Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Иракский государственный университет им. Д.В. Буша»

Арбузолитейный факультет

Специальность «Фундаментальный исламизм и физическая софистика»

Кафедра общей демократии

Дипломная работа

Восстановление архитектуры разрушенных городов по многобахчевым дынным полям методом всеобщего голосования

«К защите допущен»:

Зав. кафедрой общей демократии, профессор, д.ф.-м.н.	____________	Иванов И.И.
Научный руководитель, профессор, в.н.с. ЁКЛ ЭМЭН, д.ф.-м.н.	____________	Петров П.П.
Рецензент, зав. лаб. ЖЗ ИКЛ, д.ф.-м.н.	____________	Сидоров С.С.
Консультант по технике безопасности, ассистент каф. софистики	____________	Рейсфейдер Р.Р.
Дипломник	____________	Ватманн В.В.

г. Анкара, 2009

Содержание

Глава I. Введение

Гипероктаэдральные или кубические комбинаторные виды — развите идеи комбинаторных типов (species). Мы будем обозначать их h-species для краткости. TODO:добавить введение (видимо взять часть из Bergeron)

План: Изложить теорию для species, параллельно строить ее для h-species

species — сложение умножение — аналитический функтор — композиция аналитических функторов — композиция species — декатегорификация аналитического функтора — примеры

Глава II. Основные определения

species HSet h-species аналитический функтор

Глава III. Формулы

3.1. Аналитический функтор для h-species

Аналитический функтор $\mathcal{F}$ соответствующий species F является продуктивной конструкцией, позволяющей определить композиционное произведение species. Вводить его можно разными способами, мы ограничимся универсальным свойством и явной конструкцией (TODO: дописать и возможно добавить определение Дурова). Аналитический функтор является левым расширением по Кану функтора F относительно i.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook, "i"'] & Set \\ Set \arrow[ur, "\mathcal{F}"'] & \end{tikzcd}$$

Эта диаграмма не коммутативна, а почти коммутативна. Иммется в виду, что из F существует естественное преобразование в $i \circ \mathcal{F}$. Это естественное преобразование обозначим κ. Универсальность заключаеться в том, что для любого функтора $M\colon Set \to Set$ и морфизма функторов $\eta\colon F \to i \circ M$ этот морфизм пропускаеться через $\mathcal{F}$ при помощи κ.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathcal{F} \arrow[d, dashed] \\ & M \end{tikzcd}$$

Явная формула для аналитического функтора. Для доказательства см (TODO)

$$\mathcal{F} = \sum_n F[n] \times A^n / S_n \tag{3.1}$$

Хочется построить аналог аналитического функтора для h-species

$$\begin{tikzcd} HB \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook, "i"'] & HSet \\ HSet \arrow[ur, "\mathcal{F}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{F} = \sum_n F[\bar{n}] \times A^{\bar{n}} / B_n \tag{3.2}$$

Где $A^{\bar{n}}$ задает отображение, сохраняющее инволюцию.

TODO:Здесь нужно добавить проверук универсальности картинки

3.2. Декотигорификация аналитического функтора (Фробениусова характеристика / Цикленный индекс)

3.2.1. Случай обычных species

Напомним ситуацию с обычными species. Надо устроить морфизм из моноидальной категории (категории с тензорным произведением) в какую-нибудь алгебру функций. Мы вводим весовую функцию таким образом что орбита раскрашенной структуры под действием S_n имеет один и тот же вес. После этого можно задать вопрос о коэфициенте при мономе, отвечающем весу. Это будет число орбит с заданной весовой функцией. По Лемме Бернсайда это то же самое, что и усредненное число неподвижных точек по всем элементам группы. Чтобы раскрашенная структура была неподвижна под действием перестановки σ нужно, чтобы во-первых она была неподвижна как не раскрашенная структура, а во-вторых расскраска должна переходить в себя. В качестве весовой функции выбираем моном возникающий в произведении переменных отвечающим цветам. Например расскраске в которой 2 первых цвета и 1 второй соответсвует моном $x_1^2 x_2$. Тогда первое условие дает нам сомножитель $\chi(\sigma)$, где характер это характер соответствующего перестановочного представления с базисом из структур. Второе условие требует покраски каждого цикла в один и тот же цвет. Итоговая формула называеться фробениусовой характеристикой / цикленным индексом. Она считает количество неподвижных раскрашенных структур в среднем.

$$\mathcal{Z}_F = \sum_{\lambda \vdash n} \chi(\sigma_\lambda) \frac{\phi^\lambda}{z_\lambda} \tag{3.3}$$

Где χ — характер (перестановочного) представления заданного F, σ — перестановка цикленного типа λ, $\phi^\lambda = (x_1^{\lambda_1} + x_2^{\lambda_1} + x_3^{\lambda_1} + \dots)(x_1^{\lambda_2} + x_2^{\lambda_2} + x_3^{\lambda_2} + \dots)(x_1^{\lambda_3} + x_2^{\lambda_3} + x_3^{\lambda_3} + \dots)\dots$, z_λ — индекс класса сопряженности σ. Появляется она из следующих соображений: в числителе стоит симметрическая функция считающая все неподвижные раскраски. Цвета это $x_1, x_2, x_3, \dots$

3.2.2. Случай h-species

Попробуем построить аналогичную конструкцию для h-species. Прежде всего отметим, что расскраска, элемент $A^{\bar{n}}$, это отображение, сохраняющее инволюцию. Значит элементы n и $-n$ должны отображаться либо в один и тот же элемент A (который инволюцией переводиться в себя), либо в пару элементов сопряженных инволюцией. Будем называть первый случай *моноцветом*, второй — *бицветом.*

Допустим, что мы придумали весовую функцию, отправляющую каждую расскрашенную структуру в моном и любая орбита отправляеться в один моном. Применив Лемму Бернсайда переходим к подсчету неподвижных точек. Циклы в каждом элементе H_n бывают двух типов: длинные — каждая грань входит в цикл вместе со своей противоположной гранью и короткие — пара граней лежит в симметричных, различных циклах. Пусть λ^1 — цикленный тип коротких перестановок, λ^2 — цикленный тип длинных перестановок. Утверждение: неподвижные раскрашенные структуры, это в точности те у которых длинный цикл соответсвует моноцвету, а пара симметричных коротких может быть покрашена либо в моноцвет, либо в бицвет.

Это можно выразить такой формулой:

$$\mathcal{Z}_F = \sum_{\lambda^1+\lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1\lambda^2}) \frac{\phi_{x,y}^{\lambda^1}\phi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1\lambda^2}} \tag{3.4}$$

Здесь нижний индекс ϕ означает переменные по которым берется степенная сумма. Например $\phi_{x,y}^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots)$. Переменные x_i перечисляют моноцвета, y_i — бицвета.

TODO:Здесь еще можно сказать что-то про инволюцию на этих функциях, поскольку мы все–таки декатегорифицировали не предпучки, а чуть более сложную штуку — пучки с инволюцией.

3.3. Цикленный индекс композиции

3.3.1. Случай обычных species

Аналитический функтор позволяет дать определние композиционного произведения двух структур. Рассмотрим два species F и G. По ним можно построить аналитические функторы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Композиция этих функторов снова будет анлитическим функтором $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$. Доказательство его аналитичности можно найти в [TODO: где или взять доказательство Дурова]. Species который соответсвует цикленному индексу $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ и будет называться $F \circ G$. У этого определения есть простая, наглядная комбинаторная интерпретация: каждую точку структуры F раздуваем(красим) в структуру типа G. Чудесный факт заключается в том, что в декатегорификации композиция соответсвует простой формуле подстановке. Сейчас мы ее напишем и приведем набросок доказательства. Цикленный индекс записан относительно базиса кольца симметрических функций $\phi^1, \phi^2, \phi^3, \ldots$

$$\begin{multline}\mathcal{Z}_{F\circ G}(\phi^1, \phi^2, \phi^3, \ldots) = \\ \mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(\phi^1, \phi^2, \phi^3, \ldots), \mathcal{Z}_G(\phi^2, \phi^4, \phi^6, \ldots), \mathcal{Z}_G(\phi^3, \phi^6, \phi^9, \ldots), \ldots) \quad (3.5)\end{multline}$$

В композиции двух аналитических функторов получается, что цвета в которые мы красим структуру F это структуры типа G. То есть $\mathcal{Z}_{F\circ G} = \mathcal{Z}_F(\phi_g^1, \phi_g^2, \phi_g^3, \ldots)$, где $\phi_g^i = (g_1^i + g_2^i + g_3^i + \ldots)$, где g_i — перечисление всех структур типа G. Нужно раскрыть переменные g_i — написать их относительно начальных цветов. Формулу $\phi_g^i = \mathcal{Z}_G(\phi^i, \phi^{2i}, \phi^{3i}, \ldots)$ легко понять в переменных $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Мы должны покрасить i кусков в одну и ту же G–структуру. Значит каждый цвет x_j заменяется на x_j^i.

Формулу 3.5 можно специализировать для подсчета labeled–структур. То есть покрашенных структур у которых нет двух одинаковых цветов в раскраске. Соответсвующие мономы (в базисе $x_1, x_2, x_3, \ldots$) возникают только при раскрытии мономов вида $c(\phi^1)^k$ и коэффициент в них равен $ck!$ — такой же как при мономе с точностью до факториала. Этот факториал приводит к необходимости рассматривать экспоненциальные производящие функции вместо обычных. Можно занулить все остальные мономы подстановкой $\phi^1 = t, \phi^2 = 0, \phi^3 = 0, \phi^4 = 0$. Формула 3.5 примет вид $\mathcal{Z}_{F\circ G}(t, 0, 0, \ldots) =$

$\mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(t,0,0,\dots),0,0,\dots)$. А значит для экспоненциальных производящих функции labeled-структур справедливо равенство $(f\circ g)(t) = f(g(t))$. А поскольку labeled структур ровно в $k!$ раз больше, чем unlabeled, то это равенство справедливо для обыкновенных производящих функций unlabeled структур.

3.3.2. Случай h-species

Теперь попробуем выстроить теорию композиции цикленного индекса для h-species, параллельно теории species. Прежде всего отметим, что инволюция на множестве цветов делит их на моноцвета $(x_1,x_2,x_3,\dots)$ и бицвета $(y_1,y_2,y_3,\dots)$. Однако, формула 3.4 подсказывает что в качестве базиса можно брать не ϕ_x^i,ϕ_y^j а $\phi_x^i,\phi_{x,y}^j$. Впрочем это тривиальная замена переменных, поскольку $\phi_{x,y}^j = \phi_x^j + \phi_y^j$. Итак мы хоти понять чему равняется

$$\begin{aligned}&\mathcal{Z}_{F\circ G}(\phi_x^1,\phi_x^2,\phi_x^3,\dots,\\ &\qquad\phi_{x,y}^1,\phi_{x,y}^2,\phi_{x,y}^3,\dots)\end{aligned}$$

Предположение[TODO: заменить на утверждение] такое:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{F\circ G}(\phi_x^1,\phi_x^2,\phi_x^3,\dots,\phi_{x,y}^1,\phi_{x,y}^2,\phi_{x,y}^3,\dots) = \\ \mathcal{Z}_F(&\mathcal{Z}_G(\phi_x^1,\phi_x^2,\phi_x^3,\dots,\phi_x^1,\phi_x^2,\phi_x^3,\dots),\\ &\mathcal{Z}_G(\phi_x^2,\phi_x^4,\phi_x^6,\dots,\phi_x^2,\phi_x^4,\phi_x^6,\dots),\\ &\mathcal{Z}_G(\phi_x^3,\phi_x^6,\phi_x^9,\dots,\phi_x^3,\phi_x^6,\phi_x^9,\dots),\\ &\dots,\\ &\mathcal{Z}_G(\phi_x^1,\phi_x^2,\phi_x^3,\dots,\phi_{x,y}^1,\phi_{x,y}^2,\phi_{x,y}^3,\dots),\\ &\mathcal{Z}_G(\phi_x^2,\phi_x^4,\phi_x^6,\dots,\phi_{x,y}^2,\phi_{x,y}^4,\phi_{x,y}^6,\dots),\\ &\mathcal{Z}_G(\phi_x^3,\phi_x^6,\phi_x^9,\dots,\phi_{x,y}^3,\phi_{x,y}^6,\phi_{x,y}^9,\dots),\\ &\dots)\end{aligned} \tag{3.6}$$

Эта формула слишком громоздкая, поэтому давайте напишем ее на уровне членов:

$$\begin{aligned}\phi_x^i\circ\mathcal{Z}_G = Z_G(&\phi_x^i,\phi_x^{2i},\phi_x^{3i},\dots,\\ &\phi_x^i,\phi_x^{2i},\phi_x^{3i},\dots)\end{aligned}$$

$$\phi^i_{x,y} \circ \mathcal{Z}_G = Z_G(\phi^i_x, \phi^{2i}_x, \phi^{3i}_x, \ldots,$$
$$\phi^i_{x,y}, \phi^{2i}_{x,y}, \phi^{3i}_{x,y}, \ldots)$$