6 受動性

受動性という、リアプノフ安定や $\mathcal{L}_2$ 安定性と関連し、非線形システムの分析に有用なツールを提供する。

6.1 節: メモリレス非線形系の受動性の定義

6.2 節: 受動性の定義を状態モデルで表現される力学系に拡張

6.3 節:(厳密に) 正の実数の伝達関数について、それらが (厳密に) 受動的なシステムを表すことを示す

6.4 節: 受動性とリアプノフ安定性、$\mathcal{L}_2$ 安定性の関連性を示す

6.5 節: 本章の主結果、受動性の定理。受動性定理では、2 つの受動的なシステムの（負の）フィードバック接続が受動的であることを述べる。さらに観測可能な条件のもとでは、フィードバック接続は漸近的に安定であることを述べる。

6.5 節の受動性定理と 5.4 節の小利得定理は、ループゲインが 1 より小さいかループ位相が 180 度より小さい場合、2 つの安定な線形システムのフィードバック接続は安定であるという事実の一般化を提供する。

6.1 メモリレス関数

メモリレス関数 $y = h(t,u), h\colon [0,\infty) \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ の受動性を定義する

電気回路網図 6.1(a)

- 電圧 u と電流 y を持つ 1 ポートの抵抗素子を、入力 u と出力 y を持つシステムとみなす。
- 抵抗素子は、電力の流入が常に非負である場合、つまり、$u-y$ 特性上のすべての点 (u,y) に対して $uy \geq 0$ である場合に受動的である。
- $u-y$ 曲線が第 1 象限と第 3 象限にあることを意味する。(図 6.1(b))
- 線形抵抗器、オームの法則 $u = Ry$(抵抗 R)、$y = Gu$(コンダクタンス $G = 1/R$) に従うようなものを考える。正の抵抗 $(R > 0)$ の場合、 $u-y$ 特性は傾き G の直線であり、 $uy = Gu^2 > 0$, $\forall(u,y) \neq (0,0)$ 。

非線形受動抵抗素子

- 第 1 象限と第 3 象限にわたる非線形 $u-y$ 曲線を持つ、受動的な抵抗素子のこと (図 6.2(a)(b))
- トンネルダイオード特性 (図 6.2(b)) は、曲線がある領域で負の勾配を持っていても、受動的である。
- 受動的でない素子の例 (図 6.2(c)) は、1.2.4 節で負抵抗発振器を構成するのに用いた負抵抗の $u-y$ 特性を示す。

u と y がベクトルであるマルチポート・ネットワークの場合

- ネットワークに流れ込む電力は内積 $u^\top y = \sum_{i=1}^p u_i y_i = \sum_{i=1}^p u_i h_i(u)$ となる。
- $u^\top y \geq 0$, $\forall u$ であれば、ネットワークは受動的である。

任意の関数 $y = h(t,u)$ に受動性割り当てる。

$u^\top y$ をシステムへの電力流入と考え、$u^\top y \geq 0$, $\forall u$ であれば、システムは受動的であるとよぶ。

スカラーの場合

- 入出力関係のグラフは第 1 象限と第 3 象限になければならない。
- また、グラフはセクタ $[0,\infty]$ のに属す、ここで、0 と ∞ は第 1-第 3 象限領域の境界の傾きである。- このグラフ表現は、時間が変化する場合でも有効。この場合、$u-y$ 曲線は時間とともに変化するが、常にセクタ $[0,\infty]$ に属す。

ベクトルの場合

- $h(t,u)$ が、$h_i(t,u)$ が u_i にのみ依存する特別な場合、つまり

$$h(t,u) = \begin{bmatrix} h_1(t,u_1) \\ h_2(t,u_2) \\ \vdots \\ h_p(t,u_p) \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

h のグラフ表現を与えることができる。
- この場合、各成分のグラフはセクタ $[0,\infty]$ に属す。
- 一般的なケースでは、このようなグラフ表現は不可能であるが、$u^\top h(t,u) \geq 0$, $\forall(t,u)$ であれば、h はセクタ $[0,\infty]$ に属するとして、セクタの用語を使い続ける。

受動性の極端なケースは、$u^\top y = 0$ のときであり、系は無損失であると言う。
無損失系の例:(図 6.3) 理想変圧器
ここで $y = Su$ である。

$$u = \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0 & -N \\ N & 0 \end{bmatrix}$$

行列 S は歪対称行列、つまり、$S + S^\top = 0$. そのため、$u^\top y = u^\top Su = (1/2)u^\top(S + S^\top)u = 0$

ある関数 $\varphi(u)$ に対して $u^\top y \geq u^\top\varphi(u)$ を満たす関数 h を考える。
$u^\top\varphi(u) > 0$, $\forall u \neq 0$ のとき、h は入力厳密受動的と呼ぶ。(受動性は $u = 0$ のときのみ $u^\top y = 0$ という意味で厳密であるため)。
同様にスカラーの場合、$u - y$ グラフは原点以外では u 軸に接しない。
$u^\top\varphi(u)$ は受動性の「過剰」を表す。
一方、$u^\top\varphi(u)$ が u のある値に対して負である場合、関数 h は必ずしも受動的ではない。$u^\top\varphi(u)$ は受動性の「不足」を表す。
受動性の過剰と不足は、h がスカラーであり、$\varphi(u) = \epsilon u$ である場合に、より明確になる。この場合、h はセクタ $[\epsilon,\infty]$ に属し、$\epsilon > 0$ のとき (図 6.4(a)) に受動性が過剰になり、$\epsilon < 0$ のとき (図 6.4(b)) に受動性が不足する。

受動性の過不足は、図 6.4(c) に示す入力-フィードフォワード演算によって取り除くことができる。
新しい出力を $\tilde{y} = y - \varphi(u)$ と定義すると、

$$u^\top\tilde{y} = u^\top[y - \varphi(u)] \geq u^\top\varphi(u) - u^\top\varphi(u) = 0 \tag{1}$$

$u^\top y > u^\top\varphi(u)$ を満たす関数は、入力フィードフォワードによってセクタ $[0,\infty]$ に属す関数に変換することができる。このような関数を入力フィードフォワード受動的と呼ぶ。
一方、ある関数 $\rho(y)$ に対して $u^\top y > y^\top\rho(y)$ であるとする。前述の場合と同様に、すべての $y \neq 0$ に対して $y^\top\rho(y) > 0$ のときに受動性が過剰になり、y のある値に対して $y^\top\rho(y) < 0$ のときに受動性が不足する。
$\rho(y) = \delta y$ のスカラーの場合の図式表現を図 6.5 に示す。$\delta > 0$ のときに受動性の「過剰」があり、$\delta < 0$ のときに受動性の不足がある。
受動性の過不足は、図 6.5(c) に示す出力-フィードバック操作によっても取り除くことができる。
新しい入力を $\tilde{u} = u - \rho(y)$ と定義すると、

$$\tilde{u}^\top y = [u - \rho(y)]^\top y \geq y^\top\rho(y) - y^\top\rho(y) = 0 \tag{2}$$

$u^\top y > y^\top\rho(y)$ を満たす関数は、出力フィードバックによってセクタ $[0,\infty]$ に属す関数に変換することができる。このような関数を出力フィードバック受動的と呼ぶ。
$y^\top\rho(y) > 0$, $\forall y \neq 0$ のとき、出力厳密受動的と呼ぶ。(受動性は $y = 0$ のときのみ $u^\top y = 0$ という意味で厳密であるため)
受動性のさまざまな概念を次の定義にまとめる。

定義 6.1

システム $y = h(t,u)$ が

- $u^\top y \geq 0$ ならば、受動的
- $u^\top y = 0$ ならば、無損失
- 関数 φ について $u^\top y \geq u^\top \varphi(u)$ ならば、入力フィードフォワード受動的
- $u^\top y \geq u^\top \varphi(u)$ かつ、$u^\top \varphi(u) > 0$, $\forall u \neq 0$ ならば、入力厳密受動的
- 関数 ρ について $u^\top y \geq u^\top \rho(y)$ ならば、出力フィードバック受動的
- $u^\top y \geq u^\top \rho(y)$ かつ、$u^\top \rho(y) > 0$, $\forall y \neq 0$ ならば、出力力厳密受動的

また、全ての (t,u) について、不等式が成り立つ。

以下の不等式を満たすスカラー関数 $y = h(t,u)$ を考える。

$$\alpha u^2 \leq uh(t,u) \leq \beta u^2 \ , \ \forall (t,u) \tag{6.2}$$

- α と β は実数で $\beta \geq \alpha$。
- 関数 h のグラフは、直線 $y = \alpha u$ と $y = \beta u$ を境界とするセクタ $[\alpha, \beta]$ に属す。
- 図 6.6 は、$\beta > 0$ で α の符号が異なる場合のセクタ $[\alpha, \beta]$ を示したもの。
- (6.2) のいずれかで厳密な不等式が満たされる場合、h はセクタ $(\alpha, \beta], [\alpha, \beta), (\alpha, \beta)$ に属す。
- 図 6.6 のセクタを図 6.4 と図 6.5 のセクタと比較する。このとき、セクタ $[\alpha, \beta]$ はセクタ $[\alpha, \infty]$ と $[0, \beta]$ の共通部なので、セクタ $[\alpha, \beta]$ に属す関数は入力フィードフォワード受動性と出力フィードバック受動性を兼ね備えていることがわかる。

セクターの定義をベクトルの場合に拡張する。そのために、(6.2) は次と等価であることに注意。

$$[h(t,u) - \alpha u][h(t,u) - \beta u] \leq 0 \ , \ \forall (t,u) \tag{6.3}$$

ベクトルの場合について、まず (6.1) 式を満たす場合を考える。各成分 h_i が定数 $\alpha_i, \beta_i > \alpha_i$ のセクタ条件 (6.2) を満たすとする。

$$K_1 = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \ , \ K_2 = \mathrm{diag}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p) \tag{3}$$

とすると、以下が導出される。

$$[h(t,u) - K_1 u][h(t,u) - K_2 u] \leq 0 \ , \ \forall (t,u) \tag{6.4}$$

$K = K_2 - K_1$ は正定値対称（対角）行列であることに注意。

不等式 (6.4) は、より一般的なベクトル関数に対しても成り立つ。例えば、$h(t,u)$ が次の不等式を満たすとする。

$$\|h(t,u) - Lu\|_2 \leq \gamma \|u\|_2 \ , \ \forall (t,u) \tag{4}$$

$K_1 = L - \gamma I, K_2 = L + \gamma I$ とすると、次のように書ける。

$$[h(t,u) - K_1 u]^\top [h(t,u) - K_2 u] = \|h(t,u) - Lu\|_2^2 - \gamma^2 \|u\|_2^2 \leq 0 \tag{5}$$

再び、$K = K_2 - K_1$ は正定値対称（対角）行列である。ベクトルの場合のセクター $[K_1, K_2]$ の定義として、正定値対称行列 $K = K_2 - K_1$ による不等式 (6.4) を使用する。次の定義は、セクタの用語について要約したもの。

定義 6.2

メモリレス関数 $h\colon [0,\infty)\times\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ について、

- $u^\top h(t,u) \geq 0$ ならば、セクタ $[0,\infty]$ に属す
- $u^\top [h(t,u) - K_1 u] \geq 0$ ならば、セクタ $[K_1,\infty]$ に属す
- $K_2 = K_2^\top > 0, h^\top(t,u)[h(t,u) - K_2 u] \leq 0$ ならば、セクタ $[0,K_2]$ に属す
- $K = K_2 - K_1 = K^\top > 0, [h(t,u) - K_1 u]^\top [h(t,u) - K_2 u] \leq 0$ ならば、セクタ $[K_1,K_2]$ に属す

全 て の (t,u) に つ い て 、不 等 式 が 成 り 立 つ 。不 等 式 が 厳 密 で あ る 場 合 は , そ の セ ク タ を $(0,\infty),(K_1,\infty),(0,K_2),(K_1,K_2)$ と書く. スカラーの場合は、(6.2) の片辺または両辺が厳密な不等式を満たすことを示すために、$(\alpha,\beta],[\alpha,\beta),(\alpha,\beta)$ と書く。

セクタ $[0,\infty]$ は受動性に対応。セクタ $[K_1,\infty]$ は、$\varphi(u) = K_1 u$ の入力-フィードフォワード受動性に対応。セクタ $[0,K_2], K_2(1/\delta)I > 0$ は、$\rho(y) = \delta y$ の出力厳密受動性に対応。図 6.7 に示すように、セクタ $[K_1,K_2]$ の関数が、入力フィードフォワードと出力フィードバックによって、セクタ $[0,\infty]$ の関数に変換できることを検証するのは、（練習問題 6.1）を参考。

6.2 状態モデル

状態モデルで表される力学系の受動性を定義する。

$$\dot{x} = f(x,u) \tag{6.6}$$
$$y = h(x,u) \tag{6.7}$$

- $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ は局所リプシッツ
- $h\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ は連続関数
- $f(0,0) = 0, h(0,0) = 0$

RLC 回路 (定義の動機付け)

例 6.1

- 図 6.8 は、線形インダクタとコンデンサ、および非線形抵抗を持つ RLC 回路。
- 非線形抵抗 1 と 3 は v-i 特性 $i_1 = h_1(v_1)$ と $i_3 = h_3(v_3)$ で表される。
- 抵抗 2 は i-v 特性 $v_2 = h_2(i_2)$ で表される。
- 電圧 u を入力とし、電流 y を出力とすると、積 uy は、ネットワークに流れる電力。
- インダクタに流れる電流 x_1 とコンデンサにかかる電圧 x_2 を状態変数とする。

状態モデルは次のように書ける。

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= u - h_2(x_1) - x_2 \\ C\dot{x}_2 &= x_1 - h_3(x_2) \\ y &= x_1 + h_1(u) \end{aligned}$$

- エネルギーを蓄積する要素として L と C が存在する。
- 任意の期間 $[0,t]$ にネットワークによって吸収されるエネルギーが、同じ期間にネットワークに蓄積されるエネルギーの増加以上である場合、システムは受動的である。

$$\int_0^t u(s)y(s)ds \geq V(x(t)) - V(x(0)) \tag{6.8}$$

- $V(x) = (1/2)Lx_1^2 + (1/2)Cx_2^2$ はネットワークに蓄積されたエネルギー。
- もし (6.8) が厳密な不等式で成り立つなら、吸収されたエネルギーと蓄積されたエネルギーの増加の差は、抵抗器に消耗したエネルギーでなければならない。

-(6.8) はすべての $t \geq 0$ に対して成立しなければならないため、瞬時電力不等式

$$u(t)y(t) \geq \dot{V}(x(t),u(t)) \tag{6.9}$$

- ネットワークに流入する電力は、ネットワークに蓄積されるエネルギーの変化率以上でなければならない。- 不等式 (6.9) は、システムの軌道に沿って V の導関数を計算することで調べることができる。したがって

$$
\begin{aligned}
\dot{V} =& L x_1 \dot{x}_1 + C x_2 \dot{x}_2 = x_1[u - h_2(x_1) - x_2] + x_2[x_1 - h_3(x_2)] \\
=& x_1[u - h_2(x_1)] - x_2 h_3(x_2) \\
=& x_1[u - h_1(u)]u - u h_1(u) - x_1 h_2(x_1) - x_2 h_3(x_2) \\
=& uy - u h_1(u) - x_1 h_2(x_1) - x_2 h_3(x_2)
\end{aligned}
$$

つまり、

$$
uy = \dot{V} + u h_1(u) + x_1 h_2(x_1) + x_2 h_3(x_2)
$$

- h_1, h_2, h_3 が受動的であれば、$uy \geq \dot{V}$ であり、システムは受動的である。

他の可能性を考える。

Case1:$h_1 = h_2 = h_3 = 0, uy = \dot{V}$ であるとき、ネットワークにエネルギー消耗はない、システムは無損失である。

Case2:h_2, h_3 がセクタ $[0, \infty]$ に属すとき、

$$
uy \geq \dot{V} + u h_1(u) \tag{6}
$$

- $u h_1(u)$ は受動性の過剰または不足を表す。
- $u h_1(u) > 0$, $\forall u \neq 0$ であれば、入力 $u(t)$ が同値的にゼロでない限り、$[0, t]$ にわたって吸収されるエネルギーは蓄積エネルギーの増加よりも大きくなり、受動性の過剰が存在。これは入力厳密受動性のケースである。
- 一方、もし $u h_1(u)$ が u のある値に対して負であれば、受動性が不足する。メモリレス関数で見たように、この種の受動性の過不足は、図 6.4(c) に示す入力フィードフォワードによって取り除くことができる。

Case3:$h_1 = 0$ かつ $h_3 \in [0, \infty]$ の場合、

$$
uy \geq \dot{V} + y h_2(y) \tag{7}
$$

- h_2 の受動性の過不足は、ネットワークに同じ性質をもたらす。
- このような受動性の過不足は、メモリレス関数と同様に、図 6.5(c) のように出力フィードバックによって取り除くことができる。- $y h_2(y) > 0$, $\forall y \neq 0$ のとき、出力 $y(t)$ が同値的にゼロでない限り、$[0, t]$ にわたって吸収されるエネルギーは蓄積エネルギーの増加よりも大きくなり、出力厳密受動性がある。

Case4:$h_1 \in [0, \infty], h_2 \in (0, \infty), h_3 \in (0, \infty)$ の場合、

$$
uy \geq \dot{V} + x_1 h_2(x_1) + x_2 h_3(x_2) \tag{8}
$$

- $x_1 h_2(x_1) + x_2 h_3(x_2)$ は x の正定値関数。
- 状態 $x(t)$ が同定的にゼロでない限り、$[0, t]$ にわたって吸収されるエネルギーは蓄積エネルギーの増加よりも大きくなるので、状態厳密受動性である。
- この性質を持つ系は、状態厳密受動的、あるいは厳密受動的と呼ばれる
- メモリレス関数には状態が存在しないため、状態厳密受動性に対応するものが存在しない。

定義 6.3

システム (6.6)-(6.7) は、以下のような連続微分可能な正の半正定値関数 $V(x)$（蓄積関数と呼ぶ）が存在する場合、受動的であるという。

$$u^\top y \geq \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x,u)\ ,\ \forall (x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \tag{9}$$

さらに

- $u^\top y = \dot{V}$ ならば、無損失
- ある関数 φ について、$u^\top y \geq \dot{V} + u^\top \varphi(u)$ ならば、入力フィードフォワード受動的
- $u^\top y \geq \dot{V} + u^\top \varphi(u)$ かつ $u^\top \varphi(u) > 0\ ,\ \forall u \neq 0$ ならば、入力厳密受動的
- ある関数 ρ について、$u^\top y \geq \dot{V} + u^\top \rho(y)$ ならば、出力フィードバック受動的
- $u^\top y \geq \dot{V} + u^\top \rho(y)$ かつ $u^\top \rho(y) > 0\ ,\ \forall y \neq 0$ ならば、出力厳密受動的
- ある正定値関数 ψ について、$u^\top y \geq \dot{V} + \psi(x)$ ならば、厳密受動的

全ての (t,u) について、不等式が成り立つ

定義 6.3 は、蓄積関数 $V(x)$ の存在を除けば、無記憶関数の定義 6.1 とほぼ同じである。

例 6.2
図 6.9(a) の積分器を考える。

$$\dot{x} = u\ ,\ y = x \tag{10}$$

蓄積関数 $V(x) = (1/2)x^2$ とすると、$uy = \dot{v}$ が得られるため、このシステムは無損失。
図 6.9(b) のような、メモリレス関数を積分器に並列につなげたものを考える。

$$\dot{x} = u\ ,\ y = x + h(u) \tag{11}$$

並列につなげた、$h(u)$ は入力からのフィードフォワードでキャンセルできるため、入力フィードフォワード受動的である。蓄積関数 $V(x) = (1/2)x^2$ とすると、$uy = \dot{V} + uh(u)$ が得られる。$h \in [0,\infty]$ ならば、システムは受動的。$uh(u) > 0\ ,\ \forall u \neq 0$ ならば、入力厳密安定。
図 6.9(c) のようなメモリーレス関数の閉ループを考える。

$$\dot{x} = -h(x) + u\ ,\ y = x \tag{12}$$

出力からのフィードバックでキャンセルできるため、出力フィードバック受動的である。蓄積関数 $V(x) = (1/2)x^2$ とすると、$uy = \dot{V} + yh(y)$ が得られる。$h \in [0,\infty]$ ならば、システムは受動的。$yh(y) > 0\ ,\ \forall y \neq 0$ ならば、出力厳密安定。
例 6.3
図 6.10(a) に示す積分器と受動的メモリーレス関数のカスケード接続は、次式で表される。

$$a\dot{x} = -x + u\ ,\ y = h(x) \tag{13}$$

- h の受動性は、すべての x に対して $\int_0^x h(\sigma)d\sigma \geq 0$ であることを保証。
- $V(x) = \int_0^x h(\sigma)d\sigma$ を蓄積関数とすると、$\dot{V} = h(x)\dot{x} = yu$ となる。このシステムは無損失。
- ここで、図 6.10(b) に示すように、積分器を $a > 0$ の伝達関数 $1/(as+1)$ で置き換えたとき、システムは次の状態モデルで表現できる。

$$a\dot{x} = -x + u\ ,\ y = h(x) \tag{14}$$

$V(x) = a\int_0^x h(\sigma)d\sigma$ を蓄積関数とすると、

$$\dot{V} = h(x)(-x+u) = yu - xh(x) \leq yu \tag{15}$$

したがって、このシステムは受動的である。
すべての $x \neq 0$ に対して $xh(x) > 0$ のとき、システムは厳密受動的である。