ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА И ПРОЦЕСС ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ ГРАМА - ШМИДТА

1. Евклидовы пространства

Евклидово пространство (т.е. пространство со скалярным произведением) – это линейное векторное пространство L над множеством вещественных чисел $\Re$, в котором задана операция «умножения» векторов, сопоставляющая каждой паре векторов $\bar{u},\bar{v}$ вещественное число $\bar{u}\cdot\bar{v}$. Эта операция должна обладать следующими свойствами (они называются «аксиомами скалярного произведения»):

1. Неотрицательность:
$$\forall\bar{u}\in L\ \ \bar{u}\cdot\bar{u}\geq 0\quad \bar{u}\cdot\bar{u}=0\Leftrightarrow\bar{u}=\bar{0}$$

2. Вынесение константы из множителей:
$$\forall\alpha\in\Re,\bar{u},\bar{v}\in L\quad(\alpha\bar{u})\cdot\bar{v}=\alpha(\bar{u}\cdot\bar{v})$$
$$\forall\alpha\in\Re,\bar{u},\bar{v}\in L\quad\bar{u}\cdot(\alpha\bar{v})=\alpha(\bar{u}\cdot\bar{v})$$

3. Раскрытие скобок:
$$\forall\bar{u},\bar{v},\bar{w}\in L\quad(\bar{u}+\bar{v})\cdot\bar{w}=\bar{u}\cdot\bar{w}+\bar{v}\cdot\bar{w}$$
$$\forall\bar{u},\bar{v},\bar{w}\in L\ \ \bar{u}\cdot(\bar{v}+\bar{w})=\bar{u}\cdot\bar{v}+\bar{u}\cdot\bar{w}$$

4. Перестановка множителей:
$$\forall\,\bar{u},\bar{v}\in L\ \ \bar{u}\cdot\bar{v}=\bar{v}\cdot\bar{u}$$

В качестве примера скалярного произведения для двух векторов $\bar{x},\bar{y}\in\Re^n$ можно, например, взять стандартное скалярное произведение, известное нам из первого семестра:
$$\bar{x}\cdot\bar{y}=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$$
Однако возможно и большое количество других вариантов. Например, легко проверить, что скалярное произведение с «весами» (т.е. положительными константами $c_1,c_2,\ldots c_n$)
$$\bar{x}\cdot\bar{y}=c_1x_1y_1+c_2x_2y_2+\ldots+c_nx_ny_n$$
тоже удовлетворяет тем же аксиомам.

Задача 1. Проверить выполнение аксиом 1 – 4 для следующих вариантов скалярного произведения:

а) $\bar{x}\cdot\bar{y}=2x_1y_1+5x_2y_2,\quad \bar{x},\bar{y}\in\Re^2$

б) $\bar{x}\cdot\bar{y}=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2,\quad \bar{x},\bar{y}\in\Re^2$

в) $p(t)\cdot q(t)=p(t_1)q(t_1)+p(t_2)q(t_2)+\ldots.+p(t_n)q(t_n)$ где $p(t),q(t)$ – многочлены степени не выше n-1, а $t_1,t_2,\ldots t_n$ – n различных точек («узлов») на вещественной прямой.

2. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

Два вектора $\bar{u},\bar{v}$ из евклидова пространства L называются ортогональными (перпендикулярными), если их скалярное произведение равно нулю: $\bar{u}\cdot\bar{v}=0$.

Пусть имеется система линейно независимых векторов $\bar{u}_1,\bar{u}_2,\ldots\bar{u}_n\in L$. **Цель процесса Грама-Шмидта – не выходя за пределы линейной оболочки, сделать из данной системы другую систему векторов $\bar{v}_1,\bar{v}_2,\ldots\bar{v}_n\in L$, так, чтобы <u>все векторы новой системы были взаимно ортогональными</u>**.

Для этого мы поступим следующим образом.

В качестве первого вектора новой системы возьмём первый вектор из старой: $\bar{v}_1:=\bar{u}_1$

Второй вектор будем искать в виде:

$$\bar{v}_2 := \bar{u}_2 - \alpha_{21}\bar{v}_1.$$

Коэффициент α_{21} нам заранее неизвестен, но мы можем найти его из требования $\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1 = 0$. В этом случае

$$0 = \bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1 = (\bar{u}_2 - \alpha_{21}\bar{v}_1) \cdot \bar{v}_1 = \bar{u}_2 \cdot v_1 - \alpha_{21}\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1.$$

Значит,

$$\alpha_{21} = \frac{\bar{u}_2 \cdot \bar{v}_1}{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1}$$

Построив векторы $\bar{v}_1, \bar{v}_2$, ищем следующий вектор $\bar{v}_3$:

$$\bar{v}_3 := \bar{u}_3 - \alpha_{31}\bar{v}_1 - \alpha_{32}\bar{v}_2$$

Из того, что $\bar{v}_3 \cdot \bar{v}_1 = 0$ и $\bar{v}_3 \cdot \bar{v}_2 = 0$, аналогичным образом находим коэффициенты:

$$\alpha_{31} = \frac{\bar{u}_3 \cdot \bar{v}_1}{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1}\ ,\ \alpha_{32} = \frac{\bar{u}_3 \cdot \bar{v}_2}{\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_2}$$

Дальше $\bar{v}_4 := \bar{u}_4 - \alpha_{41}\bar{v}_1 - \alpha_{42}\bar{v}_2 - \alpha_{43}\bar{v}_3$

$$\alpha_{41} = \frac{\bar{u}_4 \cdot \bar{v}_1}{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1},\ \alpha_{42} = \frac{\bar{u}_4 \cdot \bar{v}_2}{\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_2},\ \alpha_{43} = \frac{\bar{u}_4 \cdot \bar{v}_3}{\bar{v}_3 \cdot \bar{v}_3}$$

и т.д., пока мы не получим последний вектор новой системы.

Пример. Используя процедуру Грама-Шмидта, превратить линейно независимую систему из двух векторов $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in \Re^3$ в ортогональную:

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Первый вектор новой системы возьмём совпадающим со старым:

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Чтобы найти вектор $\bar{v}_2$, представим его в виде:

$\bar{v}_2 := \bar{u}_2 - \alpha_{21}\bar{v}_1$, где $\alpha_{21} = \dfrac{\bar{u}_2 \cdot \bar{v}_1}{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1}$.

Посчитаем коэффициент: $\alpha_{21} = \dfrac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1)}{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \dfrac{1}{2}$. Значит, $\overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

Замечание. Если нет желания работать с дробными координатами, каждый вектор новой системы после его получения можно домножить на подходящее число, «укоротив» или «удлинив» его.

Например, в качестве $\overline{v}_2$ можно взять не $\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$, а кратный ему $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, и использовать именно его в расчётах на следующем шаге (если бы этот шаг был).

Итак, получаем ответ: $\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Эти векторы ортогональны друг другу, и лежат в той же самой линейной оболочке, что и векторы $\overline{u}_1, \overline{u}_2$.

Задача 2. При помощи процедуры Грама – Шмидта получить ортогональную систему из следующих векторов:

а) $\overline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ б) $\overline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overline{u}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$