5.5

図 5.2 に示す各リレー特性について、$\mathcal{L}_\infty$ と $\mathcal{L}_2$ の安定性を調べよ。

図 (a),(b),(d) について、

$$|y| \leq k|u| \ , \ \forall u \tag{1}$$

を満たす正の定数 k が存在する (図参照)。そのため、有限ゲイン $\mathcal{L}_\infty$ 安定である。また、

$$|y|^2 \leq k^2|u|^2 \ , \ \forall u \tag{2}$$

を満たす正の定数 k が存在するため、有限ゲイン $\mathcal{L}_2$ 安定である。

図 (c) について、出力が有界であるため、

$$|y| \leq k|u| + \beta \ , \ \forall u \tag{3}$$

を満たす正の定数 k, β が存在する (図参照)。そのため、有限ゲイン $\mathcal{L}_\infty$ 安定である。しかし、入力 $u(t) = e^{-t}$ に対する出力 $y(t) = a \ , \ a > 0$ を考えると、$\|y\|_{\mathcal{L}_2}$ は有限ではないのに対し、$\|u\|_{\mathcal{L}_2}$ は有限となるため、$\mathcal{L}_2$ 安定でない。

5.21

図 5.1 に示すフィードバック接続を考える。(u_1, u_2) から (y_1, y_2) への写像が有限ゲイン $\mathcal{L}$ 安定であるとき、かつその時に限り、(u_1, u_2) から (e_1, e_2) への写像が有限ゲイン $\mathcal{L}$ 安定であることを示せ。

(u_1, u_2) から (y_1, y_2) への写像が有限ゲイン $\mathcal{L}$ 安定であるとき、

$$\|y_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma_{y11}\|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_{y12}\|u_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_{y1}\ ,\ \forall u_1, u_2, \tau \in [0, \infty) \tag{4}$$
$$\|y_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma_{y21}\|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_{y22}\|u_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_{y2}\ ,\ \forall u_1, u_2, \tau \in [0, \infty) \tag{5}$$

が成り立つ。ここで、

$$e_1 = u_1 - y_2$$
$$|e_1| \leq |u_1| + |y_2|$$

であるため、

$$\begin{aligned}\|e_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} &\leq \|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \|y_{2\tau}\|_{\mathcal{L}}\\ &\leq (1 + \gamma_{y21})\|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_{y22}\|u_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_{y2}\ ,\ \forall u_1, u_2, \tau \in [0, \infty)\end{aligned}$$

また、

$$e_2 = u_2 + y_1$$
$$|e_2| \leq |u_2| + |y_1|$$

であるため、

$$\begin{aligned}\|e_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} &\leq \|u_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \|y_{1\tau}\|_{\mathcal{L}}\\ &\leq \gamma_{y21}\|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + (1 + \gamma_{y22})\|u_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_{y2}\ ,\ \forall u_1, u_2, \tau \in [0, \infty)\end{aligned}$$

よって、(u_1, u_2) から (e_1, e_2) への写像が有限ゲイン $\mathcal{L}$ 安定である。

(u_1, u_2) から (e_1, e_2) への写像が有限ゲイン $\mathcal{L}$ 安定であるとき、

$$\|e_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma_{e11}\|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_{e12}\|u_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_{e1}\ ,\ \forall u_1, u_2, \tau \in [0, \infty) \tag{6}$$
$$\|e_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma_{e21}\|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_{e22}\|u_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_{e2}\ ,\ \forall u_1, u_2, \tau \in [0, \infty) \tag{7}$$

が成り立つ。ここで、

$$y_1 = e_2 - u_2$$
$$|y_1| \leq |e_2| + |u_2|$$

であるため、

$$\begin{aligned}\|y_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} &\leq \|e_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \|u_{2\tau}\|_{\mathcal{L}}\\ &\leq \gamma_{e21}\|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + (1 + \gamma_{e22})\|u_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_{e2}\ ,\ \forall u_1, u_2, \tau \in [0, \infty)\end{aligned}$$

また、

$$y_2 = u_1 - e_1$$
$$|y_2| \leq |u_1| + |e_1|$$

であるため、

$$\begin{aligned}\|y_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} &\leq \|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \|e_{1\tau}\|_{\mathcal{L}}\\ & leq(1 + \gamma_{e11})\|u_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \gamma_{e12}\|u_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_{e1}\ ,\ \forall u_1, u_2, \tau \in [0, \infty)\end{aligned}$$

よって、(u_1, u_2) から (y_1, y_2) への写像が有限ゲイン $\mathcal{L}$ 安定である。