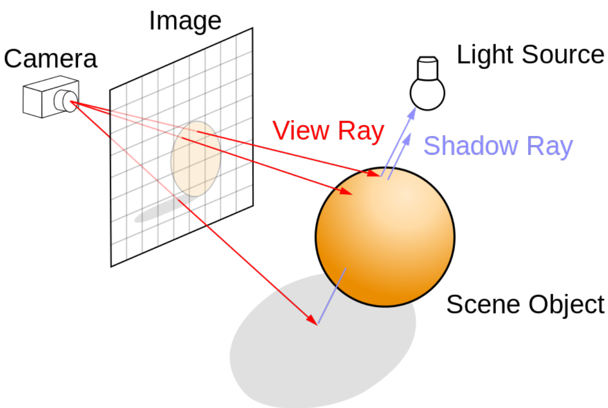
Université Paris Diderot
M1 Informatique

Programmation Fonctionnelle Avancée
Année 2016 – 2017

Objets géométriques et lancer de rayons

1 Introduction

Un *raytracer* (*lanceur de rayons* en français) est un programme de génération d'images réalistes, basé sur une idée assez simple. On suppose stockées en mémoire les représentations d'un ensemble d'objets disposés dans l'espace (sphères, plans, sources lumineuses, etc.). On choisit une position de caméra, ainsi que celle d'un rectangle représentant l'écran sur lequel l'image sera produite, que l'on place entre la caméra et les objets de la scène. La couleur de chaque pixel sur l'écran est alors déterminée par la lumière reçue par la caméra lorsque son regard traverse ce pixel - en atteignant ou non un objet, et éventuellement plusieurs par réflexions successives. Cette lumière (couleur, intensité) est calculée grâce aux équations décrivant les propriétés optiques de la lumière et des objets.



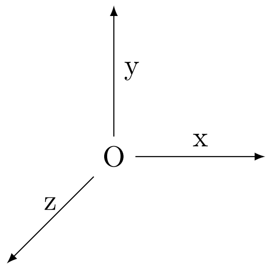
À partir d'une description des objets présents dans la scène à représenter, des différentes sources de lumières, de la position de la caméra et de l'écran, le programme se charge de calculer l'image correspondante.

Le principe fondamental du raytracer est d'inverser le parcours des rayons lumineux. Au lieu de simuler les rayons lumineux qui sortent des sources lumineuses et qui arrivent éventuellement après plusieurs réflections sur les surfaces des objets dans la caméra, on simule des rayons dans le sens inverse : les rayons sortent de la caméra pour traverser les pixel de l'écran , ils rebondissent sur les objets selon les propriétés de leur surface, pour arriver éventuellement dans une source lumineuse. De cette façon on évite le calcul de rayons qui partent des sources lumineuses et sont perdus car ils n'arrivent pas à la caméra.

Vous pouvez voir quelques exemples d'images de haute qualité obtenues avec un excellent raytracer libre (`povray`) sur le site `http://hof.povray.org`. Le traceur réalisé dans ce projet sera plus modeste, mais permettra toutefois d'obtenir de bonnes images.

2 Objets

Pour spécifier les positions des objets dans l'espace, on fixe le système de coordonnées suivant : l'axe des x va vers la droite, l'axe des y vers le haut et celui des z s'approche de l'observateur.



On définit trois sortes d'objets géométriques :

1. des **sphères**,
2. des **plans** d'une étendue infinie.
3. des **boîtes** à 6 côtés, dont les côtés opposés sont parallèles,

Chacun de ces objets est muni d'un attribut décrivant sa texture, qui contiendra des informations comme la couleur de sa surface, ou des coefficients décrivant la manière dont cette surface reflète la lumière. Cet attribut nous concerna plus tard, pour l'instant nous décrivons comment les objets sont représentés, et comment calculer l'intersection d'un rayon avec un objet.

3 Représentation des objets

La représentation suivante est choisie pour faciliter les calculs d'intersections décrits à la section 4.3.

Distance relative à une surface Les surfaces ayant un intérieur et un extérieur, on ne se contente pas de connaître la distance d'un point à une surface : on veut également savoir de quel côté de la surface le point se situe.

Pour cela, on utilise des distances *relatives* : une distance positive indique que le point est à l'intérieur de la surface, alors qu'une distance négative indique qu'il est à l'extérieur.

Conventions de représentation

1. Une sphère est décrite par son centre C et son rayon $r > 0$.
2. Un plan est décrit par un vecteur unitaire normal (un vecteur de longueur 1, orthogonal à la surface du plan et pointant vers l'extérieur) et par la distance relative d entre le plan et l'origine (c'est-à-dire la distance entre O et la projection orthogonale de O sur le plan, avec $d > 0$ ssi l'origine est du côté intérieur).
3. Pour une boîte, on choisit trois faces qui ont un sommet commun, pour chacune de ces faces ($i = 1$, 2 ou 3), on calcule :
   - Le vecteur unitaire normal vers l'extérieur de la boîte $\overrightarrow{N}_i$,

- Le centre de la face C_{f_i},
- La distance relative, par rapport à l'origine, du plan qui contient la face d_{f_i},
- Le centre de la face opposée C_{oi},
- La distance relative, par rapport à l'origine, du plan qui contient la face opposée d_{oi},
- La moitié de la distance l_i entre la face et la face opposée.

4 Géométrie

4.1 Généralités sur les vecteurs

La *norme* d'un vecteur $\overrightarrow{V} = (V_x, V_y, V_z)$, c'est-à-dire sa longueur, est

$$||\overrightarrow{V}|| = \sqrt{V_x * V_x + V_y * V_y + V_z * V_z}$$

Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\overrightarrow{V} = (V_x, V_y, V_z)$ et $\overrightarrow{V'} = (V'_x, V'_y, V'_z)$ est défini par :

$$\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V'} = V_x * V'_x + V_y * V'_y + V_z * V'_z$$

On a donc aussi $\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V} = ||\overrightarrow{V}||^2$, soit $||\overrightarrow{V}|| = \sqrt{\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V}}$. De plus,

$$\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{V'} = ||\overrightarrow{V}|| * ||\overrightarrow{V'}|| * \cos(\alpha)$$

où α est l'angle formé par les deux vecteurs.

4.2 Points et rayons

- L'origine du repère est notée $O = (0, 0, 0)$.
- On confondra le point A et le vecteur $\overrightarrow{OA}$ qui ont les mêmes coordonnées. On note $|AB|$ la *longueur* du segment AB, définie par $||\overrightarrow{AB}||$.
- Lorsqu'un rayon a pour origine un point S et pour direction un vecteur $\overrightarrow{D}$ (par convention, ce vecteur sera toujours unitaire), le trajet suivi par le rayon est donné par $R(t) = S + t\overrightarrow{D}$ pour $t \geq 0$.

4.3 Tests d'intersection

On considère dans cette section un rayon d'origine S et de direction unitaire $\overrightarrow{D}$. Au temps t, le rayon sera donc à la position $R(t) = \overrightarrow{OS} + t\overrightarrow{D}$. Etudions maintenant l'intersection avec un plan, une sphère, une boite décrits avec les notations de la section 3.

Intersection avec un plan Soit un plan avec vecteur unitaire normal $\overrightarrow{N}$ et distance d de l'origine. Pour déterminer l'intersection du rayon avec le plan :

- Si $\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{OS} \leq d$, l'origine S du rayon est du côté intérieur, il n'y a donc pas d'intersection.
- Si $\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{D} \leq 0$, le rayon est parallèle au plan ou s'en écarte, il n'y donc pas d'intersection.
- Sinon, on calcule t tel que $\overrightarrow{N} \cdot R(t) = d$, ce qui donne le temps à l'intersection:

  $$t_i = \frac{d - \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{OS}}{\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{D}}$$

  L'intersection a lieu au point $R(t_i) = S + t_i\overrightarrow{D}$.

Intersection avec une sphère Soit une sphère avec centre $\overrightarrow{C}$ et rayon r (voir la figure 1).

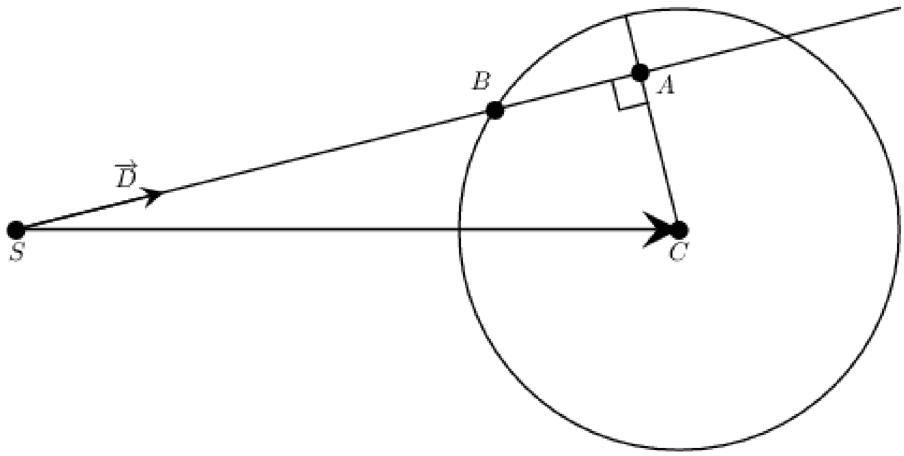


Figure 1: Intersection d'un rayon avec une sphère

- Si $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{D} \leq 0$, le rayon s'éloigne de la sphère et il n'y a donc pas d'intersection ; sinon on calcule le point A de la trajectoire le plus près du centre : $|SA| = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{D}$ (attention à bien avoir $\overrightarrow{D}$ unitaire).
- On calcule $|AC|^2 = |SC|^2 - |SA|^2$.
- Si $|AC| \geq r$ alors il n'y a pas d'intersection. Sinon, on calcule $|AB| = \sqrt{|BC|^2 - |AC|^2} = \sqrt{r^2 - |AC|^2}$.
- Finalement, $|SB| = |SA| - |AB|$ et, comme $\overrightarrow{D}$ est unitaire, on a $t_i = |SB|$; il y donc intersection au point $B = R(t_i) = S + |SB|.\overrightarrow{D}$. Le vecteur normal unitaire à la surface au point d'intersection est alors $\overrightarrow{CB}/r$.

Intersection avec une boîte Le principe est de considérer successivement les trois couples face/face opposée. Dès qu'on trouve une intersection, on s'arrête. Ici, on prend par exemple la face 1.

- Si $\overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{N}_1 > 0$, l'intersection a lieu avec le plan de la face opposée.
- Si $\overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{N}_1 = 0$, le rayon est parallèle aux faces : il n'y a pas d'intersection.
- Si $\overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{N}_1 < 0$, l'intersection a lieu avec le plan de la face considérée (ici, la face 1).

Supposons, par exemple que $\overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{N}_1 > 0$. On calcule alors l'intersection I (si elle existe) du rayon avec le plan contenant la face opposée (décrit par le vecteur $-\overrightarrow{N}_1$ et la distance d_{o1}).

Si cette intersection existe, il faut encore vérifier qu'elle se produit bien sur la face de la boîte et pas à côté. Pour cela, il faut que la distance entre I et la droite passant par C_{o1} de direction $\overrightarrow{N}_3$ soit inférieure à l_2 et que la distance entre I et la droite passant par C_{o1} de direction $\overrightarrow{N}_2$ soit inférieure à l_3.

Ainsi, I est une intersection si $\left|\overrightarrow{C_{o1}I} \cdot \overrightarrow{N}_2\right| \leq l_2$ et $\left|\overrightarrow{C_{o1}I} \cdot \overrightarrow{N}_3\right| \leq l_3$. Voir aussi la figure 2.

Quand il n'y a pas d'intersection, on recommence les calculs pour le couple basé sur la face 2 puis, le cas échéant, sur la face 3.

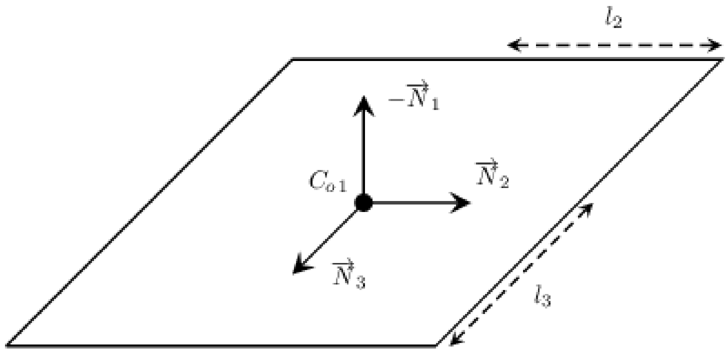


Figure 2: Intersection d'un rayon avec une boite

5 Le lancement de rayons

La caméra est placée sur l'axe z, à une distance $d > 0$ de l'origine, et elle regarde vers l'origine. On imagine l'écran paralèle au plan $x-y$, avec l'axe (Oz) passant par le milieu du côté inférieur de l'écran. Si cet écran a une largeur l, une hauteur h, et qu'on désire un angle horizontal α de champ de vision, il faut alors placer l'écran à une distance de $l/(2\ tan(\alpha/2))$ de la caméra, en revenant vers l'origine. Au final, les points de l'écran ont les coordonnées suivantes: $-l/2 \leq x \leq l/2,\ \ 0 \leq y \leq h,\ \ z = d - l/(2\ tan(\alpha/2))$.

Pour construire l'image on calcule pour chaque point de l'écran la couleur à afficher. On trouve cette couleur en envoyant un rayon *cam* à partir de la caméra qui traverse le point de l'écran. De manière générale on définit la couleur C_r "vue" par un rayon r comme

- Si le rayon ne touche aucun objet alors la couleur est noire.
- Si l'objet touché le premier est o alors la couleur C_r à afficher est calculée comme

$$C_r = k_d I_a C + k_d \sum_{j=1}^{ls} (\vec{N} \cdot \vec{L_j}) I_j C + k_s \sum_{j=1}^{ls} (\vec{N} \cdot \vec{H_j})^n I_j C + k_s C_{refl(r,o)}$$

  où les sources lumineuses *visibles du point d'impact* sont énumérées $1, \ldots, ls$. La somme de deux couleurs se fait par composante (rouge, vert et bleu); si le calcul donne une composante supérieure à 1, alors on considère qu'elle vaut exactement 1.

$$\begin{array}{rcl}
C & = & \text{couleur de surface de l'objet } o \\
k_d & = & \text{coefficient de réflexion diffuse de l'objet } o \\
k_s & = & \text{coefficient de réflexion spéculaire de l'objet } o \\
n & = & \text{exposant Phong de l'objet } o \\
I_a & = & \text{intensité de la lumière ambiante} \\
I_j & = & \text{intensité de la } j\text{-ème source lumineuse} \\
\vec{N} & = & \text{normale à la surface de } o \text{ au point d'impact} \\
\vec{L_j} & = & \text{direction de la } j\text{-ème source lumineuse} \\
\vec{H_j} & = & \text{direction bissectant } cam \text{ et } \vec{L_j}
\end{array}$$

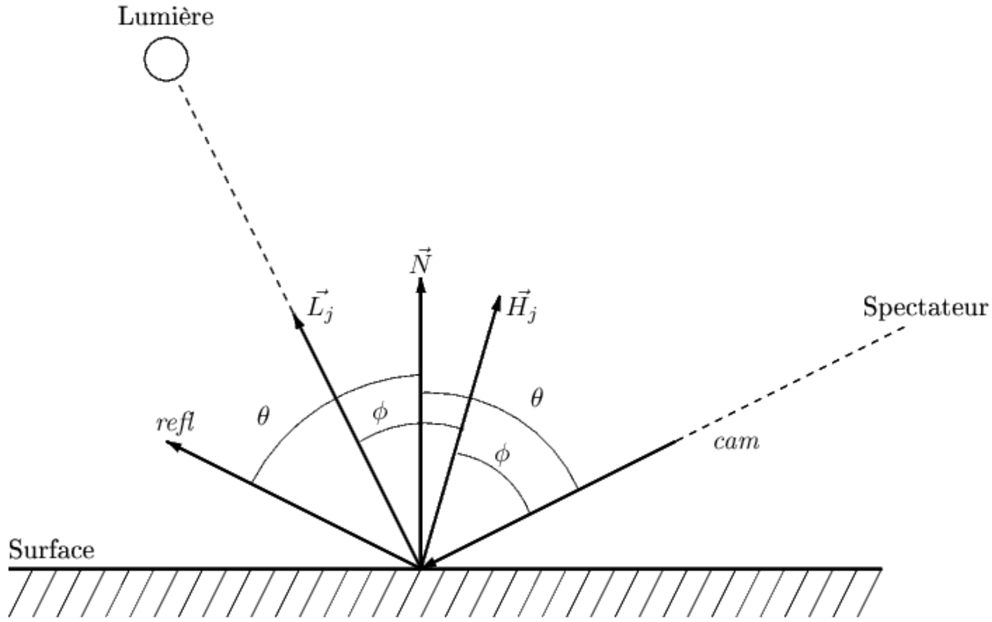


Figure 3: Vecteurs liés au calcul de l'illumination.

Toutes les directions sont des vecteurs unitaires. La direction d'une source lumineuse est définie comme le vecteur qui pointe vers la source lumineuse. Notez que le vecteur $\vec{H_j}$ pointe vers l'extérieur de l'objet o (voir Figure 3).

Le rayon *refl(r,o)* est obtenu par réflexion du rayon r sur la surface de l'objet o. Le calcul de C_r est donc donné par une règle récursive. Puisqu'il est possible que la récurrence ne se termine pas, on impose une borne artificielle au nombre d'appels récursifs (par exemple 5).

6 Transformations

Sur les différentes sortes d'objets, on peut appliquer les transformations suivantes: translation, homothéties, rotations.

6.1 Translations

Une translation par un vecteur $\overrightarrow{V}$ a un effet simple :

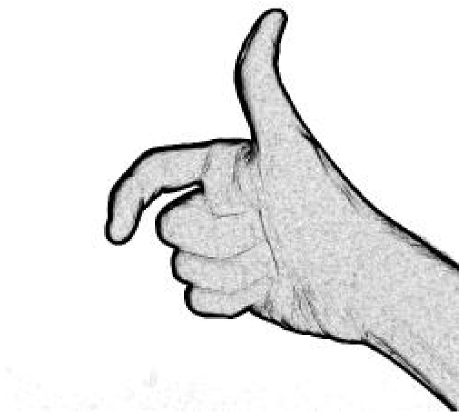
- On additionne $\overrightarrow{V}$ à tous les points (centres de sphères ou de faces).
- Les vecteurs normaux (de plans ou faces) sont inchangés.
- Les dimensions (rayon d'une sphère ou distances entre faces) sont inchangées.
- Par contre il faut actualiser les distances à l'origine. Par exemple, pour un plan de vecteur normal $\overrightarrow{N}$ et de distance d à l'origine, la nouvelle distance après translation est $d + \overrightarrow{V}.\overrightarrow{N}$.

6.2 Homothéties

Une homothétie (aussi appelée *dilatation*) centrée sur l'origine et de coefficient k va dilater de k toutes les coordonnées des points, ainsi que les dimensions des objets et les distances à l'origine. Seuls les vecteurs normaux (de plans ou de faces) sont inchangés.

6.3 Rotations

Nous considérons ici les rotations autour de l'origine, qui seront décrites par des *vecteurs-rotations* : la rotation (r_x, r_y, r_z) est en fait une rotation autour de l'axe x d'angle r_x, suivie d'une rotation autour de l'axe y d'angle r_y et enfin d'une rotation autour de l'axe z d'angle r_z. Pour chacune de ces rotations, on applique la règle de la *main droite* : si le pouce de la main droite indique la direction de l'axe de rotation, alors les autres doigts pointent dans le sens de rotation en se courbant. Autrement dit, il s'agit d'une rotation dans le sens anti-horaire (ou *trigonométrique*) par rapport à la direction de l'axe de rotation.



Rotation d'un vecteur La rotation d'angle α d'un vecteur $\overrightarrow{V} = (V_x, V_y, V_z)$ autour d'un axe donne un vecteur $\overrightarrow{W} = (W_x, W_y, W_z)$ obtenu en effectuant le produit de matrices

$$M \times \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix}$$

où M est l'une des matrices correspondante à l'axe : M_x, M_y ou M_z :

$$M_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$M_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$M_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Par exemple, la rotation décrite par le vecteur-rotation $(r_x, 0, 0)$, appliquée à $\overrightarrow{V} = (V_x, V_y, V_z)$, donne le vecteur : $M_x(r_x) \times V = (V_x, V_y \cos(r_x) - V_z \sin(r_x), V_y \sin(r_x) + V_z \cos(r_x))$. Rappelons qu'un vecteur-rotation (r_x, r_y, r_z) décrit une composition de trois rotations successives autour des trois axes x, y, z dans cet ordre précis. Comme la composition correspond ici à un produit de matrice, cette rotation (r_x, r_y, r_z) correspond à la matrice $M_z(r_z) \times M_y(r_y) \times M_x(r_x)$.

Rotation des objets Une rotation agit sur les vecteurs normaux comme indiqué précédemment. Pour un centre C de sphère ou de face, on effectue la rotation du vecteur $\overrightarrow{OC}$. Enfin les dimensions et distances à l'origine sont inchangés.