Методы синтеза комбинационных схем в базисе $\{\&, \oplus, -, 1\}$

Перязева Юлия Валерьевна
Доцент кафедры ВТ

Теория автоматов

Дискретные преобразователи без памяти

Полиномиальные формы

Содержание

1. Полиномиальные формы

2. Алгоритм A_4, основанный на построении полинома Жегалкина

3. Алгоритм A_5 и метод, основанный на построении разложения Акерса

Совершенная полиномиальная нормальная форма (СПНФ)

Рассмотрим теперь произвольную функцию $f(x_1, \cdots, x_n)$ отличную от тождественного нуля и выразим ее посредством СДНФ

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}$$

На каждом наборе $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ в 1 обращается не более одной из конъюнкций $x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}$, входящих в СДНФ.
Поэтому внешняя дизъюнкция может быть заменена сложением по mod 2, СПНФ:

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \bigoplus_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}$$

Полином Жегалкина

Еще одно важное представление булевых функций получается с использованием & и $\oplus$, 1, например:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \oplus x_2 \oplus 1;$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_3.$$

Такое представление носит название *полинома Жегалкина*.

Полином Жегалкина

Определение. *Монотонной конъюнкцией* от переменных $x_1, \ldots, x_n$ называют либо просто 1, либо любое выражение вида $x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot x_{i_3} \cdots x_{i_s}$, где $s \geq 1,\ 1 \leq i_j \leq n\ \forall j = 1, 2, \ldots, s$ и все переменные различны $(i_j \neq i_k$, если $j \neq k)$.

Определение. *Полином Жегалкина* над $x_1, \ldots, x_n$ называется либо константа 0, либо любое выражение вида

$$K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_l,$$

где $l \geq 1$ и все K_j суть различные монотонные конъюнкции над $x_1, \ldots, x_n$.

Полином Жегалкина

Теорема. Всякая булева функция может быть представлена в виде полинома Жегалкина

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \bigoplus_{i_1 \dots i_s} c_{i_1 \dots i_s} x_{i_1} \cdots x_{i_s},$$

где коэффициенты $c_{i_1 \dots i_s}$ равны 0 или 1.

Теорема. Всякая булева функция может быть представлена в виде полинома Жегалкина единственным образом.

Методы построения полиномов Жегалкина

Метод базирующийся на преобразовании формул над множеством $\{\&, \vee, -\}$.

Строят некоторую формулу над множеством $\{\&, \vee, -\}$, реализующую заданную функцию f.

Затем заменяют подформулы вида $\overline{x}$ на $x \oplus 1$,
$(x \cdot \overline{y}) \vee (\overline{x} \cdot y) = x \oplus y$, $\overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$.
Раскрывают скобки, пользуясь дистрибутивным законом $(x \oplus y)z = (xz) \oplus (yz)$.
Применяют эквивалентности $x \oplus x = 0$ $x \oplus 0 = x$ $x \cdot x = x$ $x \cdot 1 = x$

Методы построения полиномов Жегалкина

Построим полином Жегалкина для функции:

x_1 x_2 x_3	f
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	0

$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\ \overline{x_2}x_3 \vee x_1\overline{x_2}\ \overline{x_3} = \overline{x_2}(\overline{x_1}x_3 \vee x_1\overline{x_3}) = \overline{x_2}(x_1 \oplus x_3) =$
$(x_2 \oplus 1)(x_1 \oplus x_3) = x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2x_3 \oplus x_3$

Метод треугольника.

Записываем вектор значений функции в столбец. Затем, в каждом следующем столбце между каждыми двумя соседними числами из вектора значений находим их сумму по модулю два, до тех пор пока не останется одно значение, в итоге получим 2^n столбцов, где n - количество переменных в исходной булевой функции.

Каждое первое значение в столбце, есть значение коэффициентов $a_0, a_1, ..., a_{2^n}$ в полиноме.

Для $n = 3$
$P(F) = a_0 \oplus a_1x_3 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_2x_3 \oplus a_4x_1 \oplus a_5x_1x_3 \oplus a_6x_1x_2 \oplus a_7x_1x_2x_3$

Методы построения полиномов Жегалкина

Построим полином Жегалкина для функции:

		$x_1\ x_2\ x_3$	f							
a_0	1	0 0 0	0							
a_1	x_3	0 0 1	1	1						
a_2	x_2	0 1 0	0	1	0					
a_3	x_2x_3	0 1 1	0	0	1	1				
a_4	x_1	1 0 0	1	1	1	0	1			
a_5	x_1x_3	1 0 1	0	1	0	1	1	0		
a_6	x_1x_2	1 1 0	0	0	1	1	0	1	1	
a_7	$x_1x_2x_3$	1 1 1	0	0	0	1	0	0	1	0

$f = x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1 \oplus x_1x_2$

Алгоритм A_4, основанный на построении полинома Жегалкина

Содержание

Алгоритм A_4

Алгоритм A_4 синтеза схем в базисе $\{\oplus, 1, \&\}$ на основе полинома Жегалкина:

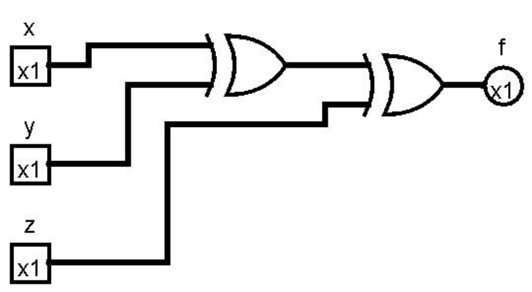
- получаем полином Жегалкина;
- на основе полученной формулы строим схему.

$f(x, y, z) = (01101001)$

Получаем полином Жегалкина из СДНФ элементарными преобразованиями:

$f(x, y, z) = \overline{x}\,\overline{y}z \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee xyz = \overline{y}(\overline{x}\,z \vee x\overline{z}) \vee y \cdot (\overline{x}\,\overline{z} \vee xz) =$
$\overline{y}(x \oplus z) \vee y \cdot \overline{x \oplus z} = y \oplus x \oplus z.$

Строим схему, сложность схемы L=2:

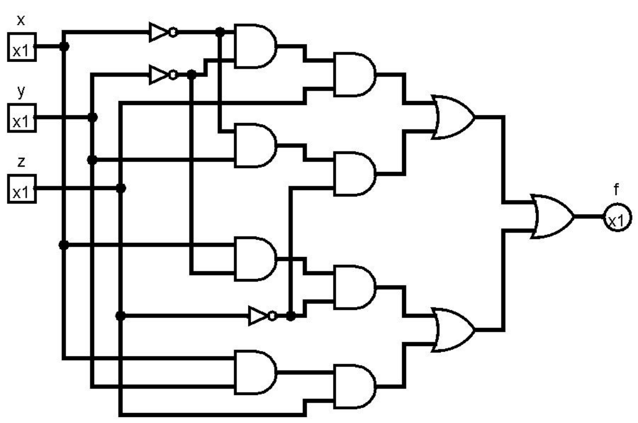


Сравнение алгоритмов A_1, A_3 и A_4

Для функции $f(x,y,z) = (01101001)$ построим схемы алгоритмами A_1 и A_3.

СДНФ функции: $f(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y}z \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee xyz$.

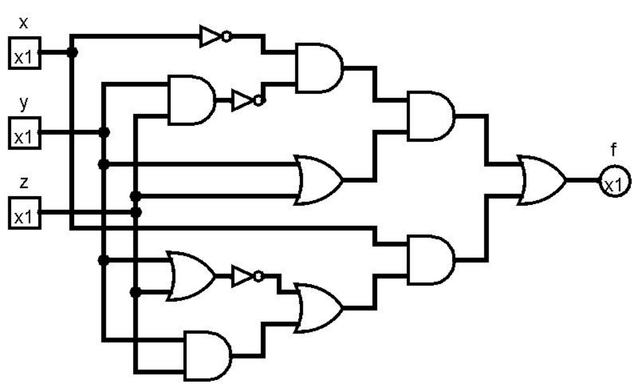
Алгоритмом A_1 получаем схему сложности L=14:



$f(x,y,z) = (01101001)$. Получим разложение Шеннона:
$f(x,y,z) = \overline{x} f_x^0 \vee x f_x^1 = \overline{x}\,\overline{yz}(y \vee z) \cdot \vee x \cdot (\overline{y \vee z}(yz))$

$f_x^0 = (0110) = \overline{yz}(y \vee z)$ $\qquad$ $f_x^1 = (1001) = \overline{y \vee z}(yz)$

Алгоритмом A_3 получаем схему сложности L=12:



Линейные функции

Функция называется линейной, если ей соответствует полином Жегалкина первой степени, т.е. без конъюнкций.

Функция $f(x, y, z) = (01101001)$ является линейной, так как $f(x, y, z) = y \oplus x \oplus z$.

Число линейных функций от n аргументов равно 2^{n+1}.

Для линейной функций от n аргументов мы можем построить схему в базасе $\{\&, \oplus, 1\}$, основанную на полиноме Жегалкина, сложность которой не превышающей n.

Алгоритм A_5 и метод, основанный на построении разложения Акерса

Содержание

1. Полиномиальные формы

2. Алгоритм A_4, основанный на построении полинома Жегалкина

3. Алгоритм A_5 и метод, основанный на построении разложения Акерса

Производные булевых функций. Разложение Акерса

Определение. Производной функции по i-му аргументу называется функция от оставшихся аргументов, равная сумме остаточных функций по i-му аргументу.

$$f_x^{'} = f_x^0 \oplus f_x^1$$

Используя понятие производной, можно показать справедливость следующего полиномиального представления, разложения Акерса:

$$f = \overline{x} f_x^0 \oplus x f_x^1 = (x \oplus 1) f_x^0 \oplus x f_x^1 = x(f_x^0 \oplus f_x^1) \oplus f_x^0 = x f_x^{'} \oplus f_x^0 = \overline{x} f_x^{'} \oplus f_x^1$$

$$f = x f_x^{'} \oplus f_x^0 = \overline{x} f_x^{'} \oplus f_x^1$$

Алгоритм A_5. Пример

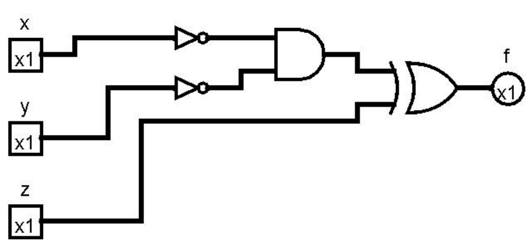
Раскладываем функцию в ряд Акерса, строим схему:

$f(x,y,z) = (10010101)$

$f(x,y,z) = \overline{x} f_x^{'}(y,z) \oplus f_x^{1}(y,z)$

$f_x^{'}(y,z) = (1100) = \overline{y}$

$f_x^{1}(y,z) = (0101) = z$



Сложность схемы $L = 4$.

Данный алгоритм позволяет строить схемы без получения формул.

Метод A_5. Пример

Двухбитовое число $x_1 x_0$ может принимать любые значения $(00, 01, 10, 11)$. Точно так же $y_1 y_0$ представляет второе двоичное число. Требуется спроектировать логическую схему, использующую входы x_1, x_0, y_1, y_0, на выходе которой будет 1 тогда, когда числа $x_1 x_0$ и $y_1 y_0$ будут равны.

Метод A_5. Пример

Первый шаг решения – построение таблицы истинности.

Таблица истинности:

x_1 x_0 y_1 y_0	f
0 0 0 0	1
0 0 0 1	0
0 0 1 0	0
0 0 1 1	0
0 1 0 0	0
0 1 0 1	1
0 1 1 0	0
0 1 1 1	0
1 0 0 0	0
1 0 0 1	0
1 0 1 0	1
1 0 1 1	0
1 1 0 0	0
1 1 0 1	0
1 1 1 0	0
1 1 1 1	1

Метод A_5. Пример

Втророй шаг – построим разложение Акерса.

$f(x_1, x_0, y_1, y_0) = \overline{x_1} f^{'}_{x_1} \oplus f^{1}_{x_1} = \overline{x_1}(\overline{x_0} \oplus y_0) \oplus \overline{x_0} y_1 \oplus y_1 y_0$

$g(x_0, y_1, y_0) = f^{'}_{x_1} = f^{1}_{x_1} \oplus f^{0}_{x_1} = (10100101)$

$g(x_0, y_1, y_0) = \overline{x_0} g^{'}_{x_0} \oplus g^{1}_{x_0} = \overline{x_0} \oplus y_0$

$g^{'}_{x_0} = (1111)\ g^{1}_{x_0} = (0101) = y_0$

$h(x_0, y_1, y_0) = f^{1}_{x_1} = (00100001)$

$h(x_0, y_1, y_0) = \overline{x_0} h^{'}_{x_0} \oplus h^{1}_{x_0} = \overline{x_0} y_1 \oplus y_1 \cdot y_0$

$h^{'}_{x_0} = (0011) = y_1\ h^{1}_{x_0} = (0001) = y_1 \cdot y_0$

$f(x_1, x_0, y_1, y_0) = \overline{x_1}(\overline{x_0} \oplus y_0) \oplus \overline{x_0} y_1 \oplus y_1 y_0$

Метод A_5. Пример

Шаг 3 – упрощаем с помощью элементарных преобразований.
$f(x_1, x_0, y_1, y_0) = \overline{x_1}(\overline{x_0} \oplus y_0) \oplus \overline{x_0} y_1 \oplus y_1 y_0 = \overline{x_1}(\overline{x_0} \oplus y_0) \oplus y_1(\overline{x_0} \oplus y_0) = (\overline{x_0} \oplus y_0)(\overline{x_1} \oplus y_1) = \overline{(x_0 \oplus y_0)} \cdot \overline{(x_1 \oplus y_1)}$

Метод A_5. Пример

Шаг 4 – строим схему. Схемы сложности 5 и 3: