Ex4.1

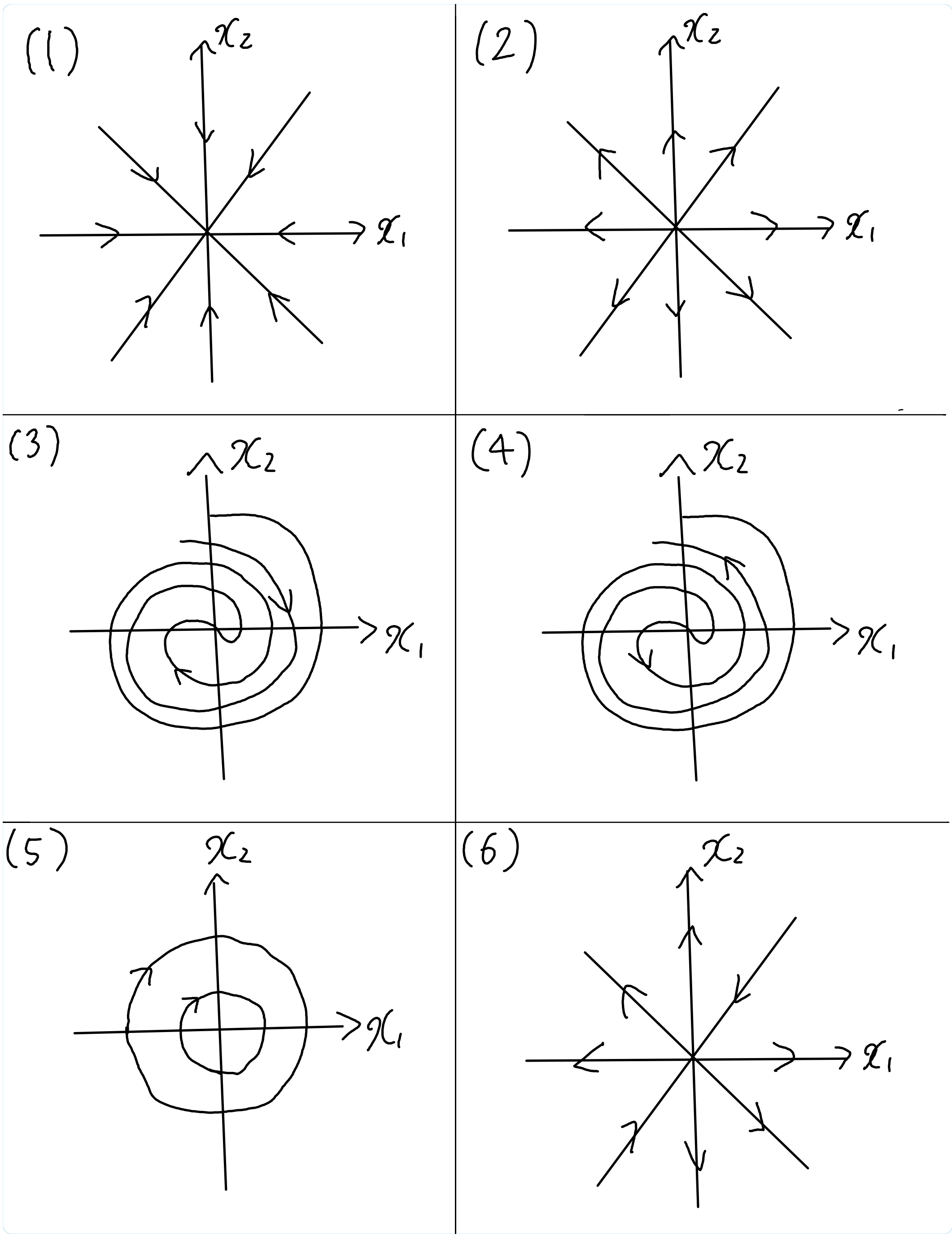
二次元自律システムを考える。次の平衡点の種類ごとに、その平衡点が安定、不安定、漸近安定であるかどうかを分類せよ：

(1) stable node　(2) unstable node　(3) stable focus
(4) unstable focus　(5) center　(6) saddle

位相ポートレートを用いて、あなたの答えを正当化すること。

---

(1) 漸近安定　(2) 不安定　(3) 漸近安定
(4) 不安定　(5) 安定　(6) 不安定



Ex4.26

$\dot{x}=f(x)$ とし、ここで $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ とする。変数変換 $z=T(x)$ を考える。ここで、$T(0)=0$ であり、$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は原点近傍の微分同相写像である；すなわち、逆写像 $T^{-1}(\cdot)$ が存在し、$T(\cdot)$ と $T^{-1}(\cdot)$ は共に連続微分可能である。変換したシステムは以下である。

$$\dot{z}=\hat{f}(z)\ ,\ \mathrm{where}\hat{f}(z)=\frac{\partial T}{\partial x}f(x)\bigg|_{x=T^{-1}(z)}$$

(a) $x=0$ が $\dot{x}=f(x)$ の孤立平衡点であるとき、かつその時に限り、$z=0$ が $\dot{z}=\hat{f}(z)$ の孤立平衡点であることを示せ。

(b) $x=0$ が安定（漸近安定または不安定）であるとき、かつその時に限り、$z=0$ が安定（漸近安定または不安定）であることを示せ。

(a)
$x=0$ が平衡点であるとき、$f(0)=0$ であり、$\hat{f}(0)=0$ であるため、$z=0$ も平衡点であることが分かる。
次に $z=0$ でも同様に孤立平衡点かを考えていく。
$z=0$ が孤立平衡点ではなく、原点近傍に $\hat{z}\neq 0$ の平衡点があると仮定する。このとき、$\hat{f}(\hat{z})=0$ である。よって、

$$\frac{\partial T}{\partial x}f(x)\bigg|_{x=T^{-1}(\hat{z})}=\hat{f}(\hat{z})=0$$

であるため、$f(T^{-1}(\hat{z}))=0$ であることが分かり、$x=0$ が孤立平衡点であることと矛盾する。
そのため、$z=0$ は孤立平衡点である。
反対も同様の議論が成立するため、$x=0$ が孤立平衡点であるとき、かつその時に限り、$z=0$ が孤立平衡点である。

(b)
平衡点 $x=0$ が安定であるとき、与えられた $\epsilon_1>0$ について以下を満たす $\delta_1>0$ が存在する。

$$\|x(0)\|<\delta_1 \Rightarrow \|x(t)\|<\epsilon_1\ ,\ \forall t\geq 0$$

さらに、$T(\cdot)$ が連続なので、$\|x(t)\|<\epsilon_1 \Rightarrow \|z(t)\|<\epsilon_2$ を満たす、$\epsilon_2>0$ が存在する。同様に、$T^{-1}(\cdot)$ が連続なので、$\|z(0)\|<\delta_2 \Rightarrow \|x(0)\|<\delta_1$ を満たす、δ_2 が存在する。そのため、

$$\|z(0)\|<\delta_2 \Rightarrow \|x(0)\|<\delta_1 \Rightarrow \|x(t)\|<\epsilon_1 \Rightarrow \|z(t)\|<\epsilon_2\ ,\ \forall t\geq 0$$

が成り立ち、平衡点 $z=0$ が安定であることが分かる。
反対も同様の議論が成立するため、平衡点 $x=0$ が安定であるとき、かつその時に限り、平衡点 $z=0$ が安定である。

そのため、平衡点 $x=0$ が不安定であるとき、かつその時に限り、平衡点 $z=0$ が不安定であることも同様に分かる。

つぎに、平衡点 $x=0$ が漸近安定であるとき、以下を満たす。

$$\|x(0)\|<\delta_1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t)=0$$

$\|x(t)\|<\epsilon_1 \Rightarrow \|z(t)\|<\epsilon_2$ が成り立ち、$T(0)=0$ であるため、

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)\|=0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\|z(t)\|=0$$

が成り立ち、平衡点 $z=0$ が漸近安定であることが分かる。反対も同様の議論が成立するため、平衡点 $x=0$ が漸近安定であるとき、かつその時に限り、平衡点 $z=0$ が漸近安定である。