1 Дискретные преобразователи без памяти

1.1 Логические основы теории дискретных устройств

1.1.1 Способы задания булевых функций. Остаточные функции

Булевы функции от 1 и 2 переменных:

Для $n = 1$:

x	**0**	**1**	**x**	$\overline{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

При этом 0 называется *константным нулем*,
функция 1 – *константной единицей*,
функция x – *тождественной*,
а функция $\overline{x}$ – *отрицанием*.

Для $n = 2$:

x y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0 0	0	0	0	1	1	1	1
0 1	1	0	1	1	0	1	0
1 0	1	0	1	0	0	1	0
1 1	1	1	0	1	1	0	0

f_1 – *дизъюнкция* $f_1 = x \vee y$
f_2 – *конъюнкция* $f_2 = x \,\&\, y$
f_3 – *исключающее или, сложение по модулю 2* $f_3 = x \oplus y$
f_4 – *импликация* $f_4 = x \to y$
f_5 – *эквивалентность* $f_5 = x \sim y$
f_6 – *штрих Шеффера* $f_6 = x \,|\, y$
f_7 – *стрелка Пирса* $f_7 = x \downarrow y$

Определение. Остаточными функциями от функции f по i-му аргументу называется функция размерности на единицу меньше чем размерность f, обозначаемые и определяемые следующим образом:

$$f_i^{\sigma_i}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \sigma_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$$

для любого набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \in E^{n-1}$

Если $\sigma_i = 0$, то имеем *нулевую* остаточную, если $\sigma_i = 1$ – то *единичную* остаточную.

Определение. Агумент x_i функции $f(x_i, \dots, x_n)$ называется *фиктивным*, если $f_i^0 = f_i^1$ и *существенным* в противном случае.

Определение. Две булевы функции с разным количеством аргументов будем называть *равными*, если одну из них можно получить из другой путем добавления и изъятия любого числа фиктивных аргументов

Пример 1. Нахождение остаточных функций:

x y z	f
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

$f = (01001011)$
Остаточные функции: $f_x^0 = (0100)$, $f_y^1 = (1011)$, $f_z^0 = (0011)$

Пример 2.

Функция задана формулой: $f = abcd \vee \overline{a}bcd \vee \overline{bc}$

Таблица истинности:

a b c d	f	a b c d	f
0 0 0 0	1	1 0 0 0	1
0 0 0 1	1	1 0 0 1	1
0 0 1 0	1	1 0 1 0	1
0 0 1 1	1	1 0 1 1	1
0 1 0 0	1	1 1 0 0	1
0 1 0 1	1	1 1 0 1	1
0 1 1 0	0	1 1 1 0	0
0 1 1 1	1	1 1 1 1	1

Найдем остаточные функции:

$f_a^0 = (11111101)$
$f_a^1 = (11111101)$

$f_b^0 = (11111111)$
$f_b^1 = (11011101)$

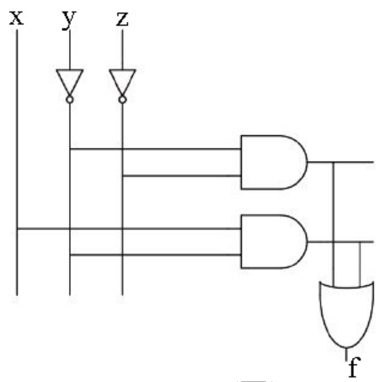
$f_c^0 = (11111111)$
$f_c^1 = (11011101)$

$f_d^0 = (11101110)$
$f_d^1 = (11111111)$

$f_a^0 = f_a^1$, следовательно a – фиктивная переменная, а c, b и d – существенные.
$f = (11111101)$

Пример 3. Построение схемы по формуле. Функция задана формулой: $f = \overline{y}\,\overline{z} \vee x\overline{y}$

Схема реализации функции:



Сложность схемы $L(\sum) = 5$.

Таблица истинности:

x y z	f
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	0

Задачи

1. Указать все фиктивные переменные функции f:

   (a) $f(x, y, z) = (10101010)$

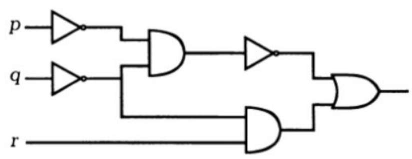
   (b) $f(x, y, z) = (01100110)$

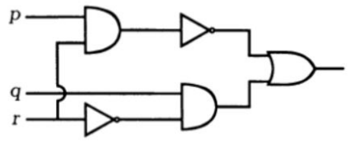
   (c) $f(x, y, z) = (11110011)$

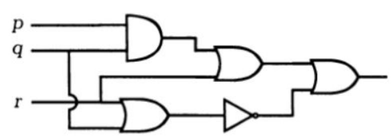
   (d) $f(w, x, y, z) = (1011010110110101)$

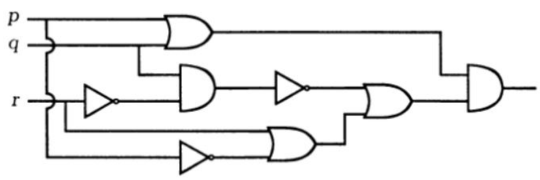
   (e) $f(w, x, y, z) = (0101111101011111)$

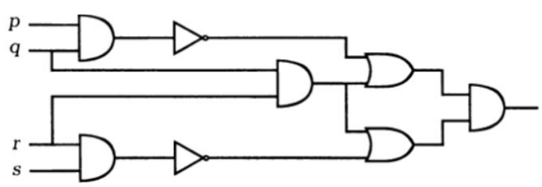
2. Найдите формулу задающую булеву функцию f по схеме из логических элементов, приведенной на рисунке

   (a) 

   (b) 

   (c) 

   (d) 

   (e) 

3. Постройте схемы из логических элементов, соответствующие булевым функциям:

   (a) $f(x, y, z) = (\overline{x} \vee y)(x \vee yz)$

   (b) $f(x, y, z) = \overline{x}\,\overline{z} \vee \overline{xy} \cdot \overline{y}z$

   (c) $f(a, b, c, d) = a(b \vee c)(\overline{d}\,\overline{a} \vee a\overline{b})$

   (d) $f(a, b, c, d) = \overline{(a \vee b)}(c\overline{d} \vee b)$

   (e) $f(x, y, z) = (\overline{x} \oplus y)(z\overline{x} \vee y)$

1.1.2 Основные эквивалентности

Коммутативность:
$x \vee y = y \vee x$
$x \cdot y = y \cdot x$
$x \oplus y = y \oplus x$
$x \sim y = y \sim x$

Ассоциативность:
$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$
$(x \sim y) \sim z = x \sim (y \sim z)$

Дистрибутивность:
$(x \vee y) \cdot z = (x \cdot z) \vee (y \cdot z)$
$(x \oplus y) \cdot z = (x \cdot z) \oplus (y \cdot z)$
$(x \cdot y) \vee z = (x \vee z) \cdot (y \vee z)$
$(x \oplus y) \vee z = (x \vee z) \oplus (y \vee z) \oplus z$

Правила де Моргана:
$\overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$
$\overline{x \cdot y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

Законы поглощения:
$x \vee \overline{x} \cdot y = x \vee y$
$x \cdot (x \vee y) = x$
$x \vee x \cdot y = x$
$x \cdot (\overline{x} \vee y) = x\,y$

Идемпотентность:
$x \vee x = x$
$x \cdot x = x$

$\overline{\overline{x}} = x$
$\overline{x} = x \oplus 1$

$x \vee \overline{x} = 1$
$x \cdot \overline{x} = 0$
$x \vee 1 = 1$
$x \vee 0 = x$
$x \cdot 1 = x$
$x \cdot 0 = 0$

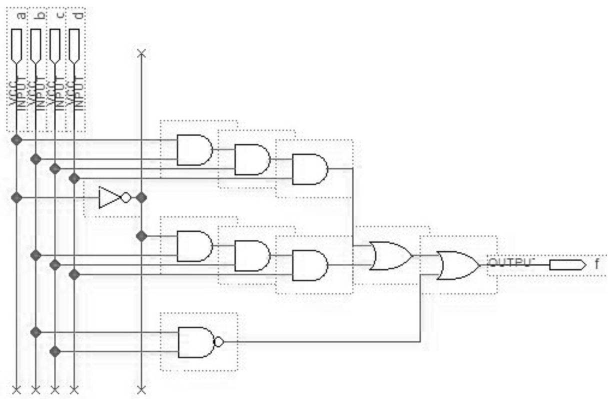
$x \,|\, y = \overline{x \cdot y}$
$x \downarrow y = \overline{x \vee y}$
$x \to y = \overline{x} \vee y$
$x \oplus y = (x \cdot \overline{y}) \vee (\overline{x} \cdot y) = (x \vee y)(\overline{x} \vee \overline{y})$
$x \sim y = \overline{x \oplus y} = (x \cdot y) \vee (\overline{x} \cdot \overline{y}) = (\overline{x} \vee y)(x \vee \overline{y})$
$x \vee y = x\,y \oplus x \oplus y$

Пример 4.

Упростите формулы, используя основные эквивалентности. По формуле постройте схему.

Функция задана формулой: $f = abcd \vee \overline{a}bcd \vee \overline{bc}$

Схема реализации функции:



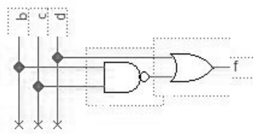
Сложность схемы $L(\sum) = 10$.

Упростим формулу применяя эквивалентные преобразования:

$f = abcd \vee \overline{a}bcd \vee \overline{bc} = (a \vee \overline{a})bcd \vee \overline{bc} = 1 \cdot bcd \vee \overline{bc} = bcd \vee \overline{bc}$

$= (bc \vee \overline{bc})(d \vee \overline{bc}) = 1 \cdot (d \vee \overline{bc}) = d \vee \overline{bc}$

Схема реализации функции:



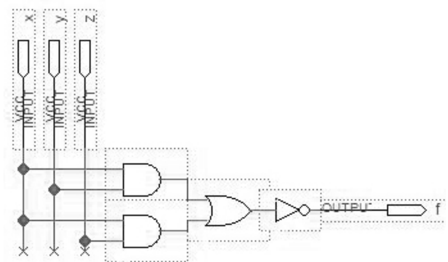
Сложность схемы $L(\sum) = 2$.

Любая булева функция может быть реализована формулой в базисе $\{|\}$, базис содержит только одну функцию штрих Шеффера.

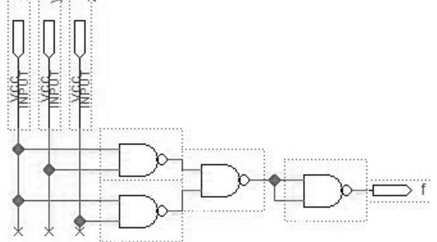
Для получения формулы в этом базисе сначала можно получить упрощенное выражение в базисе $\{\&, \vee, -\}$, а затем преобразовать с помощью следующих эквивалентностей: $\overline{x} = \overline{x \cdot x}$, $x \vee y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}}$, $x \cdot y = \overline{\overline{x \cdot y}}$. Функции штрих Шеффера соответствует логический элемент И-НЕ (NAND).

Пример 5.

Построить логическую схему функции $\overline{xy \vee xz}$ используя элементы И-НЕ (NAND). Реализация в базисе $\{\&, \vee, -\}$ имеет следующий вид:



Преобразуем формулу: $\overline{xy \vee xz} = \overline{\overline{\overline{\overline{xy} \cdot \overline{xz}}}}$, построим соответствующую схему:



Аналогично для базиса $\{\downarrow\}$.

Задачи

1. Показать, что x_1 – фиктивная переменная функции f (реализовав для этой цели функцию f формулой не содержащей явно переменную x_1), для (c)-(e) перейти к базису $\{\&, \vee, \oplus, -\}$ и построить схемы.

   (a) $f(x_1, x_2) = (x_2 \to x_1) \cdot (x_2 \downarrow x_2)$;

   (b) $f(x_1, x_2) = (x_2 \sim x_1) \vee (x_1 \,|\, x_2)$;

   (c) $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \oplus x_2) \to x_3) \cdot \overline{x_3 \to x_2}$;

   (d) $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \vee x_2) \to (x_1 \sim x_3)) \cdot x_1 \to (x_2 \vee x_3)$;

   (e) $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \vee x_2 \cdot \overline{x_3}) \sim (\overline{x_1} \to \overline{x_2} \cdot x_3)) \cdot (x_2 \downarrow x_3)$.

2. Постройте схемы из логических элементов по формулам. На сколько возможно упростите фомулы с помощью основных эквивлентностей и постройте схемы по упрощенным формулам, сравните сложности.

   (a) $f(x, y, z) = xy \vee (1 \oplus x) \vee x\overline{z} \vee x\overline{y} \vee xz$;

   (b) $f(a, b, c) = (a \vee \overline{a}b)((\overline{a \vee b} \vee c) \cdot \overline{c} \cdot (\overline{a \vee b}))$;

   (c) $f(x, y) = (\overline{x} \vee \overline{y}) \vee (x \oplus (x \oplus xy))$;

   (d) $f(x, y) = (x \oplus (\overline{x}y \oplus (x \oplus x)))$;

   (e) $f(a, b) = (a \vee \overline{a}b)(a \vee b) \vee \overline{b}$.

3. Построить логическую схему функции f используя элементы И-НЕ (NAND):

   (a) $f(w, x, y, z) = w\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{w}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{w}\,\overline{x}\,\overline{z}$

   (b) $f(a, b, c, d) = ab \vee \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d} \vee c\overline{d} \vee \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,d$

   (c) $f(w, y, z) = (\overline{y\,z}\,w \vee y\,z)\,\overline{w}$

   (d) $f(a, b, c, d) = a\,b\,(\overline{a\,b} \vee c) \vee a\,\overline{b}\,\overline{d}$

   (e) $f(a, b, c, d) = \overline{a}\,d \vee \overline{c}\,d \vee b\,c$