Глава 2

Одношаговые алгоритмы

2.1 Неявные методы Рунге-Кутты

2.1.2 Жесткие задачи. Понятия А-устойчивости и L-устойчивости

С самого начала применения численных методов обнаружилось, что с их помощью не всегда удается получить решение дифференциальных уравнений: иногда эти методы давали расходящийся процесс, хотя точные решения уравнений были заведомо сходящимися. Ч. Кёртисс и Дж. Хиршфельдер в знаменитой работе «Интегрирование жестких уравнений» [1] 1952 года ввели понятие жесткости для таких дифференциальных уравнений (в дальнейшем предлагались иные математические формулировки этого термина; общепризнанного определения до сих пор нет). Жесткими могут быть уравнения, описывающие образование свободных радикалов в сложной химической реакции (пример Кертисса и Хиршфельдера $\dot{x} = 5(x - t^2)$, «брюсселлятор»), диффузию, колебаний упругого стержня и др. Динамическая система, описываемая жесткими уравнениями, также называется жесткой. Свойства жесткости и метода, пригодного для решения жестких уравнений, наглядно демонстрирует оригинальная иллюстрация из статьи Кертисса и Хиршфельдера (рис. 2.7). Здесь $Y(x)$ истинное решение уравнения; непригодный для жестких систем метод приводит к уклонению приближенного решения от истинного и уходу его в плюс или минус бесконечность в зависимости от константы итегрирования C. Пригодный для жестких систем метод дает сходящееся к $Y(x)$ решение (пунктирная линия) независимо от того, из какой точки (y_0, x_0) он стартует.

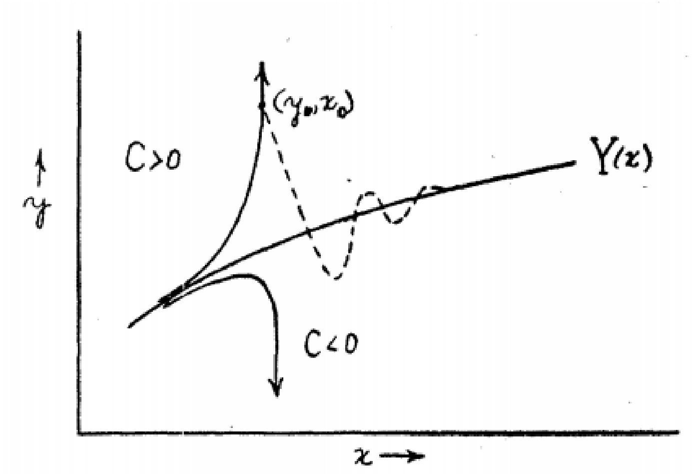

Рис. 2.7 – Свойства метода, пригодного для решения жестких систем.

Хайрер, Нерсетт и Ваннер [3] объясняют явление жесткости на примере задачи

$$\dot{x} = -50(x - cost) \qquad (2.32)$$

графики решения которого представлены на рис. 2.8. Вблизи $x \approx cost$ имеется медленно изменяющееся решение, а другие решения подходят к нему после быстрой «переходной фазы». Такие быстрые переходы типичны для жестких уравнений, но не являются ни достаточным, ни необходимым их признаком: так, у решения с начальным значением $x(0) = 2500/2501$ нет переходной фазы. На рис. 2.8 справа приведен график решения методом Эйлера для начального значения $x(0) = 0$ и длин шагов $h = 1,974/50$ и $h = 1,875/50$. Как только длина шага становится немного больше критической величины, численное решение уходит слишком далеко за равновесное, и возникают все более сильные колебания, отсутствующие в точном решении уравнения.

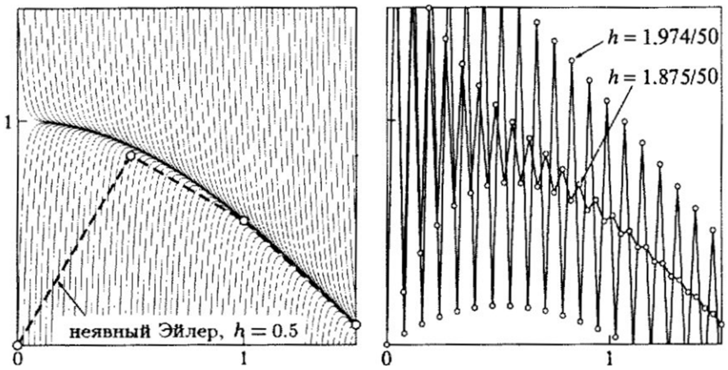

Рис. 2.8 – Кривые решения уравнения (2.32) [1]

Первоначально понятие жестких уравнений вызывало скепсис, так как считалось, что это очень частный случай, однако, по словам Г. Далквиста, «около 1960 года положение изменилось и все осознали, что мир полон жестких задач» [2]. Исследование свойств методов, пригодных для решения жестких уравнений, привело к возникновению понятия абсолютной устойчивости, или А-устойчивости (введено Г. Далквистом в 1963 г.). Метод называется А-устойчивым, если для любых собственных чисел λ, которых $Re(\lambda) < 0$, и любого шага интегрирования при решении линеаризованного уравнения

$$\dot{x} = \lambda x \tag{2.33}$$

он дает сходящееся решение [3]. Было выдвинуто предположение, что методы, пригодные для решения жестких систем, должны быть А-устойчивыми.