

有限单元相场法脆性断裂模拟

本案例通过有限元法求解弹性和相场方程，包含增量外部载荷。

微裂纹引发断裂过程其生长路径的预测对于工程结构和零部件的安全运行十分重要。理解断裂的微观机理有助于帮助存在裂纹状缺陷的材料抵抗过早失效。断裂的理论基础基于格里菲斯[1]和欧文[2]的早期著作。基于热力学框架，他们假设当裂纹尖端的弹性应变能等于或大于产生两个新表面所需的能量时，现有裂纹开始不稳定扩展。

多年来，基于传统有限元法和边界元法的各种算法已经被开发出来，用于在一定程度上对裂缝进行建模和模拟。在这些经典的尖界面裂纹方法中，主要的困难在于裂纹路径的确定，裂纹在扩展过程中的扭结和分裂。通常通过假设基础物理条件加入本构模型中，或者使用一些非常繁琐和苛刻的算法。

由于相场建模的优越性和处理演化界面的自然方式，人们对用相场建模框架进行裂纹建模和模拟越来越感兴趣。在[3–11]中可以找到一些将相场模型应用于线弹性脆性断裂的例子。在[12–14]中给出了基于弹塑性材料的扩展。此外，相场模型还被用于分析内含流体的多孔介质的裂纹的扩展行为[15]。

## 相场模型：

在本案例研究中，采用了[8，9，11]中提出的相场裂缝模型。在模型中，非守恒相场参量 $\phi$ 在零值(无损坏/无裂纹)和1(完全损坏/有裂纹)之间变化。这个概念是从早期的扩散断裂模型[16]中借用来的，并且与能够承受外加牵引力的面积损失有关。对于一维情况，它表示为：

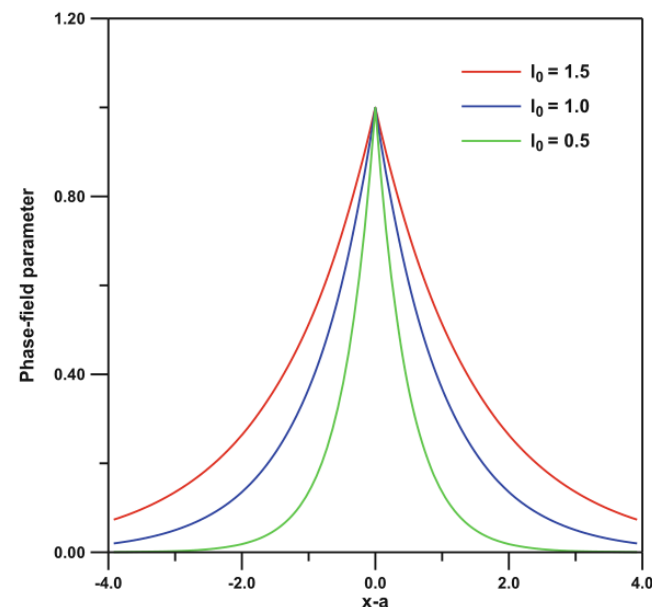
$$\phi = \exp\left(\frac{-|x - a|}{l_0}\right)$$

其中 $x$ 是距离， $a$ 是初始裂纹长度， $l_0$ 是控制裂纹扩展的长度参数。

在存在裂纹/损伤的情况下，总势能函数采用以下形式：

$$\begin{aligned} \Psi(\phi, u) = & \int_V \left[ (1 - \phi)^2 + k \right] \psi(\epsilon) dV \\ & + \int_V \frac{G_c}{2} \left[ l_0 \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \frac{1}{l_0} \phi^2 \right] dV \end{aligned}$$

第一项表示由于裂纹/损伤的变化而引起的应变能的变化。 $k$ 是为了数字方便而选择的参数。它的值尽可能小，同时保持方程组的良好条件。第二个被积函数表示随着裂纹/损伤的变化而产生新的裂纹表面所导致的能量耗散。参数 $G_c$ 是不稳定裂纹/损伤扩展的临界能量释放，它是一种材料特性。



弹性  
应变  
能

$$\psi(\epsilon) = \frac{1}{2} \epsilon C \epsilon \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

弹性矩阵

应变

有限元模型:

外部做功 (external)

内能变化量 (internal)

$$\delta W_{ext} = \int_V b_j \delta u_j dV + \int_{\partial V} h_j \delta u_j \partial V \quad \delta W_{int} = \delta \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} + \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \delta \phi$$

带入相场模型

$$\delta \Psi = \int_V \left[ (1 - \phi)^2 + k \right] \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV + \int_V -2(1 - \phi) \delta \phi \psi(\epsilon) dV + \int_V G_c \left( l_o \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{1}{l_0} \phi \delta \phi \right) dV$$

试函数

势能残差

使内外功相等的残差

$$R_e^u = \int_V \left[ (1 - \phi)^2 + k \right] (B_i^u)^T \sigma dV - \int_V N^T b dV - \int_{\partial V} N^T h \partial V \quad R_e^\phi = \int_V \left[ G_c l_0 (B_i^\phi)^T \nabla \phi + \left( \frac{G_c}{l_0} + 2\psi(\epsilon) \right) N \phi - 2N \psi(\epsilon) \right] dV$$

单元节点数

应变矩阵

节点变量 (位移)

$$u = \sum_i^n N_i u_i, \quad \epsilon = \sum_i^n B_i^u u_i$$

单元形状函数

笛卡尔导数矩阵

$$\phi = \sum_i^n N_i \phi_i, \quad \nabla \phi = \sum_i^n B_i^\phi \phi_i$$

$$B_i^u = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B_i^\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}$$

有限元模型:

刚度矩阵

$$K_e = \begin{bmatrix} K_{ij}^{uu} & K_{ij}^{u\phi} \\ K_{ij}^{\phi u} & K_{ij}^{\phi\phi} \end{bmatrix}$$

$$K_{ij}^{uu} = \frac{\partial R_e^u}{\partial u} = \int_V \left[ (1 - \phi)^2 + k \right] (B_i^u)^T C B_j^u dV$$

$$K_{ij}^{u\phi} = \frac{\partial R_e^u}{\partial \phi} = \int_V -2(1 - \phi) (B_i^u)^T \sigma N_j dV$$

$$K_{ij}^{\phi u} = \frac{\partial R_e^\phi}{\partial u} = \int_V -2(1 - \phi) N_i \sigma B_j^u dV$$

$$K_{ij}^{\phi\phi} = \frac{\partial R_e^\phi}{\partial \phi} = \int_V \left[ G_c l_0 (B_i^\phi)^T B_j^\phi + \left( \frac{G_c}{l_0} + 2\psi(\varepsilon) \right) N_i N_j \right] dV$$

防止裂缝/损伤的愈合

$$\langle x \rangle_- = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$P(\dot{\phi}) = \frac{\eta}{n} \langle \dot{\phi} \rangle_-$$

$$[K^G] \{\delta\} = \{R^G\}$$

$$\delta = (u_1^1, u_2^1, u_1^2, u_2^2, \dots, u_1^N, u_2^N, \phi^1, \phi^2, \dots, \phi^N)^T$$

$$R_e^\phi = \int_V \left[ G_c l_0 (B_i^\phi)^T \nabla \phi + \left( \frac{G_c}{l_0} + 2\psi(\varepsilon) \right) N \phi - 2N \left( \psi(\varepsilon) - \frac{\eta}{n \Delta t} \dot{\phi}_- \right) \right] dV$$

$$K_{ij}^{\phi\phi} = \frac{\partial R_e^\phi}{\partial \phi} = \int_V \left[ G_c l_0 (B_i^\phi)^T B_j^\phi + \left( \frac{G_c}{l_0} + 2\psi(\varepsilon) \right) N_i N_j + \frac{\eta}{\Delta t} \dot{\phi}_- N_i N_j \right] dV$$

修正的牛顿-拉夫逊格式求解非线性方程迭代步骤：

$$[K^G] \{\delta\} = \{R^G\}$$

第1步：  
对于每个时间增量：  
通过增加规定的位移以代表施加的载荷。构成整体刚度矩阵 $[K^G]$

第2步：  
牛顿-拉夫逊迭代：  
确定等式中的残差向量 $\{R^G\}$ 。

求解方程

更新节点变量。  
检查收敛，符合收敛要求，进行继续第一步，否则重复第二步。

$G_c(Nmm^2/mm)$	$E(N/mm^2)$	$\nu$	$L_0$	$k$	$N$	$\eta$
0.001	$20.0 \times 10^5$	0.3	0.125	$1.0 \times 10^{-6}$	2	$2 \times E$

## References

1. Griffith AA (1921) The phenomena of rupture and flow in solids. *Philos Trans R Soc London, Ser A* 221:163–198
2. Irwin GR (1958) Elasticity and plasticity: fracture. In: Flügge S (ed) *Encyclopedia of physics*, vol 6. Springer, Berlin
3. Aranson JS, Kalatsy VA, Vinokur VM (2000) Continuum field description of crack propagation, *Phys Rev Lett* 85:118
4. Karma A, Kessler DA, Levine H (2001) Phase-field model of mode-III dynamic fracture. *Phys Rev Lett* 87:045501
5. Hakim V, Karma A (2009) Laws of crack motion and phase-field model of fracture. *J Mech Phys Solids* 57:342
6. Biner SB, Hu SY (2009) Simulation of damage evolution in composites: A phase-field model. *Acta Mater* 57:2088
7. Kuhn C, Muller R (2010) A continuum phase-field model of fracture. *Eng Fract Mech* 77:3625
8. Miehe C, Hofacher M, Welschinger F (2010) A phase-field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits. *Comput Methods Appl Mech Eng* 199:2765
9. Miehe C, Welschinger F, Hofacker M (2010) Thermodynamically consistent phase-field models of fracture: variational principles and multifield FE implementation. *Int J Numer Methods Eng* 83:1273
10. Borden MJ, Verhoosel CV, Scott MA, Hughes TJR, Landis CM (2012) A phase-field description of dynamic brittle fracture. *Comput Methods Appl Mech Eng* 217–220:77
11. Msekh MA, Sargado JM, Jamshidian M, Areras PM (2015) Abaqus implementation of phase-field model for brittle fracture. *Comput Mater Sci* 96:272
12. Ulmer H, Hofacker M, Miehe C (2013) Phase-field modeling of brittle and ductile fracture. *Proc Appl Math Mech* 13:533
13. Biner SB, Hu SY (2009) Simulation of damage evolution in discontinuously reinforced metal matrix composites: a phase-field model. *Int J Fract* 158:99
14. Duda FP, Ciarbonetti A, Sanches PJ, Uespe AE (2015) A phase-field/gradient damage model for brittle fracture in elastic-plastic solids. *Int J Plast* 65:269
15. Mikelic A, Wheeler MF, Wick T (2015) A phase-field method for propagating fluid-filled fracture coupled to surrounding porous medium. *Multiscale Model Simul* 13:367
16. Chacboche JL (1987) Continuum damage mechanics: present state and future trends. *Nucl Eng Des* 105:19