Логические основы теории дискретных устройств

Перязева Юлия Валерьевна
Доцент кафедры ВТ

Теория автоматов

Дискретные преобразователи без памяти

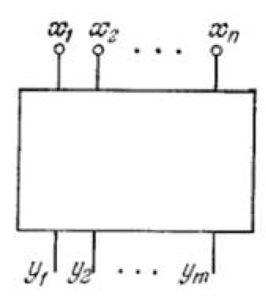
Содержание

Схемы из функциональных логических элементов

В моделях без памяти, в комбинационных схемах, значения выходов в каждый момент однозначно определяются текущими значениями входов.

Если устройство имеет n входов и m выходов и входным и выходным алфавитом устройства являются $\{0, 1\}$, то оно реализует на своих выходах систему булевых функций:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ y_m &= f_n(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$



Булевы функции. Основные определения

Булевы функции

Определение. Пусть $E_2 = \{0, 1\}$ и $E_2^n = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) | \ \forall i \ \ \alpha_i \in E_2\}$. Всюду определенной булевой функцией назовем отображение: $E_2^n \to E_2$.

При этом n называется *размерностью* функции.

Для того чтобы задать булеву функцию размерности n, необходимо каждому набору из нулей и единиц (двоичному набору) длины n поставить в соответствие 0 или 1.

Табличный способ задания

Булеву функцию можно задать таблично. Для $n = 1$

x	0	1	x	$\overline{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

При этом 0 называется *константным нулем*,
функция 1 – *константной единицей*,
функция x – *тождественной*,
а функция $\overline{x}$ – *отрицанием*.

Табличный способ задания

Для $n = 2$:

x y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0 0	0	0	0	1	1	1	1
0 1	1	0	1	1	0	1	0
1 0	1	0	1	0	0	1	0
1 1	1	1	0	1	1	0	0

f_1 – *дизъюнкция* $f_1 = x \vee y$

f_2 – *конъюнкция* $f_2 = x \,\&\, y$

f_3 – *исключающее или, сложение по модулю 2* $f_3 = x \oplus y$

f_4 – *импликация* $f_4 = x \to y$

f_5 – *эквивалентность* $f_5 = x \sim y$

f_6 – *штрих Шеффера* $f_6 = x \,|\, y$

f_7 – *стрелка Пирса* $f_7 = x \downarrow y$

Векторный способ задания

Если функция f имеет размерность n, то говорим, что функция f зависит от *n аргументов*. Пусть для некоторой функции f набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ отображается в α, тогда будем писать $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha$ и говорить, что функция f на наборе $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ принимает значение α. Если наборы в левом столбце упорядочены по натуральному порядку, то тогда мы можем указывать лишь второй столбец. Такой способ задания называется *векторным*.

Табличный способ задания:

x y	f
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

Соответствующий векторный способ задания:

$f(x, y) = (0111)$

Предложение. Число всех двоичных наборов длины n равно 2^n.

Предложение. Число всех булевых функций размерности n равна 2^{2^n}.

Множество всех функций размерности n будем обозначать F^n, а множество всех булевых функций – F.

Существенные и несущественные аргументы

В обычной алгебре справедливо равенство $x + y - y = x$, несмотря на то, что в левой части записана функция от двух переменных, а в правой от одной. Левая часть не зависит от y, что дает повод ввести понятие *существенных* и *фиктивных* аргументов.

Существенные и несущественные аргументы

Определение. Остаточными функциями от функции f по i-му аргументу называется функция размерности на единицу меньше чем размерность f, обозначаемые и определяемые следующим образом:

$$f_i^{\sigma_i}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \sigma_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$$

для любого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \in E^{n-1}$.

Если $\sigma_i = 0$, то имеем *нулевую* остаточную, если $\sigma_i = 1$ – то *единичную* остаточную.

Пример 1

Найдем некоторые остаточные функции от функции $f(x, y, z) = (01001011)$:

x y z	f
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

$f(x, y)_z^0 = (0011)$

Пример 1

Найдем некоторые остаточные функции от функции $f(x, y, z) = (01001011)$:

x y z	f
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

$f(x, y)_z^0 = (0011)$

x y z	f
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

$f(y, z)_x^0 = (0100)$

Пример 1

Найдем некоторые остаточные функции от функции
$f(x, y, z) = (01001011)$:

x y z	f
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

$f(x, y)_z^0 = (0011)$

x y z	f
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

$f(y, z)_x^0 = (0100)$

x y z	f
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

$f(x, z)_y^1 = (0011)$

Существенные и несущественные аргументы

Определение. Агумент x_i функции $f(x_i, \ldots, x_n)$ называется *фиктивным*, если $f^0_{x_i} = f^1_{x_i}$ и *существенным* в противном случае.

Булевы функции $f(\tilde{u})$ (где под $\tilde{u}$ подразумевается набор имен аргументов, например, (x, y, z)) и $g(\tilde{v})$ **равны**, если:

- список существенных аргументов f и g совпадает;
- вектора остаточных функций по всем фиктивным аргументам у f и g равны.

Пример 2

Даны функции $f(a, b, c)$ и $g(c, d, a)$, заданы таблично:

a b c	f
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	1

c d a	g
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

Пример 2

Даны функции $f(a,b,c)$ и $g(c,d,a)$, заданы таблично:

a b c	f
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	1

c d a	g
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

Найдем остаточные функции:

$f(b,c)_a^0 = (0101)$ $f(b,c)_a^1 = (0101)$

$f(a,c)_b^0 = (0101)$ $f(a,c)_b^1 = (0101)$

$f(a,b)_c^0 = (0000)$ $f(a,b)_c^1 = (1111)$

$g(d,a)_c^0 = (0000)$ $g(d,a)_c^1 = (1111)$

$g(c,a)_d^0 = (0011)$ $g(c,a)_d^1 = (0011)$

$g(c,d)_a^0 = (0011)$ $g(c,d)_a^1 = (0011)$

Следовательно у f a и b – фиктивные переменные, c – существенная, у g d и a – фиктивные переменные, c – существенная.

$f(c)_{ab}^{00} = g(c)_{da}^{00} = (01)$;

$f(a,b,c) = g(c,d,a) = f(c) = (01)$

Представление формулами

Определение. Пусть $B \subset F$ и X – некоторое множество переменных. Индукцией определим понятие формулы над B от множества переменных X:

- переменная x из X есть формула;
- если символом f обозначается функция размерности m, принадлежащая B, и $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ – формулы, то $f(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ есть формула.

Произвольная формула задает булеву функцию, с точностью до порядка аргументов.

Приоритет унарных и бинарных функций: $-, \&, \vee, \oplus,$ все остальные
Например, следующие две записи эквивалентны, с учетом приоритета функций:

$(x_1 \cdot x_2) \oplus (\overline{x_2 \vee x_3}) \cdot ((x_1 \cdot x_3) \cdot x_4) = x_1 x_2 \oplus \overline{x_2 \vee x_3} x_1 x_3 x_4$

Представление формулами

Множество B будем называть *базисным множеством*, а функции из B *базисными функциями*.

Две формулы называются *эквивалентными*, если при любых значениях переменных, входящих в формулы, значения этих формул совпадают.

Пример 3

Функция задана формулой: $f(a,b,c,d) = abcd \vee \overline{a}bcd \vee \overline{bc}$

Таблица истинности:

a b c d	f
0 0 0 0	1
0 0 0 1	1
0 0 1 0	1
0 0 1 1	1
0 1 0 0	1
0 1 0 1	1
0 1 1 0	0
0 1 1 1	1
1 0 0 0	1
1 0 0 1	1
1 0 1 0	1
1 0 1 1	1
1 1 0 0	1
1 1 0 1	1
1 1 1 0	0
1 1 1 1	1

Найдем остаточные функции:

$f_a^0 = (11111101)$
$f_a^1 = (11111101)$

$f_b^0 = (11111111)$
$f_b^1 = (11011101)$

$f_c^0 = (11111111)$
$f_c^1 = (11011101)$

$f_d^0 = (11101110)$
$f_d^1 = (11111111)$

$f_a^0 = f_a^1$, следовательно a – фиктивная переменная, c, b и d – существенные.

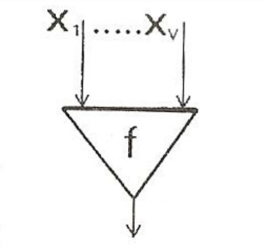
$f(a,b,c,d) = (1111110111111101) = f(b,c,d) = (11111101)$

Логические элементы

Содержание

Схемы из функциональных логических элементов

Схемы строятся из функциональных логических элементов. Под логическим элементом (logic gate) будем понимать объект (простейшую цифровую схему) с некоторым числом двоичных входов и одним двоичным выходом. Взаимосвязь между входными сигналами и выходным сигналом логического вентиля описывается булевой функцией.



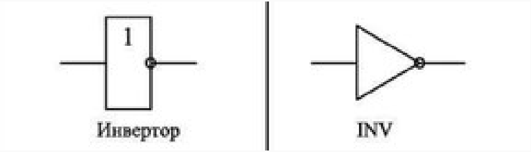
Логические элементы

Для графического изображении логических элементов используются специальные символы.

Если смотреть на изображение логического элемента, то входные сигналы обычно размещаются слева (или сверху), а выходные сигналы – справа (или снизу), взаимосвязь между входными сигналами и выходным сигналом логического элемента задается булевой функцией.

Логический элемент с одним входом не (not gate), отрицание, инвертор:

ГОСТ2.743-91 ANSI



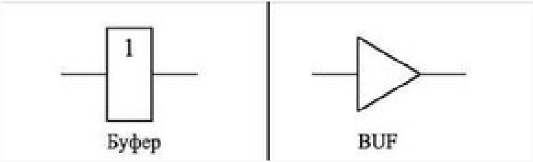
x	f
0	1
1	0

$$f = \overline{x}$$

Для обозначения используются и другие способы: $f =!x$, $f =\sim x$, $f = \neg x$.

Логический элемент с одним входом буфер (buffer):

ГОСТ2.743-91 ANSI

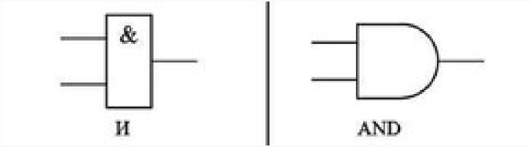


x	f
0	0
1	1

$$f = x$$

Логический элемент и (and gate), конъюнкция:

ГОСТ2.743-91 ANSI



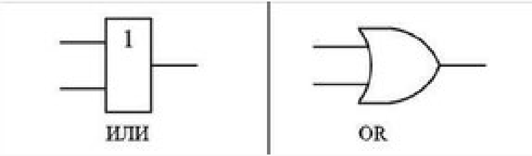
x y	f
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

Может быть записано несколькими способами:

$$f = x\&y,\ f = x \cdot y,\ f = xy.$$

Логический элемент или (or gate), дизъюнкция:

ГОСТ2.743-91 ANSI



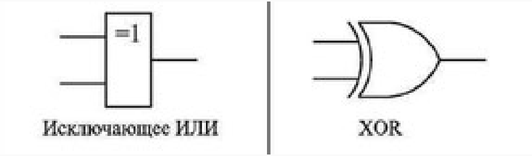
x y	f
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

Может быть записано несколькими способами:

$$f = x \vee y, \; f = x + y.$$

Логический элемент исключающее или (xor gate), сложение по mod2:

ГОСТ2.743-91 ANSI



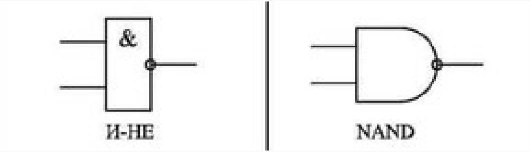
x y	f
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

$$f = x \oplus y.$$

Логические элементы

Логический элемент и-не (nand gate):

ГОСТ2.743-91 ANSI

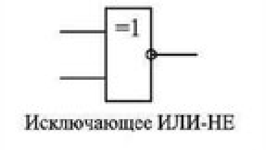


x y	f
0 0	1
0 1	1
1 0	1
1 1	0

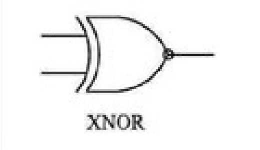
$$f = \overline{x \cdot y} = x|y.$$

Логический элемент исключающее или-не (xnor gate):

ГОСТ2.743-91



ANSI

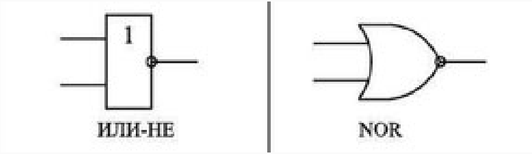


x y	f
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	1

$$f = \overline{x \oplus y} = x \sim y.$$

Логический элемент или-не (nor gate):

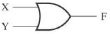
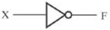
ГОСТ2.743-91 ANSI



x y	f
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	0

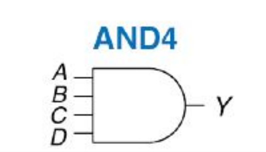
$$f = \overline{x \vee y} = x \downarrow y.$$

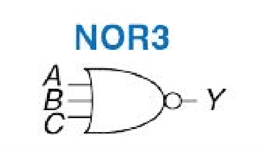
Логические элементы

Name	Distinctive-Shape Graphics Symbol	Algebraic Equation	Truth Table
AND		$F = XY$	X Y | F 0 0 | 0 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 1
OR		$F = X + Y$	X Y | F 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 1
NOT (inverter)		$F = \overline{X}$	X | F 0 | 1 1 | 0
NAND		$F = \overline{X \cdot Y}$	X Y | F 0 0 | 1 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 0
NOR		$F = \overline{X + Y}$	X Y | F 0 0 | 1 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 0
Exclusive-OR (XOR)		$F = X\overline{Y} + \overline{X}Y$ $= X \oplus Y$	X Y | F 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 0
Exclusive-NOR (XNOR)		$F = XY + \overline{X}\overline{Y}$ $= \overline{X \oplus Y}$	X Y | F 0 0 | 1 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 1

Логические элементы

Многие булевы функции, а значит, и логические вентили, необходимые для их реализации, оперируют тремя и более входными сигналами. Например:





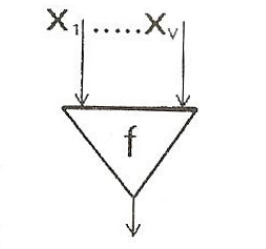
Но в этом разделе будем работать только с двухвходовыми логическими элементами.

Схемы из функциональных логических элементов

Содержание

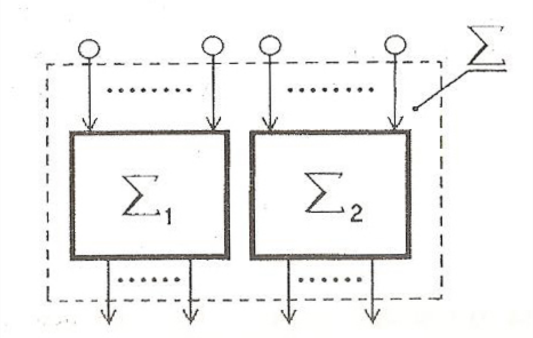
Пусть имеется базис из логических элементов $B = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$.
Определение. Схема из функциональных логических элементов (СФЭ) над B.

а) Любой логический элемент из базиса или элемент буфер является схемой.



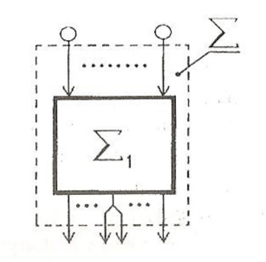
Объединение непересекающихся схем

b) Если $\sum_1$ и $\sum_2$ есть схемы из функциональных логических элементов, то конструкция $\sum$, полученная путем их объединения есть СФЭ.
Множество входов получается объединением входов схем, а множество выходов объединением выходов.



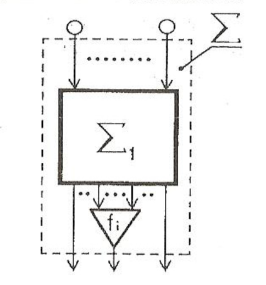
Расщепление выходов

c) Если $\sum_1$ есть СФЭ, то конструкция $\sum$, полученная расщеплением $i-$го выхода схемы $\sum_1$ на два выхода есть СФЭ. В этом случае множество входов схемы $\sum$ совпадает с множеством входов схемы $\sum_1$. Множество выходов схемы $\sum$ есть все выходы схемы $\sum_1$, кроме $i-$го. Вместо него к выходам схемы $\sum$ добавляются два новых, образованных выхода.



Присоединение элемента к схеме

d) Если $\sum_1$ есть СФЭ и f_i– функциональный элемент из базиса B, то конструкция $\sum$, полученная путем присоединения всех входов элемента f_i к некоторым выходам схемы $\sum_1$ есть СФЭ. В этом случае множество входов схемы $\sum$ совпадает с множеством входов схемы $\sum_1$. Множество выходов схемы $\sum$ есть все выходы схемы $\sum_1$, за исключением тех, которые были присоединены к входам элемента f_i. Вместо них к выходам схемы $\sum$ добавляется выход элемента f_i.



Анализ и синтез СФЭ

Под *анализом* заданной схемы будем понимать решение задачи на нахождение множества булевых функций, которые реализуюся на ее выходах.

Анализ и синтез СФЭ

Под *синтезом* схемы будем понимать построение схемы, реализующей над заданным базисом заданную систему булевых функций.

Причем существует множество способов реализации одной и той же функции. Вы сами выбираете, как реализовать требуемую функцию, исходя из имеющихся в распоряжении «строительных блоков», а также ваших проектных ограничений. Эти ограничения часто включают в себя занимаемую на кристалле микросхемы площадь, скорость работы, потребляемую мощность и время разработки.

Под *сложностью* схемы будем понимать число функциональных элементов, из которых она состоит, обозначим сложность схемы $\sum$ через $L(\sum)$.

Пример 4

Функция задана формулой: $f = \overline{y}\,\overline{z} \vee x\overline{y}$.

Схема реализации функции:
$L(\sum) = 5$

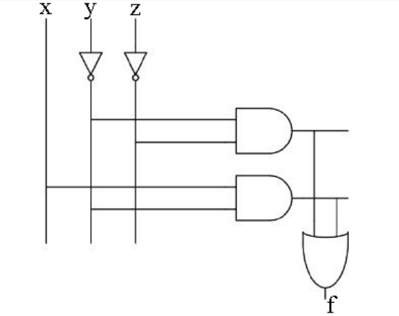


Таблица истинности:

x y z	f
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	0

Основные эквивалентности

Содержание

Основные эквивалентности

Коммутативность:

$$x \vee y = y \vee x$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

$$x \oplus y = y \oplus x$$

$$x \sim y = y \sim x$$

Ассоциативность:

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

$$(x \sim y) \sim z = x \sim (y \sim z)$$

Основные эквивалентности

Дистрибутивность:

$$(x \vee y) \cdot z = (x \cdot z) \vee (y \cdot z)$$
$$(x \oplus y) \cdot z = (x \cdot z) \oplus (y \cdot z)$$
$$(x \cdot y) \vee z = (x \vee z) \cdot (y \vee z)$$
$$(x \oplus y) \vee z = (x \vee z) \oplus (y \vee z) \oplus z$$
$$\overline{\overline{x}} = x$$
$$\overline{x} = x \oplus 1$$

правила де Моргана:

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$
$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} \vee \overline{y}$$

Законы поглощения:

$$x \vee \overline{x} \cdot y = x \vee y$$
$$x \cdot (x \vee y) = x$$
$$x \vee x \cdot y = x$$
$$x \cdot (\overline{x} \vee y) = x\, y$$

Основные эквивалентности

Идемпотентность:

$$x \vee x = x$$

$$x \cdot x = x$$

$$x \vee \overline{x} = 1$$

$$x \cdot \overline{x} = 0$$

$$x \vee 1 = 1$$

$$x \vee 0 = x$$

$$x \cdot 1 = x$$

$$x \cdot 0 = 0$$

$$x | y = \overline{x \cdot y}$$

$$x \downarrow y = \overline{x \vee y}$$

$$x \to y = \overline{x} \vee y$$

$$x \oplus y = (x \cdot \overline{y}) \vee (\overline{x} \cdot y) = (x \vee y)(\overline{x} \vee \overline{y})$$

$$x \sim y = \overline{x \oplus y} = (x \cdot y) \vee (\overline{x} \cdot \overline{y}) = (\overline{x} \vee y)(x \vee \overline{y})$$

$$x \vee y = x\,y \oplus x \oplus y$$

Пример 5

Функция задана формулой: $f = abcd \vee \overline{a}bcd \vee \overline{bc}$.
Схема реализации функции: $L(\sum) = 10$.

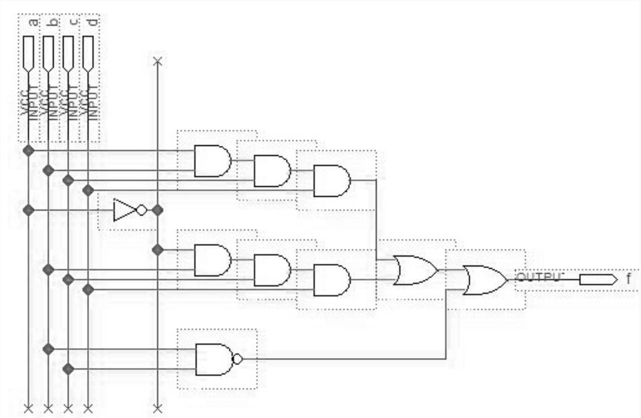


Таблица истинности:

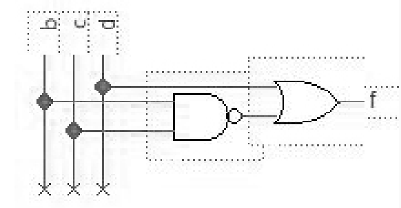
a b c d	f
0 0 0 0	1
0 0 0 1	1
0 0 1 0	1
0 0 1 1	1
0 1 0 0	1
0 1 0 1	1
0 1 1 0	0
0 1 1 1	1
1 0 0 0	1
1 0 0 1	1
1 0 1 0	1
1 0 1 1	1
1 1 0 0	1
1 1 0 1	1
1 1 1 0	0
1 1 1 1	1

Пример 6

Упростим формулу применяя эквивалентные преобразования:
$f = abcd \vee \overline{a}bcd \vee \overline{bc} = (a \vee \overline{a})bcd \vee \overline{bc} = 1 \cdot bcd \vee \overline{bc} = bcd \vee \overline{bc}$

$= (bc \vee \overline{bc})(d \vee \overline{bc}) = 1 \cdot (d \vee \overline{bc}) = d \vee \overline{bc}.$

Схема реализации функции: $L(\sum) = 2$



Рализация в базисе $\{|\}$

Любая булева функция может быть реализована формулой в базисе $\{|\}$, базис содержит только одну функцию штрих Шеффера.

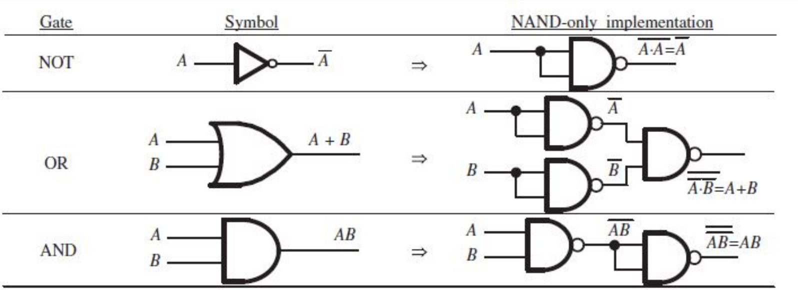
Для получения формулы в этом базисе сначала можно получить упрощенное выражение в базисе $\{\&, \vee, -\}$, а затем преобразовать с помощью следующих эквивалентностей:

$$\overline{x} = \overline{x \cdot x}$$

$$x \vee y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}}$$

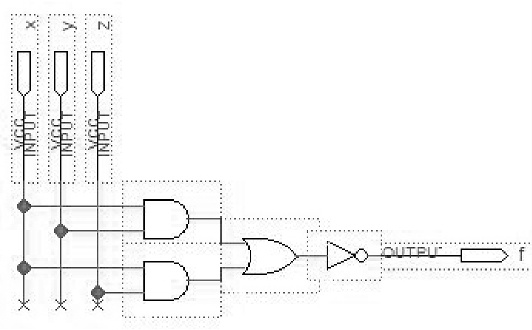
$$x \cdot y = \overline{\overline{x \cdot y}}$$

Функции штрих Шеффера соответствует логический элемент И-НЕ (NAND).



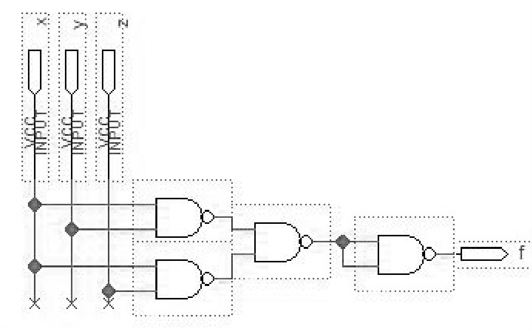
Пример 7

Построить логическую схему функции $\overline{xy \vee xz}$ используя элементы И-НЕ (NAND). Реализация в базисе $\{\&, \vee, -\}$ имеет следующий вид:



Пример 7

Преобразуем формулу: $\overline{xy \vee xz} = \overline{\overline{\overline{xy} \cdot \overline{xz}}}$, построим соответствующую схему:



Полные системы булевых функций

Содержание

Полные системы. Примеры полных систем

Определение. Множество булевых функций A называется *полной системой*, если любую функцию алгебры логики можно выразить формулой над A.

Теорема. Следующие системы является полными:

- $\{\vee, \&, -\}$
- $\{\vee, -\}$
- $\{\&, -\}$
- $\{|\}$
- $\{\downarrow\}$
- $\{\&, \oplus, 1\}$
- $\{\&, \oplus, -\}$

Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы

Содержание

Специальные представления булевых функций

Введем следующее обозначение:

$$x^\sigma = \begin{cases} x, \text{ при } \sigma = 1; \\ \overline{x}, \text{ при } \sigma = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0^0 &= 1 \\ 0^1 &= 0 \\ 1^0 &= 0 \\ 1^1 &= 1 \end{aligned}$$

$$x^\sigma = 1 \Leftrightarrow x = \sigma$$

Дизъюнктивные нормальные формы

Определение. *Элементарной конъюнкцией* называется выражение вида $x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot x_{i_2}^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}^{\sigma_k}$ ($i_1, \ldots, i_k$ попарно различны).

Определение. *Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)* называется дизъюнкция элементарных конъюнкций.

Определение. *СДНФ* называется дизъюнкция полных (содержат все переменные от которых зависит функция) элементарных конъюнкций (минтермов), на которых функция принимает значение 1.

Дизъюнктивных нормальных форм у булевой функции может быть несколько, а СДНФ – единственна.

Дизъюнктивные нормальные формы

Теорема. Для любой булевой функции $f(x_1, \cdots, x_n)$ и для любого $k (1 \le k \le n)$ справедливо следующее равенство:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \in E_2^k} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

Следствие. Разложение Шенона произвольной булевой функции по одной переменной имеет вид

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_i f^1_{x_i}(x_1, \ldots, x_n) \vee \overline{x_i} f^0_{x_i}(x_1, \ldots, x_n)$$

Следствие о совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ). Для любой булевой функции $f(x_1, \cdots, x_n)$ отличной от тождественного нуля, справедливо следующее представление:

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}$$

Построение СДНФ по таблице значений функции

1. Выбираем те наборы, на которых функция равна 1.
2. Каждому выбранному набору $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ставим в соответствие минтерм (полную элементарную конъюнкцию) $x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$.
3. Строим дизъюнкцию полных элементарных конъюнкций.

Построение СДНФ по таблице значений функции

x y z	f	минтерм	имя минтерма
0 0 0	0	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$	m_0
0 0 1	1	$\overline{x}\,\overline{y}z$	m_1
0 1 0	0	$\overline{x}y\overline{z}$	m_2
0 1 1	0	$\overline{x}yz$	m_3
1 0 0	1	$x\overline{y}\,\overline{z}$	m_4
1 0 1	0	$x\overline{y}z$	m_5
1 1 0	0	$xy\overline{z}$	m_6
1 1 1	0	xyz	m_7

$$f = \overline{x}\ \overline{y}\ z \vee x\ \overline{y}\ \overline{z} = \sum(1,4)$$

Построение ДНФ, СДНФ элементарными преобразованиями

1. Преобразуем в формулу над множеством функций $\{\vee, \cdot, -\}$: $x|y = \overline{x \cdot y}$, $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$, $x \to y = \overline{x} \vee y$, $x \oplus y = (x \cdot \overline{y}) \vee (\overline{x} \cdot y)$, $x \sim y = \overline{x \oplus y} = (x \cdot y) \vee (\overline{x} \cdot \overline{y})$.
2. Используем правила де Моргана: $\overline{x \vee y} = \overline{x}\ \overline{y}$, $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$ и $\overline{\overline{x}} = x$.
3. Используем законы дистрибутивности: $(x \vee y)z = (xz) \vee (yz)$.
4. Применяем законы поглощения:$x \vee x = x$, $x \cdot x = x$, $x \vee \overline{x} = 1$, $x \cdot \overline{x} = 0$, $x \vee 1 = 1$, $x \vee 0 = x$, $x \cdot 1 = x$, $x \cdot 0 = 0$, получаем дизъюнктивное представление.
5. Если нужно найти СДНФ, то те дизъюнктивные члены, которые не являются полными (т.е. не содержит всех переменных от которых зависит функция) нужно заменить следующим образом: $\Phi \cdot 1 = \Phi \cdot (y \vee \overline{y}) = \Phi \cdot y \vee \Phi \cdot \overline{y}$.

Конъюнктивные нормальные формы

Определение. *Элементарной дизъюнкцией* называется выражение вида $x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2} \vee \ldots \cdot x_{i_k}^{\sigma_k}$ ($i_1, \ldots, i_k$ попарно различны).

Определение. *Конъюнктивной нормальной формой (КНФ)* называется конъюнкция элементарных дизъюнкций.

Определение. *Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ)* называется конъюнкция полных (содержат все переменные от которых зависит функция) элементарных дизъюнкций, макстермов, является конъюнктивной нормальной формой.

Конъюнктивной нормальных форм у булевой функции может быть несколько, а СКНФ – единственна.

Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ)

Теорема о СКНФ. Для любой булевой функции $f(x_1, \cdots, x_n)$ отличной от тождественной 1, справедливо следующее представление:

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)=0} (x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}})$$

Построение СКНФ по таблице значений функции

1. Выбираем те наборы, на которых функция равна 0.
2. Каждому выбранному набору $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ставим в соответствие макстерм (полную элементарную дизъюнкцию) $x_1^{\overline{\alpha_1}} \cdot \ldots \cdot x_n^{\overline{\alpha_n}}$.
3. Строим конъюнкцию полных элементарных дизъюнкций.

Построение СКНФ по таблице значений функции

x y z	f	макстерм	имя макстерма
0 0 0	0	$x \vee y \vee z$	M_0
0 0 1	1	$x \vee y \vee \overline{z}$	M_1
0 1 0	1	$x \vee \overline{y} \vee z$	M_2
0 1 1	1	$x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$	M_3
1 0 0	1	$\overline{x} \vee y \vee z$	M_4
1 0 1	1	$\overline{x} \vee y \vee \overline{z}$	M_5
1 1 0	0	$\overline{x} \vee \overline{y} \vee z$	M_6
1 1 1	1	$\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$	M_7

$$f = (x \vee y \vee z) \cdot (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) = \prod(0, 6)$$

Минимизация булевых функций в классе дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм

Содержание

Минимизация булевых функций

Число переменных, образующих элементарную конъюнкцию, называется ее рангом.

Длиной днф называется число ее элементарных конъюнкций, а сложностью (рангом) днф – сумма рангов конъюнкций.

Импликантой булевой функции f называется такая элементарная конъюнкция k, что $k \vee f = f$, т.е. на любом наборе значений переменных, на котором равна 1, значение функции также равно 1.

Простой импликантой называется такая импликанта, которая перестает быть импликантой при удалении из нее любого символа.

Минимизация булевых функций

Дизъюнкция всех простых импликант функции называется *сокращенной* днф.

Днф называется *минимальной* днф функции f, если она содержит наименьшее число букв среди всех днф, эквивалентных ей.

Днф называется *кратчайшей* днф функции f, если она имеет наименьшую длину (число элементарных конъюнкций)среди всех днф, эквивалентных ей.

Днф называется *тупиковой* днф функции f, если отбрасывание любой элементарной конъюнкции или буквы приводит к днф, которая не эквивалентна исходной днф.

Минимизация булевых функций

Метод Блейка получения сокращенной днф.

Представляет собой операции обобщенного склеивания $xK_1 \vee \overline{x}K_2 = xK_1 \vee \overline{x}K_2 \vee K_1K_2$ и поглощения $K_1 \vee K_1K_2 = K_1$.
Дана функция:

$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1x_3 \vee x_2\overline{x_3}$.

Применяем операцию обобщенного склеивания
$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1x_3 \vee x_2\overline{x_3} \vee x_3x_2 \vee \overline{x_1}x_2 \vee x_1x_2$.

$= \overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1x_3 \vee x_2\overline{x_3} \vee x_3x_2 \vee \overline{x_1}x_2 \vee x_1x_2 \vee x_2 =$

Выполнив все поглощения получим

$f = x_1x_3 \vee x_2$

Получение минимальных ДНФ при помощи карт Карно

Для булевых функций небольшой размерности имеется простой и весьма наглядный способ получения минимальных ДНФ, основанный на использовании карт Карно. Его суть заключается в следующем: булева функция помещается в матрицу специального вида, называемую картой Карно. Приведем пустые матрицы для функций двух, трех и четырех переменных.

$x_1 \backslash x_2$	0	1
0		
1		

x_2	0	0	1	1
$x_1 \backslash x_3$	0	1	1	0
0				
1				

	x_3	0	0	1	1
x_1	$x_2 \backslash x_4$	0	1	1	0
0	0				
0	1				
1	1				
1	0				

Способ заполнения матрицы значениями функции f очевиден: на пересечении строки $\tilde{\alpha}$ и столбца $\tilde{\beta}$ помещается значение $f(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$. Следует обратить особое внимание на тот факт, что наборы в строках и столбцах матрицы упорядочены не натурально, а рефлексивно, что приводит к замене местами некоторых значений булевой функции, заданной, как правило, таблицей с натуральным упорядочением.

Рефлексивный порядок (код Грея) определяется рекурсивно следующим образом:

вместо набора $(\sigma_{i,1}, \ldots, \sigma_{i,n-1})$ при нечетном i сначала вставляется набор $(\sigma_{i,1}, \ldots, \sigma_{i,n-1}, 0)$, а затем $(\sigma_{i,1}, \ldots, \sigma_{i,n-1}, 1)$, а при четном i в обратном порядке: сначала $(\sigma_{i,1}, \ldots, \sigma_{i,n-1}, 1)$, затем $(\sigma_{i,1}, \ldots, \sigma_{i,n-1}, 0)$.

Карты Карно

Натуральный порядок:

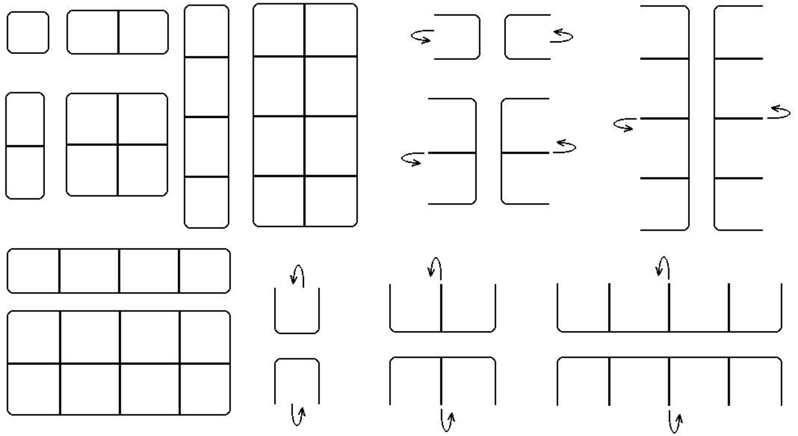
$\overline{\sigma}_1$	0 0 0
$\overline{\sigma}_2$	0 0 1
$\overline{\sigma}_3$	0 1 0
$\overline{\sigma}_4$	0 1 1
$\overline{\sigma}_5$	1 0 0
$\overline{\sigma}_6$	1 0 1
$\overline{\sigma}_7$	1 1 0
$\overline{\sigma}_8$	1 1 1

Рефлексивный порядок:

$\overline{\sigma}_1$	0 0 0
$\overline{\sigma}_2$	0 0 1
$\overline{\sigma}_3$	0 1 1
$\overline{\sigma}_4$	0 1 0
$\overline{\sigma}_5$	1 1 0
$\overline{\sigma}_6$	1 1 1
$\overline{\sigma}_7$	1 0 1
$\overline{\sigma}_8$	1 0 0

Карты Карно

Дальнейшее решение состоит в нахождении минимального покрытия множества всех единиц в матрице фигурами следующего вида:



Карты Карно

Чем фигура больше, тем меньшей конъюнкции она соответстует. Таким образом, для нахождения минимальной ДНФ необходимо искать покрытие наименьшим возможным числом как можно больших фигур. Заметим, что фигуры могут пересекаться.

Каждой фигуре соответствует одна элементарная конъюнкция. Ее можно получить, выписывая все наборы, которые занимает данная фигура, и далее:

а) если переменная x_i на всех этих наборах равна 1, то в элементарную конъюнкцию она входит без отрицания;

б) если переменная x_i на всех этих наборах равна 0, то в элементарную конъюнкцию она входит с отрицанием;

в) если переменная x_i принимает на этих наборах различные значения, то она отсутствует в данной элементарной конъюнкции.

Карты Карно

Пример. *Построить минимальную ДНФ для функции* $f_1 = (1100\ 1010)$.

Поместим функцию f_1 в матрицу и найдем минимальное покрытие. Оно состоит из двух фигур.

x_2 / x_3 \ x_1	0 0	0 1	1 1	1 0
0	1	1	0	0
1	1	0	0	1

Найдем соответствующие элементарные конъюнкции:

$$\begin{array}{ccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \rightarrow & \overline{x}_1\overline{x}_2 \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & & & \\ 1 & 0 & 0 & \rightarrow & x_1\overline{x}_3 \\ 1 & 1 & 0 & & \end{array}$$

Таким образом, $f_1 = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_3$, и $L = 6$.

Особо следует рассмотреть неполностью определенные булевы функции, т. е. функции, содержащие $*$. Для них справедливы все вышеприведенные рассуждения, причем следует помнить, что $*$ может как входить в какую-либо фигуру, так и не входить ни в одну из них. В первом случае $*$ интерпретируется как 1, во втором – как 0. Наличие символов $*$ упрощает задачу построения минимального покрытия, так как позволяет варьировать расположение фигур.

Карты Карно

Построить минимальную ДНФ для функции

$f_2 = (0101\ \ *011\ 0101\ 011*).$

$x_1\ x_2$ \ $x_3\ x_4$	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	0	1	1	0
0 1	*	0	1	1
1 1	0	1	*	1
1 0	0	1	1	0

Помещаем f_2 в матрицу, находим лучшее чем у f_2 представление :

$$\begin{array}{cccc|}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1
\end{array} \to \quad \overline{x}_2 x_4 \qquad
\begin{array}{cccc|}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1
\end{array} \to \quad x_1 x_4$$

$$\begin{array}{cccc|}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0
\end{array} \to \quad x_2 x_3$$

Таким образом, частичную функцию f_2 можно доопределить термом $\overline{x}_2 x_4 \vee x_1 x_4 \vee x_2 x_3$, и $L = 6$.