

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)  
Кафедра физики

ОТЧЕТ

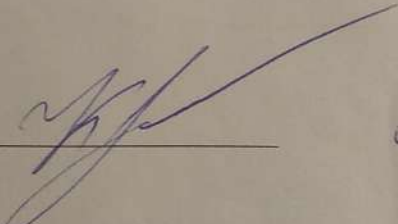
по лабораторной работе № 1

по дисциплине «Физика»

Тема: Проверка теоремы Гюйгенса - Штейнера  
методом вращательных колебаний

Студент гр. 9892

Преподаватель

  
Лескин К.В.

Санкт-Петербург

2020

## Цель работы

Определение момента инерции эталонного диска методом вращательных колебаний и экспериментальная проверка теоремы Гюйгенса - Штейнера.

## Приборы и принадлежности

Лабораторная установка включает колебательную систему вращающуюся в горизонтальной плоскости (рис. 1)

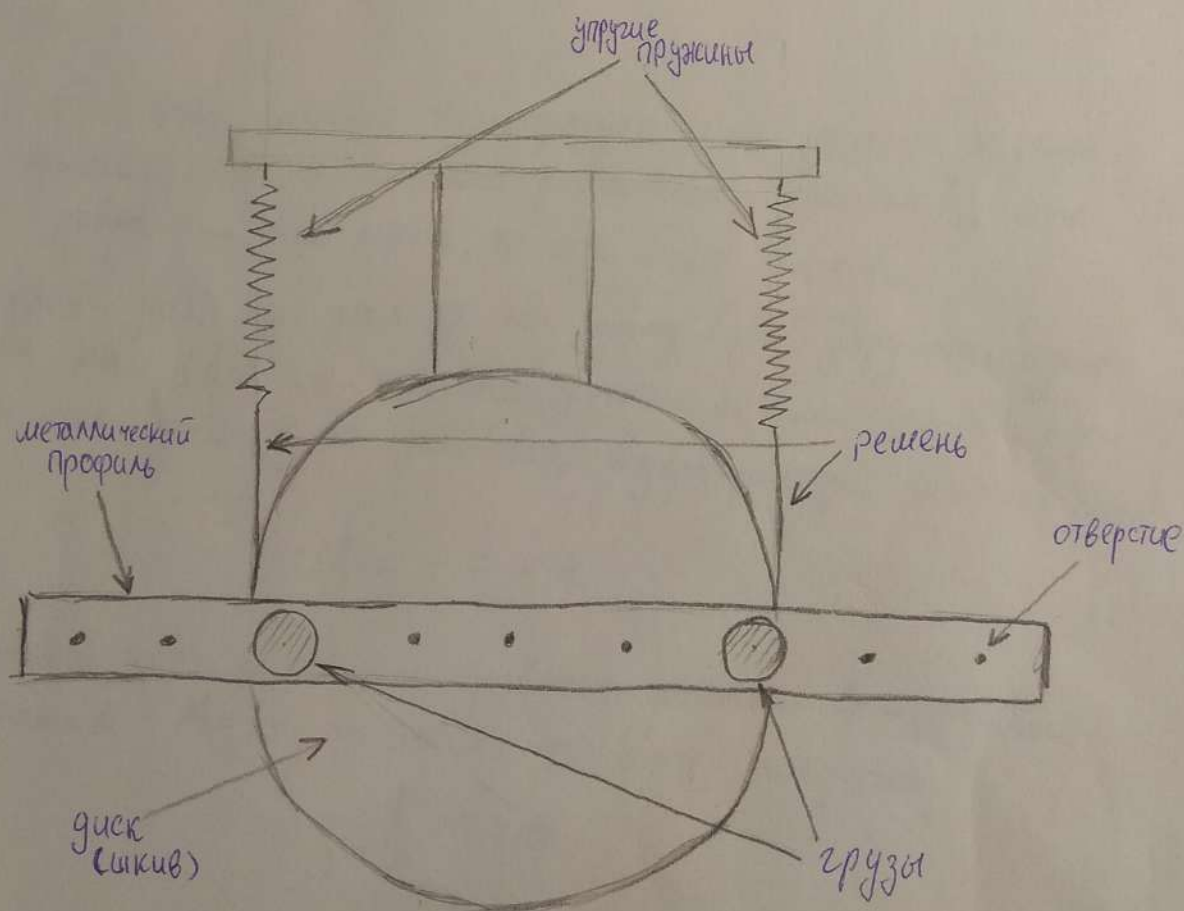


Рис. 1 - Лабораторная установка

## Основные теоретические положения

Теорема Гюйгенса - Штейнера гласит, что момент инерции  $I$  тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции  $I_c$  этого тела относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела  $m$  на расстояние между осями  $d$  в квадрате.

$$I = I_c + m d^2 \quad (1)$$

Чтобы проверить теорему методом вращательных колебаний, необходимо вывести зависимость момента инерции части колебательной системы  $I$  от Периода колебаний  $T$  подвижной части колебательной системы.

Пусть  $F_0$  - сила, которая характеризует силы упругости пружины и натяжения нити в положении равновесия. При этом  $F_{0л}$  сила слева равна  $F_{0п}$  силе справа, то есть  $F_{0л} = F_{0п} = F_0$ .

Отклонив диск на угол  $\varphi$  по закону Гука <sup>силы</sup> упругости изгибаются на  $\frac{K d \varphi}{2}$  ( $K$  - жесткость пружины,  $d$  - диаметр шкива). При этом на диск будет действовать возвращающий момент силы;

$$M = - \frac{d^2}{2} K \varphi \quad (2)$$

Подставив  $M$  в основное уравнение динамики вращательного движения  $M = I \epsilon$ , учитывая, что  $\epsilon = \ddot{\varphi}$ , получим:

$$I \ddot{\varphi} + \frac{d^2}{2} K \varphi = 0$$

Собственная частота колебаний маятника  $\omega$ :

$$\omega = \sqrt{\frac{d^2 K}{2 I}} \quad (3)$$



**Протокол**

Проверка теоремы Гюйгенса-Штейнера методом вращательных колебаний

Студент гр. 9892 Лескин К.Ф. \_\_\_\_\_

Преподаватель Чурганова С.С. \_\_\_\_\_

Дата 24.02.2020

N	1	2	3	4	5	Положение цилиндров r, см	$\theta_t, c$
$t, c$	2,85	2,70	2,80	2,73	2,79	0-0 0	0,01
	2,95	2,99	2,94	2,97	2,95	1-1 6	
	3,99	4,02	3,98	4,00	4,00	2-2 10	
	4,65	4,70	4,73	4,69	4,72	3-3 14	
	5,50	5,44	5,56	5,50	5,49	4-4 18	

m, г	d, мм	R, мм
200 ± 2	138 ± 2	16 ± 2

# Обработка измерений

①  $\bar{T}_i, T_i = \bar{T}_i/n, I_{0i}; I_i = \frac{2m\bar{T}^2}{(\frac{T_i}{T_0})^2 - 1}$

$$\bar{T}_0 = \frac{2,86 + 2,40 + 2,80 + 2,73 + 2,79}{5} = 2,77$$

$$\bar{T}_1 = \frac{2,95 + 2,99 + 2,94 + 2,97 + 2,95}{5} = 2,96$$

$$\bar{T}_2 = \frac{3,99 + 4,02 + 3,98 + 4,00 + 4,00}{5} = 3,98$$

$$\bar{T}_3 = \frac{4,65 + 4,70 + 4,73 + 4,69 + 4,72}{5} = 4,69$$

$$\bar{T}_4 = \frac{5,5 + 5,44 + 5,56 + 5,5 + 5,49}{5} = 5,49$$

$$T_0 = \frac{2,77}{5} = 0,55; T_1 = \frac{2,96}{5} = 0,59; T_2 = \frac{3,98}{5} = 0,79; T_3 = \frac{4,69}{5} = 0,94; T_4 = \frac{5,49}{5} = 1,09$$

$$I_{01} = \frac{2 \cdot 0,2 \cdot 0,036}{(\frac{0,59}{0,55})^2 - 1} = \frac{0,0144}{0,1449} = 0,029; I_{03} = \frac{2 \cdot 0,2 \cdot 0,196}{(\frac{0,94}{0,55})^2 - 1} = \frac{0,0784}{1,920681} = 0,040$$

$$I_{02} = \frac{2 \cdot 0,2 \cdot 0,1}{(\frac{0,79}{0,55})^2 - 1} = \frac{0,04}{1,0620} = 0,036; I_{04} = \frac{2 \cdot 0,2 \cdot 0,324}{(\frac{1,09}{0,55})^2 - 1} = \frac{0,1296}{2,924361} = 0,044$$

Можем убедиться, что при разном положении цилиндров значения  $I_{01} - I_{04}$  при их положении относительно оси вращения пропорционально примерно одинаковы, то есть теория Гюйгенса-Штейнера справедлива.

②  $I_0 = \bar{I}_0 \pm \Delta I_0, P = 95\%, N = 4$

$$1. \bar{I}_0 = \frac{0,029 + 0,036 + 0,040 + 0,044}{4} = 0,037$$

$$2. S_{\bar{I}_0} = \frac{\sqrt{(-0,008)^2 + (0,004)^2 + (0,003)^2 + (0,007)^2}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{0,000016 + 0,000016 + 0,000009 + 0,000049}}{1,2}$$

$$= \frac{\sqrt{0,00075}}{1,2} = 0,0025$$

$$3. \Delta I_{ca} = 3,2 \cdot 0,0025 = 0,008$$

4.  $\sigma_{I_0}$ : Логарифмируя формулу для нахождения момента инерции  $I_i$ , получаем формулу для определения приборных погрешностей:

$$\sigma_{I_0} = I_0 \left( \frac{\sigma_m}{m} + \frac{2\sigma_T}{T_0} + \frac{2T_i}{T_i^2 - T_0^2} \left( 2 - \frac{T_i}{2T_0} \right) \sigma_T \right)$$



В этой формуле  $\Delta m$  - погрешность массы,  $\Delta r$  - погрешность расстояния,  $\Delta t$  - погрешность датчика времени. Тогда:

$$\Delta I_1 = 0,029 \left( \frac{0,002}{0,2} + \frac{2 \cdot 0,002}{0,06} + \frac{0,59}{(0,59)^2 - (0,55)^2} \left( 2 - \frac{0,59}{2 \cdot 0,55} \right) 0,01 \right) = 0,029 (0,01 + 0,07 + 12,93) = 0,007$$

$$\Delta I_2 = 0,036 \left( \frac{0,02}{0,2} + \frac{2 \cdot 0,002}{0,1} + \frac{0,79}{(0,79)^2 - (0,55)^2} \left( 2 - \frac{0,79}{1,1} \right) 0,01 \right) = 0,036 (0,01 + 0,04 + 0,03) = 0,003$$

$$\Delta I_3 = 0,04 \left( \frac{0,02}{0,2} + \frac{2 \cdot 0,002}{0,14} + \frac{0,94}{(0,94)^2 - (0,55)^2} \left( 2 - \frac{0,94}{1,1} \right) 0,01 \right) = 0,04 (0,01 + 0,03 + 0,02) = 0,0024$$

$$\Delta I_4 = 0,044 \left( \frac{0,02}{0,2} + \frac{2 \cdot 0,002}{0,18} + \frac{1,09}{(1,09)^2 - (0,55)^2} \left( 2 - \frac{1,09}{1,1} \right) 0,01 \right) = 0,044 (0,01 + 0,02 + 0,01) = 0,0018$$

Значит  $\Delta \bar{I}_0 = \frac{0,007 + 0,003 + 0,0024 + 0,0018}{4} = 0,004$

$$5. \Delta \bar{I}_0 = \sqrt{(0,008)^2 + (0,004)^2} = \sqrt{0,00008} = 0,009$$

$$6. I_0 = \bar{I}_0 \pm \Delta \bar{I}_0 = 0,037 \pm 0,009, \quad p = 95\%$$

$$7. \delta I_0 = 100 \cdot \frac{\Delta \bar{I}_0}{\bar{I}_0} = \frac{0,09}{0,037} \cdot 100\% = 2,43\%$$

③ Рассчитать  $\bar{I}_g$  используя  $\bar{I}_0$  и  $mR^2$ . Метод переноса погреш.

$$\bar{I}_g = \bar{I}_0 - mR^2 = 0,037 - 0,2 \cdot 0,036 = 0,0299$$

$$\Delta \bar{I}_g = \sqrt{(\Delta \bar{I}_0)^2 + (R \Delta m)^2 + (2mR \Delta R)^2} = \sqrt{(0,009)^2 + (0,036 \cdot 0,002)^2 + (2 \cdot 0,2 \cdot 0,016 \cdot 0,002)^2} = \sqrt{0,00081 + 0,0000005 + 0,00000016} = 0,009000235 = 0,009$$

$$\bar{I}_g = \bar{I}_g \pm \Delta \bar{I}_g = 0,0299 \pm 0,009 \quad \delta \bar{I}_g = \frac{\Delta \bar{I}_g}{\bar{I}_g} \cdot 100\% = 0,301$$

④ Используя формулу (9), найди  $k = \bar{k} \pm \Delta k$ , используя  $\Delta \bar{k} = \bar{k} \sqrt{\left( \frac{\Delta \bar{I}_0}{\bar{I}_0} \right)^2 + \left( \frac{\Delta \bar{m}}{\bar{m}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta \bar{R}}{\bar{R}} \right)^2}$

$$\bar{k} = \frac{8\pi^2 \bar{I}_0}{I^2 T_0^2} = \frac{8 \cdot 9,86 \cdot 0,037}{(0,018496) (0,55)^2} = \frac{2,91856}{0,005595} = 521,63417605 \approx 521,6 \frac{H}{M}$$

$$\Delta \bar{k} = 521,6 \sqrt{\left( \frac{0,009}{0,037} \right)^2 + \left( \frac{0,002}{0,138} \right)^2 + \left( \frac{0,001}{0,55} \right)^2} = 521,6 \sqrt{0,0592 + 0,00021 + 0,00003} = 12,7147924756 \approx 12,7$$

$$k = \bar{k} \pm \Delta \bar{k} = 521,6 \pm 12,7$$

## Вопросы к подготовке

1. Что такое жесткость колебательной системы и каков ее физический смысл?

Жесткость в одном из случаев можно определить исходя из момента инерции. Простейшая колебательная система - пружинный маятник, который представляет собой грузик массой  $m$ , прикрепленный к пружине с коэффициентом упругости и жесткости, то есть жесткий - характеристика. Смысл: чтобы растянуть жесткую пружину нужно приложить силу.

2. Определение момента силы, импульса, инерции абсолютно твердого тела относительно некоторой оси.

Момент силы относительно оси - скалярная величина, равная проекции на эту ось момента силы относительно произвольной точки данной оси. Величина не зависит от выбора точки на оси, т.к. момент силы при переносе точки приложения силы вдоль линии действия не изменяется.

Момент импульса относительно неподвижной оси (мат. точки) - векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора, проведенного из полюса в место нахождения мат. точки на вектор импульса.

Момент инерции тела представляет аддитивную величину, равную произведению массы точки и квадрата расстояния от нее до оси вращения относительно этой оси. Так же это сумма произведений масс точек твердого тела на квадраты расстояния этих точек до рассматриваемой оси.

3. Сформулируйте Теорему Гюйгенса-Штейнера для вычисления момента инерции тела относительно произвольной оси вращения.

Момент инерции  $I$  относительно произвольной оси равен сумме момента инерции  $I_c$  относительно оси параллельной данной и проходящей через центр масс тела и произведению массы тела на квадрат расстояния между осями.

$$I = I_c + mr^2$$

4. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения. Суммарный момент сил действующих на вращающееся вокруг некоторой оси тело равен произведению момента инерции тела относительно данной оси на угловое ускорение тела:

$$M = I \cdot \epsilon$$

5. Сформулируйте методику измерений, использующую в работе и опишите установку.

Методика измерений: определение момента инерции эталонного диска методом вращательных колебаний и экспериментальная проверка теоремы Гюйгенса-Штейнера



Лабораторная установка (рис. 1) включает колебательную систему, вращающуюся в горизонтальной плоскости, состоящую из закреплённого на вертикальной оси диска, радиус которого связан с упругими пружинами, закреплёнными за оську. К диску жёстко прикреплен металлический профиль с отверстиями для грузов.

6. Напишите дифференциальные уравнения гармонических колебаний с затуханием и без затухания. Каков смысл входящих в них параметров?

К затухающим гармоническим колебаниям имеет вид  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ , где  $A$  - амплитуда колебаний,  $\omega t + \varphi_0$  - фаза колебаний,  $\varphi_0$  - начальная фаза в нулевой момент,  $x'$  - смещение. Или  $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ , где  $q$  - амплитуда колебаний.

Затухающие гармонические колебания имеют вид  $\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ , где  $\beta$  - коэффициент, определяющий насколько быстро уменьшается амплитуда колебаний,  $\omega_0$  - собственная частота колебаний маятника.

7. Докажите, что функция  $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha)$  является решением дифф. уравнения  $\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$

Решим формулу из вопроса 6, где  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ . Если амплитуда  $x(t)$  или  $\varphi(t)$  известно, то дифференцируя можно найти скорость и ускорение тела:  $v(t) = x'(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$  и  $a(t) = x''(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$ . Отсюда видно, что  $x(t)$  (смещение) и  $x''(t)$  (ускорение) удовлетворяют дифференц. уравнению  $\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$ , которое называется уравнением гармонических колебаний. Решением этого уравнения являются указанные  $\cos$  и  $\sin$ .

8. Выведите формулу (8) для расчёта постоянной части момента инерции колебательной системы в данной работе

Учитывая уравнение возвращающего момента силы, закон Гука и основное уравнение динамики вращательного движения, получаем дифференциальное уравнение для  $\varphi$  (угол шкива):  $I\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}k\varphi = 0$ ,  $\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$ , по пункту семь (п. 7) выводим его вид  $\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha)$ , где  $\varphi_0$  и  $\alpha$  - константы условий, а  $\omega$  - собственная частота колебаний рассматриваемого маятника, которая находится по формуле  $\omega = \sqrt{\frac{I^2 k}{2I}}$ . Через эту формулу соответственно обозначая частоту, момент инерции и период системы, а так же перемещая грузы на установке симметрично относительно оси вращения системы вдоль металлического профиля на шкиве в положениях (1,1), (2,2), и другие, её момент инерции будет находится по:

$$I = \frac{I^2 k}{2\omega^2} = \frac{I^2 k T^2}{8\pi^2}, \text{ при этом в центре момент инерции будет: } I_0 = \frac{I^2 k}{2\omega_0^2} = \frac{I^2 k T_0^2}{8\pi^2}.$$

Из этого следует, что отношение моментов инерции составляет равенство:

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{T}{T_0}\right)^2$$



Если радиус цилиндров  $R$ , масса —  $m$ , то при установке цилиндров на расстоянии  $r$  от оси вращения её момент инерции равен:  $I = I_0 + 2(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2) = I_0 + 2mr^2$ , где  $I_0$  — момент инерции диска, выражение в скобках — момент инерции одного диска. Эта формула представляет часть постоянную момента инерции колебательной системы.

Учитывая вышеперечисленное, находим формулу для  $I_0$ , связанную с теоремой Гюйгенса — Штейнера:

$$I_0 = \frac{2mr^2}{\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 - 1}$$

9. Выведите формулу расчёта приборной погрешности  $\Delta_{I_0}$  постоянной части момента инерции колебательной системы

Для расчёта приборной погрешности используются величины необходимого расчёта, в данном случае, т.к. речь идёт о постоянной части момента инерции

$I_0 = \frac{2mr^2}{\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 - 1}$ , в расчёте приборной погрешности должны быть такие единицы, как масса —  $m$ , период колебаний —  $T$ , расположение грузов —  $r$  от оси вращения.

Из них только масса  $m$  является константой, то есть она не зависит от номера опыта и от перемещения цилиндров. Таким образом, приборная погрешность  $\Delta_{I_0}$ , где  $I_0$  — постоянная часть момента инерции, а  $i$  — обозначение результата момента инерции при каждом разном расположении цилиндров. Обозначим сумму всех единиц момента инерции, умноженную на  $\Delta_T$ , равную  $2 \cdot 10^{-3}$  по условиям и  $I_{0i}$ , то есть:

$$\Delta_{I_0} = I_{0i} \left( \frac{\Delta_m}{m} + \frac{2\Delta r}{r_i} + \frac{T_i}{T_i^2 - T_0^2} \left( 2 - \frac{T_i}{2T_0} \right) \right) \Delta_T$$

10. Выведите формулу (9) для расчёта жёсткости колебательной системы в данной работе

Плотность и сила жёсткости колебательной системы определены в вопросе 11. В ходе выведения формулы для момента инерции мы обозначили формулу момента инерции при расположении грузов в центре шкива:

$$I_0 = \frac{J^2 K}{2\omega_0^2} = \frac{J^2 K T^2}{8\pi^2}$$

т.к.  $\omega = \sqrt{\frac{J^2 K}{2I}}$  исходя из этой формулировки получаем формулу для расчёта жёсткости колебательной системы при известном  $I_0$ :

$$K = \frac{8\pi^2 I_0}{J^2 T_0}$$

где  $J$  — диаметр шкива и  $T_0$  — период колебаний при грузах в центре шкива

## Вывод

При выполнении лабораторной работы были экспериментально определены моменты инерции\* стационарного диска методом вращательных колебаний при различных положениях грузов. В результате вычислений, выполненных на основании экспериментальных данных, были получены значения, позволяющие говорить о справедливости теоремы Гюйгенса - Штейнера.

\* -  $I_{01} - I_{04}$  (0,029; 0,036; 0,640; 0,044)