

雙輪足機器人動力學模型

- 主題： 實現機器人控制策略的基礎。
- 核心： 建立準確可靠的數學模型。

建模方法比較與選擇

方法	原理	優點 (適合用途)	本次選擇
拉格朗日函數法	Hamilton 原理 / 能量分析	不需分析內向力	✗
牛頓力學法	牛頓定律 / 動量矩定理	物理意義明確，易於設計控制策略	✓ 採用

系統特性與簡化假設

1. 系統特性：移動的倒立擺

- 1) 非線性、不穩定，且具有耦合性。
- 2) 重心在輪軸之上，易向前或向後傾倒。

2. 分析簡化假設 (為建立可行近似模型)

- 1) 運動軌跡：不跳躍、不滑動，只能滾動。
- 2) 電機理想化：忽略所有摩擦、電感、阻礙轉矩。轉矩 = 電磁轉矩。
- 3) 雜訊忽略：忽略齒輪間隙及慣性元件（陀螺儀等）引起的所有雜訊。
- 4) 受力考量：只考慮由摩擦產生的力和力矩。

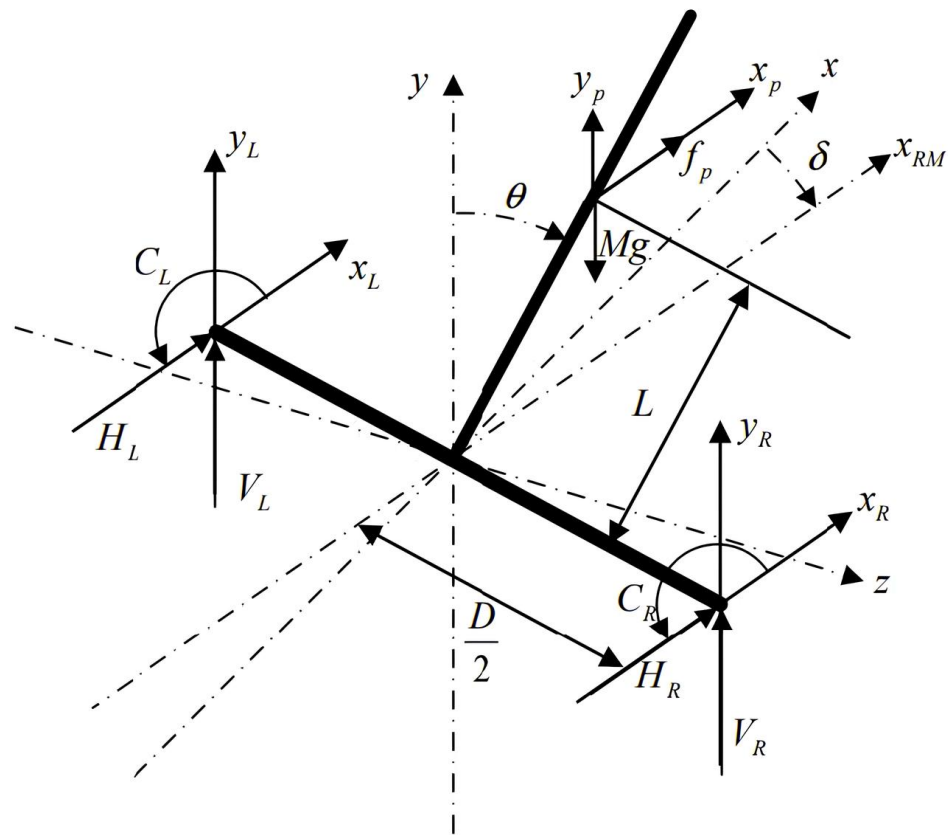
座標系定義

1. 空間直角座標系定義 (右手定則)

- 1) 原點：兩輪輪軸中心。
- 2) X 軸：水平移動方向 (前進)。
- 3) Y 軸：豎直向上方向。
- 4) Z 軸：沿輪軸方向 (左輪 指向 右輪)。

雙輪足機器人的底盤結構類似一個移動的倒立擺。

建模工作將分別分析車輪和車體的力學，以建立動力學模型，並最終以狀態空間表達式來呈現整個系統。



車輪模型

公式量	單位	意義
m	kg	左輪、右輪各自的質量
r	m	左輪、右輪各自的半徑
x_L, x_R	m	左輪、右輪的水平位移
x	m	車體中心的水平位移
H_{fL}, H_{fR}	N	左輪、右輪受到地面的摩擦力的尺寸
H_L, H_R	N	左輪、右輪受到車體作用力的水平分力的尺寸
T_L, T_R	$N \cdot m$	左輪、右輪電機輸出的轉矩的size
I	$kg \cdot m^2$	車輪的轉動慣量
ω_l, ω_R	rad/s	左輪、右輪的角速度的size

車輪模型

車輪的平動方程式 (由牛頓第二定律)

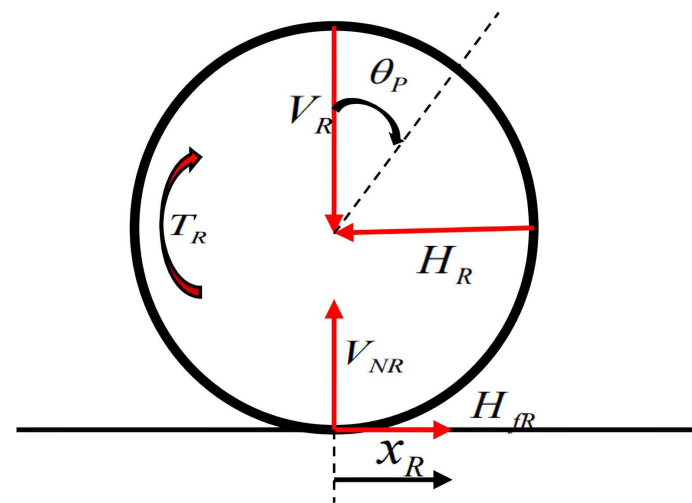
$$m\ddot{x}_R = H_{fR} - H_R \quad (1)$$

車輪的剛體定軸轉動方程式

$$I\dot{\omega}_R = T_R - H_{fR}R \quad (2)$$

聯立 (1) 式和 (2) 式，並消去 H_{fR}

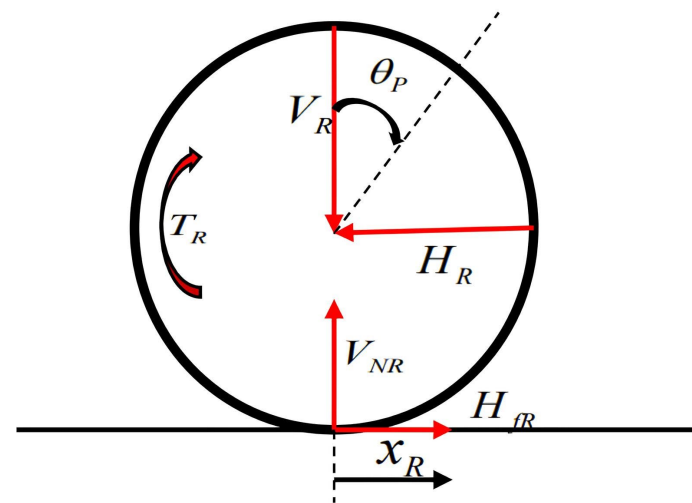
$$m\ddot{x}_R = \frac{T_R}{r} - \frac{I\dot{\omega}_R}{r} - H_R \quad (3)$$



車輪模型

在車輪不打滑（無滑動）的情況下，車輪移動速度的大小與轉動速度的大小成比例關係，即：

$$\begin{cases} w_R = \frac{\dot{x}_R}{r} \\ \dot{w}_R = \frac{\ddot{x}_R}{r} \end{cases} \quad (4)$$



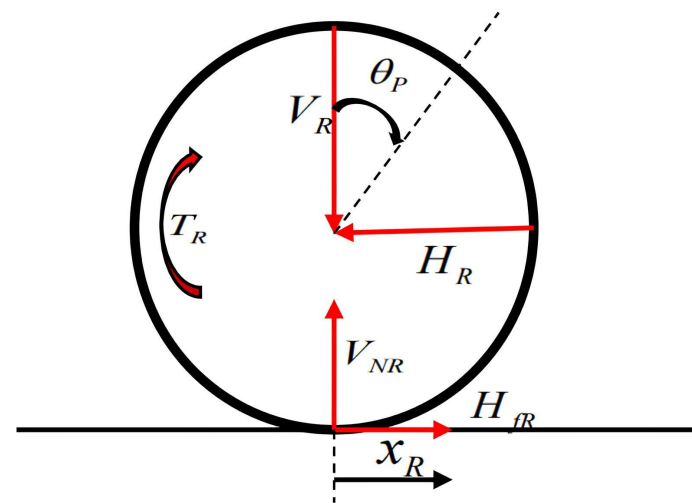
車輪模型

將 (4) 式代入 (3) 式中，可得

$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right) \ddot{x}_R = \frac{T_R}{r} - H_R \quad (5)$$

由於左右輪的參數（質量、半徑、轉動慣量等）相同，因此對左輪也可以得到相似的結果，即：

$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right) \ddot{x}_L = \frac{T_L}{r} - H_L \quad (6)$$



車體模型

與車輪的運動類似，車體的運動也可以分解為正向運動（前向移動、俯仰轉動）和側向運動（轉向、偏航）。其中，偏航運動可以視為轉向運動的特殊情況，因此，主要分析車體的正向運動和轉向運動。

公式量	單位	意義
M	kg	整個機器人的總質量
I	m	機器人車體重心到 z 軸的距離
J_p	$kg \cdot m^2$	車體繞質心轉動時的轉動慣量 (俯仰) (註：若假設為均勻細桿 $J_p = \left(\frac{1}{3}\right) * MI^2$)
θ_p	rad	機器人車體與 y 軸的夾角

車體模型-正向運動

為了易於分析，對車體模型進行簡化，簡化後的模型如圖所示。

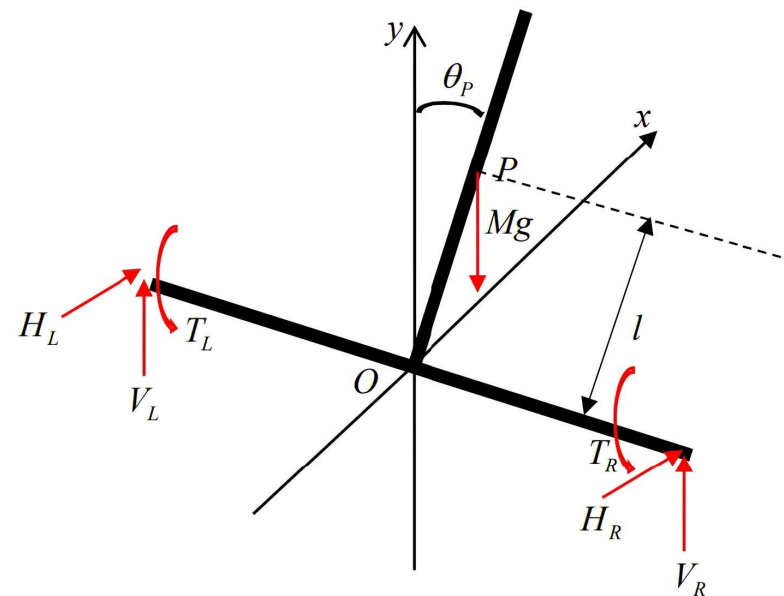
小車（車體）的正向運動可以分解為前向運動和繞車體質心 P 的相對轉動（俯仰）。

小車底盤中心 O 的水平位移為：

$$x = \frac{x_L + x_R}{2} \quad (7)$$

將 (5) 式和 (6) 式相加後，等式兩邊除以 2，可得：

$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right) \frac{\ddot{x}_L + \ddot{x}_R}{2} = \frac{T_L + T_R}{2r} - \frac{H_L + H_R}{2} \quad (8)$$



車體模型-正向運動

聯立 (7) 式和 (8) 式可得

$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right)\ddot{x} = \frac{T_L + T_R}{2r} - \frac{H_L + H_R}{2} \quad (9)$$

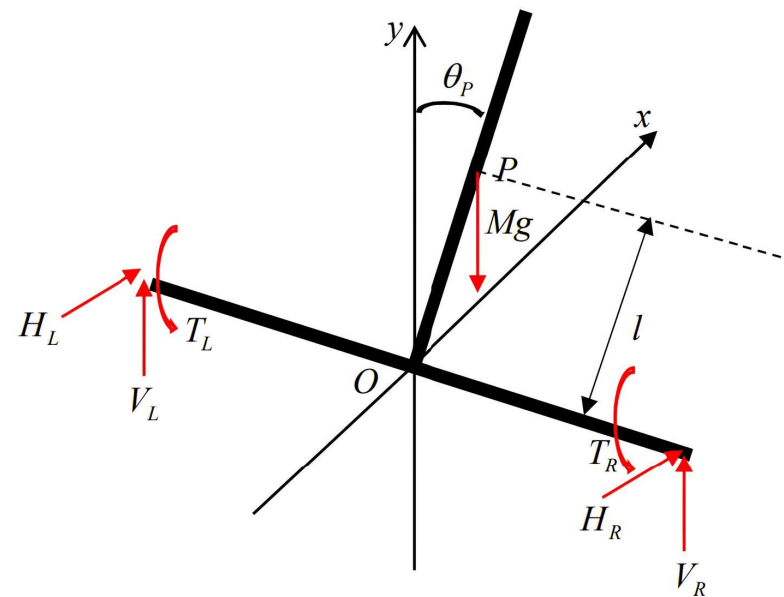
對車體，由牛頓第二定律可得

在水平方向上

$$M \frac{d(x + l \sin \theta_p)}{dt^2} = H_L + H_R \quad (10)$$

在垂直方向有

$$M \frac{d(l \cos \theta_p)}{dt^2} = V_L + V_R - Mg \quad (11)$$



車體模型-正向運動

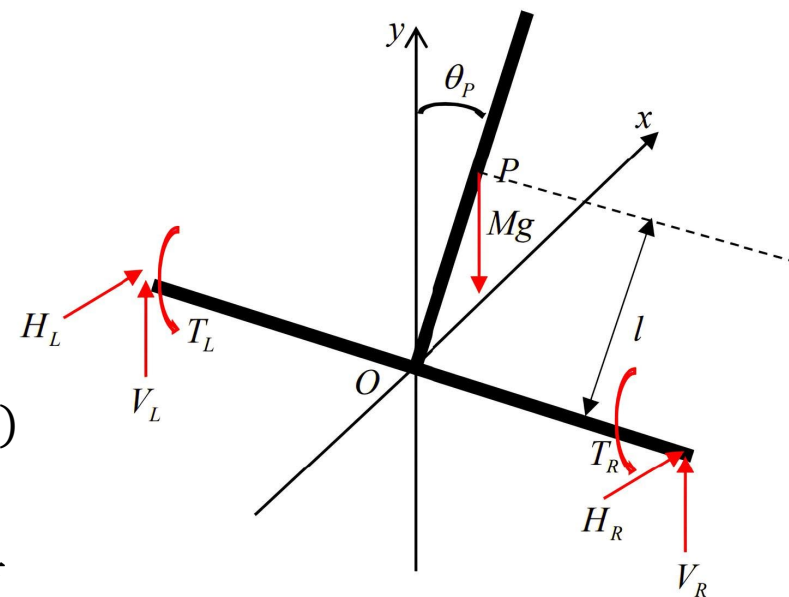
對車體，由剛體定軸轉動定律可得

$$J_p \ddot{\theta}_p = (V_L + V_R)l \sin \theta_p - (H_L + H_R)l \cos \theta_p - (T_L + T_R) \quad (12)$$

聯立方程(9) (10)

$$\left(M + 2m + \frac{2I}{r^2} \right) \ddot{x} - \frac{T_L + T_R}{2} + Ml \ddot{\theta}_p \cos \theta_p - Ml \dot{\theta}_p^2 \sin \theta_p = 0 \quad (13)$$

方程式 (13) 即是機器人的非線性數學模型，它是根據牛頓力學方程式推導得到的。



車體模型-正向運動

- 目前，由於對於非線性控制系統，並沒有一套實用且成熟的非線性控制理論來分析其性能。因此，我們將目標轉向**線性控制理論**，因為其應用已非常廣泛，並且擁有一套十分成熟的科學體系，能夠為我們解決非線性系統提供幫助。
- 因此，我們需要用**線性化**之後的系統模型來代替原來的非線性系統模型。接著，便能利用線性分析的成熟體系來簡化非線性系統的模型，降低解決複雜非線性模型的難度。但是，這種簡化必須在合理的控制效果之內，如果簡化後無法達到控制要求，那麼這種簡化就失去了意義。
- 理論上，根據線性化數學模型設計出來的控制器應用在原來的非線性數學模型中，通常會有較好的控制效果。這樣便簡化了非線性系統的複雜度，為解決非線性系統中遇到的問題提供了一種**可行性方案**。

車體模型-正向運動

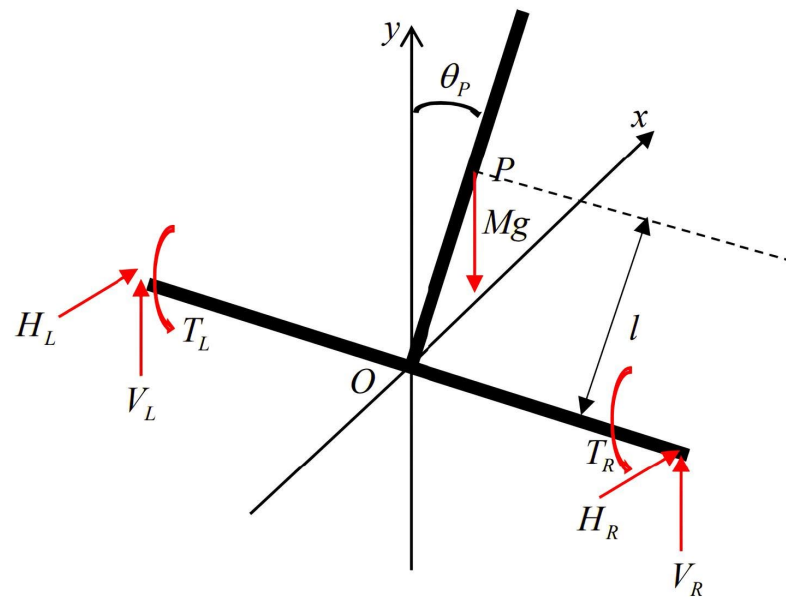
以下是如何簡化系統的非線性模型，具體的線性化過程如下：

在平衡點周圍，可以近似地認為 $\theta_p \approx 0, \sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1$

$$\begin{cases} \cos\theta_p = 1 \\ \sin\theta_p = \theta_p \\ \dot{\theta}_p^2 = 0 \end{cases}$$

故方程式(13)變為

$$\ddot{x} = \frac{T_L + T_R}{\left(M + 2m + \frac{2I}{r^2}\right)r} - \frac{MI}{\left(M + 2m + \frac{2I}{r^2}\right)}\ddot{\theta}_p \quad (14)$$



車體模型-正向運動

將方程式(10)和(11)代入方程式(12)當中，可得

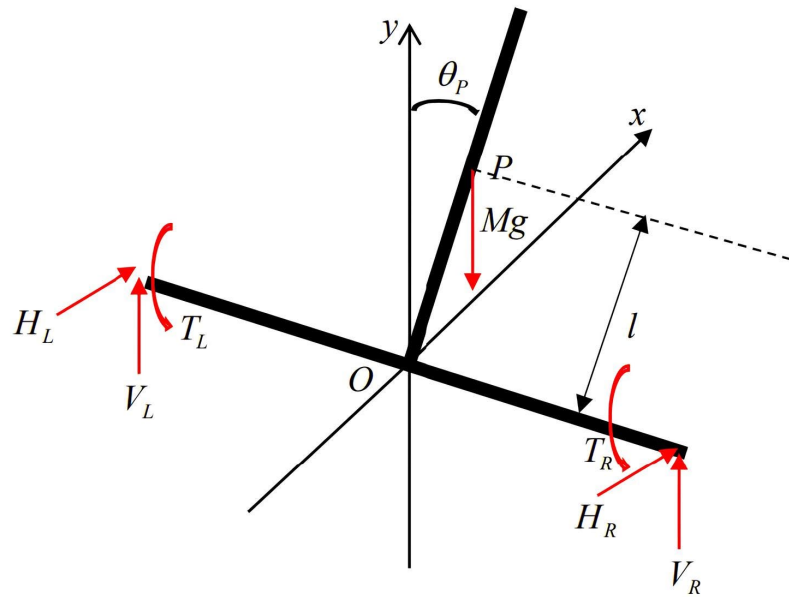
$$\left(\frac{J_p}{Ml} + l\right)\ddot{\theta}_p + \ddot{x}\cos\theta_p - g\sin\theta_p + \frac{T_L + T_R}{Ml} = 0 \quad (15)$$

類似地，對方程式 (15) 進行線性化可得

$$\ddot{\theta}_p = \frac{Mlg}{(J_p + Ml^2)}\theta_p - \frac{Ml}{(J_p + Ml^2)}\ddot{x} - \frac{T_L + T_R}{(J_p + Ml^2)} \quad (16)$$

將方程式 (16) 代入方程式 (14) 中，消去 $\ddot{\theta}_p$ 可得：

$$\ddot{x} = -\frac{M^2l^2g}{Q_{eq}}\theta_p + \frac{J_p + Ml^2 + Mlr}{Q_{eq}r}(T_L + T_R) \quad (17)$$



車體模型-正向運動

將方程式 (14) 代入方程式 (16) 中，消去 \ddot{x} 可得

$$\ddot{\theta}_p = \frac{Mlg(M + 2m + \frac{2I}{r^2})}{Q_{eq}} \theta_p - \frac{\left(\frac{Ml}{r} + M + 2m + \frac{2I}{r^2}\right)}{Q_{eq}} (T_L + T_R) \quad (18)$$

綜上所述，對於正向運動有

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{M^2 l^2 g}{Q_{eq}} \theta_p + \frac{J_p + Ml^2 + Mlr}{Q_{eq} r} (T_L + T_R) \\ \ddot{\theta}_p = \frac{Mlg(M + 2m + \frac{2I}{r^2})}{Q_{eq}} \theta_p - \frac{\left(\frac{Ml}{r} + M + 2m + \frac{2I}{r^2}\right)}{Q_{eq}} (T_L + T_R) \end{cases} \quad (19)$$

$$Q_{eq} = J_p M + (J_p + Ml^2) \left(2m + \frac{2I}{r^2}\right)$$

車體模型-轉向運動

公式量	單位	意義
d	m	左輪、右輪兩個輪子之間的距離
J_{δ}	$kg \cdot m^2$	車體繞 y 軸轉動時的轉動慣量 (偏航) (註：若假設為矩形板，則 $J_{\delta} = \frac{1}{12} \times MD^2$)
δ	rad	機器人車體與 x 軸的夾角 (小車的偏航角)

車體模型-轉向運動

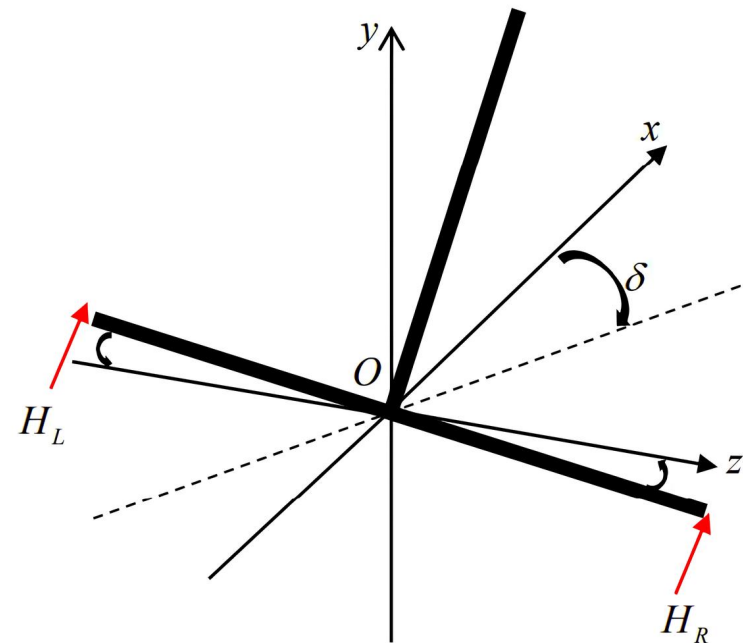
與正向運動類似，我們也可以建立簡化後的轉向運動模型，如圖所示。

轉向運動是由於左右兩車輪從水平方向上施加給車體的反作用力大小 H_L 和 H_R 不相等所引起，則由剛體定軸轉動定律可得。

$$J_\delta \ddot{\delta} = \frac{d}{2} (H_L - H_R) \quad (20)$$

將方程式 (5) 和 (6) 相減後可得

$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right) (\ddot{x}_L - \ddot{x}_R) = \frac{T_L - T_R}{r} - (H_L - H_R) \quad (21)$$



車體模型-轉向運動

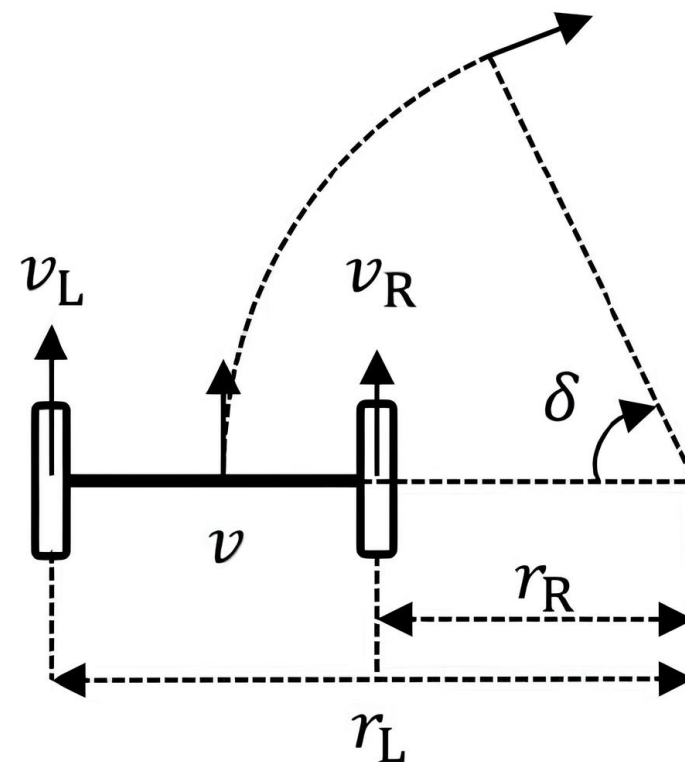
當左右兩輪運動速度不相等時，小車（機器人車體）會發生轉向，如圖所示。

位移的表達式

$$x = \frac{x_L + x_R}{2}$$

轉角的表達式

$$\delta = \frac{x_L - x_R}{d}$$

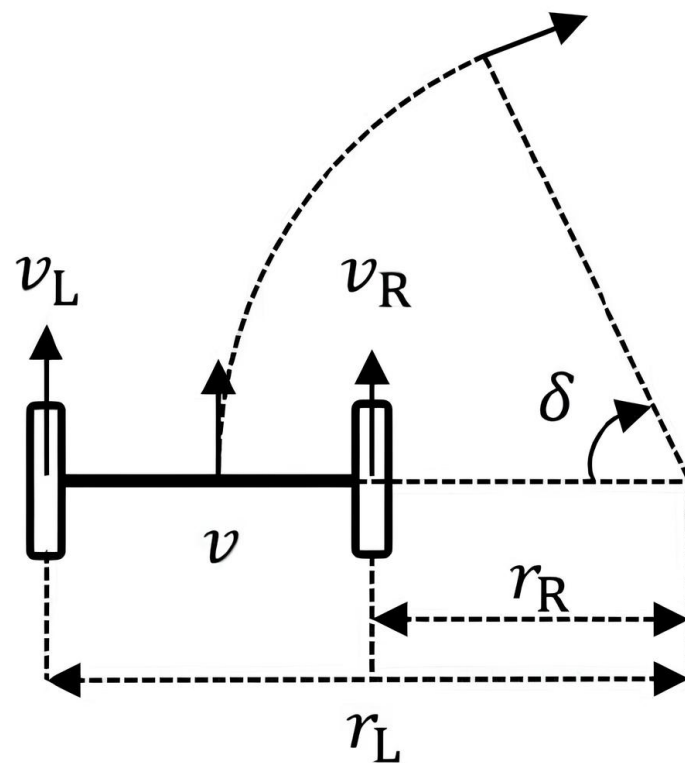


車體模型-轉向運動

$$\begin{cases} x_L = r\theta_l \\ x_R = r\theta_r \end{cases}$$

得到

$$\begin{cases} \dot{x}_L = \dot{\delta}r_L \\ \dot{x}_R = \dot{\theta}r_R \\ r_L = r_R + d \end{cases} \quad (22)$$



車體模型-轉向運動

解得

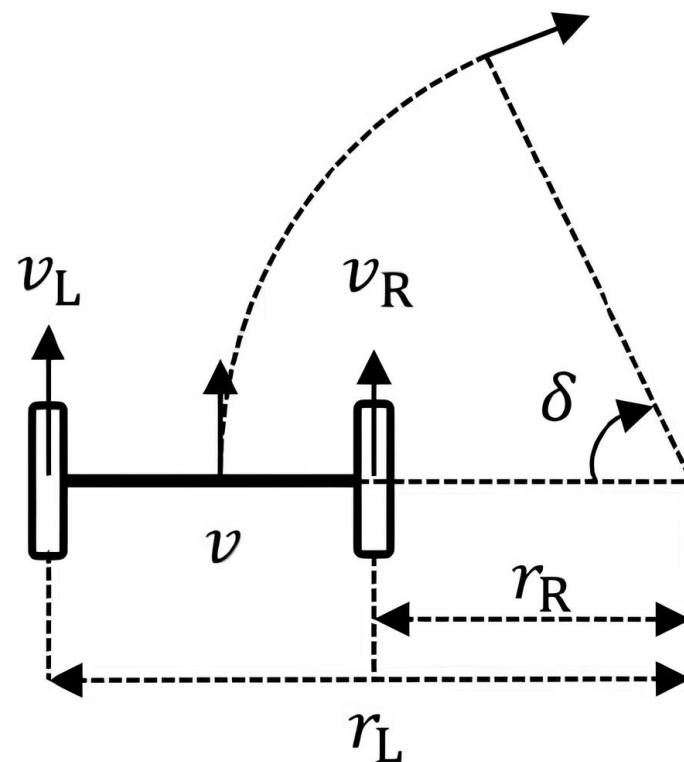
$$\dot{\delta} = \frac{\dot{x}_L - \dot{x}_R}{d} \quad (23)$$

對方程式 (23) 兩邊同時微分可得

$$\ddot{\delta} = \frac{\ddot{x}_L - \ddot{x}_R}{d} \quad (24)$$

聯立方程式 (20)、(21) 和 (24) 可得

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{r \left(md + \frac{Id}{r^2} + \frac{2J_\delta}{d} \right)} (T_L - T_R) \quad (25)$$



系統狀態方程式與解耦

由方程式(19)和方程式(25)可得系統的狀態方程式為

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta}_p \\ \ddot{\theta}_p \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta_p \\ \dot{\theta}_p \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} \\ 0 & 0 \\ B_{41} & B_{42} \\ 0 & 0 \\ B_{61} & B_{62} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_L \\ T_R \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$A_{23} = -\frac{M^2 l^2 g}{Q_{eq}}$$

$$A_{43} = \frac{Mlg(M + 2m + \frac{2I}{r^2})}{Q_{eq}}$$

$$B_{21} = B_{22} = \frac{J_p + Ml^2 + Mlr}{Q_{eq}r}$$

$$B_{41} = B_{42} = -\frac{(\frac{Ml}{r} + M + 2m + \frac{2I}{r^2})}{Q_{eq}}$$

$$B_{61} = \frac{1}{r(md + \frac{Id}{r^2} + \frac{2J_\delta}{d})}$$

$$B_{62} = -\frac{1}{r(md + \frac{Id}{r^2} + \frac{2J_\delta}{d})}$$

系統狀態方程式與解耦

從機器人系統模型的狀態方程可以得知，系統的輸入是左右兩輪的控制扭矩，這是一個雙輸入系統。為了方便分析與控制器的設計，現在將該系統解耦為平衡控制和轉向控制兩個單輸入系統。根據兩輪機器人的運動學模型可知：

$$\begin{bmatrix} T_L \\ T_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_\theta \\ T_\delta \end{bmatrix} \quad (27)$$

這裡可以推出 $T_L = 0.5T_\theta$, 即 $T_\theta = 2T_L$ ，由方程式(26)與(27)可得

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta}_p \\ \ddot{\theta}_p \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta_p \\ \dot{\theta}_p \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ B_{41} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_{62} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_\theta \\ T_\delta \end{bmatrix} \quad (28)$$

系統狀態方程式與解耦

分解上式可以得到平衡子系統與轉向子系統，並且兩者之間是互相獨立的

平衡子系統

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta}_p \\ \ddot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & A_{43} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta_p \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \\ 0 \\ B_4 \end{bmatrix} [T_\theta] \quad (29)$$

假定 $T_L = T_R = T_{LR}$ ，將 T_L 和 T_R 替換為 T_{LR} ，可以得到機器人的二自由度線性數學模型為：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta}_p \\ \ddot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & A_{43} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta_p \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2B_2 \\ 0 \\ 2B_4 \end{bmatrix} [T_L] \quad (30)$$

公式量

意義

T_L, T_r

二自由度系統中，左邊、右邊電機控制時的各自輸出轉矩。

系統狀態方程式與解耦

以速度和傾角為輸出，那輸出方程式為：

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta_p \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} \quad (31)$$

下面的研究對象主要就是這個二自由度數學模型

轉向子系統

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_{62} \end{bmatrix} [T_\delta] \quad (32)$$

系統狀態方程式與解耦

以偏航角為輸出，那麼輸出方程式為

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} \quad (33)$$

注意：在方程 (26) 中， $B_{62} = -B_{61}$ ；在方程 (28) 和 (32) 中， $B_{62} = B_{61}$ 。

從上面的方程 (29) 和 (32) 可以得知，原來的系統有兩個輸入。經過處理後，可以得到兩個子系統。方程 (29) 為子系統 1，這個系統是用 T_θ 控制機器的位移 x 和傾角 θ ，其中 T_θ 即是子系統 1 相應的輸入轉矩。同理，方程 (32) 為子系統 2，這個系統是用 T_δ 控制機器的轉角 δ 。