ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «ИРАКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Д.В. БУША»

Арбузолитейный факультет

Специальность «Фундаментальный исламизм и физическая софистика»

Кафедра общей демократии

Дипломная работа

ВОССТАНОВЛЕНИЕ АРХИТЕКТУРЫ РАЗРУШЕННЫХ ГОРОДОВ ПО МНОГОБАХЧЕВЫМ ДЫННЫМ ПОЛЯМ МЕТОДОМ ВСЕОБЩЕГО ГОЛОСОВАНИЯ

| «К защите допущен»: | |
|---|-----------------|
| Зав. кафедрой общей демократии, профессор, д.фм.н. | Иванов И.И. |
| Научный руководитель, профессор, в.н.с. ЁКЛ ЭМЭН, д.фм.н. | Петров П.П. |
| Рецензент, зав. лаб. ЖЗ ИКЛ, д.фм.н. | Сидоров С.С. |
| Консультант по технике безопасности, ассистент | |
| каф. софистики | Рейсфейдер Р.Р. |
| Дипломник | Ватманн В.В. |

Содержание

| Глава I. | Введение | 3 |
|------------|---|---|
| Глава II. | Основные определения | 4 |
| Глава III. | Формулы | 4 |
| 3.1. Ан | алитический функтор для h-species | 4 |
| 3.2. Де | котигорификация аналитического функтора (Фробениусова | |
| xap | рактеристика / Цикленный индекс) | 5 |
| 3.3. Ци | кленный индекс композиции | 7 |

Глава I. Введение

Гипероктаэдральные или кубические комбинаторные виды — развите идеи комбинаторных типов (species). Мы будем обозначать их h-species для краткости. ТООО:добавить введение (видимо взять часть из Bergeron)

План: Изложить теорию для species, параллельно строить ее для h-species species — сложение умножение — аналитический функтор — композиция аналитических функторов — композиция species — декатегорификация аналитического функтора — примеры

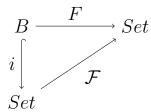
Глава II. Основные определения

species HSet h-species аналитический функтор

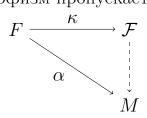
Глава III. Формулы

3.1. Аналитический функтор для h-species

Аналитический функтор \mathcal{F} соответствующий species F является продуктивной конструкцией, позволяющей определить композиционное произведение species. Вводить его можно разными способами, мы ограничимся универсальным свойством и явной конструкцией (TODO: дописать и возможно добавить определение Дурова). Аналитический функтор является левым расширением по Кану функтора F относительно i.



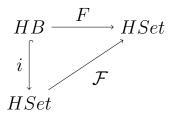
Эта диаграмма не коммутативна, а почти коммутативна. Иммется в виду, что из F существует естественное преобразование в $i \circ \mathcal{F}$. Это естественное преобразование обозначим κ . Универсальность заключаеться в том, что для любого функтора $M \colon Set \to Set$ и морфизма функторов $\eta \colon F \to i \circ M$ этот морфизм пропускаеться через \mathcal{F} при помощи κ .



Явная формула для аналитического функтора. Для доказательства см (TODO)

$$\mathcal{F} = \sum_{n} F[n] \times A^{n} / S_{n} \tag{3.1}$$

Хочется построить аналог аналитического функтора для h-species



$$\mathcal{F} = \sum_{n} F[\bar{n}] \times A^{\bar{n}}/B_n \tag{3.2}$$

Где $A^{\bar{n}}$ задает отображение, сохраняющее инволюцию.

TODO:Здесь нужно добавить проверук универсальности картинки

3.2. Декотигорификация аналитического функтора (Фробениусова характеристика / Цикленный индекс)

3.2.1. Случай обычных species

Напомним ситуацию с обычными species. Надо устроить морфизм из моноидальной категории (категории с тензорным произведением) в какую-нибудь алгебру функций. Мы вводим весовую функцию таким образом что орбита раскрашенной структуры под действием S_n имеет один и тот же вес. После этого можно задать вопрос о коэфициенте при мономе, отвечающем весу. Это будет число орбит с заданной весовой функцией. По Лемме Бернсайда это то же самое, что и усредненное число неподвижных точек по всем элементам группы. Чтобы раскрашенная структура была неподвижна под действием перестановки σ нужно, чтобы во-первых она была неподвижна как не раскрашенная структура, а во-вторых расскраска должна переходить в себя. В качестве весовой функции выбираем моном возникающий в произведении переменных отвечающим цветам. Например расскраске в которой 2 первых цвета и 1 второй соответсвует моном $x_1^2x_2$. Тогда первое условие дает нам сомножитель $\chi(\sigma)$, где характер это характер соответствующего перестановочного представления с базисом из структур. Второе условие требует покраски каждого цикла в один и тот же цвет. Итоговая формула называеться фробениусовой характеристикой / цикленным индексом. Она считает количество неподвижных раскрашенных структур в среднем.

$$\mathcal{Z}_F = \sum_{\lambda \vdash n} \chi(\sigma_\lambda) \frac{\phi^\lambda}{z_\lambda} \tag{3.3}$$

Где χ — характер (перестановочного) представления заданного F, σ — перестановка цикленного типа λ , $\phi^{\lambda} = (x_1^{\lambda_1} + x_2^{\lambda_1} + x_3^{\lambda_1} + \dots)(x_1^{\lambda_2} + x_2^{\lambda_2} + x_3^{\lambda_2} + \dots)(x_1^{\lambda_3} + x_2^{\lambda_3} + x_3^{\lambda_3} + \dots) \dots, z_{\lambda}$ — индекс класса сопряженности σ . Появляется она из следующих соображений: в числителе стоит симметрическая функция считающая все неподвижные раскраски. Цвета это x_1, x_2, x_3, \dots

3.2.2. Случай h-species

Попробуем построить аналогичную конструкцию для h-species. Прежде всего отметим, что расскраска, элемент $A^{\bar{n}}$, это отображение, сохраняющее инволюцию. Значит элементы n и -n должны отображаться либо в один и тот же элемент A (который инволюцией переводиться в себя), либо в пару элементов сопряженных инволюцией. Будем называть первый случай моно-цветом, второй — бицветом.

Допустим, что мы придумали весовую функцию, отправляющую каждую расскрашенную структуру в моном и любая орбита отправляеться в один моном. Применив Лемму Бернсайда переходим к подсчету неподвижных точек. Циклы в каждом элементе H_n бывают двух типов: длинные — каждая грань входит в цикл вместе со своей противоположной гранью и короткие — пара граней лежит в симметричных, различных циклах. Пусть λ^1 — цикленный тип коротких перестановок, λ^2 — цикленный тип длинных перестановок. Утверждение: неподвижные раскрашенные структуры, это в точности те у которых длинный цикл соответсвует моноцвету, а пара симметричных коротких может быть покрашена либо в моноцвет, либо в бицвет.

Это можно выразить такой формулой:

$$\mathcal{Z}_F = \sum_{\lambda^1 + \lambda^2 \vdash n} \chi(\sigma_{\lambda^1 \lambda^2}) \frac{\phi_{x,y}^{\lambda^1} \phi_x^{\lambda^2}}{z_{\lambda^1 \lambda^2}}$$
(3.4)

Здесь нижний индекс ϕ означает переменные по которым берется степенная сумма. Например $\phi_{x,y}^2=(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+y_1^2+y_2^2+y_3^2+\dots)$. Переменные x_i перечисляют моноцвета, y_i — бицвета.

ТООО:Здесь еще можно сказать что-то про инволюцию на этих функциях, поскольку мы все—таки декатегорифицировали не предпучки, а чуть более сложную штуку — пучки с инволюцией.

3.3. Цикленный индекс композиции

3.3.1. Случай обычных species

Аналитический функтор позволяет дать определние композиционного произведения двух структур. Рассмотрим два species F и G. По ним можно построить аналитические функторы \mathcal{F} и \mathcal{G} . Композиция этих функторов снова будет анлитическим функтором $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$. Доказательство его аналитичности можно найти в [TODO: где или взять доказательство Дурова]. Species который соответсвует цикленному индексу $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ и будет называться $F \circ G$. У этого определения есть простая, наглядная комбинаторная интерпретация: каждую точку структуры F раздуваем(красим) в структуру типа G. Чудесный факт заключается в том, что в декатегорификации композиция соответсвует простой формуле подстановке. Сейчас мы ее напишем и приведем набросок доказательства. Цикленный индекс записан относительно базиса кольца симметрических функций $\phi^1, \phi^2, \phi^3, \dots$

$$\mathcal{Z}_{F \circ G}(\phi^{1}, \phi^{2}, \phi^{3}, \dots) = \mathcal{Z}_{F}(\mathcal{Z}_{G}(\phi^{1}, \phi^{2}, \phi^{3}, \dots), \mathcal{Z}_{G}(\phi^{2}, \phi^{4}, \phi^{6}, \dots), \mathcal{Z}_{G}(\phi^{3}, \phi^{6}, \phi^{9}, \dots), \dots)$$
(3.5)

В композиции двух аналитических функторов получается, что цвета в которые мы красим структуру F это структуры типа G. То есть $\mathcal{Z}_{F \circ G} = \mathcal{Z}_F(\phi_g^1, \phi_g^2, \phi_g^3, \ldots)$, где $\phi_g^i = (g_1^i + g_2^i + g_3^i + \ldots)$, где g_i — перечисление всех структур типа G. Нужно раскрыть переменные g_i — написать их относительно начальных цветов. Формулу $\phi_g^i = \mathcal{Z}_G(\phi^i, \phi^{2i}, \phi^{3i}, \ldots)$ легко понять в переменных x_1, x_2, x_3, \ldots Мы должны покрасить i кусков в одну и ту же G-структуру. Значит каждый цвет x_j заменяется на x_j^i .

Формулу 3.5 можно специализировать для подсчета labeled—структур. То есть покрашенных структур у которых нет двух одинаковых цветов в расскраске. Соответсвующие мономы (в базисе x_1, x_2, x_3, \ldots) возникают только при раскрытии мономов вида $c(\phi^1)^k$ и коэффициент в них равен ck! — такой же как при мономе с точностью до факториала. Этот факториал приводит к необходимости рассматривать экспоненциальные производящие функции вместо обычных. Можно занулить все остальные мономы подстановкой $\phi^1 = t, \phi^2 = 0, \phi^3 = 0, \phi^4 = 0$. Формула 3.5 примет вид $\mathcal{Z}_{F\circ G}(t, 0, 0, \ldots) =$

 $\mathcal{Z}_F(\mathcal{Z}_G(t,0,0,\dots),0,0,\dots)$. А значит для экспоненциальных производящих функции labeled-структур справедливо равенство $(f \circ g)(t) = f(g(t))$. А поскольку labeled структур ровно в k! раз больше, чем unlabeled, то это равенство справедливо для обыкновенных производящих функций unlabeled структур.

3.3.2. Случай h-species

Теперь попробуем выстроить теорию композиции цикленного индекса для h-species, параллельно теории species. Прежде всего отметим, что инволюция на множестве цветов делит их на моноцвета (x_1, x_2, x_3, \dots) и бицвета (y_1, y_2, y_3, \dots) . Однако, формула 3.4 подсказывает что в качестве базиса можно брать не ϕ_x^i, ϕ_y^j а $\phi_x^i, \phi_{x,y}^j$. Впрочем это тривиальная замена переменных, поскольку $\phi_{x,y}^j = \phi_x^j + \phi_y^j$. Итак мы хоти понять чему равняется

$$\mathcal{Z}_{F \circ G}(\phi_x^1, \phi_x^2, \phi_x^3, \dots, \phi_{x,y}^1, \phi_{x,y}^2, \phi_{x,y}^3, \dots)$$

Предположение [TODO: заменить на утверждение] такое:

$$\mathcal{Z}_{F\circ G}(\phi_{x}^{1}, \phi_{x}^{2}, \phi_{x}^{3}, \dots, \phi_{x,y}^{1}, \phi_{x,y}^{2}, \phi_{x,y}^{3}, \dots) = \\
\mathcal{Z}_{F}(\mathcal{Z}_{G}(\phi_{x}^{1}, \phi_{x}^{2}, \phi_{x}^{3}, \dots, \phi_{x}^{1}, \phi_{x}^{2}, \phi_{x}^{3}, \dots), \\
\mathcal{Z}_{G}(\phi_{x}^{2}, \phi_{x}^{4}, \phi_{x}^{6}, \dots, \phi_{x}^{2}, \phi_{x}^{4}, \phi_{x}^{6}, \dots), \\
\mathcal{Z}_{G}(\phi_{x}^{3}, \phi_{x}^{6}, \phi_{x}^{9}, \dots, \phi_{x}^{3}, \phi_{x}^{6}, \phi_{x}^{9}, \dots), \\
\dots, \\
\mathcal{Z}_{G}(\phi_{x}^{1}, \phi_{x}^{2}, \phi_{x}^{3}, \dots, \phi_{x,y}^{1}, \phi_{x,y}^{2}, \phi_{x,y}^{3}, \dots), \\
\mathcal{Z}_{G}(\phi_{x}^{2}, \phi_{x}^{4}, \phi_{x}^{6}, \dots, \phi_{x,y}^{2}, \phi_{x,y}^{4}, \phi_{x,y}^{6}, \dots), \\
\mathcal{Z}_{G}(\phi_{x}^{3}, \phi_{x}^{6}, \phi_{x}^{9}, \dots, \phi_{x,y}^{3}, \phi_{x,y}^{6}, \phi_{x,y}^{9}, \dots), \\
\dots)$$
(3.6)

Эта формула слишком грамоздкая, поэтому давайте напишем ее на уровне членов:

$$\phi_x^i \circ \mathcal{Z}_G = Z_G(\phi_x^i, \phi_x^{2i}, \phi_x^{3i}, \dots, \phi_x^i, \phi_x^{2i}, \phi_x^{3i}, \dots)$$

$$\phi_{x,y}^{i} \circ \mathcal{Z}_{G} = Z_{G}(\phi_{x}^{i}, \phi_{x}^{2i}, \phi_{x}^{3i}, \dots, \phi_{x,y}^{i}, \phi_{x,y}^{2i}, \phi_{x,y}^{3i}, \dots)$$