МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра физики

ОТЧЕТ

по лабораторной работе № 1
по дисциплине «физика»
Тема: Проверка теоремы Гюйгенса - Штейнера методом вращательных колебаний

Студент гр. 9892 ______________ Лескин К.В.

Преподаватель ______________

Санкт-Петербург
2020

Цель работы

Определение момента инерции эталонного диска методом вращательных колебаний и экспериментальная проверка теоремы Гюйгенса-Штейнера.

Приборы и принадлежности

Лабораторная установка включает колебательную систему вращающуюся в горизонтальной плоскости (рис. 1)

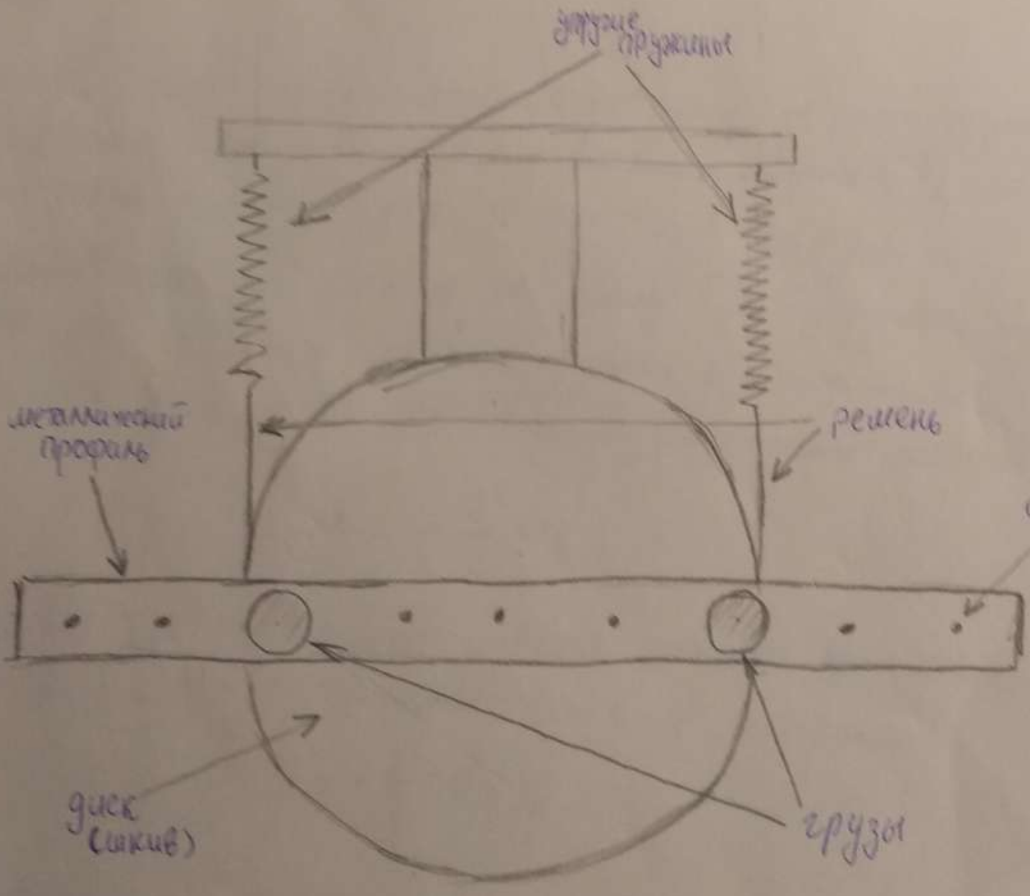

Рис. 1 – Лабораторная установка

Основные теоретические положения

Теорема Гюйгенса - Штейнера гласит, что момент инерции I тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_c этого тела относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на расстояние между осями d в квадрате.

$$I = I_c + md^2 \qquad (1)$$

Чтобы проверить теорему методом вращательных колебаний, необходимо вывести зависимость момента инерции части колебательной системы I от периода колебаний T подвижной части колебательной системы.

Пусть F_0 - сила, которая характеризует силы упругости пружин и натяжения нити в положении равновесия. Причём $F_{ол}$ сила слева равна $F_{оп}$ силе справа, то есть $F_{ол} = F_{оп} = F_0$.

Отклонив диск на угол φ по закону Гука силы упругости изменятся на $\frac{Kd\varphi}{2}$ (K – жёсткость пружины, d - диаметр шкива). При этом на диск будет действовать возвращающий момент силы:

$$M = -\frac{d^2}{2}K\varphi \qquad (2)$$

Подставив ур(2) в основное уравнение динамики вращательного движения $M = I\varepsilon$, учитывая, что $\varepsilon = \ddot{\varphi}$, получим:

$$I\ddot{\varphi} + \frac{d^2}{2}K\varphi = 0$$

Собственная частота колебаний маятника ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{d^2K}{2I}} \qquad (3)$$

Протокол

Проверка теоремы Гюйгенса-Штейнера методом вращательных колебаний

Студент гр. 9892 Лескин К.Ю.

Преподаватель Чурганова С.С.

Дата 27.02.2020

N	1	2	3	4	5	положение цилиндров r, см	θ_t, с
t, с	2,85	2,70	2,80	2,73	2,79	0-0 0	0,01
	2,95	2,99	2,94	2,97	2,95	1-1 6	
	3,99	4,02	3,98	4,00	4,00	2-2 10	
	4,65	4,70	4,73	4,69	4,72	3-3 14	
	5,50	5,44	5,56	5,50	5,49	4-4 18	

m, г	d, мм	R, мм
200±2	138±2	16±2

Обработка измерений

① $t_i, T_i = t_i/n, I_{0i}$; $I_i = \dfrac{2mr^2}{\left(\frac{T_i}{T_0}\right)^2 - 1}$:

$$t_0 = \frac{2{,}86 + 2{,}40 + 2{,}80 + 2{,}73 + 2{,}79}{5} = 2.77$$

$$t_1 = \frac{2{,}95 + 2{,}99 + 2{,}94 + 2{,}97 + 2{,}95}{5} = 2.96$$

$$t_2 = \frac{3{,}99 + 4{,}02 + 3{,}98 + 4{,}00 + 4{,}00}{5} = 3.98$$

$$t_3 = \frac{4{,}65 + 4{,}70 + 4{,}73 + 4{,}69 + 4{,}72}{5} = 4{,}69$$

$$t_4 = \frac{5{,}5 + 5{,}44 + 5{,}56 + 5{,}5 + 5{,}49}{5} = 5{,}49$$

$T_0 = \frac{2.77}{5} = 0.55$; $T_1 = \frac{2.96}{5} = 0.59$; $T_2 = \frac{3.98}{5} = 0{,}79$, $T_3 = \frac{4.69}{5} = 0.94$,
$T_4 = \frac{5.49}{5} = 1.09$

$$I_{01} = \frac{2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}036}{\left(\frac{0.59}{0.55}\right)^2 - 1} = \frac{0{,}0144}{0.1449} = 0.029 \; ; \quad I_{03} = \frac{2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}196}{\left(\frac{0.94}{0.55}\right)^2 - 1} = \frac{0{,}0784}{1{,}920631} = 0{,}040$$

$$I_{02} = \frac{2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1}{\left(\frac{0.79}{0.55}\right)^2 - 1} = \frac{0{,}04}{1{,}0620} = 0.036 \; ; \quad I_{04} = \frac{2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}324}{\left(\frac{1.09}{0.55}\right)^2 - 1} = \frac{0{,}1296}{2{,}924261} = 0.044$$

Можем убедиться, что при разном положении цилиндров значения $I_{01} - I_{04}$ при их положении относительно оси вращения пропорционально примерно одинаковы, то есть теорема Гюйгенса-Штейнера справедлива.

② $I_0 = \bar{I}_0 \pm \Delta I_0$, $P = 95\%$, $N = 4$

1. $\bar{I}_0 = \dfrac{0.029 + 0.036 + 0.040 + 0.044}{4} = 0.037$

2. $S_{\bar{I}_0} = \dfrac{\sqrt{(-0.008)^2 + (-0.001)^2 + (0.003)^2 + (0.007)^2}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\dfrac{0.000016 + 0.000001 + 0.000009 + 0.000049}{12}} =$

$= \sqrt{\dfrac{0.000075}{12}} = 0.0025$

3. $\Delta I_{сл} = 3.2 \cdot 0.0025 = 0.008$

4. θ_{I_0} : Логарифмируя формулу для нахождения момента инерции I_i, получаем формулу для определения приборных погрешностей:

$$\theta_{I_0} = I_0 \left(\frac{\theta_m}{m} + \frac{2\theta_r}{r_i} + \frac{T_i}{(T_i^2 - T_0^2)} \left(2 - \frac{T_i}{2T_0}\right) \theta_t \right)$$

В этой формуле θ_m - погрешность массы, θ_r - погрешность расстояния, θ_T - погрешность датчика времени. Тогда:

$$\theta_{I_1} = 0.029\left(\frac{0.002}{0.2} + \frac{2\cdot 0.002}{0.06} + \frac{0.59}{(0.59)^2-(0.55)^2}\left(2-\frac{0.59}{2\cdot 0.55}\right)0.01\right) = 0.029\left(0.01+0.07+42,93\right) =$$

$$= 0.007 \;;\quad \theta_{I_2} = 0.036\left(\frac{0.02}{0.2} + \frac{2\cdot 0,002}{0.1} + \frac{0.79}{(0.79)^2-(0.55)^2}\left(2-\frac{0.79}{1.1}\right)0,01\right) = 0.036(0.01+$$
$$+0,04+0.03) = 0.003 \;;$$

$$\theta_{I_3} = 0,04\left(\frac{0.02}{0.2} + \frac{2\cdot 0.002}{0,14} + \frac{0.94}{(0.94)^2-(0.55)^2}\left(2-\frac{0.94}{1.1}\right)0.01\right) = 0.04(0.01+0.03+0.02) =$$
$$= 0.0024\;;$$

$$\theta_{I_4} = 0,044\left(\frac{0.02}{0.2} + \frac{2\cdot 0.002}{0,18} + \frac{1.09}{(1.09)^2-(0.55)^2}\left(2-\frac{1.09}{1.1}\right)0.01\right) = 0,044\left(0.01+0.02+0.01\right) = 0,0018$$

Значит $\theta_{\bar I_0} = \dfrac{0.007+0.003+0.0024+0.0018}{4} = 0.004$

5. $\Delta\bar I_0 = \sqrt{(0.008)^2+(0.004)^2} = \sqrt{0,00008} = 0,009$

6. $I_0 = \bar I_0 \pm \Delta\bar I_0 = 0.037 \pm 0.009$, $P = 95\%$.

7. $\delta I_0 = 100\%\dfrac{\Delta\bar I_0}{I_0} = \dfrac{0.09}{0.037}\cdot 100\% = 2,43\%$.

(3) Рассчитать $\bar I_{диска}$ используя $\bar I_0$ и mR^2. Метод переноса погреш.

- $\bar I_g = \bar I_0 - mR^2 = 0.037 - 0.2\cdot 0,036 = 0.0299$
- $\Delta\bar I_g = \sqrt{(\Delta\bar I_0)^2+(R^2\Delta m)^2+(2mR\Delta R)^2} = \sqrt{(0.009)^2+(0.036\cdot 0.002)^2+(2\cdot 0,2\cdot 0,016\cdot 0,002)^2} =$
  $= \sqrt{0,00081+0,0000005+0,000000016} = 0.009000235 = 0.009$
- $\bar I_g = \bar I_g \pm \Delta\bar I_g = 0.0299 \pm 0,009$ • $\delta I_g = \dfrac{\Delta I_g}{I_g}\cdot 100\% = 0.301$

(4) Используя формулу (0), найти $k = \bar k \pm \Delta k$, используя $\Delta\bar k = \bar k\sqrt{\left(\frac{\Delta\bar I_0}{I_0}\right)^2+\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2+\left(\frac{\Delta\bar T_0}{T_0}\right)^2}$

- $\bar k = \dfrac{8\pi^2\bar I_0}{d^2 T_0^2} = \dfrac{8\cdot 9,86\cdot 0.037}{(0,018496)(0.55)^2} = \dfrac{2,91856}{0.005595} = 521,6$ Н/м
- $\Delta\bar k = 521,6\sqrt{\left(\frac{0.009}{0.037}\right)^2+\left(\frac{0.002}{0,138}\right)^2+\left(\frac{0.001}{0.55}\right)^2} = 521,6\sqrt{0,0592+0,00021+0,000003} = 12,7$
- $k = \bar k \pm \Delta\bar k = 521,6 \pm 12,7$

Вопросы к подготовке

1. Что такое жёсткость колебательной системы и каков её физический смысл?

Жесткость в одном из случаев можно определить исходя из момента инерции. Простейшая колебательная система - пружинный маятник, который представляет собой грузик массой m, прикреплённый к пружине с коэффициентом упругости и жёсткости, то есть жёсткой - характеристика. Смысл: чтобы растянуть жёсткую пружину нужно приложить силу.

2. Определение момента силы, импульса, инерции абсолютно твёрдого тела относительно некоторой оси.

Момент силы относительно оси - скалярная величина, равная проекции на эту ось момента силы относительно произвольной точки данной оси. Величина не зависит от выбора точки на оси, т.к. момент силы при переносе точки приложения силы вдоль линии действия не изменяется

Момент импульса относительно неподвижной оси (мат. точки) - векторная величина, равная векторному произведению радиус вектора, проведённого из полюса в место нахождения мат. точки на вектор импульса.

Момент инерции тела представляет адитивную величину, равную произведению массы точки и квадрата расстояния от неё до оси вращения относительно этой оси. Так же это сумма произведения масс точек твердого тела на квадраты расстояния этих точек до рассматриваемой оси.

3. Сформулируйте теорему Гюйгенса-Штейнера для вычисления момента инерции тела относительно произвольной оси вращения.

Момент инерции I относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_c относительно оси параллельной данной и проходящей через центр масс тела и произведению массы тела на квадрат расстояния между осями.

$$I = I_c + mr^2$$

4. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения

Суммарный момент сил действующих на вращающееся вокруг некоторой оси тело равен произведению момента инерции тела относительно данной оси на угловое ускорение тела:

$$M = I \cdot \varepsilon$$

5. Сформулируйте методику измерений, используемую в работе и опишите установку

Методика измерений: определение момента инерции эталонного диска методом вращательных колебаний и экспериментальная проверка теоремы Гюйгенса-Штейнера

Лабораторная уставка (рис. 1) включает колебательную систему, вращающуюся в горизонтальной плоскости, состоящей из закреплённого на вертикальной оси диска, ремень которого ~~от~~ связан с упругими пружинами, закреплёнными за стойку. ~~К~~ К диску жёстко прикреплён металлический профиль с отверстиями для грузов.

6. Напишите дифференциальные уравнения гармонических колебаний с затуханием и без затухания. Каков смысл входящих в них параметров?

Незатухающие гармонические колебания имеют вид: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, где A - амплитуда колебаний, $\omega t + \varphi_0$ - фаза колебаний, φ_0 - начальная фаза в нулевой момент, x - смещение. Или $\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$, где q - амплитуда колебаний.

Затухающие гармонические колебания имеют вид $\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$, где β - коэффициент, определяющий насколько быстро уменьшается амплитуда колебаний, ω - собственная частота колебаний маятника.

7. Докажите, что функция $\varphi(t) = \varphi_0\cos(\omega t + \alpha)$ является решением дифф. уравнения $\ddot\varphi + \omega^2\varphi = 0$

~~Т~~ Возьмём формулу из вопроса №6, где $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. Если смещение $x(t)$ или $\varphi(t)$ известно, то дифференцируя можно найти скорость и ускорение тела: $v(t) = x'(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$ и $a(t) = x''(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$. Отсюда видно, что $x(t)$ (смещение) и $x''(t)$ (ускорение) удовлетворяют дифференц. уравнению $\ddot\varphi + \omega^2\varphi = 0$, которое называется уравнением гармонических колебаний. Решением этого уравнения являются указанные cos и sin.

8. Выведите формулу (8) для расчёта постоянной части момента инерции колебательной системы в данной работе

Учитывая уравнение возвращающего момента силы, закон Гука и основное уравнение динамики вращательного движения, получаем дифференциальное уравнение ~~динамики~~ для φ (угол шкива): $I\ddot\varphi + \frac{d^2}{2}k\varphi = 0$, $\ddot\varphi + \omega^2\varphi = 0$, по пункту семь (№7) выводим его вид: $\varphi = \varphi_0\cos(\omega t + \alpha)$, где φ_0 и α - константы условий, а ω - собственная частота колебаний рассматриваемого маятника, которая находится по формуле $\omega = \sqrt{\frac{d^2 k}{2I}}$, через эту формулу соответственно обозначая частоту, момент инерции и период ~~системы~~ системы, а так же перемещая грузы на установке симметрично относительно оси вращения системы вдоль металлического профиля на шкиве в положения (1,1), (2,2), и другие, её момент инерции будет находиться по:

$I = \frac{d^2 k}{2\omega^2} = \frac{d^2 k T^2}{8\pi^2}$, при этом в центре момент инерции будет: $I_0 = \frac{d^2 k}{2\omega_0^2} = \frac{d^2 k T_0^2}{8\pi^2}$.

Из этого следует, что отношение моментов инерции составляет равенство:

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{T}{T_0}\right)^2$$

Если радиус цилиндров R, масса – m, то при установке цилиндров на расстоянии r от оси вращения её момент инерции равен: $I = I_g + 2\left(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2\right) = I_0 + 2mr^2$, где I_g – момен инерции диска, выражение в скобках – момент инерции одного диска. Эта формула представляет часть постоянную момента инерции колебательной системы.

Учитывая вышеперечисленное, находим формулу для I_0, связанную с теоремой Гюйгенса – Штейнера:

$$I_0 = \frac{2mr^2}{\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 - 1}$$

9. Выведите формулу расчёта приборной погрешности $\Theta_{I_{0i}}$ постоянной части момента инерции колебательной системы

Для расчёта приборной погрешности используются величины необходимого расчета, в данном случае, т.к. речь идёт о постоянной части момента инерции $I_0 = \frac{2mr^2}{\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 - 1}$, в расчёте приборной погрешности должны быть такие единицы, как масса – m, период колебаний – T, расположение грузов – r от оси вращения. Из них только масса m является константой, то есть она не зависит от номера опыта и от перемещения цилиндров. Таким образом, приборная погрешность $\Theta_{I_{0i}}$, где I_0 – постоянная часть момента инерции, а i – обозначение результата момента инерци при ~~каждого~~ разном расположении цилиндров. Обозначим сумму всех едениц момента инерции, умноженную на Θ_T, равную $2 \cdot 10^{-3}$ по условиям и I_{0i}. то есть:

$$\Theta_{I_{0i}} = I_{0i}\left(\frac{\Theta_m}{m} + \frac{2\Theta r}{r_i} + \frac{T_i}{T_i^2 - T_0^2}\left(2 - \frac{T_i}{2T_0}\right)\Theta_T\right).$$

10. Выведите формулу (9) для расчёта жёсткости колебательной системы в данной работе

Понятие и смысл жёсткости колебательной системы определены в вопросе №1. В ходе выведения формулы для момента инерции мы обозначили формулу момента инерци при расположении грузов в центре шкива:

$$I_0 = \frac{d^2 K}{2\omega_0^2} = \frac{d^2 K T^2}{8\pi^2}$$

т.к. $\omega = \sqrt{\frac{d^2 K}{2I}}$ исходя из этой формулировки получаем формулу для расчёта жёсткости колебательной системы при известном I_0:

$$K = \frac{8\pi^2 I_0}{d^2 T_0}$$

где d – диаметр шкива и T_0 – период колебаний при грузах в центре шкива

Вывод

Момент инерции эталонного диска определен методом вращательных колебаний. При различных положениях на диске цилиндров были подсчитаны приблизительно одинаковые величины для моментов инерции, что говорит о справедливости теоремы Гюйгенса-Штейнера.