Kacper Czechowicz, Patryk Ławicki, Mariusz Miszczykowski

Zadanie nr 3 (seria I, AP 1)

Dla danych z wejścia różnych węzłów x_0 , x_1 , … , x_n wyznaczyć współczynniki postaci ogólnej wielomianu *P* interpolującego (x_i , y_i), i = 0,1,...,n, z danymi y_0 , y_1 , … , y_n przy użyciu wzorów Cramera dla odpowiedniego układu równań Następnie obliczyć całkę oznaczoną $\int_a^b P(x)\,dx$ dla dodatkowo wczytanych *a,*

$b \in R$.

Celem zadania jest znalezienie współczynników *a* występujących w wielomianie P(x) interpolacyjnym mając dane x oraz y.

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

Algorytm rozwiązywania zadania:

1. utworzyć układ równań

$$\begin{cases} a0 + a1x0 + \ldots + anx0n = y0 \\ a0 + a1x1 + \ldots + anx1n = y1 \\ \ldots \\ a0 + a1xn + \ldots + anxnn = yn \end{cases}$$

2. Wzór Cramera

wyznaczyć wyznacznik z macierzy A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x0 & \ldots & x0n \\ 1 & x1 & \ldots & x1n \\ & \ldots & & \\ 1 & xn & \ldots & xnn \end{bmatrix}$$

oraz wyznacznik macierzy A_j dla poszczególnych parametrów a o indeksie 0 <= j <= n, Gdzie j-tą kolumnę macierzy zastępujemy kolumną utworzoną z y_j. Przykład poniżej dla j=0:

$A_0 = \begin{bmatrix} y0 & x0 & \dots & x0n \\ y1 & x1 & \dots & x1n \\ & \dots & & \\ yn & xn & \dots & xnn \end{bmatrix}$

(za j-tą kolumne wstawiamy kolumne utworzoną z y-ków)

dane a_j wyliczamy ze wzoru $a_j = \frac{\det Aj}{\det A}$. W ten sposób otrzymamy wielomian

P(x) z kompletem zmiennych.

3. Z powyższego wielomianu policzyć całkę oznaczoną na zadanym wcześniej przedziale.

$\int_a^b (\mathrm{a0} + \mathrm{a1x} + \mathrm{a2x2} + \dots + \mathrm{anxn})\, \mathrm{dx} = (\mathrm{a0} + \mathrm{a1a} + \mathrm{a2a2} + \dots + \mathrm{anan}) - (\mathrm{a0} + \mathrm{a1b} + \mathrm{a2b2} + \dots + \mathrm{anbn})$

Przykład:

$x_1=1$ $x_2=5$ $x_3=8$ $y_1=1$ $y_2=3$ $y_3=5$ a=1 b=2

det A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 8 & 64 \end{bmatrix} = 84$

det A_0 = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 25 \\ 5 & 8 & 64 \end{bmatrix} = 52$

det A_1= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 25 \\ 1 & 5 & 64 \end{bmatrix} = 30$

det $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 8 & 5 \end{bmatrix} = 2$

$$\int_1^2 \left(\frac{52}{84} + \frac{30}{84}x + \frac{2}{84}x2\right)dx = \left(\frac{52}{84}2 + \frac{30}{84}4 + \frac{2}{84}16\right) - \left(\frac{52}{84} + \frac{30}{84} + \frac{2}{84}\right)$$