Министерство науки и высшего образования
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
‘ Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет) ”
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет "Фундаментальные науки"
Кафедра "Высшая математика"

Отчёт
по учебной практике
за 1 семестр 2020 — 2021 гг.

Руководитель практики,
ст. преп. кафедры ФН1 ____________ Кравченко О.В.
студент группы ФН1–11 ____________ Пияйкина К.А.

Москва,
2020 г.

Содержание

1 Цели и задачи практики

1.1 Цели

— развитие компетенций, способствующих успешному освоению материала бакалавриата и необходимых в будущей профессиональной деятельности.

1.2 Задачи

1. Знакомство с программными средствами, необходимыми в будущей профессиональной деятельности.

2. Развитие умения поиска необходимой информации в специальной литературе и других источниках.

3. Развитие навыков составления отчётов и презентации результатов.

1.3 Индивидуальное задание

1. Изучить способы отображения математической информации в системе вёртски LATEX.

2. Изучить возможности системы контроля версий Git.

3. Научиться верстать математические тексты, содержащие формулы и графики в системе LATEX. Для этого, выполнить установку свободно распространяемого дистрибутива TeXLive и оболочки TeXStudio.

4. Оформить в системе LATEX типовые расчёты по курсе математического анализа согласно своему варианту.

5. Создать аккаунт на онлайн ресурсе GitHub и загрузить исходные tex–файлы и результат компиляции в формате pdf.

2 Отчёт

Актуальность темы продиктована необходимостью владеть системой вёрстки LATEXи средой вёрстки TeXStudio для отображения текста, формул и графиков. Полученные в ходе практики навыки могут быть применены при написании курсовых проектов и дипломной работы, а также в дальнейшей профессиональной деятельности.

Ситема вёрстки LATEX содержит большое количество инструментов (пакетов), упрощающих отображение информации в различных сферах инженерной и научной деятельности.

3 Индивидуальное задание

3.1 Пределы и непрерывность

Задача №1

Условие. Дана последовательность $\{a_n\} = \frac{4+2n}{1-3n}$ и число $c = -\frac{2}{3}$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c,$$

а именно, для каждого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найти наименьшее натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|a_n - c| < \varepsilon$ для всех номеров $n > N(\varepsilon)$. Заполнить таблицу

ε	0,1	0,01	0,001
$N(\varepsilon)$			

Решение. Рассмотрим неравенство $a_n - c < \varepsilon$, $\forall\varepsilon > 0$, учитывая выражение для a_n и значение c из условий варианта, получим

$$\left|\frac{4+2n}{1-3n} + \frac{2}{3}\right| < \varepsilon.$$

Неравенство запишем в виде двойного неравентсва и приведём выражение под знаком модуля к общему знаменателю, получим

$$-\varepsilon < \frac{14}{3(1-3n)} < \varepsilon.$$

Заметим, что правое неравенство выполнено для любого номера $n \in N$, поэтому будем рассматривать левое неравенство

$$\frac{14}{3(3n-1)} < \varepsilon.$$

Выполнив цепочку преобразований, перепишем неравенство относительно n, учитывая, что $n \in N$, получим

$$\frac{14}{3(3n-1)} < \varepsilon,$$
$$3n - 1 > \frac{14}{3\varepsilon},$$
$$n > \frac{1}{3}\left(\frac{14}{3\varepsilon} - 1\right),$$
$$n > \frac{27+3\varepsilon}{9\varepsilon},$$
$$N(\varepsilon) = \left[\frac{14+3\varepsilon}{9\varepsilon}\right],$$

где [ ] — целая часть числа.

Заполним таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001
$N(\varepsilon)$	15	155	1555

Проверка:

$$|a_{16}-c| = \tfrac{14}{141} < 0{,}1,$$

$$|a_{156}-c| = \tfrac{14}{1401} < 0{,}01,$$

$$|a_{1556}-c| = \tfrac{14}{14001} < 0{,}001.$$

Задача №2

Условие. Вычислить пределы функций

$$\text{(а):}\quad \lim_{x\to-3}\tfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2-9},$$
$$\text{(б):}\quad \lim_{x\to+\infty}\tfrac{3x^2-2\sqrt[4]{x^8-8x}}{\sqrt{x^4+12}-4x^2},$$
$$\text{(в):}\quad \lim_{x\to1}\left(\tfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x^2-1}}\right),$$
$$\text{(г):}\quad \lim_{x\to0}\left(\tfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{3x^2}},$$
$$\text{(д):}\quad \lim_{x\to0}\left(\arctan\left(\tfrac{x^2-\sqrt{3}}{x^3-1}\right)\right)^{\frac{x}{\sin(2x)}},$$
$$\text{(е):}\quad \lim_{x\to\pi}\left(\tfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}\right).$$

Решение.

(а):

$$\lim_{x\to-3}\tfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2-9} = \lim_{x\to-3}\tfrac{(x-1)^2(x+3)^2}{(x+3)(x^2+x-3)} = \lim_{x\to-3}\tfrac{(x-1)^2(x+3)}{x^2+x-3} = \tfrac{0}{3} = 0.$$

(б):

$$\lim_{x\to+\infty}\tfrac{3x^2-2\sqrt[4]{x^8-8x}}{\sqrt{x^4+12}-4x^2} = \lim_{x\to+\infty}\tfrac{3x^2-2x^2\sqrt[4]{1-\frac{8}{x^7}}}{x^2\sqrt{1+\frac{12}{x^4}}-4x^2} = \lim_{x\to+\infty}\tfrac{x^2(3-2\sqrt[4]{1-\frac{8}{x^7}})}{x^2(\sqrt{1+\frac{12}{x^4}}-4)} = -\tfrac{1}{3}.$$

(в):

$$\lim_{x\to1}\tfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \lim_{x\to1}\tfrac{x-1}{\sqrt[3]{x-1}\,\sqrt[3]{x+1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})} = \lim_{x\to1}\tfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{x+1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})} = 0.$$

(г):

$$\lim_{x\to0}\left(\tfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{3x^2}} = \lim_{x\to0}\left(\tfrac{1-(1-\cos x)}{1-(1-\cos 2x)}\right)^{\frac{1}{3x^2}} = \left|\begin{array}{l} x\to0 \Rightarrow 1-\cos x\to0 \Rightarrow 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2} \\ x\to0 \Rightarrow 1-\cos 2x\to0 \Rightarrow 1-\cos 2x\sim\frac{4x^2}{2}\end{array}\right| =$$

$$\lim_{x\to0}\left(\tfrac{1-(1-\frac{x^2}{2})}{1-(1-\frac{4x^2}{2})}\right)^{\frac{1}{3x^2}} = \lim_{x\to0}\left(1+\tfrac{3x^2}{2(1-2x^2)}\right)^{\frac{2(1-2x^2)}{3x^2}\frac{1}{2(1-2x^2)}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{2(1-2x^2)}\right)} = e^{\frac{1}{2}}.$$

(д):

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{2^{x^4}-1}{\ln^2(\cos 2x)}\right)^{\frac{x+2}{x}} = \left| \begin{array}{l} x\to 0 \Rightarrow x^4\to 0 \Rightarrow 2^{x^4}-1\sim x^4\ln(2) \\ x\to 0\Rightarrow 1-\cos 2x\to 0\Rightarrow 1-\cos 2x\sim \frac{4x^2}{2}\Rightarrow \\ ln(1-\frac{4x^2}{2})\to 0\Rightarrow ln(1-\frac{4x^2}{2})\sim -2x^2 \end{array}\right| =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^4\ln(2)}{4x^4}\right)^{\frac{x+2}{x}} = \frac{\ln(2)}{4}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+2}{x}} = \infty.$$

(е):

$$\lim_{x\to\pi}\left(\frac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}\right) = \left| \begin{array}{l} x\to\pi, t=x-\pi\Rightarrow t\to 0, x=t+\pi \\ \cos 3x=\cos 3t+3\pi=-\cos 3t \\ \sin 7x=\sin 7t+7\pi=-\sin 7t \end{array}\right| =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos 3t}{\sin^2 7t} = \left| \begin{array}{l} t\to 0\Rightarrow 1-\cos 3t\to 0\Rightarrow 1-\cos 3t\sim\frac{9t^2}{2} \\ t\to 0\Rightarrow \sin 7t\to 0\Rightarrow \sin 7t\sim 7t \end{array}\right| =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{9t^2}{2}}{49t^2} = \frac{9}{98}.$$

Задача № 3.

Условие.

(а): Показать, что данные функции $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно малыми или бесконечно большими при указанном стремлении аргумента.

(б): Для каждой функции $f(x)$ и $g(x)$ записать главную часть (эквивалентную ей функцию) вида $C(x-x_0)^\alpha$ при $x\to x_0$ или Cx^α при $x\to\infty$, указать их порядки малости (роста).

(в): Сравнить функции $f(x)$ и $g(x)$ при указанном стремлении.

№ Варианта	Функции $f(x)$ и $g(x)$	Стремление
17	$f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}-1, g(x)=\ln(1+\sqrt{x^2+x})$	$x\to 0+$

Решение.

(а): Покажем, что $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно малые функции,

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\sqrt{1+\sqrt{x}}-1=0.$$
$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+}\ln(1+\sqrt{x^2+x})=0.$$

(б): Так как $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно малые функции, то эквивалентными им будут функции вида Cx^α при $x\to 0+$. Найдём эквивалентную для $f(x)$ из условий

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x^\alpha} = \mathrm{C},$$

где C — некоторая константа. Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}-1}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{x}}{x^\alpha(\sqrt{1+\sqrt{x}}+1)}.$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$ последний предел равен $\frac{1}{2}$, отсюда $C = \frac{1}{2}$ и

$$f(x) \sim \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} \text{ при } x \to 0+ .$$

Аналогично, рассмотрим предел

$$\lim_{x\to 0+} \frac{g(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+\sqrt{x^2+x})}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x(x+1)}}{x^\alpha}.$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$ последний предел равен 1 , отсюда $C = 1$ и

$$g(x) \sim x^{\frac{1}{2}} \text{ при } x \to 0+ .$$

(в): Для сравнения функций $f(x)$ и $g(x)$ рассмотрим предел их отношения при указанном стремлении

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Применим эквивалентности, найденные в (б), получим

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда, $f(x)$ и $g(x)$ одного порядка малости.