に t^k をかけたものを取った行列となります。すなわち、$J_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$ の場合、$\exp(J_i t)=\begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$ となります。

以上のことから、$n\times n$ のジョルダン行列 J に対する指数関数 $\exp(Jt)$ は、各ブロックに対する指数関数の行列とそれらを並べたブロック対角行列として表されます。

m 次のジョルダンブロック $J_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$ に対する指数関数 $\exp(J_i t)$ は、以下のように与えられます。

$$\exp\left(\begin{bmatrix} \lambda_i & 1\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix} t\right)=\begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t}\ 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

ここで、λ_i は J_i の固有値であり、t はスカラーです。この指数関数の行列は、上三角成分に t をかけたものを取った行列となります。対角成分には指数関数が現れますが、上三角成分は、(i,j) 成分が $t^{j-1}e^{\lambda_i t}$ となります。すなわち、$(1,2)$ 成分は $te^{\lambda_i t}$、$(1,3)$ 成分は $\frac{(t\lambda_i)^2}{2!}e^{\lambda_i t}$ となります。以降、(i,j) 成分は $(j-i)$ が偶数である場合は 0 となり、$(j-i)$ が奇数の場合は $(j-i-1)$ 次の微分が λ_i 倍されたものに t^{j-i} がかかった形で表されます。

このように、指数関数の行列を求めるためには、ジョルダンブロックの大きさに応じて、対角成分には指数関数、上三角成分には t をかけたものを取った行列を構成することが重要です。