

Министерство науки и высшего образования
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
‘ Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет) ’
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)



Факультет "Фундаментальные науки"
Кафедра "Высшая математика"

Отчёт
по учебной практике
за 1 семестр 2020 — 2021 гг.

Руководитель практики,
ст. преп. кафедры ФН1 _____ Кравченко О.В.
студент группы ФН1–11 _____ Пияйкина К.А.

Москва,
2020 г.

Содержание

1	Цели и задачи практики	3
1.1	Цели	3
1.2	Задачи	3
1.3	Индивидуальное задание	3
2	Отчёт	4
3	Индивидуальное задание	5
3.1	Пределы и непрерывность	5

1 Цели и задачи практики

1.1 Цели

— развитие компетенций, способствующих успешному освоению материала бакалавриата и необходимых в будущей профессиональной деятельности.

1.2 Задачи

1. Знакомство с программными средствами, необходимыми в будущей профессиональной деятельности.
2. Развитие умения поиска необходимой информации в специальной литературе и других источниках.
3. Развитие навыков составления отчётов и презентации результатов.

1.3 Индивидуальное задание

1. Изучить способы отображения математической информации в системе вёртки LATEX.
2. Изучить возможности системы контроля версий Git.
3. Научиться верстать математические тексты, содержащие формулы и графики в системе LATEX. Для этого, выполнить установку свободно распространяемого дистрибутива TeXLive и оболочки TeXStudio.
4. Оформить в системе LATEX типовые расчёты по курсу математического анализа согласно своему варианту.
5. Создать аккаунт на онлайн ресурсе GitHub и загрузить исходные tex-файлы и результат компиляции в формате pdf.

2 Отчёт

Актуальность темы продиктована необходимостью владеть системой вёрстки LATEX и средой вёрстки TeXStudio для отображения текста, формул и графиков. Полученные в ходе практики навыки могут быть применены при написании курсовых проектов и дипломной работы, а также в дальнейшей профессиональной деятельности.

Система вёрстки LATEX содержит большое количество инструментов (пакетов), упрощающих отображение информации в различных сферах инженерной и научной деятельности.

3 Индивидуальное задание

3.1 Пределы и непрерывность

Задача №1

Условие. Дана последовательность $\{a_n\} = \frac{4+2n}{1-3n}$ и число $c = -\frac{2}{3}$. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c,$$

а именно, для каждого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найти наименьшее натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|a_n - c| < \varepsilon$ для всех номеров $n > N(\varepsilon)$. Заполнить таблицу

ε	0,1	0,01	0,001
$N(\varepsilon)$			

Решение. Рассмотрим неравенство $a_n - c < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, учитывая выражение для a_n и значение c из условий варианта, получим

$$\left| \frac{4+2n}{1-3n} + \frac{2}{3} \right| < \varepsilon.$$

Неравенство запишем в виде двойного неравенства и приведём выражение под знаком модуля к общему знаменателю, получим

$$-\varepsilon < \frac{14}{3(1-3n)} < \varepsilon.$$

Заметим, что правое неравенство выполнено для любого номера $n \in N$, поэтому будем рассматривать левое неравенство

$$\frac{14}{3(3n-1)} < \varepsilon.$$

Выполнив цепочку преобразований, перепишем неравенство относительно n , учитывая, что $n \in N$, получим

$$\begin{aligned} \frac{14}{3(3n-1)} &< \varepsilon, \\ 3n-1 &> \frac{14}{3\varepsilon}, \\ n &> \frac{1}{3} \left(\frac{14}{3\varepsilon} - 1 \right), \\ n &> \frac{27+3\varepsilon}{9\varepsilon}, \\ N(\varepsilon) &= \left[\frac{14+3\varepsilon}{9\varepsilon} \right], \end{aligned}$$

где $[\]$ — целая часть числа.

Заполним таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001
$N(\varepsilon)$	15	155	1555

Проверка:

$$|a_{16} - c| = \frac{14}{141} < 0,1,$$

$$|a_{156} - c| = \frac{14}{1401} < 0,01,$$

$$|a_{1556} - c| = \frac{14}{14001} < 0,001.$$

Задача №2

Условие. Вычислить пределы функций

$$\begin{aligned} \text{(а):} & \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2-9}, \\ \text{(б):} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-2\sqrt[4]{x^8-8x}}{\sqrt{x^4+12}-4x^2}, \\ \text{(в):} & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x^2-1}} \right)^{\frac{1}{3x^2}}, \\ \text{(г):} & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{3x^2}}, \\ \text{(д):} & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\arctan \left(\frac{x^2-\sqrt{3}}{x^3-1} \right) \right)^{\frac{x}{\sin(2x)}}, \\ \text{(е):} & \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x} \right). \end{aligned}$$

Решение.

(а):

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2-9} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-1)^2(x+3)^2}{(x+3)(x^2+x-3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-1)^2(x+3)}{x^2+x-3} = \frac{0}{3} = 0.$$

(б):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-2\sqrt[4]{x^8-8x}}{\sqrt{x^4+12}-4x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-2x^2\sqrt[4]{1-\frac{8}{x^7}}}{x^2\sqrt{1+\frac{12}{x^4}}-4x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(3-2\sqrt[4]{1-\frac{8}{x^7}})}{x^2(\sqrt{1+\frac{12}{x^4}}-4)} = -\frac{1}{3}.$$

(в):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x+1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{x+1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})} = 0.$$

(г):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{3x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-(1-\cos x)}{1-(1-\cos 2x)} \right)^{\frac{1}{3x^2}} = \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \Rightarrow 1 - \cos x \rightarrow 0 \Rightarrow 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow 1 - \cos 2x \rightarrow 0 \Rightarrow 1 - \cos 2x \sim \frac{4x^2}{2} \end{array} \right| = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-(1-\frac{x^2}{2})}{1-(1-\frac{4x^2}{2})} \right)^{\frac{1}{3x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{3x^2}{2(1-2x^2)} \right)^{\frac{2(1-2x^2)}{3x^2} \frac{1}{2(1-2x^2)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2(1-2x^2)} \right)} = e^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

(д):

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{2x^4 - 1}{\ln^2(\cos 2x)} \right)^{\frac{x+2}{x}} = \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \Rightarrow x^4 \rightarrow 0 \Rightarrow 2x^4 - 1 \sim x^4 \ln(2) \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow 1 - \cos 2x \rightarrow 0 \Rightarrow 1 - \cos 2x \sim \frac{4x^2}{2} \Rightarrow \\ \ln(1 - \frac{4x^2}{2}) \rightarrow 0 \Rightarrow \ln(1 - \frac{4x^2}{2}) \sim -2x^2 \end{array} \right| =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^4 \ln(2)}{4x^4} \right)^{\frac{x+2}{x}} = \frac{\ln(2)}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x} = \infty.$$

(е):

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{1 + \cos 3x}{\sin^2 7x} \right) = \left| \begin{array}{l} x \rightarrow \pi, t = x - \pi \Rightarrow t \rightarrow 0, x = t + \pi \\ \cos 3x = \cos 3t + 3\pi = -\cos 3t \\ \sin 7x = \sin 7t + 7\pi = -\sin 7t \end{array} \right| =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3t}{\sin^2 7t} = \left| \begin{array}{l} t \rightarrow 0 \Rightarrow 1 - \cos 3t \rightarrow 0 \Rightarrow 1 - \cos 3t \sim \frac{9t^2}{2} \\ t \rightarrow 0 \Rightarrow \sin 7t \rightarrow 0 \Rightarrow \sin 7t \sim 7t \end{array} \right| =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{9t^2}{2}}{49t^2} = \frac{9}{98}.$$

Задача № 3.

Условие.

(а): Показать, что данные функции $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно малыми или бесконечно большими при указанном стремлении аргумента.

(б): Для каждой функции $f(x)$ и $g(x)$ записать главную часть (эквивалентную ей функцию) вида $C(x - x_0)^\alpha$ при $x \rightarrow x_0$ или Cx^α при $x \rightarrow \infty$, указать их порядки малости (роста).

(в): Сравнить функции $f(x)$ и $g(x)$ при указанном стремлении.

№ Варианта	Функции $f(x)$ и $g(x)$	Стремление
17	$f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1, g(x) = \ln(1 + \sqrt{x^2 + x})$	$x \rightarrow 0+$

Решение.

(а): Покажем, что $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно малые функции,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \ln(1 + \sqrt{x^2 + x}) = 0.$$

(б): Так как $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно малые функции, то эквивалентными им будут функции вида Cx^α при $x \rightarrow 0+$. Найдём эквивалентную для $f(x)$ из условий

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x^\alpha} = C,$$

где C — некоторая константа. Рассмотрим предел

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x}}{x^\alpha(\sqrt{1 + \sqrt{x}} + 1)}.$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$ последний предел равен $\frac{1}{2}$, откуда $C = \frac{1}{2}$ и

$$f(x) \sim \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} \text{ при } x \rightarrow 0+.$$

Аналогично, рассмотрим предел

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1 + \sqrt{x^2 + x})}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x(x+1)}}{x^\alpha}.$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$ последний предел равен 1, откуда $C = 1$ и

$$g(x) \sim x^{\frac{1}{2}} \text{ при } x \rightarrow 0+.$$

(в): Для сравнения функций $f(x)$ и $g(x)$ рассмотрим предел их отношения при указанном стремлении

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Применим эквивалентности, найденные в (б), получим

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда, $f(x)$ и $g(x)$ одного порядка малости.