Часть 2

Множества и отображения

Лекции 5–7

1. Понятие множества

Любое понятие дискретной математики можно определить с помощью понятия множества. Под *множеством* понимают объединение в одно общее объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью. Таково интуитивное определение понятия множества, данное основателем теории множеств Георгом Кантором. Это понятие в математике является первичным и, следовательно, не имеет строгого определения. Объекты, составляющие множество, будем называть его элементами. Множества будем обозначать прописными буквами латинского алфавита: $A, B, C, \ldots$, а элементы множеств — строчными буквами $a, b, c, \ldots$. Основное отношение между элементом a и содержащим его множеством A, обозначается так: $a \in A$ (a принадлежит A). Если a не является элементом множества A, то пишут $a \notin A$ (a не принадлежит A). Некоторые множества имеют общепринятые обозначения: N — множество натуральных чисел; R — множество действительных чисел; Z — множество целых чисел.

2. Способы задания множеств

Имеется два существенно различных способа задания множеств. Можно либо указать правило для определения того, принадлежит или не принадлежит рассматриваемому множеству любой данный объект, либо дать полный перечень элементов этого множества.

Первый способ мы назовем описанием множества, а второй способ — перечислением множества. Например, обозначение $\{x \in U : \alpha(x)\}$ читается: «элементы множества U, обладающие свойством α» — это описание множества. Элементы перечисляемого множества принято заключать в скобки: $\{1, 2, 3, \dots\}$ — множество натуральных чисел; $\{2, 4, 6, \dots\}$ — множество четных чисел. Под многоточием в первом случае подразумеваются все последующие натуральные числа, а во втором — четные.

Нас часто будут интересовать множества логических возможностей, потому что анализ таких множеств часто играет основную роль при решении той или иной проблемы.

3. Подмножества

Множество, состоящее из некоторых элементов другого множества, называется подмножеством этого последнего множества. С целью изучения всех подмножеств данного множества введем следующую терминологию. Исходное множество будем называть *универсальным множеством*; подмножества, содержащие один элемент, будем называть *единичными множествами*; множество, вовсе не содержащее никаких элементов, будем называть *пустым множеством* и обозначать $\varnothing$.

В качестве примера возьмем универсальное множество U, состоящее из трех элементов $\{a, b, c\}$. Собственные подмножества U — это множества, которые содержат некоторые, но не все элементы U. Этими подмножествами являются три множества из двух элементов $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ и три единичных множества $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$.

Будем считать подмножеством множества U и пустое множество $\varnothing$, не содержащее элементов U.

Другими словами, множество A называется подмножеством множества B (обозначаем $A \subset B$), если все элементы множества A принадлежат B. Это означает справедливость следующего утверждения: для любого элемента a, если $a \in A$, то $a \in B$ при условии $A \subset B$. Будем говорить также, что множество A содержится в B или имеется включение множества A в B. Множества A и B называются равными или совпадающими (обозначается $A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов, т. е. если $A \subset B$ и $B \subset A$. Таким образом, чтобы доказать равенство множеств, требуется установить два включения.

4. Операции над множествами

В первой части были рассмотрены способы, которыми из данных высказываний могут быть образованы новые высказывания. Теперь мы будем рассматривать аналогичный процесс — образование новых множеств из данных множеств. Мы будем предполагать, что каждое из множеств, которое мы используем в этом процессе, является подмножеством некоторого универсального множества, и будем требовать, чтобы вновь образованное множество было подмножеством того же самого универсального множества. Как и всегда, мы можем задавать вновь образованное множество или путем описания, или путем перечисления.

Следует провести аналогию между логическими операциями и операциями над множествами.

отрицание	дополнение
конъюнкция	пересечение
дизъюнкция	объединение
импликация	разность

Чтобы нагляднее представить эти операции, изобразим их на диаграмме, называемой диаграммой Эйлера–Венна. Пусть прямоугольник обозначает универсальное множество, а круги внутри прямоугольника — подмножества.

Дополнением к множеству A называется множество элементов, которые не содержатся в A. Обозначают его $\overline{A}$ и читают «дополнение множества A к U» (см. рис. 2.1).

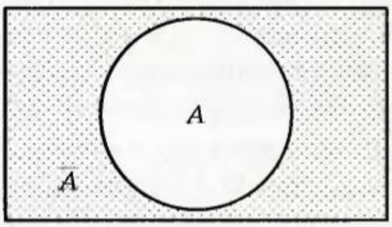


Рис. 2.1

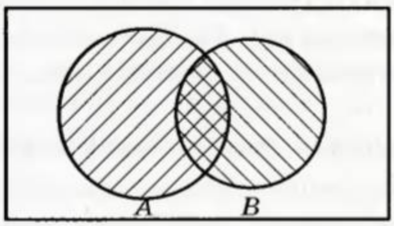


Рис. 2.2

Пересечением множеств A и B называется множество элементов, принадлежащих и A и B. Обозначают $A \cap B$ и читают «пересечение A и B» (см. рис. 2.2).

Если A и B — непустые множества, пересечение которых пусто, т. е. $A \cap B = \varnothing$, то их называют непересекающимися множествами.

Объединением множеств A и B называется множество элементов, принадлежащих либо A, либо B (либо обоим). Обозначают $A \cup B$ и читают «объединение A и B» (см. рис. 2.3).

Разностью множеств A и B называется множество элементов, принадлежащих A и не принадлежащих B. Обозначают $A \setminus B$ и читают «разность A и B» (см. рис. 2.4).

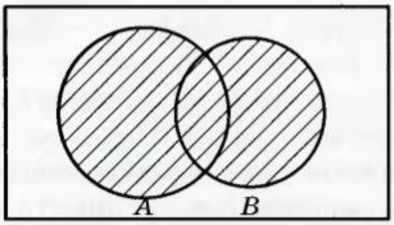


Рис. 2.3

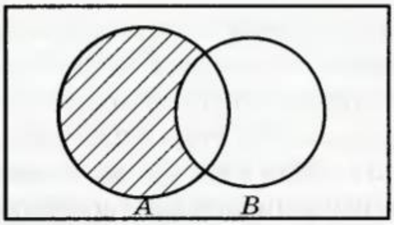


Рис. 2.4

5. Соотношение между множествами и составными высказываниями

Существует тесная связь между множествами — с одной стороны, и высказываниями — с другой, а также между операциями над множествами, с одной стороны, и операциями образования составных высказываний — с другой.

Если рассматривается несколько высказываний, то сопоставить каждому из этих высказываний некоторое множество можно вполне логичным путем. Сначала мы образуем множество всех логических возможностей для рассматриваемых высказываний и назовем его универсальным множеством. Затем каждому высказыванию мы поставим в соответствие подмножество тех логических возможностей универсального множества, для которых это высказывание истинно.

Определение. Пусть $X, Y, Z, \ldots$ означают некоторые высказывания, и пусть U — их множество логических возможностей. Пусть $A, B, C, \ldots$ означают подмножества U, для которых истинны соответственно высказывания $X, Y, Z, \ldots$. Тогда $A, B, C, \ldots$ называются соответственно множествами истинности высказываний $X, Y, Z, \ldots$.

Если X и Y — высказывания, то $X \vee Y$ и $X \wedge Y$ также высказывания, и, следовательно, они должны иметь множества истинности.

Чтобы найти множество истинности высказывания $X \vee Y$, заметим, что это высказывание истинно, когда истинно X или истинно Y (или оба). Таким образом, высказыванию $X \vee Y$ мы должны поставить в соответствие те логические возможности, которые лежат в A или в B (или в них обоих); иначе говоря, мы должны поставить в соответствие $X \vee Y$ множество $A \cup B$. С другой стороны, высказывание $X \wedge Y$ истинно, только когда истинно и

X и Y, так что высказыванию $X \wedge Y$ мы должны поставить в соответствие множество $A \cap B$.

Итак, существует тесная связь между логической операцией дизъюнкцией и операцией объединения множеств, а также между конъюнкцией и пересечением. А также между логической операцией отрицания и операцией дополнения множества, т. е. множеством истинности для $\overline{X}$ будет $\overline{A}$.

Множество истинности двух высказываний X и Y показаны на диаграмме Эйлера–Венна. Здесь отмечены различные логические возможности этих двух высказываний (см. рис. 2.5).

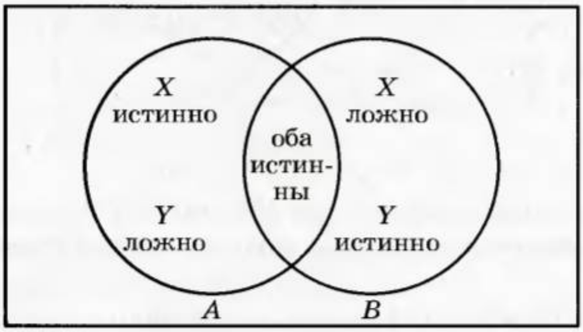


Рис. 2.5

Связь между высказыванием и его множеством истинности создает возможность «перевода» любой задачи, относящейся к составным высказываниям, в задачу теории множеств.

Возможно также и обратное: если поставлена какая-то задача, касающаяся множеств, то универсальное множество можно себе представить как некоторое множество логических возможностей, подмножества которого являются множествами истинности некоторых высказываний.

Следовательно, задачу, относящуюся к множествам, можно также «перевести» на язык составных высказываний.

6. Соотношения между высказываниями и соответствующими им множествами истинности

Мы рассмотрели такие множества истинности составных высказываний, которые образованы посредством связок $\vee$, $\wedge$, $\overline{}$. Все остальные связки можно определить через эти три основные и тем самым вывести, какие множества истинности им соответствуют. Например, известно, что импликация $X \to Y$ эквивалентна дизъюнкции $\overline{X} \vee Y$. Поэтому множество истинности для $X \to Y$ будет тем же, что и множество истинности для $\overline{X} \vee Y$, т. е. оно будет иметь вид $\overline{A} \cup B$.

На диаграмме Эйлера–Венна выделенная область показывает множество истинности этого высказывания (см. рис. 2.6).

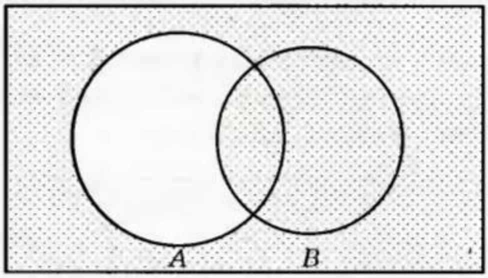


Рис. 2.6

Отметим, что незаштрихованная область на этой диаграмме показывает множество $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, представляющее собой множество истинности высказывания $X \wedge \overline{Y}$. Поэтому заштрихованная область будет множеством $\overline{A \setminus B} = \overline{A \cap \overline{B}}$, которое является множеством истинности высказывания $\overline{X \wedge \overline{Y}}$. Таким образом, мы установили, что высказывания $X \to Y$, $\overline{X} \vee Y$, $\overline{X \wedge \overline{Y}}$ эквивалентны. Вообще, два высказывания эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же множества истинности.

Заметим, что диаграммы Эйлера–Венна помогают обнаруживать отношения между высказываниями.

Предположим теперь, что X — логически истинное высказывание. Что представляет собой его множество истинности? Поскольку высказывание X логически истинно тогда и только тогда, когда оно истинно в каждом логически возможном случае, множеством истинности для высказывания X должно быть универсальное множество U.

Подобным же образом, если высказывание X логически ложно, то оно ложно в каждом логически возможном случае, и поэтому его множеством истинности будет пустое множество $\varnothing$.

Рассмотрим отношение следствия. Напомним, что из X следует Y тогда и только тогда, когда импликация $X \to Y$ логически истинна. Но высказывание $X \to Y$ тогда и только тогда логически истинно, когда его множество истинности совпадает с U, т. е. $(\overline{A \setminus B}) = U$ и $A \setminus B = \varnothing$. Но если $A \setminus B$ пусто, то B включает в себя A. Отношение включения обозначается, как мы отмечали, $A \subset B$ и читается «A является подмножеством B». Таким образом, высказывание $X \to Y$ логически истинно тогда и только тогда, когда $A \subset B$.

7. Выводы

Каждому высказыванию соответствует его множество истинности, каждой логической связке соответствует операция над множеством. Каждому отношению между высказываниями соответствует отношение между множествами истинности. Множествами истинности высказываний

$$X \vee Y; \quad X \wedge Y; \quad \overline{X} \quad \text{и} \quad X \to Y$$

служат соответственно:

$$A \cup B; \quad A \cap B; \quad \overline{A} \quad \text{и} \quad \overline{A \setminus B}.$$

Высказывание X логически истинно, если $A = U$, и логически ложно, если $A = \varnothing$. Высказывание X и Y эквивалентны тогда и только тогда, когда $A = B$; из X следует Y тогда и только тогда, когда $A \subset B$.

8. Абстрактные законы операций над множествами

Введенные операции над множествами подчинены некоторым очень простым абстрактным законам, которые будут перечислены в этом разделе.

Эти законы очень напоминают элементарные законы алгебры высказываний.

По этой причине множество, его подмножества и законы сочетания подмножеств образуют алгебраическую систему, называемую **булевой алгеброй**. Система составных высказываний, подчиняющаяся таким законам, тоже называется **булевой алгеброй.** Таким образом, любую из этих систем можно изучать или с алгебраической, или с логической точки зрения.

Ниже перечислены основные законы, действующие в булевых алгебрах.

Законы для объединения и пересечения:

1. $A \cup A = A$	**7.** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cap A = A$	**8.** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
3. $A \cup B = B \cup A$	**9.** $A \cup U = U$
4. $A \cap B = B \cap A$	**10.** $A \cap \varnothing = \varnothing$
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	**11.** $A \cap U = A$
6. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	**12.** $A \cup \varnothing = A$

Законы для дополнений:

1. $\overline{\overline{A}} = A$ **4.** $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

2. $A \cup \overline{A} = U$ **5.** $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

3. $A \cap \overline{A} = \varnothing$ **6.** $\overline{U} = \varnothing$

Законы для разностей множеств:

1. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ **6.** $A \setminus A = \varnothing$

2. $U \setminus A = \overline{A}$ **7.** $((A \setminus B) \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$

3. $A \setminus U = \varnothing$ **8.** $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

4. $A \setminus \varnothing = A$ **9.** $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$

5. $\varnothing \setminus A = \varnothing$ **10.** $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

Доказательство каждого из перечисленных законов основано на определении равенства множеств и определений операций над множествами. Напомним, что множество A равно множеству B, если они состоят из одних и тех же элементов или оба пусты. Докажем один из законов для дополнений: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Пусть $x \in \overline{A \cup B}$. По определению операции дополнения это означает, что $x \notin A \cup B$, но $x \in U$. Следовательно, $x \notin A$ и одновременно $x \notin B$. Таким образом, $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$. Из определения операции пересечения получаем, что $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Поэтому, учитывая произвольность элемента $x \in \overline{A \cup B}$, имеем $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Пусть теперь $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Это значит, что $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$. Таким образом, $x \notin A$ и $x \notin B$. Поэтому $x \notin A \cup B$. Следовательно, $x \in U \setminus (A \cup B) = \overline{(A \cup B)}$. Поскольку x — произвольный элемент из $\overline{A} \cap \overline{B}$, то окончательно получаем $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Приходим к выводу, что $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

Третье практическое занятие по теме «Операции над множествами»

Задача 1. Для каких из следующих пар множеств имеет место одно из соотношений: $A \subset B$; $B \subset A$; $A = B$:

1) $A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{a, c, d\}$, **2)** $A = \varnothing$; $B = \varnothing$,

3) $A = \varnothing$; $B = \{a, b, c\}$; $B = \{b, c, a\}$?

Задача 2. Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; $D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Задайте списками множества:

1) $A \cup B \cup C \cup D$; **2)** $A \cap B \cap C \cap D$; **3)** $(A \cap B) \cup (C \cap D)$; **4)** $(A \cup B) \cap (C \cup D)$;

5) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Задача 3. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера–Венна множества:

1) $A \subset B$ и $B \subset C$; **2)** $A \subset B$; $B \subset C$ и $A \setminus B = \varnothing$; **3)** $A \subset B$; $B \subset C$ и $C = A \cup B$;

4) $A \subset B$; $B \subset C$ и $A \cap B \neq \varnothing$; **5)** $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Решение. Изобразим с помощью диаграммы Эйлера–Венна множество

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

(см. рис. 2.7).

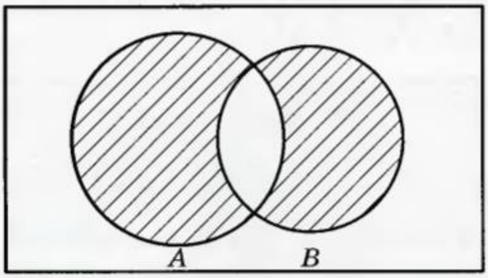


Рис. 2.7

Это множество является объединением двух разностей, называется симметрической разностью и обозначается $A \oplus B$, т. е. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \oplus B$.

Задача 4. Опрос 100 студентов дал следующие результаты о количестве студентов, изучающих различные иностранные языки: испанский — 28; немецкий — 30; французский — 42; испанский и немецкий — 8; испанский и французский — 10; немецкий и французский — 5; все три языка — 3.

а) Сколько студентов не изучает ни одного языка?

б) Сколько студентов изучает один французский язык?

в) Сколько студентов изучает немецкий язык в том и только в том случае, если они изучают французский язык?

Решение. Нарисовать диаграмму Эйлера–Венна в виде трех кругов, обозначающих множество студентов, изучающих соответственно французский, немецкий и испанский языки. В каждую из восьми областей вписать данные, используя приведенные цифры. Начинать с конца списка и двигаться к началу.

Ответ: **а)** 20; **б)** 30; **в)** 38.

Задача 5. Следующий опрос 100 студентов (см. задачу 4) выявил следующие данные о числе студентов, изучающих различные иностранные языки: только немецкий — 18; немецкий, но не испанский — 23; немецкий и французский — 8; немецкий — 26; французский — 48; французский и испанский — 8; никакого языка — 24.

а) Сколько студентов изучают испанский язык?

б) Сколько студентов изучают немецкий и испанский языки?

в) Сколько студентов изучают французский язык, в том и только в том случае, если они не изучают испанский?

Ответ: **а)** 18; **б)** ни одного; **в)** 50.

Задача 6. В отчете об опросе 100 студентов (см. задачу 4) сообщалось, что количество студентов, изучающих различные языки, таково: все три языка — 5; немецкий и испанский — 10; французский и испанский — 8; немецкий и французский — 20; испанский — 30; немецкий — 23; французский — 50. Инспектор, представивший этот отчет, был уволен. Почему?

Задача 7. Докажите, пользуясь диаграммой Эйлера–Венна, что высказывание $X \vee (\overline{X} \vee Y)$ — логически истинно.
Решение. Этому высказыванию соответствует множество $A \cup (\overline{A} \cup B)$, отвечающая ему диаграмма изображена на рис. 2.8.

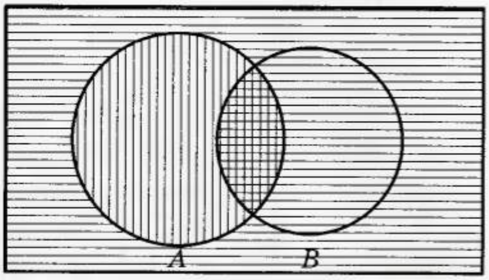


Рис. 2.8

Множество A заштриховано вертикальными линиями, а множество $\overline{A} \cup B$ — горизонтальными. Вся заштрихованная область является их объединением и совпадает с множеством U, так что наше составное высказывание логически истинно.

Задача 8. Воспользовавшись диаграммой Эйлера–Венна, определите, какие из следующих высказываний логически истинны:

а) $X \vee \overline{X}$; **б)** $X \wedge \overline{X}$; **в)** $X \vee (\overline{X} \wedge Y)$; **г)** $X \to (Y \to X)$; **д)** $X \wedge \overline{(Y \to X)}$.

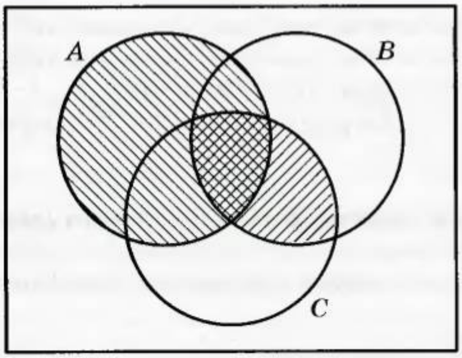
Ответ: **(а)** и **(г)** — логически истинны, **(б)**, **(д)** — логически ложны.

Задача 9. Докажите, пользуясь диаграммой Эйлера–Венна, что $X \vee (Y \wedge Z)$ эквивалентно $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$.
Решение. Множество истинности высказывания $X \vee (Y \wedge Z)$ совпадает со всей заштрихованной областью на диаграмме слева, а множество истинности высказывания $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ совпадает с дважды заштрихованной областью на диаграмме справа (см. рис. 2.9).

Так как эти множества совпадают, то наши два высказывания эквивалентны.

Задача 10. Покажите, пользуясь диаграммой Эйлера–Венна, что из Y следует $X \to Y$.
Решение. Множество истинности высказывания $X \to Y$ совпадает с заштрихованной областью на диаграмме (см. рис. 2.10).

Так как эта заштрихованная область включает в себя множество B, то мы видим, что из Y следует $X \to Y$.



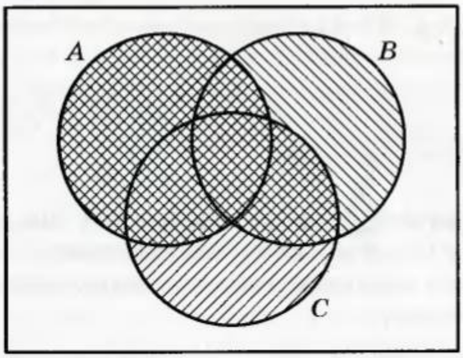


Рис. 2.9

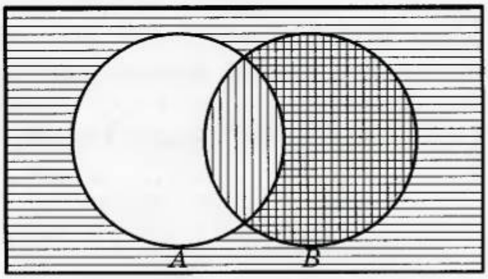


Рис. 2.10

Задача 11. Найдите множества истинности каждого высказывания и, воспользовавшись диаграммой Эйлера–Венна, определите, какие из выписанных ниже пар высказываний состоят из высказываний, одно из которых является следствием другого:

а) $X; X \wedge Y$; **б)** $X \wedge \overline{Y}; \overline{X} \to \overline{Y}$ **в)** $X \to Y; Y \to X$; **г)** $X \wedge Y; X \wedge \overline{Y}$.

Задача 12. Три или более высказывания называются несовместимыми, если они не могут быть истинными все сразу. Что можно сказать о множествах истинности таких высказываний?

Задача 13. Для следующих трех составных высказываний:

а) введите буквенные обозначения для компонент;

б) дайте символическое выражение;

в) найдите множества истинности;

г) проверьте их совместимость.

Если этот курс интересен, то я буду упорно над ним работать. Если этот курс не интересен, то я получу по нему плохую отметку. Я не буду упорно работать, но получу по этому курсу хорошую отметку.

Ответ: Несовместимы.

Задача 14. Каждому множеству поставьте в соответствие высказывание, имеющее это множество своим множеством истинности, и, воспользовавшись таблицами истинности, определите, какие из следующих множеств пусты:

а) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$; **б)** $(A \cap B) \cup (\overline{B} \cup C)$; **в)** $(A \cap B) \setminus A$; **г)** $(A \cup C) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$.

Ответ: (б) и (в).

Задача 15. Каждому множеству поставьте в соответствие высказывание, имеющее это множество своим множеством истинности, и, воспользовавшись таблицами истинности, определите, являются ли попарно различными следующие множества:

а) $A \cap (B \cup C)$; **б)** $(C \setminus B) \cup (B \cup C)$; **в)** $(C \cup B) \cap \overline{(C \cup B)}$; **г)** $(A \cap B) \cup (A \cap C)$; **д)** $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.

Задача 16. Каждому множеству поставьте в соответствие высказывание, имеющее это множество своим множеством истинности, и, воспользовавшись таблицами истинности, определите, в каких из следующих пар множеств одно из множеств является подмножеством другого:

а) $A; A \cap B$; **б)** $A \cap \overline{B}; B \cap \overline{A}$; **в)** $A \setminus B; B \setminus A$; **г)** $\overline{A} \cap \overline{B}; A \cup B$.

Задача 17. Докажите, как с помощью таблиц истинности, так и с помощью диаграммы Эйлера–Венна, что высказывание $X \wedge (Y \vee Z)$ эквивалентно высказыванию $(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$.

Задача 18. Проверьте все законы операций над множествами для объединения и пересечения с помощью диаграмм Эйлера–Венна. Переведите эти законы в законы для составных высказываний. Проверьте их с помощью таблиц истинности.

Задача 19. Проверьте все законы операций над множествами для дополнений и для разностей с помощью диаграмм Эйлера–Венна, переведите их в законы для составных высказываний и проверьте их с помощью таблиц истинности.

Задача 20. Из законов булевой алгебры над множествами получите следующие результаты:

а) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$; **б)** $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$; **в)** $A \cap (A \cap B) = A$; **г)** $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$.

9. Кортежи и декартово произведение множеств

Определение. Пусть даны множества $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Кортежем длины n, составленным из элементов этих множеств, называется конечная последовательность $\alpha = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$, где для всех k, $1 \leqslant k \leqslant n$, имеем $x_k \in X_k$.