光本葵音 (2023 年 4 月 17 日)

Ex3.6

問題文

$$\dot{x} = f(t, x)\ ,\ x(t_0) = x_0 \tag{3.1}$$

$f(t, x)$ を、t について区分的に連続であり、x について局所リプシッツであり、

$$\|f(t, x)\| \le k_1 + k_2 \|x\|, (t, x) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$$

を満たすとする。

(a)(3.1) の解が存在するすべての t に対して次式を満たすことを示せ。

$$\|x(t)\| \le \|x_0\| \exp[k_2(t - t_0)] + \frac{k_1}{k_2}\{\exp[k_2(t - t_0)] - 1\}\ ,\ \forall t \ge t_0$$

(b) その解は有限の脱出時間を持つことができるか。

解答

(a) 式 (3.1) の解を $x(t)$ とし、$t \ge t_0$ において存在するとする。式の両辺を $[t_0, t]$ で積分し、リプシッツ条件とノルムの不等式を適用すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
||x(t)|| &\le ||x(t_0)|| + \int_{t_0}^{t} ||f(s, x(s))||ds \\
&\le ||x(t_0)|| + k_1(t - t_0) + k_2 \int_{t_0}^{t} ||x(s)||ds \\
&\le ||x(t_0)|| \exp(k_2(t - t_0)) + \frac{k_1}{k_2}[\exp(k_2(t - t_0)) - 1]
\end{aligned}$$

最後の不等式では、グロンウォールの不等式を用いた。以上より、

$$||x(t)|| \le ||x(t_0)|| \exp(k_2(t - t_0)) + \frac{k_1}{k_2}[\exp(k_2(t - t_0)) - 1]$$

が成り立つ。

まず、式 (1) については、与えられた不等式 $|f(t, x(t))| \le k_1 + k_2 |x(t)|$ を用いています。この不等式は、$f(t, x)$ が局所リプシッツであり、x についての成長率が $|x(t)|$ に比例することを表しています。

次に、式 (2) については、式 (1) をグロンウォールの不等式に適用しています。具体的には、左辺を $\exp(-k_2(t - t_0)) |x(t)|$ で割り、右辺を $k |x_0| \exp(-k_2(t - t_0))$ で上界を与えた形で式変形しています。この式変形は、$x(t)$ の成長率が指数関数的であることを表しています。

最後に、式 (3) については、式 (2) を積分することで得られます。具体的には、式 (2) の左辺について t で積分した後、定数項 $|x_0| \exp[k_2(t - t_0)]$ を加えることで、式 (3) を得ることができます。この式変形は、$x(t)$ の成長率が指数関数的であることを再度表しています。

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\exp(-k_2(t - t_0)) |x(t)|] \le k |x_0| \exp(-k_2(t - t_0)) && (1) \\
\Rightarrow\quad &\exp(-k_2(t - t_0)) |x'(t)| - k_2 \exp(-k_2(t - t_0)) |x(t)| \le k |x_0| \exp(-k_2(t - t_0)) && (2) \\
\Rightarrow\quad &\exp(-k_2(t - t_0)) |x'(t)| \le k_2 \exp(-k_2(t - t_0)) |x(t)| + k |x_0| && (3) \\
\Rightarrow\quad &|x'(t)| \le k_2 |x(t)| + k |x_0| \exp(k_2(t - t_0)) && (4)
\end{aligned}$$

最初の式変形では、不等式 $|x'(t)| \le k(|x_0| + |x(t)|)$ をグロンウォールの不等式に適用し、左辺に $\exp(-k_2(t - t_0)) |x(t)|$ をかけて積分形式に変形しています。

次に、式変形の途中の 3 行目では、左辺と右辺にそれぞれ $\exp(-k_2(t-t_0))|x(t)|$ をかけて整理し、$k_2\exp(-k_2(t-t_0))|x(t)|$ を左辺に移項しています。

最後に、式変形の途中の 4 行目では、左辺について $\exp(-k_2(t-t_0))$ をかけて式変形し、右辺について $\exp(k_2(t-t_0))$ をかけて $k|x_0|$ を足しています。そして、式変形の結果、最終的な不等式式を得ます。

具体的に、解 $x(t)$ の上界を求める場合、グロンウォールの不等式において、$y(t)$ を $|x(t)|$、$\alpha(t)$ を $|x_0|\exp[k_2(t-t_0)]$、$\beta(t)$ を k_2 とおくことで、次の式を得ることができます。

ここで、右辺の積分部分について、定数 k_2 は外に出すことができます。また、不等式 $|x'(t)| \le k_1 + k_2|x(t)|$ において、右辺に $|x(t)|$ をかけたものを用いることで、次の式を得ることができます。

まず、(3.1) 式の右辺 $f(t,x)$ が x について局所リプシッツであり、かつ $|f(t,x)| \le k_1 + k_2|x|$ を満たすことから、ピカールの厳密解の存在と一意性が保証されることが知られています。

次に、解 $x(t)$ のノルム $|x(t)|$ が時間 t の関数として、与えられた上限を満たすことを示します。

まず、$t_0 \le t_1 \le t_2$ とし、解 $x(t)$ が $t \in [t_0, t_1]$ において存在するとします。このとき、ピカールの定理により、$x(t)$ は次のように表されます。

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)), ds; , ; ; t \in [t_0, t_1] \tag{5}$$

この式の両辺のノルムを評価します。

$$\begin{aligned}
|x(t)| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)), ds \right| \\
&\le |x_0| + \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s))|, ds \\
&\le |x_0| + \int_{t_0}^{t} k_1 + k_2|x(s)|, ds \\
&= |x_0| + k_1(t-t_0) + k_2 \int_{t_0}^{t} |x(s)|, ds
\end{aligned}$$

ここで、初期条件 $|x(t_0)| \le |x_0|$ とグロンウォールの不等式を利用すると、

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\le |x_0| + k_1(t-t_0) + k_2 \int_{t_0}^{t} |x(s)|, ds \\
&\le |x_0| + k_1(t-t_0) + k_2 \int_{t_0}^{t} |x_0|\exp[k_2(s-t_0)], ds \\
&= |x_0|\exp[k_2(t-t_0)] + \frac{k_1}{k_2}\exp[k_2(t-t_0)] - 1
\end{aligned}$$

となります。

申し訳ありません、式変形の詳細について説明いたします。

最初の不等式では、(3.1) 式を用いて $x(t)$ を t_0 から t までの時間積分として表現しました。そして、リプシッツ条件 $|f(t,x)| \le k_1 + k_2|x|$ を利用して、$f(t,x)$ のノルムを上界として、$x(t)$ のノルムを評価しました。

次の不等式では、上記の不等式を用いて、$x(t)$ のノルムを評価します。具体的には、積分項に出現する $x(s)$ について、グロンウォールの不等式を適用して、指数関数的に上界を与えます。そうすることで、積分項の評価が行えます。

式変形の途中の $\frac{k_1}{k_2}(\exp[k_2(t-t_0)] - 1)$ という項は、初期条件 $x(t_0) = x_0$ が $|x_0| \le k_1/k_2$ を満たすときに出現する項です。この場合、k_1/k_2 は負であってはなりません。この式変形は、初期条件を満たす場合と初期条件を満たさない場合の両方に適用できます。

グロンウォールの不等式は、次のように表されます。

定理：$a(t)$ を $[t_0, T]$ 上の非負連続関数、$K \ge 0$ とする。任意の $t \in [t_0, T]$ に対して、$a(t) \le K + \int_{t_0}^{t} a(s)b(s)ds$ が成り立つとき、$t \in [t_0, T]$ に対して $a(t) \le K\exp\left(\int_{t_0}^{t} b(s)ds\right)$ が成り立つ。

ここで、$b(t) = k_2$ とおきます。すると、$f(t,x)$ のリプシッツ条件 $|f(t,x)| \le k_1 + k_2|x|$ より、$x(t)$ について次の不等式が成り立ちます。

$$|x(t)| \leq |x_0| + k_1(t - t_0) + k_2 \int_{t_0}^{t} |x(s)|\, ds$$

右辺第 3 項について、$b(t) = k_2$ としてグロンウォールの不等式を適用することによって、次の式変形が得られます。

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\leq |x_0| + k_1(t - t_0) + k_2 \int_{t_0}^{t} |x(s)|\, ds \\
&\leq |x_0| + k_1(t - t_0) + k_2 \int_{t_0}^{t} |x_0| \exp\left[k_2(s - t_0)\right] ds \\
&= |x_0| \exp\left[k_2(t - t_0)\right] + \frac{k_1}{k_2} \exp\left[k_2(t - t_0)\right] - 1
\end{aligned}$$

ここで、グロンウォールの不等式を適用した積分項は、$K = 0$ で、$a(t) = |x(s)|$、$b(t) = k_2$ とした場合に相当します。グロンウォールの不等式は、$a(s)$ が積分項に現れる形式で現れる不等式の解析に非常に便利なので、このような式変形が行われます。

(b) 解が有界でない場合、解は有限の脱出時間を持つ。しかし、(a) で式 (3.1) の解は $t \geq t_0$ で有界であることが示されているため、解は有限の脱出時間を持つことができない。