Ex6.7

伝達関数 $(b_0 s + b_1)/(s^2 + a_1 s + a_2)$ が厳密に誠実であるとき、かつその時に限り、
すべての係数が正であり、かつ $b_1 < a_1 b_0$ であることを示せ。

伝達関数 $G(s) = (b_0 s + b_1)/(s^2 + a_1 s + a_2)$ が厳密に誠実であること、つまり

- $G(s)$ の極の実部が負である
- $Re[G(jw)] > 0$ であること
- $G(\infty) = 0$ and $\lim_{w\to\infty} w^2 Re[G(jw)] > 0$

の条件について考える。
$G(s)$ の極は $\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$ となるため、$G(s)$ の極の実部が負であるとき、かつその時に限り、$a_1, a_2 > 0$ である。

$$Re[G(jw)] = Re\left[\frac{b_0 jw + b_1}{-w^2 + a_1 jw + a_2}\right] = \frac{b_1 a_2 + (b_0 a_1 - b_1)w^2}{(a_2 - w^2)^2 + a_1^2 w^2}$$

ここで、先ほどの条件より、$a_1, a_2 > 0$ であるとする。
$Re[G(jw)] > 0$ であるとき、かつその時に限り、$b_1 > 0$, $b_0 a_1 \geq b_1$ である。$G(\infty) = 0$ であるため、

$$\lim_{w\to\infty} w^2 Re[G(jw)] = b_0 a_1 - b_1$$

よって、$\lim_{w\to\infty} w^2 Re[G(jw)] > 0$ であるとき、かつその時に限り、$b_0 a_1 > b_1$ である。
そのため、伝達関数 $(b_0 s + b_1)/(s^2 + a_1 s + a_2)$ が厳密に誠実であるとき、かつその時に限り、
すべての係数が正であり、かつ $b_1 < a_1 b_0$ である。

Ex6.19

(6.21)(6.22) の形式の 2 つの時不変動的システムのフィードバック接続を考える。

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, e_i) \tag{6.21}$$
$$y_i = h_i(x_i, e_i) \tag{6.22}$$

両方のフィードバック成分がゼロ状態可観測であり、以下を満たす正定値蓄積関数が存在すると仮定する。

$$e_i^\top y_i \geq \dot{V}_i + e_i^\top \varphi_i(e_i) + y_i^\top \rho_i(y_i)\ ,\ \text{for } i = 1, 2$$

$u = 0$ の閉ループ システム (6.24) は、

$$v^\top[\rho_1(v) + \varphi_2(v)] > 0 \text{ and } v^\top[\rho_2(v) - \varphi_1(-v)] > 0\ ,\ \forall v \neq 0$$

の場合、原点が漸近安定であることを示せ。

また、どのような条件を追加すれば、原点が大域的漸近安定になるか？ $u = 0$ のとき、$e_1 = -y_2$, $e_2 = y_1$ である。

閉ループ系のリアプノフ候補関数 $V = V_1 + V_2$ とする。V_1, V_2 が正定値関数であるため、V も正定値関数である。

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq e_1^\top y_1 - e_1^\top \varphi_1(e_1) - y_1^\top \rho_1(y_1) + e_2^\top y_2 - e_2^\top \varphi_2(e_2) - y_2^\top \rho_2(y_2) \\ &= -y_1^\top\{\varphi_2(y_1) + \rho(y_1)\} + y_2^\top\{\rho_2(y_2) - \varphi_1(-y_2)\} \leq 0\end{aligned}$$

$\dot{V} = 0 \Rightarrow y_1^\top\{\varphi_2(y_1) + \rho(y_1)\} = 0 \text{and} y_2^\top\{\rho_2(y_2) - \varphi_1(-y_2)\} = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \text{and} y_2 = 0$

ここで、$y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$,$y_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ となるため、原点が漸近安定である。

また、原点が大域的漸近安定にとなるには、蓄積関数 V_1, V_2 が放射状非有界である必要がある。