LINEARIZZAZIONE E STABILITÀ

descrivere comportamento non lineare attorno ad un equilibrio nominale

1. calcolo equilibrio

$$\dot{x}(t) = 0 = f(\bar{x}, \bar{u})$$

$$\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$$

(p76 ragionamenti grafici)

2. linearizza

$$\Delta \dot{x}(t) = \left.\frac{\partial f(x\,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}} \Delta x + \left.\frac{\partial f(x\,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}} \Delta u$$

$$\Delta y = \left.\frac{\partial g(x\,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}} \Delta x$$

STABILITÀ

→ lo stato di equilibrio $\bar{x}$ con ingresso $\bar{u}$ del Non Lin. è ASINTOTICAMENTE STABILE se tutti gli autovalori di linearizzato sono $Re(\lambda_i) < 0$

→ uno stato equilib $\bar{x}$ di NL è asint stabile in grande

"trovo un altro CI che da equilibrio ⇒ se questo ∃ e da un equilibrio diverso allora non è stabile in grande"

STABILE IN GRANDE ⇒ ∀ CI ∃! EQUILIBRIO

(cerco se ∃ più soluz a $\dot{x}(t)=0$ con u fisso)

oppure se a cambiare u di poco cambia anche l'eq.

RISPOSTA SCALINO

y_∞ transitorio esaurito → μ $(g=0)$ → θ $(g<0)$

y_{max}

$S\%$ ampiezza sovraelong. rispetto y_∞

T_s tempo di salita 10% → 90%

$T_{a\varepsilon}$ tempo di assestamento → differenza uscita ~~sotto~~ y e y_∞ sta sotto $\varepsilon\%$

PROGETTARE CONTROLLORI

ANDAM. RISPOSTA

- con $\dot{y}(0)$ vedi pendenza
- con $\ddot{y}(0)$ la concavità
- con y_∞ sai dove arriva

=> traccia un'idea considerando le costanti di tempo

- so stabilire la FdT e tornare indietro
- so ricavare i movimenti
- so applicare i TH

credo di essere apposto con qst capitolo

$\boxed{1° \text{ ORDINE}}$ $G(s) = \frac{\mu}{1+Ts}$ → $y(t) = \mu(1-e^{-t/T})$

- $y(0)=0$
- $y_\infty = \mu$ dopo tempo T
- $y_{max} = y_\infty$
- $S\% = 0$
- $T_{a\varepsilon} = T \ln \frac{1}{0.01\varepsilon}$

→ risposta tipo esponenziale

$\boxed{2° \text{ ORDINE}}$

(POLI REALI) $G(s) = \frac{\mu}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$

no sovraelongazioni

zero negativo

(-) ZERO $\boxed{|\tau|<0}$ ~~[illegible]~~ sottoelongazione

più $|\tau|$ è grande e più c'è il picco verso il basso

zero > poli

$\boxed{\tau > T_i}$ sovraelongazione + marcato quanto $|\tau|$ è grande

zero sta tra i poli

$\boxed{T_1 > \tau > T_2}$

τ velocizza la convergenza a y_∞

$\boxed{\tau \approx T_i \text{ dominante}}$ il sistema è $\sim$ 1° ordine (l'andamento si intende)

(POLI $\mathbb{C}$)

andamento oscillante

- $S\% = 100\, e^{\left(\frac{-\varepsilon\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)}$
- $T_{a\varepsilon} = 5 \frac{1}{\xi \omega_n}$

A

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx \end{cases} \rightarrow \quad X(s) = (sI-A)^{-1} b\,U(s) + (sI-A)^{-1} x(0)$$

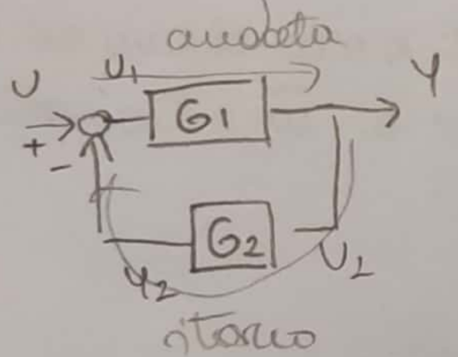
ci interessa solo come rispondono agli ingressi quindi $x(0) = 0$

$$Y(s) = C(sI-A)^{-1} b\,U(s)$$

$$\boxed{G(s) = C(sI-A)^{-1} b}$$

← FdT parla della ~~reazione~~ uscita forzata

POLI = RADICI di $1 + L(s) = 0$



$$U_1(s) = U(s) - Y_2(s)$$

$$\frac{Y(s)}{G_1(s)} = U(s) - U_2 G_2(s) \qquad U_2 = Y(s)$$

anello chiuso $= \dfrac{\text{andata}}{1 + \text{F. anello}}$

$$Y(s)\left[\frac{1}{G_1(s)} + G_2(s)\right] = U(s)$$

F. anello?

$$Y(s)\left[\frac{G_1 G_2 + 1}{G_1(s)}\right] = U(s)$$

$$Y(s) = \frac{G_1(s)}{G_1(s)G_2(s) + 1} U(s)$$

andata

anello

ANALISI SENSITIVITÀ COMPLEMENTARE

$y^\circ \to y$
$-(n \to y)$
$n \to e$

y_∞

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

modello della risposta
① somiglia a passa basso con $\mu_F = 1$

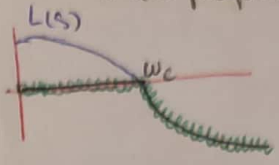
② ω_c è un ottimo dell'estremo superiore della banda passante
↓
ok se ω_c comprende le pulsazioni di y° ma NON di n

y° ω_c n

③ può aver senso pensare che ci siano poli vicini a ω_c ~ sono quelli dominanti
↓
altrimenti ne ho 1 in ⊘ con taglio in ω_c che diventa ~ polo dominante

$\boxed{\text{APPROX A } \omega_c}$
$\varphi_m > 75°$

cerca $|F(j\omega)| \simeq 1$ banda riferim.
$|F(j\omega)| \simeq 0$ banda disturbo n (alte frequenze)



$$|F(j\omega)| \sim \begin{cases} 1 & |L(j\omega)| \gg \quad \omega < \omega_c \\ \frac{1}{|L(j\omega)|} & |L(j\omega)| \ll \quad \omega > \omega_c \end{cases}$$

APPROX ~~DINAMICA~~
APPROX STATICA

$$f_\infty = \lim_{s\to 0} F(s) = \lim_{s \to 0} \frac{\mu}{s^g + \mu} = \begin{cases} \frac{\mu}{1+\mu} & g=0 \\ 1 & g>0 \\ 0 & g<0 \end{cases}$$

DINAMICA

$\boxed{\text{APPROX A POLI DOMINANTI IM}}$

$S\% = 100\, e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

ho un picco in $\omega_n = \omega_c$

$|F(j\omega_c)| = \frac{1}{2\xi}$ con $\xi = \sin\frac{\varphi_m}{2} \simeq \frac{\varphi_m}{2}$

vale fino a $\varphi_m \sim 75°$

$T_{a\varepsilon} = \frac{1}{\xi\omega_c} \cdot \frac{1}{\ln(0.01\varepsilon)}$

ANALISI SENSITIVITÀ

$d \to y$
$y^\circ \to e$
$-(d \to e)$

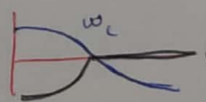
e_∞

$$H(s) = \frac{1}{1+L(s)}$$

① somiglia a un passa alto
↓
e l'idea è ~~far passare~~ togliere il disturbo su uscita e errore,
↓
ma anche il riferimento sull'errore
↓
ω_c è ok se elevato

APPROX a ω_c
unico polo e dominante
$\varphi_m > 75°$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{|1+L(j\omega)|} \simeq \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|} & |L(j\omega)| \gg \quad \omega < \omega_c \\ 1 & |L(j\omega)| \ll \quad \omega > \omega_c \end{cases}$$



$|H(j\omega)| \sim 0$ nei disturbi a bassa freq
$|H(j\omega)| \sim 1$ non tocca alte freq
→ si vuole ω_c elevato

APPROX ~~DINAMICA~~
APPROX STATICA

$$\lim_{s\to 0} H(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s^g}{s^g + \mu} \simeq \begin{cases} \frac{1}{1+\mu} & g=0 \\ 0 & g>0 \\ 1 & g<0 \end{cases} \qquad \mu_s = \frac{1}{1+\mu}$$

DINAMICA
$\boxed{\text{APPROX A POLI DOMINANTI IM}}$

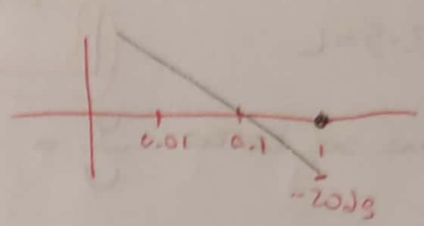
ci sarà un buon valore di $\varphi_m \sim 24$ e quindi anche dello smorzamento

$$\xi = \frac{\varphi_m}{2} \cdot \frac{\pi}{180}$$

APPROSSIMAZIONE A UN POLO ω_c ($\varphi_m > 60^\circ$)

- se taglio con $g=-1$ allora ho $\omega_c = \mu$

voglio tagliare in 0.1? impongo $\mu = 0.1 = -20\,dB$ ⇒
perché μ_{dB} è sempre il valore $|L(j1)|_{dB}$



$$F(s) \simeq \frac{\mu_F}{1+\frac{s}{\omega_c}} \qquad T_a = \frac{5}{\omega_c}$$

APPROSSIMAZIONE A DUE POLI ($\varphi_m < 60^\circ$)

$$L(s) \simeq \frac{\omega_c^2}{s^2+2\xi\omega_c s+\omega_c^2} \qquad T_a = \frac{5}{\xi\omega_c} \qquad \xi = \frac{\varphi_m}{2} = \frac{\varphi_m}{100}$$

gradi (rad)

$$T_{a\varepsilon} = \frac{1}{\xi\omega_c}\frac{1}{\ln(0.01\varepsilon)} \qquad S\% = 100\, e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi}}}$$

∃ oscillazioni smorzate

NOTA DA ALTRO

$$\lim_{s\to 0} sF(s)\frac{1}{s} \sim \frac{L(s)}{1+L(s)} = \begin{cases} 1 & g>0 \\ \frac{\mu_L}{1+\mu_L} & g=0 \end{cases}$$

$$\| \quad \frac{\mu_L}{s^g+\mu_L}$$

STABILITÀ Bode $\Phi_m > 0$ $\mu_L > 0$

ROBUSTEZZA STABILITÀ $\Phi_m \geq 60°$ no oscillazioni

VELOCITÀ RISPOSTA $\Phi_m \geq 60° \rightarrow T_a = 5 \frac{1}{\omega_c}$

$\Phi_m < 60° \rightarrow T_a = 5 \frac{1}{\xi \omega_c}$ sì oscillazioni

PRECISIONE STATICA

- SEGNALI COSTANTI condizioni su g_L e μ_L

- SEGNALI SINUSOIDALI condizioni $|L(j\omega)| \geq L_d$ su un intervallo di ω per ottenere linea di andata disturbi bassa freq (H)

condizioni $|L(j\omega)| \leq L_n$ su intervallo ω per ottenere linea ritorno disturbi su alta freq (F)