Questo documento è stato realizzato utilizzando le integrazioni trascritte a lezione sul libro di appunti di elettromagnetismo del Prof. Luca Venturelli.

ELETTROMAGNETISMO

L'interazione elettromagnetica tra PTC genera diversi fenomeni, statici e variabili nel tempo.

Il campo elettromagnetico generato si può dividere in *campo elettrostatico (E)* e *campo magnetostatico (B)*.

Storicamente abbiamo evidenza dell'esistenza di interazioni elettromagnetiche sin dai tempi dei filosofi greci, ad esempio sfregando l'ambra con un panno, questa inizia ad attrarre la paglia, o piccoli pezzi di carta.
Per i fenomeni magnetici invece osserviamo che esistono pietre che attraggono il ferro: si scopre che contengono una sostanza chiamata magnetite, responsabile di questa interazione.

Coulomb è il primo a formulare studi sistematici di elettrologia, studia le azioni tra cariche e scopre che interagiscono con forze analoghe a quelle newtoniane tra masse materiali.

Più avanti ci sarà l'esperimento della corrente elettrica che deflette un ago magnetico e quindi permetterà di costruire la connessione tra elettricità e magnetismo. Poi Maxwell e Faraday contribuiranno a scrivere il sistema di equazioni e.m. introducendo il concetto di campo al posto dell'azione a distanza.

ELETTROSTATICA

L'elettrostatica comprende tutti quei fenomeni elettrici nei quali la distribuzione di cariche e le forze sono indipendenti dal tempo.

Coulomb si era occupato di questi fenomeni e ha scritto una legge che permette di descrivere e calcolare la forza che si instaura tra una coppia di cariche elettriche.

Dalla legge di Coulomb deriva tutta l'elettrostatica. Per arrivare a formularla però si è prima trovata evidenza sperimentale della sua esistenza.

Supponiamo di lavorare sempre in sistemi di riferimento inerziali, ad esempio qualunque SdR non in accelerazione rispetto alla terra, che è una buona approssimazione di SdR inerziale.

Esperimento: elettricità

Storicamente si è capito che i materiali possono essere classificati in due macro-categorie, in due gruppi. Li chiamiamo isolanti e conduttori: ad esempio l'ambra, la plastica, il vetro che sono isolanti, se strofinati ed avvicinati a dei pezzi di carta appoggiati su un piano, osservo che attraggono la carta, questa si solleva. Significa che esiste una forza elettrica molto maggiore della forza di gravità, o comunque che la vince.

Se ripeto il procedimento ma con una barretta di metallo anziché l'ambra, osservo che la carta non si solleva, a patto che io non la stia impugnando con un guanto (o simile) fatto di materiale isolante (e non con le mani e basta).

Qualitativamente questo mi fa accorgere che esiste un "qualcosa", che battezzeremo elettricità. E che questo in alcuni materiali, conduttori, è libero di fluire e disperdersi mentre nei materiali isolanti, questo qualcosa viene trattenuto.

Esperimento: due tipi di elettricità

Se consideravo due oggetti della medesima sostanza isolante, e li strofino, questi si respingevano.

Se invece considero due sostanze diverse ma entrambe isolanti, scopro che questi o si attraggono o si respingono: esistono due tipi di elettrizzazione diversa. Per convenzione le chiamo positiva e negativa.

Sempre per convenzione diremo che l'elettrizzazione caratteristica del vetro (e le sostanze che come esso si comportano) è positiva, mentre quella caratteristica dell'ambra è negativa.

NB tutti questi ragionamenti sono qualitativi, posso quantificare l'elettrizzazione mediante l'utilizzo di strumenti, ad esempio l'elettroscopio a foglie.

Conduttori ed isolanti

DEF: chiamo **carica elettrica** la quantità di elettrizzazione di un corpo.

DEF: chiamo **conduttori** i materiali in cui la carica può scorrere liberamente. Per i conduttori solidi la carica libera è quella di segno positivo (ovvero gli elettroni dei gusci atomici esterni migrano nel conduttore; i protoni rimangono fissi)

DEF: chiamo **isolanti** i materiali in cui la carica elettrica <u>non</u> può scorrere liberamente. In questi materiali gli elettroni restano legati ai rispettivi atomi e quindi non migrano.

DEF: A questo punto abbiamo tutte le informazioni di contesto per definire la **carica elettrica**; è una <u>proprietà della materia</u>, ed è la "responsabile" delle forze elettriche.

Come evidenziato dagli esperimenti con gli isolanti, posso dire che esistono due tipi di carica, ed ogni corpuscolo elettrico ne possiede una sola.
Inoltre può essere <u>quantizzata</u>, e ci accorgiamo che i valori assunti da questa proprietà sono soltanto multipli interi della carica dell'elettrone => sarà quindi il mattoncino elementare.

Analogia massa-carica: sono rispettivamente responsabili della forza di gravitazione e forza elettrica; la principale differenza è che la massa non è quantizzata cioè non esiste un valore elementare ed in più esistono casi in cui si trasforma in energia.

Legge di conservazione della carica elettrica

In un **sistema chiuso** (cioè un sistema che non può essere attraversato dalla materia, ma dall'energia si) la carica elettrica totale non cambia mai.

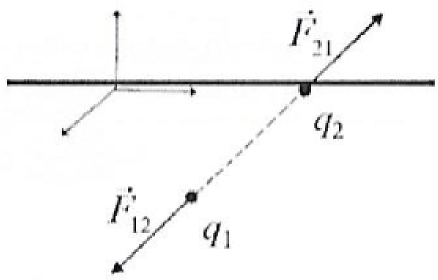
DEF: la **carica elettrica totale** è la somma algebrica delle cariche positive e negative

LEGGE DI COULOMB

Coulomb formula la sua legge sfruttando la bilancia di torsione, la stessa che usò Cavendish negli studi sulla gravitazione.

Consideriamo:
2 cariche puntiformi q_1 e q_2 in quiete in SdR inerziale (per comodità $q_1 > 0$ $q_2 > 0$)

Chiamiamo F_{12} la forza esercitata da q_2 su q_1
F_{21} la forza esercitata da q_1 su q_2



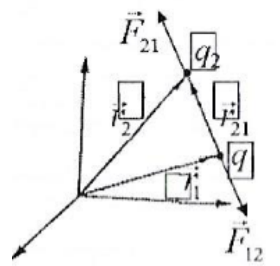
I risultati sperimentali:

1. $\boldsymbol{F_{12}}$ e $\boldsymbol{F_{21}}$ sono dirette lungo la congiungente di q1 e q (=> dalla simmetria)
2. $\boldsymbol{F_{12}} = -\boldsymbol{F_{21}}$ (III legge di newton)
3. Il modulo della forza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza r
4. Il modulo della forza è direttamente proporzionale al valore della carica

Dunque mettendo assieme tutte le informazioni posso scrivere una relazione di proporzionalità in questa maniera:

$$1), 2), 3), 4) \rightarrow \boxed{\vec{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}_{21}} \qquad (1)$$

$$\text{con} \quad k > 0 \qquad \vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad \hat{r}_{21} = \frac{\vec{r}_{21}}{|\vec{r}_{21}|} \qquad r = |\vec{r}_{21}|$$



$$\boxed{k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} \qquad k = 8{,}9875\ 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}} \qquad \boxed{\varepsilon_0 \equiv \frac{1}{4\pi k} = 8{,}8542\ 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{N\,m^2}}}$$

DEF: la **legge di Coulomb** fornisce l'espressione della forza (elettrostatica) che si instaura tra 2 cariche elettriche puntiformi in quiete. La forza è repulsiva se le due cariche hanno lo stesso segno, altrimenti è attrattiva.

Inoltre la forza elettrostatica, analoga alla gravitazione, è anch'essa una forza centrale, quindi possiede due proprietà: la sua direzione passa per un punto fisso detto <u>centro della forza</u>, ed il suo modulo <u>dipende dalla distanza</u> da questo centro stesso. In particolare ogni singola carica è il centro della forza elettrostatica da essa generata. (mi collego a [Princ. Sovrapposizione]).

La costante k di proporzionalità è si chiama costante di Coulomb nel vuoto (data dal fatto che utilizza epsilon zero). k_0 vale, approssimata 8.99 * 10^9 ed ha come unità di misura Newton per metro quadro, su Coulomb al quadrato: è coerente con il resto della formula.

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

La ε_0 è detta costante dielettrica del vuoto e vale 8.85 * 10^{-12} e come unità è l'inverso, Coulomb al quadrato su Newton per metro quadro.

CAMPO ELETTRICO E

Se considero due cariche, posso vedere la loro interazione in due modi: a distanza e mediata da campo.

Considero due cariche nello spazio, ferme e puntiformi. Grazie alla L. di Coulomb so che queste due interagiscono. Posso dunque implicare che le cariche hanno un'interazione a distanza. Ma questo cosa comporta?

>>A distanza immagino di avere solo q_1 nello spazio e ad un certo *t* appare anche la seconda carica, così da instaurare la forza istantaneamente al momento di apparizione. Ma questo viola le leggi della relatività perché il segnale della forza elettrica dovrebbe avere velocità maggiore della luce (istantanea!).

Siccome è necessario trovare una formulazione in accordo con la relatività, si introduce il concetto di campo e si dice che l'interazione elettrica è mediata da campo elettrico. In sostanza cosa succede:

>>Lo spazio è modificato dalla carica q_1 e queste modifiche si propagano a velocità c. Dunque la forza su q_2 è dovuta dall'interazione con la prima carica "tramite il campo elettrico generato da questa stessa".

DEF: il **campo** di una grandezza fisica è un insieme di valori che vengono assunti da questa grandezza in una certa regione dello spazio. Può essere *scalare* (temperatura, pressione) o *vettoriale* (elettrico, velocità fluido)

Definizione di E

Considerando sempre due cariche puntiformi e ferme Q e q. Scrivo l'espressione della forza elettrica che si instaura. Allora:

Def: il campo elettrico generato da Q in r è

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

E è detto intensità di E
Q è detta carica sorgente di E
q è detta carica di prova

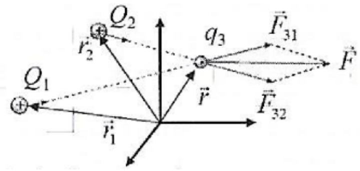
Il campo ***E*** può anche essere generato da un sistema di cariche (sorgenti).
In questo caso assumiamo che *q* non sia abbastanza carica da modificare la distribuzione delle cariche sorgenti, quindi è una carica di prova.

$$\vec{E} \equiv \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q}$$

Andrò a definire ***E*** come il rapporto tra forza e q, tale che q sia la carica di prova MOLTO PICCOLA (è inteso in termini macroscopici perchè la carica è quantizzata!)

La forza elettrica dipende dalla distanza tra le cariche, dalla carica sorgente e quella di prova. Il campo elettrico è il rapporto tra la forza esercitata dalla carica sorgente sulla carica di prova e la carica di prova stessa, dunque non dipende da quest'ultima, non dipende dalla carica su cui stiamo calcolando l'effetto dell'interazione elettrica.
Il campo elettrico dipende solo dalla carica sorgente e posso arrivare a definirlo in ogni punto dello spazio, anche senza cariche di prova.

Dunque il campo elettrico è l'insieme di tutti i vettori ***E*** calcolati in ogni punto dello spazio, in modo da descrivere come ognuno di questi punti è modificato dalla presenza di Q. La carica q ha come unico scopo permettere il calcolo in sé, perché influenza in maniera trascurabile lo spazio circostante.



Linee di Forza

Ricordiamo che la forza elettrica e la forza gravitazionale condividono la loro natura => Sono entrambe forze centrali.
Un campo vettoriale può essere visualizzato disegnando i vettori per i vari punti dello spazio (valori del campo in ogni punto). Oppure si può disegnare le linee di forza del campo.

DEF: una **linea di forza** è una linea tangente in ogni punto al campo e con verso concorde. Entrano nelle cariche negative ed escono da quelle positive.

Le linee di forza forniscono la direzione del campo.

Convenzione di Faraday: l'intensità del campo è data dal numero di rette disegnate per unità di area. L'area è sempre perpendicolare alle linee (dalla tangenza delle linee con il campo)

Principio di sovrapposizione

Considero sempre 2 cariche puntiformi e fisse tra cui si instaura la forza di Coulomb.
Questa forza è generalizzabile a sistemi di n cariche, sempre puntiformi e fisse..

La forza agente sulla i-esima carica è pari alla somma vettoriale delle forze che ogni singola carica eserciterebbe sulla i-esima in assenza delle altre.

Il campo elettrostatico generato da N cariche puntiformi e fisse vale:

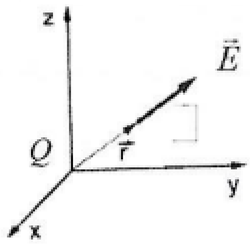
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

r_i posizione della carica Q_i

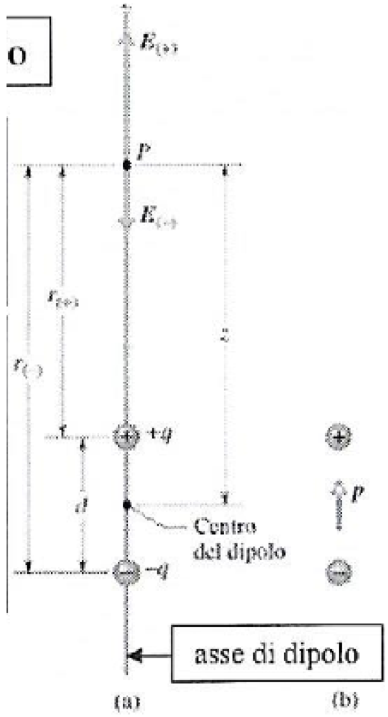
La legge di Coulomb usata insieme al principio di sovrapposizione permette di studiare tutto quello che riguarda l'elettrostatica.

CAMPO ELETTRICO DI UNA CARICA PUNTIFORME

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$



CAMPO ELETTRICO DI UN DIPOLO SULL'ASSE DI DIPOLO



DEF: il **dipolo elettrico** è un sistema formato da due cariche puntiformi +q e -q separate da una distanza d

DEF: il **momento di un dipolo elettrico** è il vettore dato da

$$\boldsymbol{p} = q\,\boldsymbol{d}$$

con $\boldsymbol{d}$ = vettore che va da $-q$ a $+q$ e di modulo=d

L'unica grandezza caratteristica del dipolo è il momento di dipolo elettrico.
Qualsiasi misura esterna di potenziale ci fornisce informazioni su **p** e non sulla costituzione del sistema

Vedi pagina 46 del mazzoldi

Il sistema di cariche è simmetrico rispetto alle rotazioni attorno all'asse di dipolo.
Dunque il campo elettrico ***E*** avrà tutte <u>nulle</u> le componenti NON parallele a questo asse.

Calcoliamo ***E*** solo <u>lungo l'asse di dipolo</u>

$$\vec{E} = \vec{E}_{(+)} + \vec{E}_{(-)}$$ Per simmetria sarà diretto lungo z

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_{(+)}^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{r_{(-)}^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left(z-\frac{1}{2}d\right)^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left(z+\frac{1}{2}d\right)^2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\left[\left(1-\frac{d}{2z}\right)^{-2} - \left(1+\frac{d}{2z}\right)^{-2}\right]$$

Con l'aumentare della distanza (rispetto alle dimensioni del bipolo) scopro che il campo ***E*** del bipolo ha un andamento diverso rispetto a quello della carica puntiforme

E' inversamente proporzionale al cubo della distanza. Possiamo approssimare così ***E*** calcolato sull'asse:

$$\boxed{\vec{E} \approx \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{|z|^3} \quad (|z| >> d)}$$

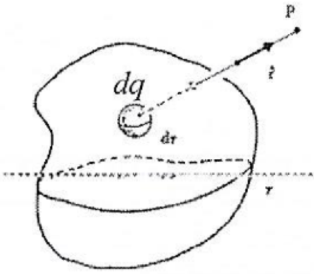
DISTRIBUZIONI CONTINUE DI CARICA

L'elettrone è una carica puntiforme con dimensioni minori di 10^{-20}m quindi su scala macroscopica considerare il numero di cariche in piccoli volumi può essere scellerato. Consideriamo dunque la carica come distribuita in modo continuo: in questo modo posso dire che il campo elettrostatico che questa distribuzione crea in un punto P si può ottenere dividendo la carica in elementi infinitesimi con una certa distanza da P.
Essendo il campo risultante, secondo il principio di sovrapposizione, somma del numero infinito di contributi infinitesimi, il calcolo si riduce ad un integrale vettoriale esteso a tutta la distribuzione continua.

Distribuita in un volume

DEF: la **densità volumica di carica** dove rho dipende dalla posizione e dal tempo. Con *dq* la carica contenuta in *dtau* all'istante t.

$$\rho \equiv \frac{dq}{d\tau}$$



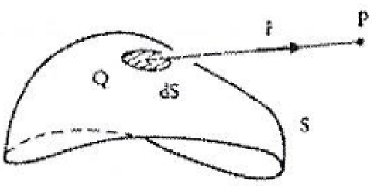
Trovo la carica Q totale in tau integrando:

$$Q = \int_\tau \rho \, d\tau$$

Distribuita in una superficie

DEF: la **densità superficiale di carica** dove sigma dipende dalla posizione e dal tempo. Con *dq* la carica contenuta in *ds* all'istante t.

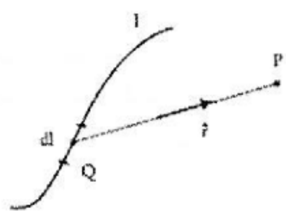
$$\sigma \equiv \frac{dq}{ds}$$



Distribuzione lineare di carica

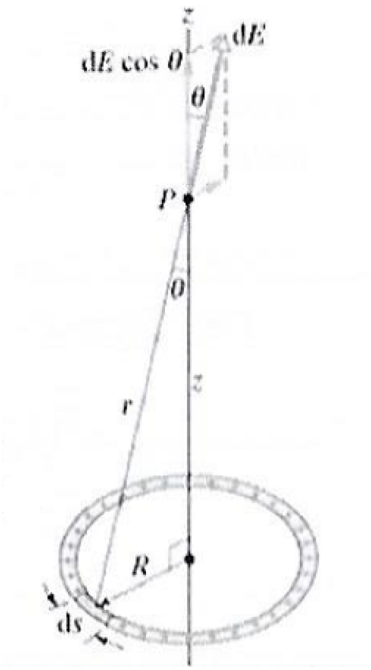
DEF: la **densità lineare di carica** dove lambda dipende dalla posizione e dal tempo. Con *dq* la carica contenuta in *dl* all'istante t. Quando Q è distribuita su una linea.

$$\lambda \equiv \frac{dq}{dl}$$



NB: consideriamo le densità di carica come funzioni continue e derivabili nelle coordinate spazio-temporali (nonostante la materia sia discontinua)

CAMPO ELETTRICO DI UN ANELLO CARICO



Valuto ***E*** sempre sull'asse del corpo a forte simmetria.
Immagino l'anello abbia densità di carica λ.
La carica non è puntiforme dunque procedo suddividendo l'anello in infinitesimi, ciascun elemento verrà considerato come una carica puntiforme di valore dq e potrò sommare l'espressione *dE* di tutte le cariche *dq* considerate nell'anello.λ.
La carica non è puntiforme dunque procedo suddividendo l'anello in infinitesimi, ciascun elemento verrà considerato come una carica puntiforme di valore dq e potrò sommare l'espressione dE di tutte le cariche dq considerate nell'anello.

Ovviamente, a causa della simmetria, ***E*** totale dovrà essere diretto come *z*, l'unica componente che non si annulla.

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda ds}{r^2} = \frac{\lambda ds}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)}$$

Essendo il punto P in cui calcolo il campo ***E*** lungo l'asse dell'anello e ad una distanza *z* dal centro dello stesso, il vettore posizione *r* che congiunge P ed ogni *dq* disegnerà un angolo theta rispetto all'asse.

$$dE_z = dE\cos\theta \qquad \text{con} \qquad \cos\theta = \frac{|z|}{r} = \frac{|z|}{\left(z^2+R^2\right)^{1/2}}$$

$$\underline{E} = E_z = \int dE\cos\theta = \frac{|z|\lambda}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi R} ds =$$

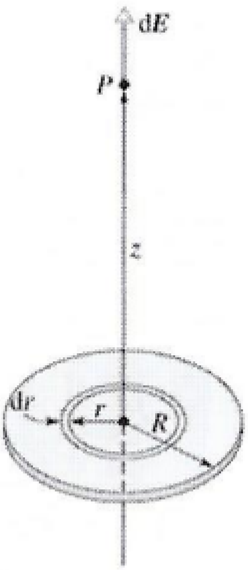
$$= \frac{|z|\lambda(2\pi R)}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{3/2}} = \frac{q|z|}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$$

A distanze elevate dall'anello (*z* >> *R*) posso approssimare il valore della carica totale dell'anello come se essa fosse puntiforme e posizionata al centro dell'anello.

$$E \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{z^2}$$

In caso $z=0$ significa che il punto per cui calcoliamo il campo ***E*** è il centro dell'anello, e quindi tutti i contributi di tutti i *dq* sono uguali ed opposti a due a due per simmetria della forma quindi $E=0$ $z=0$ significa che il punto per cui calcoliamo il campo E è il centro dell'anello, e quindi tutti i contributi di tutti i dq sono uguali ed opposti a due a due per simmetria della forma quindi $E=0$

CAMPO ELETTRICO DI UN DISCO CARICO



Consideriamo un disco sottile abbastanza da poter trascurare lo spessore. E' caricato uniformemente con densità di carica sigma. La carica non è puntiforme.

$$dE = \frac{|z| dq}{4\pi\varepsilon_0 \left(z^2 + r^2\right)^{3/2}}$$

con $\quad dq = \sigma \, dA = \sigma \, (2\pi \, r) dr$

Considero il disco come un insieme di anelli sottili di raggio *r* e spessore radiale *dr*. Calcolo il campo *dE* generato dalla carica *dq* di un anello infinitesimo e valutato su un punto giacente sull'asse dell'anello stesso a distanza *z* dal centro del disco.

Il campo totale si calcola sommando tutti i *dE* delle *dq* dunque integro ponendo
$y = z^2 + r^2 - > dy = 2rdr \; y = z^2 + r^2 - > dy = 2rdr$

$$E = \int dE = \frac{\sigma |z|}{4\varepsilon_0} \int_0^R \left(z^2 + r^2\right)^{-3/2} (2r) dr$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

CAMPO ELETTRICO DI UN PIANO CARICO

Un piano infinitamente esteso può essere pensato come un disco di raggio infinito: calcolo così quindi il campo del piano con R -> infinity

$$E_{\text{disco}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

$$E_{\text{piano}} = \lim_{R \to \infty} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Trovo che il campo del punto considerato NON dipende dalla distanza dal piano.

RIASSUNTO: CAMPO ELETTRICO PER CARICHE IN QUIETE

Da pg 21 c'è il riassunto delle cose trattate

Per cariche puntiformi: $\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)$

Per cariche distribuite?

$dq(=\rho d\tau, \sigma ds, \lambda dl)$ può essere considerata puntiforme

$$d\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \int d\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

---

cariche distribuite su una superficie S ($dq = \sigma ds$):

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')\,ds'$$

cariche distribuite su una linea l ($dq = \lambda dl$)

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_l \frac{\lambda(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')\,dl'$$

LEGGE DI GAUSS

La legge o teorema di Gauss è una legge che si applica a campi vettoriali qualora la forza ad essi associata, sia inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra i due punti nello spazio rispetto a cui viene calcolata.

La legge stabilisce: il flusso del campo elettrostatico E prodotto da un sistema di cariche attraverso una superficie chiusa, è uguale alla somma algebrica delle cariche elettriche contenute all'interno della superficie, divisa per la costante dielettrica del vuoto.
Le legge vale indipendentemente da come sono distribuite le cariche all'interno della superficie.

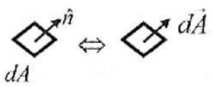
FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE

DEF: sia dA una superficie infinitesima all'interno di una regione di spazio ove sia definito un campo vettoriale *v*.
Sia $\hat{n}$ il versore perpendicolare a dA.
Il **flusso** $d\phi(v)$ del vettore $\vec{v}$ attraverso dA è dato da:

$$d\Phi(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \hat{n}\, dA \qquad \Phi(\vec{v}) = \int_A \vec{v} \cdot \hat{n}\, dA$$

Osservazione: la legge di Gauss <u>misura quanto il flusso di un campo sia normale rispetto al campo stesso</u>.
Per convenzione se A è chiusa allora $\hat{n}$ è scelto uscente dalla superficie.
Significato fisico: flusso deriva dell'idrodinamica e dal calcolo della massa di fluido che attraversa la superficie dA in un'unità di tempo
$\hat{n}$ *è scelto uscente dalla superficie.*

Def: $d\vec{A} = \hat{n}\, dA$



Osservazione: sia ***E*** un campo elettrico uniforme. Considero una superficie cilindrica chiusa con asse parallelo ad ***E***: il flusso del campo elettrico sarà pari a 0. Si è corretto! Perchè il flusso è una somma algebrica dei contributi, è un calcolo al netto dei segni, dettati dal prodotto scalare tra campo e normale alla superficie.

LEGGE DI GAUSS: FORMA INTEGRALE

Nel vuoto si può dire che il flusso del campo $\phi(E)$ attraverso una qualunque superficie chiusa *A* è pari alla carica totale contenuta in *A* divisa per ε_0 . Quindi il flusso dipende solo dalla carica interna e non da quella esterna alla superficie.

$$\Phi \equiv \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

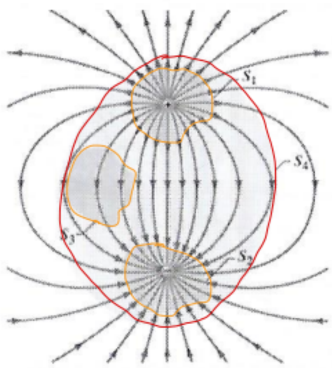
Dove q_{int} è la sommatoria di tutte le cariche interne ad A

La legge di Gauss afferma anche che attraverso una qualunque superficie chiusa dipende SOLO dalla carica interna e non sa quella esterna.

Se in A non c'è carica allora $\phi(E) = 0$, perché vuol dire che entrano tante linee di forza E in A quante ne escono.
(Se ci fossero cariche allora vorrebbe dire ci sarebbero delle linee che entrano/escono soltanto, ma siccome non ce ne sono, significa che le linee di forza sono "solo di passaggio")

NB: quando il problema è dotato di particolare simmetria, la L. di Gauss permette di ricavare il campo elettrico **E**

Esempi



$$\Phi = \oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi = \oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{-q}{\varepsilon_0}$$

opposti ma con la stessa carica

$$\Phi = \oint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{0}{\varepsilon_0} = 0$$

senza carica

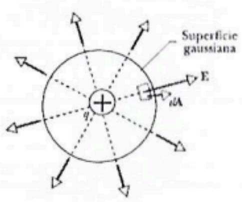
$$\Phi = \oint_{S_4} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q-q}{\varepsilon_0} = 0$$

carica compensata

Oss: la L. di Gauss, quando il problema è dotato di particolare simmetria, permette di ricavare ***E***

Es: ***E* di una carica puntiforme**

Il problema ha simmetria sferica
$\Rightarrow$ ***E* avrà simmetria sferica** (diretto radialmente e con modulo costante su ogni superficie sferica concentrica con la carica)



$$\Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

Applico la L. di Gauss $\boxed{\Phi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}$ con A come in Fig.

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_A \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = E(r)\oint_A \frac{\vec{r}}{r} \cdot \hat{n}\, dA =$$

$$= E(r)\oint_A dA = E(r)\, 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow \quad E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\frac{\vec{r}}{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

LEGGE DI GAUSS E LEGGE DI COULOMB

Considero solo cariche ferme, se sono anche puntiformi allora è immediato ricavare la L. di Coulomb $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$, volendo si può integrare con il principio di sovrapposizione ed arrivare alla formulazione per cariche con distribuzione continua.

L. di Coulomb	+	Princ. Di Sovrapposizione	⇒	L. di Gauss
L. di Gauss	+	Simmetria	⇒	L. di Coulomb

Quindi quando c'è simmetria posso dire:

L. di Gauss ⇔ L. di Coulomb

NB: Coulomb vale solo per cariche in quiete, mentre Gauss è più generale e vale anche per le cariche in moto.

qua ci metto il prossimo argomento dal mazzoldi, riprendo dal libro di venturelli più avanti

CONDUTTORE CARICO ISOLATO

Teorema: Una carica in eccesso posta su un conduttore isolato si dispone totalmente sulla superficie esterna del conduttore. Questa carica esterna è ferma, in quiete.

Dentro al conduttore il campo ***E*** è nullo (dalla L. di Gauss), perché la carica interna è nulla. Appena fuori da esso però, esistendo la carica sulla superficie esterna, il campo ***E*** sarà ortogonale alla superficie e vale

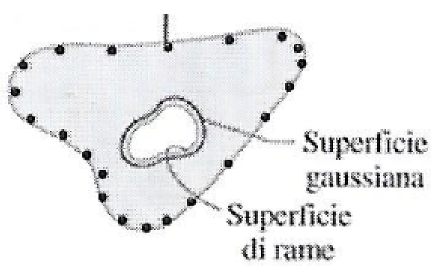
$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot \hat{n}$

*DIMOSTRAZIONE DAL LIBRO DI VENTU *

*Quanto vale **E** appena fuori dal conduttore?*

vedi dal libro e ricopia sul tablet

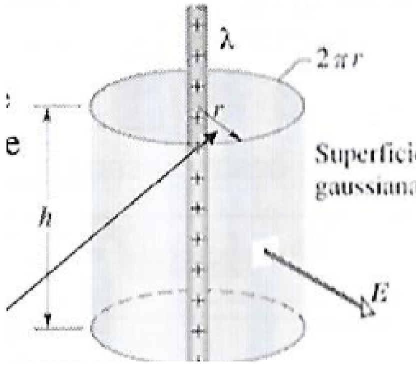
CONDUTTORE CARICO CON CAVITA'



Se c'è una cavità nel conduttore la distribuzione della carica non cambia. Poichè nel conduttore rimane che ***E***=0 e dunque anche $\phi(E) = 0$ => allora la carica dentro la superficie gaussiana è comunque nulla. $\phi(E) = 0$ => allora la carica dentro la superficie gaussiana è comunque nulla.

CAMPO *E* DI UN FILO CARICO UNIF. E LUNGHEZZA INFINITA

anche questo ho poco sbatti AAAAAAAAAAAAAAAA



Considero un filo carico con λ uniforme, un problema con <u>simmetria cilindrica</u>.

Calcolo il campo: ***E*** sarà perpendicolare al filo e con modulo costante su ogni punto di una superficie cilindrica coassiale al filo. In formule si scrive:

$\vec{E}(\vec{r})=E(r)\frac{\vec{r}\,r}{[?]}\,\vec{E}(\vec{r})=E(r)\frac{\vec{r}\,r}{[?]}$

Il vettore $\vec{r}$ non è un vettore posizione rispetto ad un'origine, ma indica il raggio del filo, quindi la distanza tra il punto del filo e la carica centrale, diretto in maniera perpendicolare al filo stesso. $\vec{r}$ non è un vettore posizione rispetto ad un'origine, ma indica il raggio del filo, quindi la distanza tra il punto del filo e la carica centrale, diretto in maniera perpendicolare al filo stesso.

Calcolo il flusso: ϕ considero la superficie *A* quella esterna del filo.
Il flusso attraverso le basi del cilindro risulta nullo perché ***E*** è ~~parallelo~~ perpendicolare alle basi.
Dimostrazione: ϕ considero la superficie A quella esterna del filo.
Il flusso attraverso le basi del cilindro risulta nullo perché E è parallelo perpendicolare alle basi.
Dimostrazione:

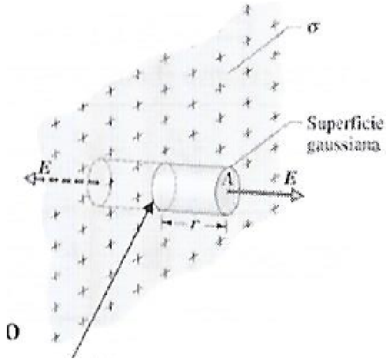
$$\Rightarrow \oint_{A_{cil.}} \vec{E}\cdot d\vec{A} \doteq \oint_{A_{cil.}} E(r)\frac{\vec{r}}{r}\cdot\hat{n}\,dA = E(r)\int_{A_{lat}}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\hat{n}\,dA =$$
$$= E(r)\int_{A_{lat}} dA = E(r)2\pi r h$$

Inserisco il risultato nella L. di Gauss con $q_{int}=\lambda h$

$$\Phi = \oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E(r)2\pi r h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\frac{\vec{r}}{r}$$

CAMPO *E* DI UN PIANO CARICO UNIF. E INFINITAMENTE ESTESO



Considero un piano caricato con σ uniforme. Il problema ha simmetria piana.

Calcolo del campo: ***E*** è perpendicolare al piano e nel punti dello spazio simmetrici rispetti al piano, assumerà valore uguale ma con verso opposto.

Calcolo del flusso: uso come superficie quella di un cilindro perpendicolare al piano, tagliato dallo stesso al suo centro.
Il flusso attraverso la superficie laterale del cilindro è nullo perché ***E*** è parallelo ad *A*, e quindi parallelo al flusso.

$$\phi = \oint_{Acil.} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2E(r)\int_A dA = 2E(r)A \quad \phi =$$

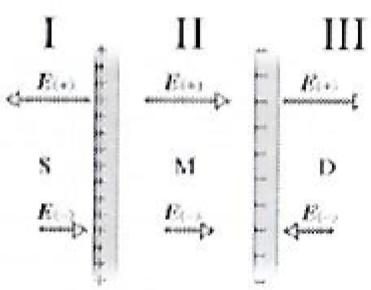
Lo inserisco in $\Phi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2E(r)A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$ $\quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

Osservazione: ***E*** non dipende dalla distanza del punto dal piano.

CAMPO *E* DI DUE PIANI CARICHI OPPOSTI UNIF. E INFINITAMENTE ESTESI ED AFFACCIATI

Il campo ***E*** risulta, per principio di sovrapposizione $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$
Considero il caso in cui entrambi sono carichi uniformemente alla stessa maniera, ma con segno opposto quindi $\sigma_+ = \sigma_- \sigma_+ = \sigma_-$
Considero il caso in cui entrambi sono carichi uniformemente alla stessa maniera, ma con segno opposto quindi $\sigma_+ = \sigma_-$

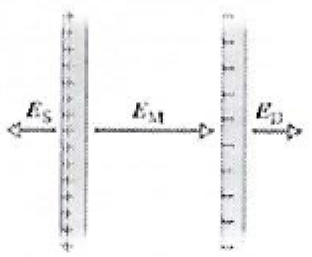
Dal campo ***E*** di un piano carico uniforme infinito richiamo$| \vec{E}_+ | = | \vec{E}_- | = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$

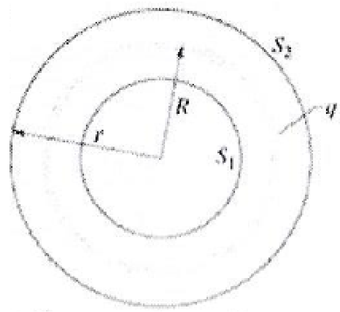


(b)

Nelle zone I e III $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon} - \frac{\sigma}{2\varepsilon} = 0$

Nella zona II $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon} + \frac{\sigma}{2\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$





CAMPO ***E*** DI UN GUSCIO SFERICO SOTTILE UNIF. CARICO

Considero un problema con simmetria sferica, dunque ***E*** risulta essere un campo generato da una forza centrale e quindi vale che:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

Considero S come la superficie sferica di raggio r concentrica con la carica.

Calcolo il flusso: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = E(r)\oint_S \frac{\vec{r}}{r} \cdot \hat{n}\, dA = E(r)\oint_S dA = E(r)4\pi r^2$

Applico poi la L. di Gauss $\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$ e individuo due casi:

$$S = S_1 \rightarrow q_{int} = 0 \rightarrow E4\pi r^2 = \frac{0}{\varepsilon_0} \rightarrow E = 0 (r < R)$$

$$S = S_2 \rightarrow q_{int} = q \rightarrow E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(r >= R)$$

Osservazione: all'esterno del guscio è come se la carica fosse concentrata nel centro.

CAMPO ***E*** DI UNA CARICA DISTRIBUITA CON SIMMETRIA SFERICA

Considero un problema ove la carica sia distribuita con simmetria sferica entro un volume sferico di raggio R. La simmetria sferica implica questa condizione sulla densità di carica volumica:

$$\rho(\vec{r}) = \rho(r) \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

Che come nel caso di un guscio sferico con r posizione esterna al raggio R ottengo

$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r)4\pi r^2 \phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r)4\pi r^2$ posizione esterna al raggio

$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r)4\pi r^2$ ottengo $\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r)4\pi r^2$

OPERATORI

Sono funzioni che trasformano campi in campi. Si utilizzano per esprimere le leggi di Maxwell in forma locale.

Divergenza

DEF: la divergenza è un operatore che trasforma un campo vettoriale continuo e derivabile in un campo scalare secondo la relazione:

$$\operatorname{div}\vec{v} \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\vec{\nabla} \equiv \hat{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathrm{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathrm{k}}\frac{\partial}{\partial z}$$

<u>Interpretazione geometrica</u>: la divergenza del campo in un punto (x,y,z) misura quanto il campo diverge dal punto considerato.

Quindi la divergenza è nulla se il campo è uniforme, ovvero se non dipende dalle coordinate (dallo spazio).

Teorema della divergenza

Il flusso di un campo vettoriale derivabile attraverso una qualunque superficie chiusa A è uguale all'integrale della divergenza del campo esteso a tutto il volume racchiuso da A.

$$\Phi(\vec{v}) \equiv \oint_A \vec{v} \cdot \hat{n}\, dA = \int_\tau \operatorname{div} \vec{v}\, d\tau$$

DEF: chiamo **solenoidale** in D campo vettoriale per cui la sua divergenza $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$, in ogni (x, y, z) punto dello spazio appartenente ad una certa regione D, risulta nulla.
Ovvero campo uniforme.

Teorema di Gauss: forma locale

Considero il teorema in forma integrale come punto di partenza.
E ipotizzo che $\vec{E}$ sia continuo e derivabile.

$$\phi \equiv \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad div\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

La divergenza di E è in ogni punto uguale alla densità di carica nel punto diviso epsilon zero.

dove $\quad \text{div}\,\vec{E}(\vec{r}) = \text{div}\,\vec{E}(x,y,z) \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$

che con l'operatore $\vec{\nabla}$ $\quad \vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$

si scrive: $\quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}}$

<u>Dimostrazione</u>

dimostro gauss equivalente a gauss locale

Dimostrazione:

carica interna ad una superficie

Sia $\quad Q_{\text{int}\,TOT} = \int \rho\, d\tau \quad$ con τ = volume racchiuso da A

densità di carica

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$

Allora (1) si scrive: $\quad \boxed{\oint_A \vec{E}_0 \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_\tau \rho\, d\tau} \quad$ (3)

$\frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \equiv Q_{int\,TOT}$

th divergenza:

$\phi(\vec{E}) = \oint \vec{E}\, d\vec{A} = \int_\tau \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, d\tau$

Per il teorema della divergenza si ha che con $\vec{E}_0$ sufficientemente regolare: → derivabile e continuo

$$\oint_A \vec{E}_0 \cdot d\vec{A} = \int_\tau \text{div}\,\vec{E}_0\, d\tau \qquad (4)$$

con τ = volume racchiuso da A

th divergenza $\qquad \Phi = \Phi \qquad$ gauss integrale con distrib volumica continua

$$(3), (4) \quad \Rightarrow \quad \int_\tau \text{div}\,\vec{E}_0\, d\tau = \int_\tau \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, d\tau$$

$Q = \int_\tau \rho\, d\tau \Rightarrow \rho(\vec{r})$ ma anche $\quad$ div $\vec{E}\, d\tau$ ↓ div $\vec{E}(\vec{r})$

se due integrali sono = l'integrale della differenza è nullo

se integro rispetto a $d\tau$

$$\Leftrightarrow \int_\tau \left(div\vec{E}_0 - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) d\tau = 0$$

per ogni τ (in quanto la (1) vale per ogni A)

$$\Leftrightarrow div\,\vec{E}_0(\vec{r}) - \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = 0 \qquad \text{per ogni } \vec{r}$$

$$div\,\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

forma locale! trovata

mancherebbe le condiz. in ipotesi dell'operatore divergenza

OSS. Se $\boxed{\vec{E}}$ non é continuo e derivabile la (2) non ha senso, la (1) sì

OSS. Dall'esperienza si ha che nel caso non stazionario ($\vec{E} = \vec{E}(\vec{r},t)$) sia la (1) che la (2) continuano a valere.

ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA

Energia potenziale elettrica

Sappiamo che la forza elettrostatica è una forza conservativa osservando che, se calcoliamo la circuitazione del campo elettrostatico allora questa sarà nulla.
Equivale a dire che il lavoro svolto dalla forza elettrostatica lungo un percorso chiuso è pari a zero.
Ricordiamo che questo vale se la forza è appunto elettrostatica, quindi le cariche coinvolte sono fisse ed in quiete. Il termine elettrostatico indica questa situazione di immutabilità.

In ogni caso, fatte queste considerazioni, ad un sistema di cariche in quiete, possiamo assegnare una energia potenziale elettrica.

Consideriamo un sistema con cariche che vengono spostate da una configurazione (i) ad una (f).
Allora diremo che la variazione di energia potenziale elettrica del sistema è la differenza tra l'energia a (i) ed (f). Che è anche pari all'opposto del lavoro svolto dalla forza elettrica per spostare il sistema da una configurazione all'altra.

$$\Delta U = U_f - U_i = -L$$

Si sceglie $U_i = 0$ in corrispondenza della configurazione ove le distanze tra cariche sono infinitamente lontane. Definiamo quindi che l'energia del sistema di cariche è $U = -L_\infty$.
L infinito è il lavoro svolto dalla forza per portare le cariche dall'infinito alla configurazione considerata.

Energia di una carica nel campo di un sistema

Considero una sola carica q che viene spostata da r_i ad r_f mentre il sistema rimane fermo.
Secondo la definizione di energia potenziale (e dalla definizione di lavoro della forza elettrostatica)..

$$\Delta U = U_f - U_i = -L = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = -q\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$$

La variazione di energia potenziale elettrica del sistema è pari alla differenza tra l'energia associata alla configurazione finale meno quella iniziale, che è uguale all'opposto del lavoro svolto per portare il sistema da (i) ad (f).
Questo lavoro si calcola integrando il prodotto scalare forza e spostamento, considerato tra r(i) ed r(f).

Se ponessi la configurazione iniziale con distanze infinite, posso ricavare il valore dell'energia potenziale elettrostatica associata ad una carica qualsiasi in per una qualsiasi configurazione di un qualsiasi sistema di cariche in quiete

$$U_q(\vec{r}) = -L = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = -q\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$$

Energia potenziale elettrica: due cariche

Considero due cariche puntiformi e ferme, q e Q. Si calcola la variazione di energia potenziale elettrica del sistema per lo spostamento di q da r_a a r_b:

$$U_b - U_a = -\int_{r_a}^{r_b} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -q\int_{r_a}^{r_b} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -q\int_{r_a}^{r_b} (E_x \vec{i}) \cdot (ds\, \vec{i}) = -q\int_{r_a}^{r_b} E_x ds =$$

$$= -q\int_{r_a}^{r_b} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 s^2} ds = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} qQ \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right)$$

Se poniamo $r_a = \infty$ allora $U_a = 0$ e quindi si trova l'energia potenziale di q (U_b) nel campo di Q. Perché è l'energia associata alla configurazione di q-Q dopo che q è stata "portata dall'infinito alla posizione finale".

U_b vale anche come l'energia di Q nel campo di q. Posso dimostrarlo, sfruttando la definizione di energia U come opposto del lavoro svolto da F el. Statica per creare la configurazione delle cariche:

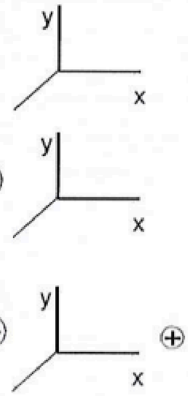
-Supponiamo Q e q entrambe all'infinito

1)Trasportiamo Q nella sua posizione finale.
Il lavoro della forza elettrica è

$$L_1 = 0 \quad \leftarrow \text{Perché } F=0$$

2)Trasportiamo poi q nella sua posizione finale.
Il lavoro della forza elettrica è

$$L_2 = \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} qQ \left(\frac{1}{r} \right)$$



Il lavoro totale è

$$L_\infty = L_1 + L_2 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{r} = -U_b$$

Ma per definizione $\quad U = -L_\infty \quad \Rightarrow U = U_b$

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} qQ \left(\frac{1}{r} \right)}$$

Distanza tra le cariche

Energia potenziale elettrica del sistema di 2 cariche

L'energia potenziale elettrostatica del sistema di due cariche rappresenta il lavoro di una forza esterna per portare le due cariche dall'infinito alla distanza r (tra loro). Il lavoro è positivo se fatto contro la forza repulsiva tra cariche dello stesso segno, negativo se le cariche si attraggono e sono di segno opposto.

ENERGIA POTENZIALE DI UNA SFERA CARICA

boh

POTENZIALE ELETTRICO

Introduzione dal Mazzoldi: Essendo il campo elettrostatico conservativo, il lavoro svolto dalla forza non dipende dal percorso seguito durante lo spostamento. (Scrivo l'espressione del lavoro, scrivo poi il lavoro su unità di carica)
Questo permette di definire l'integrale del rapporto lavoro sulla carica e carica stessa, come una *differenza di valori di una funzione delle coordinate dello spazio, detta potenziale elettrico.

Potenziale di una carica Q

Considero di porre una carica di prova q in prossimità di un'altra Q: il sistema acquista un'energia potenziale perché tra le due si instaura un interazione tramite campo elettrostatico.

$$U_q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r}$$

Come il campo elettrico esprime il rapporto forza applicata su una carica / carica stessa, si può esprimere il rapporto energia potenziale elettrica di una carica / carica stessa introducendo una nuova grandezza, che in situazione elettrostatica risulta dipendere dallo spazio, quindi dal punto in cui viene calcolata.

DEF: il **potenziale elettrico** *V* in *r* della carica Q è il rapporto tra l'energia della carica in un punto dello spazio ed il valore della carica stessa.

$$V \equiv \frac{U_q}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

Il potenziale dipende da Q (carica che genera il campo che agisce su q) e non dalla carica nel punto (che quindi possiamo intendere come una carica di prova, utile solo al fine dei calcoli).
Il potenziale elettrico, V, è una funzione (campo) scalare.

In realtà quello che stiamo definendo non è il potenziale elettrico come valore assoluto nel punto, ma una DDP (vedi introduzione: se il lavoro non dipende dal percorso, allora si può esprimere come differenza tra due valori, uno associato a (i) ed uno alla posizione (f)). Attenzione! Se si dovesse invece di considerare un percorso generico, un circuito chiuso, allora si andrebbe a definire la forza elettromotrice associata al campo elettrico, che nel caso statico è sempre nulla poiché non c'è la presenza di cariche in moto (e quindi il lavoro dipendendo solo dal valore iniziale e finale sarebbe la differenza tra due valori uguali, inizio=fine, e quindi nullo).*

Il lavoro necessario a spostare una carica dalla configurazione A a B è esprimibile come l'opposto del prodotto tra la carica e la differenza di potenziale tra A e B.
Ciò significa che l'energia potenziale di un sistema si può esprimere come il prodotto della DDP e la carica di cui si vuole conoscere l'energia.

Potenziale di un sistema di cariche Q_i

Cerco il potenziale partendo dall'energia del sistema.
Poniamo una carica di prova q in prossimità del sistema di N cariche, ne calcolo l'energia potenziale elettrica come:

$$U_q = -L = -\int_{\infty}^{\vec{r_f}} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = -q\int_{i}^{\vec{r_f}} \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$$

DEF: il **potenziale elettrico** *V* nel punto dello spazio *r* dovuto al **sistema** di cariche Q_i è il rapporto tra l'energia del sistema di cariche e la carica (di prova) nel punto *r*.

$$V \equiv \lim_{q \to 0} \frac{U_q}{q}$$

*V non dipende dalla carica nel punto r ma dal sistema che ne generano il campo **E**. V è un campo scalare e non vettoriale.*
*Ad un sistema di cariche associamo un campo scalare V e un vettoriale **E**.*
V è definito a meno di una costante arbitraria.

SUPERFICI EQUIPOTENZIALI

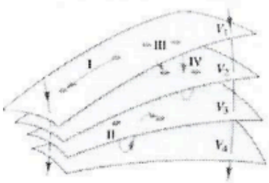
Per rappresentare il campo ***E*** si usano le linee di forza (essendo questo un campo vettoriale).
Per il campo scalare *V*, si usano le superfici di ugual livello, che indicano sezioni di spazio dove la funzione è costante..

DEF: una **superficie di livello di un campo scalare** è un insieme di punti ove il campo scalare assume lo stesso valore.

DEF: una **superficie equipotenziale** è una superficie di livello del potenziale elettrico (campo scalare *V*).
Quindi è una regione di spazio dalla forma geometrica di una superficie bidimensionale dove, per ogni punto, la funzione potenziale elettrico V assume lo stesso medesimo valore.

*Tutte le superfici equipotenziali sono perpendicolari ad **E**:*
Se la condizione di sup. equip. si ha quando la V assume lo stesso valore, allora sappiamo che sarà anche quando l'energia potenziale è costante nello spazio.
Affinché questo accada serve che il lavoro necessario a portarci in una qualsiasi configurazione (della carica di prova) che giace sulla superficie sia lo stesso, dunque l'integrale del campo elettrostatico in d(s) deve rimanere costante: questo si ha quando la distanza r tra il punto (xyz) e la SORGENTE del campo stesso mantengono la stessa distanza.

Es: 4 superfici equipotenziali: determiniamo il lavoro compiuto dal campo elettrico per spostare una carica q lungo i 4 percorsi indicati in fig

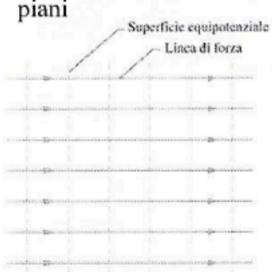


$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = \frac{-L}{q} \Leftrightarrow L = -q\Delta V$$

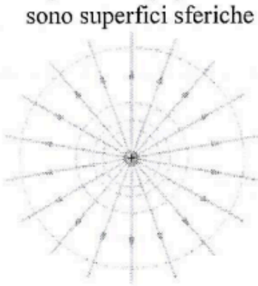
$$I \rightarrow \Delta V = V_1 - V_1 = 0 \Rightarrow L = 0$$
$$II \rightarrow \Delta V = V_3 - V_3 = 0 \Rightarrow L = 0$$
$$III \rightarrow \Delta V = V_2 - V_1 \Rightarrow L = -q(V_2 - V_1)$$
$$IV \rightarrow \Delta V = V_2 - V_1 \Rightarrow L = -q(V_2 - V_1)$$

Esempi:

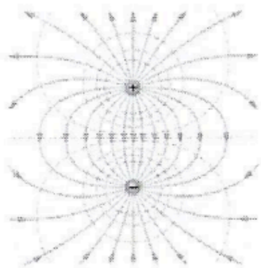
E uniforme: le superficie equipotenziali sono dei piani



E di carica puntiforme: le superficie equipotenziali sono superfici sferiche



E di dipolo elettrico



OSSERV: Se il campo elettrostatico ***E*** risulta essere uniforme, allora le superfici equipotenziali sono dei piani.

OSSERV: Se ***E*** è associato ad una carica puntiforme allora le superfici equipotenziali sono superfici sferiche concentriche.

Il lavoro per spostare le cariche è compiuto dalla forza elettrica, e lo calcolo con:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = \frac{-L}{q} \Leftrightarrow L = -q\Delta V$$

POTENZIALE DAL CAMPO DI UN SISTEMA DI CARICHE

Noto ***E*** generato da un sistema di cariche, posso determinare il potenziale elettrico associato al sistema: si sfrutta la definizione di potenziale come rapporto energia / carica di prova (q “quasi nulla”).

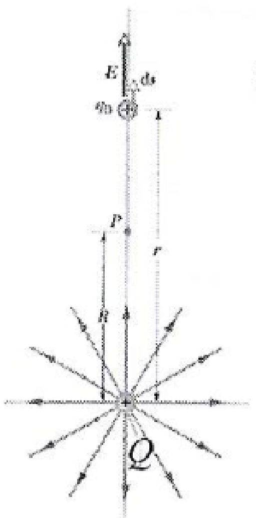
$$V = \lim_{q \to 0} \frac{U_q}{q}$$ con $$U_q(\vec{r}) = -L = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = -q\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$$

POTENZIALE DOVUTO AD UNA CARICA PUNTIFORME

Considero un sistema di due cariche, con Q sorgente del campo (e quindi del potenziale) e q carica di eventualmente prova. Prima scrivo l’espressione per il calcolo della DDP tra due punti (iniziale e finale) qualsiasi:

$$V_f - V_i = -\int_{P}^{P'} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_{P}^{P'} E\,dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r}^{r_f} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)$$



Poi faccio l’assunzione comoda: se r_i è infinito allora il potenziale iniziale è zero e dunque il calcolo si riduce ad un punto solo, il potenziale elettrico nella posizione *r*.

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

Osservazione: il potenziale elettrostatico è costante in tutti i punti della superficie sferica di raggio *r* con centro nella carica Q sorgente. Da qui il fatto che le superfici di livello sono quelle ove la distanza dalla sorgente del campo non varia.

POTENZIALE DI UN SISTEMA DI CARICHE PUNTIFORMI

Si applica il principio di sovrapposizione degli effetti: essendo un sistema discreto di cariche, per ogni carica si svolge l'integrale da infinito ad r, così si trova il suo contributo al potenziale totale, e poi li si somma.

$$V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(\vec{s}) \cdot d\vec{s} =$$
$$= -\sum_{i=1}^{N} \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}_i(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^{N} V_i(\vec{r})$$

pote
i-es

Primo passaggio integrale sul campo totale del sistema, che è uguale alla sommatoria di tutti i contributi i al campo. La sommatoria può essere portata fuori dall'integrale e quindi scopro che rimane la somma algebrica dei contributi di potenziale elettrico da ogni i.

Nel principio di sovrapposizione, la somma dei potenziali è una somma algebrica, mentre per i campi elettrici è vettoriale. Questo paragrafo dimostra il principio di sovrapposizione per il potenziale V, poichè alla fine vale:

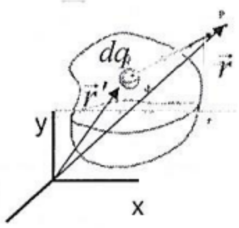
$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} V_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

POTENZIALE DI DISTRIBUZIONI CONTINUE

Quando si considera una situazione con cariche non puntiformi, allora non posso utilizzare l'espressione con la sommatoria finita di Q_i.

E' necessario suddividere la carica in infinitesimi, da valutare come puntiformi di valore *dq* ed uniformemente distribuiti.
Quindi potrò scrivere un'espressione di somma infinita dei contributi infinitesimi:

$$dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$



La distanza dalla sorgente del campo è espressa come r-r' perchè si considera un SdR dove la sorgente non si trovi nell'origine ma nella posizione r'.

tratti infinitesimi di una linea
carica lineare : $dq = \lambda\, ds$
superfici infinitesime di piano
carica superficiale : $dq = \sigma\, dA$
volumi infinitesimi di spazio
carica volumica : $dq = \rho\, dv$

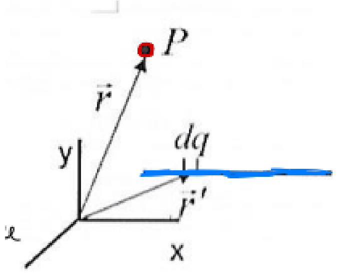
Integrando questi contributi rispetto a tutta la carica (che sia volumica, di superficie o lineare) si ottiene il <u>potenziale totale</u> dovuto all'intera carica q:

$$V(\vec{r}) = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

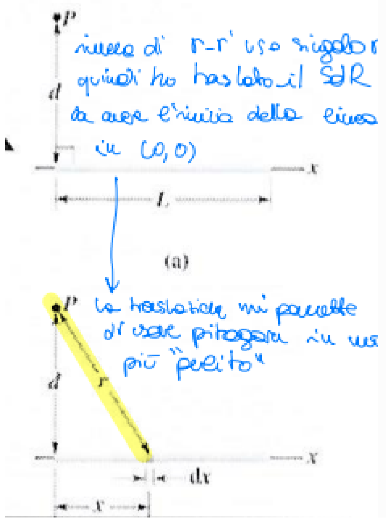
Wade Giovanni Baisini

Potenziale di carica con densità lineare

Considero una carica distribuita uniformemente su una sottile bacchetta, da suddividere in elementi puntiformi il cui potenziale generato vale:



$$dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$



Essendo una distribuzione uniforme lungo una sola direzione, posso ricondurmi ad avere una serie di infinitesimi *dx*.

Se impongo r = |r-r'| allora posso riscrivere così l'espressione infinitesima

$$dV(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dx}{\left(x^2+d^2\right)^{1/2}}$$

Ottenuto il contributo dell'infinitesimo *dx*, integro lungo tutta la lunghezza la distribuzione

$$V(P) = \int dV = \int_0^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dx}{\left(x^2+d^2\right)^{1/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(x+\left(x^2+d^2\right)^{1/2}\right)\right]_0^L =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(L+\left(L^2+d^2\right)^{1/2}\right)-\ln d\right] = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{L+\left(L^2+d^2\right)^{1/2}}{d}$$

GRADIENTE

Considero il campo scalare $\phi = \phi(x, y, z, t)$. Se siamo interessati a osservare la sua evoluzione nel tempo, calcoliamo $\frac{\partial \phi}{\partial t}$.
Sepoi ci interessa l'evoluzione di ϕ con la posizione (x,y,z) basta calcolare la terna:

$(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}) = gr\vec{a}d\phi$ questa terna è un vettore, mentre d phi è uno scalare.

La variazione del campo infinitesima dovuta ad uno spostamento infinitesimo del punto P sarà calcolata come

$$d\vec{l} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

$$d\varphi(x,y,z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz$$

DEF: chiamo **gradiente** l'operatore che <u>trasforma un campo scalare continuo e derivabile in un campo vettoriale</u> secondo la relazione:

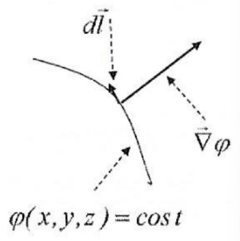
$$gr\vec{a}d\varphi(x,y,z) \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\varphi(x,y,z) \equiv gr\vec{a}d\,\varphi(x,y,z)$$

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Il vettore gradiente è invariante rispetto al cambio del sistema di coordinate.

Proprietà del Gradiente



>Se $d\vec{l}$ sta (E' PARALLELO) su una superficie di livello, dunque $\phi = cost$ osservo che: $d\vec{l}$ sta su una superficie di livello, dunque $\phi = cost$ osservo che:

$\Rightarrow d\phi = 0$ ma $\quad d\phi = \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{l}$

Il gradiente è perpendicolare alle superfici di livello (parallelo al campo) =>
Se mi sposto lungo una superficie di livello, so che sono su un piano perpendicolare al campo E (vd. Paragrafo potenziale elettrico).
Sulla superficie equipotenziale il campo scalare associato ad E che è V, è costante rispetto a qualsiasi spostamento che rimanga sulla superficie stessa.
Dunque la derivata del campo scalare è nulla. La derivata di V (qui uso phi) viene calcolata come il prodotto scalare tra il gradiente del campo, e lo spostamento (perchè giustamente è rispetto a quello che vogliamo derivare) ma questo prodotto deve essere nullo perché il campo è costante
=> il gradiente e lo spostamento sono perpendicolari tra loro!
=> se il campo E era perpendicolare alla superficie di livello, allora è parallelo al gradiente.

>Se $d\vec{l}$ è invece PERPENDICOLARE ad una superficie di livello allora $d\phi = \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{l} = |\vec{\nabla}\phi||d\vec{l}|$

Cioè $|\vec{\nabla}\phi| = \dfrac{d\phi}{d\vec{l}}$, (il gradiente) è la derivata direzionale di phi lungo la perpendicolare alla superficie di livello.

OSSERV: *Dato un campo scalare* ϕ *è sempre possibile associare un campo vettoriale* $\vec{F}]$ tale che *:*

$$\vec{F} = \nabla\phi$$

Ma dato un campo vettoriale $\vec{F}$ non è sempre possibile trovare un campo scalare ϕ tale che soddisfi l'espressione precedente. $\vec{F} = \nabla\phi$

Dunque possiamo dare una definizione..

DEF: un campo vettoriale ***F*** è detto **conservativo** se esiste un campo scalare φ tale che φ tale che

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$$

Teorema Forza conservativa

pagina 52 in poi

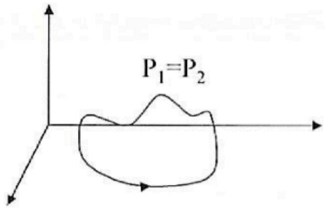
DEF: l'**integrale di linea**

Chiamiamo integrale di linea lungo l di $\vec{F}$ la quantità scalare:

$$\int_{l\,P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Se l è chiusa (P_1=P_2), l'integrale di linea si chiama **circuitazione** e si scrive:

Nota il cerchio $\rightarrow$ $\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l}$



Teorema:

<u>CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE</u> affinchè ***F*** sia **conservativa** è che la circuitazione estesa a qualunque linea l appartenente al dominio di ***F*** sia nulla.
(Per la condizione sufficiente basta che il dominio sia semplicemente connesso)

Dim. La C.N

Se conservativo $\Leftrightarrow \exists \varphi$ tale che $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$

$$\Rightarrow \forall l \quad \int_{P_1\,l}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{P_1\,l}^{P_2} \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{l} = \int_{P_1\,l}^{P_2} d\varphi = \varphi(P_2) - \varphi(P_1)$$

Se P_2=P_1 $\qquad \Rightarrow \oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$

DEF: un **dominio semplicemente connesso** è un dominio dove ogni linea chiusa può essere ridotta ad un punto continuando ad appartenere completamente al dominio.

CAMPO ***E*** DAL POTENZIALE ELETTRICO

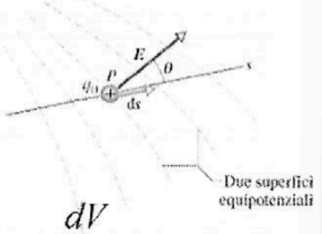
Partendo da un campo E noto generato da un sistema di cariche, è possibile calcolare il potenziale elettrico associato al sistema.

Ma è vero anche il percorso inverso, quindi a <u>partire dal potenziale elettrico posso ricavare il campo elettrico E</u>.

Da $$\Delta U = U_f - U_i = -L = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}(\vec{s})\cdot d\vec{s} = -q\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{s})\cdot d\vec{s}$$

Abbiamo $$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = \frac{-L}{q} = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{s})\cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dL = -q\,dV \\ dL = q\,\vec{E}\cdot d\vec{s} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \quad -q\,dV = q\,E\,ds\cos\theta \quad \Rightarrow \quad E\cos\theta = -\frac{dV}{ds}$$

$$\Rightarrow \quad E_s = -\frac{dV}{ds}$$

E_s è la componente del campo lungo la direzione s, mentre *dV/ds* è la derivata direzionale di *V*.
Se *ds* è parallelo ad uno degli assi allora trovo che la componente x,y,z del campo è rispettivamente:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{grad}\ V}$$

Per cui affermo che il campo elettrostatico è l'opposto del gradiente del potenziale elettrostatico.

ROTORE

DEF: il **rotore** è un operatore che trasforma un campo vettoriale continuo e derivabile in un campo vettoriale secondo la relazione seguente

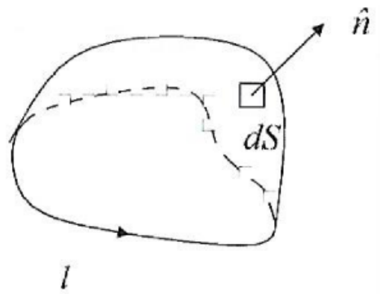
$$rot\vec{F} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F} \equiv \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

Teorema di Stokes

Enunciato: la circuitazione di un campo vettoriale ***F*** lungo la linea (chiusa) ***l*** è uguale al flusso del rotore di ***F*** attraverso una qualsiasi superficie *S* avente per contorno la linea *l*, con la convenzione che la normale n a *S* sia orientata in modo da vedere come antiorario il verso positivo di *l.*

$$\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S rot\vec{F} \cdot \hat{n} dS$$



Proprietà:
DEF: si dice **irrotazionale** un campo vettoriale ***F*** per cui ***rot F*** = 0.

Teorema rotore e campo conservativo

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE affinché un campo vettoriale ***F*** sia irrotazionale => ***F*** deve essere conservativo.

Dim

$\Rightarrow$) Se $rot\vec{F} = 0$

$\Rightarrow$ Per Teo di Stokes $\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \forall l$

$\Leftrightarrow$ $\vec{F}$ conservativo (se il dominio di $\vec{F}$ è sempl. connesso)

$\Leftarrow$) Sia $\vec{F}$ conservativo

$\Leftrightarrow$ $\exists \varphi$ tale che $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$

e quindi $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = 0$

perchè $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = 0$

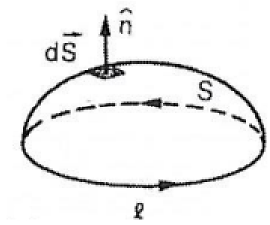
ROTORE DEL CAMPO ELETTROSTATICO

Si osserva che un campo elettrostatico $\vec{E}_0$ risulta essere conservativo, dunque si scrive che la sua circuitazione è nulla per ogni linea chiusa

$$\oint_l \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = 0$$

Dal Th. di Stokes posso riscrivere
Vale per ogni *l* chiusa.

$$\oint_l \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = \int_S rot\vec{E}_0 \cdot d\vec{S}$$



>Immagino poi anche *S*, una qualsiasi superficie aperta avente *l* come contorno e $d\vec{S} = \vec{n}dS$ con $\vec{n}$ data dalla regola della mano destra, osservo:

$\int_S rot\vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = 0$ per ogni *S* se e solo se $rot\vec{E}_0 = 0$

*Il campo elettrostatico è irrotazionale se parto da **E** conservativo, con l linea chiusa contorno di una superficie aperta.*

Si scrive anche $\vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = 0$, che vedi anche come

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_{0x} & E_{0y} & E_{0z} \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\partial E_{0z}}{\partial y} - \frac{\partial E_{0y}}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial E_{0z}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial E_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y}\right) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = 0$$
(Terza equazione di Maxwell nel caso stazionario)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
(Prima equazione di Maxwell)

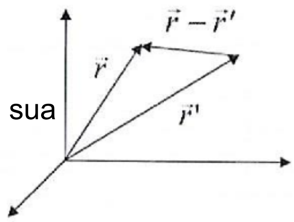
$\Longleftrightarrow$ Legge di Coulomb (tutto ciò che c'è in elettrostatica)

Le precedenti equazioni possono essere scritte (equivalentemente) in forma integrale:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \forall l \text{ (chiusa)}$$

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \forall A \text{ (chiusa)}$$

Teorema di Helmoltz



<u>Enunciato</u>: un campo vettoriale ***E*** è univocamente determinato quando sono dati la sua divergenza e il suo rotore.
L'espressione che lega un campo vettoriale con divergenza e rotore vale:

$$\vec{F}(\vec{r},t) = \int_v \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}',t) \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dv' + \int_v (\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}',t)) \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dv'$$

Questo teorema è il motivo per cui conoscere div e rot di un campo vettoriale è interessante. In particolare per il campo elettrostatico mi permette di ricavare la seguente espressione:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_v \frac{\rho(\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \; dv'$$

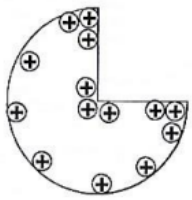
POTENZIALE DI UN CONDUTTORE CARICO ISOLATO

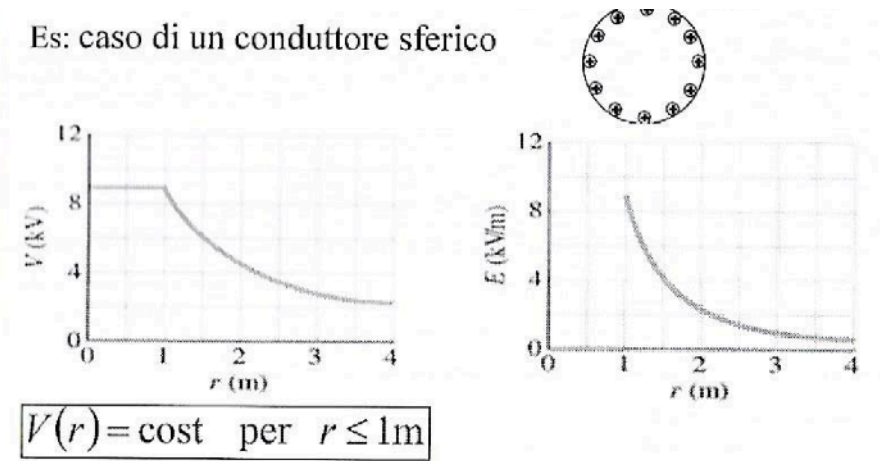
Considero un conduttore carico isolato, per cui vale ***E***=0.
Questo implica che la regione del conduttore è equipotenziale infatti risulta che, per due punti A e B qualsiasi appartenenti al conduttore:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Rightarrow V_A = V_B$$

La carica di un conduttore si dispone sulla superficie in modo che tutti i punti del conduttore (sia sulla superficie che all'interno) abbiano lo stesso potenziale.

In generale la carica si addensa maggiormente dove il raggio di curvatura della superficie è piccolo (parti appuntite).





DAL MAZZOLDI: dato che la superficie del conduttore è equipotenziale, il campo E (non sulla superficie, perché è nullo) in un punto esterno molto vicino al conduttore risulta ortogonale alla superficie, indipendentemente dalla sua geometria. Dunque considero un conduttore dalla forma "comoda", un cilindro retto, che abbia una base immersa nel conduttore (quindi E=0) e l'altra appena fuori, così da avere E normale alla base. Applico la L. di Gauss chiamando *dq* la carica all'interno e sulla superficie del conduttore:

$$\oint E \cdot \hat{n}\, dA = E\, dA = \frac{1}{\varepsilon_0} dq = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma\, dA$$

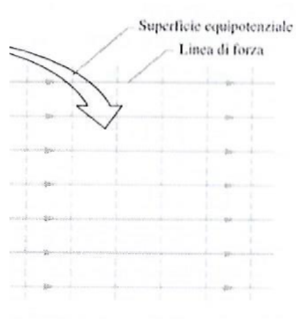
$$\Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}$$

Questo risultato è noto come teorema di Coulomb. Verso uscente con densità negativa, entrante con densità positiva.

CONDUTTORE IN UN CAMPO ELETTRICO ESTERNO

Considero un campo elettrico E in cui inserisco un conduttore scarico, dunque la sua Q_{tot}=0.

Gli elettroni liberi di conduzione del conduttore si trovano nel campo esterno e si mettono in movimento: si distribuiscono sulla superficie del conduttore in modo che il campo elettrico all'interno sia nullo.

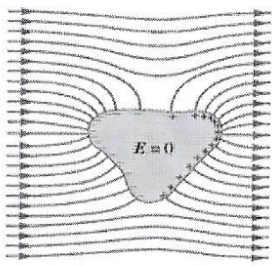


$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_c = 0$$

Ove $\vec{E}_c$ è il campo della carica indotta nel conduttore mentre $\vec{E}_0$ è il campo pre-esistente all'inserimento del conduttore.

La carica totale rimane sempre e comunque nulla.

Rappresentazione di un conduttore scarico inserito in un campo elettrico uniforme.



INDUZIONE ELETTROSTATICA

DEF: l'**induzione elettrostatica** è quel fenomeno per cui, in presenza di ***E*** esterno, le cariche libere di un conduttore si ridistribuiscono.

Avviene ad esempio quando si avvicina un corpo carico ad un conduttore isolato scarico.

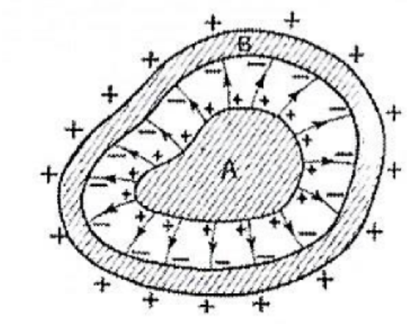
DEF: le cariche del conduttore isolato si chiamano indotte, mentre quelle del corpo carico si chiamano inducenti.

Leggi dell'induzione elettrostatica

1. La somma delle cariche indotte è nulla
2. Le cariche indotte sono distribuite in modo da rendere il conduttore una regione equipotenziale

Osservazione: $|Q_{indotta}| \leq |Q_{inducente}|$

DEF: si ha l'**induzione completa** quando $|Q_{indotta}| = |Q_{inducente}$
L'induzione completa si ottiene quando il corpo inducente è completamente circondato dal conduttore scarico $\Leftarrow$ tutte le linee di forza che partono da un corpo finiscono sull'altro.



Osservo che il campo elettrico di E (interno) è pari a 0 perchè appunto tutte le cariche sono distribuite sulla superficie! Nello spazio tra A e B invece $E \neq 0$ perché osservo l'esistenza delle linee di forza.

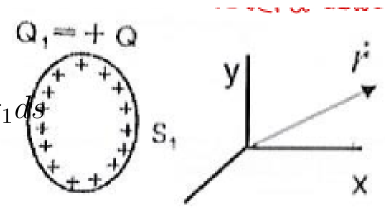
Spiegazione: all'esterno del conduttore esterno il campo è nullo perché l'effetto delle cariche di A, sommato all'effetto delle cariche indotte su B, è nullo. Mentre all'interno della cavità il campo è nullo perché non sono presenti cariche (vd. Legge di Gauss), e questo è confermato dal fatto che tutte le linee di forza entrano ed escono dalla cavità stessa (entrano partendo da A, escono finendo in B)

Anche dentro A stesso il campo è nullo, questo perché essendo in equilibrio elettrostatico, tutte le cariche in eccesso si distribuiscono sulla superficie.

CAPACITA' ELETTRICA

La capacità elettrica è una proprietà dei materiali conduttori. La introduco così: considero un conduttore nel vuoto, molto lontano da altri oggetti o cariche, quindi non soggetto ad alcuna forza elettrostatica.
Il conduttore è carico e possiede una carica Q_1 che si distribuisce su S la sua superficie e dunque posso scrivere

$$Q_1 = \int_S \sigma_1 ds$$



Osservo quindi che per il conduttore carico isolato, nella generica posizione **r** vale:

$$V_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_s \frac{\sigma_1(\vec{r}')ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Caricando il conduttore con $Q_2 = \lambda Q_1$ una carica diversa e nuova, allora osservo che $\sigma_2 = \lambda\sigma_1$ da cui posso scrivere l'espressione relativa al potenziale generato da Q_2. Riporto la nuova forma del potenziale associato al campo elettrostatico generato dal conduttore:

$$V_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_s \frac{\sigma_2(\vec{r}')ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_s \frac{\lambda\sigma_1(\vec{r}')ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \lambda V_1(\vec{r})$$

$$\begin{cases} \dfrac{V_2(\vec{r})}{V_1(\vec{r})} = \lambda \\ \dfrac{Q_2}{Q_1} = \lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{Q_2}{V_2(\vec{r})} = \frac{Q_1}{V_1(\vec{r})}$$

Dalle due espressioni posso cercare una correlazione e ricavare questo sistema che esprime la relazione fra le cariche Q_1 e Q_2.

Questa risulta essere la stessa tra le densità e pure i potenziali elettrici.
Dunque fissato il punto *r*, il rapporto tra Q del conduttore ed il potenziale V generato è indipendente dalla carica Q.

Se ***r*** appartiene al conduttore (ovvero se valuto il potenziale di un punto sul conduttore) il V potenziale del conduttore è uniforme ed ha un valore fisso ovunque, data una carica Q_i.

$$\frac{Q}{V} = \text{costante} = C$$

DEF: Allora dal rapporto Q/V, scopro la grandezza C, **capacità** del **conduttore** come costante. *Si misura in Farad, che sono Coulomb/Volt.*

La capacità C dipende solo dalle caratteristiche geometriche del conduttore e del mezzo isolante in cui è immerso.
Si dice che un conduttore ha grande capacità quando grandi trasferimenti di carica provocano piccole variazioni di potenziale.

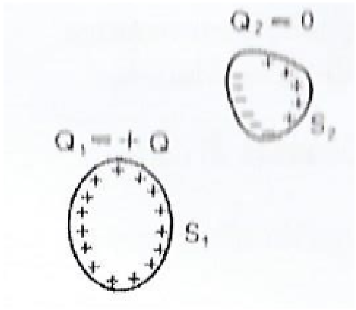
Capacità di una sfera conduttrice ed isolata

Immagino di avere una sferetta di materiale conduttore, isolata dal resto dell'universo quindi non soggetta a forze esterne. La considero di raggio R e carica con Q:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad \Rightarrow C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

CONDENSATORI

Considero un conduttore isolato con carica Q_1=Q, superficie S_1 e carica C=Q/V.

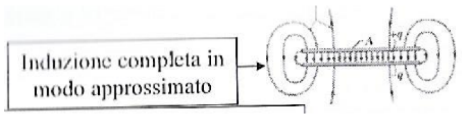


Se gli avvicino un secondo conduttore isolato, stavolta <u>scarico</u> cioè Q_2=0, allora scopro che il potenziale V del primo conduttore è diminuito.

Le cariche negative si "avvicinano" alla carica Q_1 del conduttore carico. La carica Q presente su (1) non cambia di certo, ma cambia il potenziale, poiché esiste ora un contributo dovuto alle cariche indotte su (2) dalla Q in (1).

<u>Considerazione finale</u>: quindi per avere maggiore capacità, basta avvicinare un conduttore.

DEF: un **condensatore elettrostatico** è un sistema di due conduttori disposti in modo che tra loro vi sia induzione completa.



DEF: la **capacità del condensatore** si scrive con l'espressione

$$C = \frac{Q}{|V_A - V_B|}$$

dove V_A e V_B sono rispettivamente i potenziali del primo e secondo conduttore, per convenzione il primo avrà +Q ed il secondo -Q di carica.

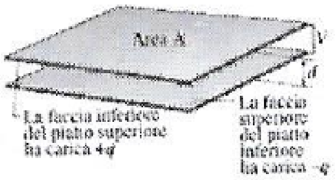
Calcolo capacità condensatore

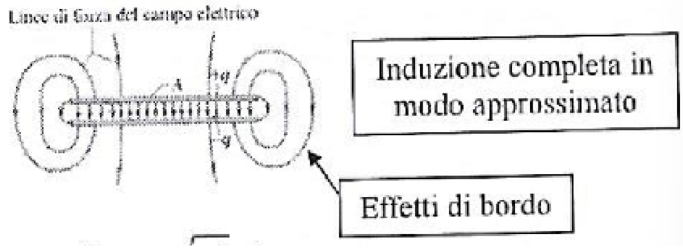
>Suppongo che il condensatore sia caricato con Q. Sto cercando il rapporto con il potenziale
>Calcolo dunque il campo elettrico tra le due armature e suppongo una geometria ad alta simmetria, così uso la L. di Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

>Determinato ***E***, calcolo la differenza di potenziale tra le armature e poi ricavo C.

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \qquad C = \frac{Q}{|V_A - V_B|}$$





CONDENSATORE PIANO

Suppongo d << rad(A) per cui trascuro gli effetti di bordo (la distanza tra le armature è molto minore rispetto alla radice della loro area).
Per cercare la C, mi serve sia la carica che il potenziale. Cerco V partendo dal calcolo di E: ricavo il campo elettrostatico generato dalle armature sfruttando la L. di Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad EA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

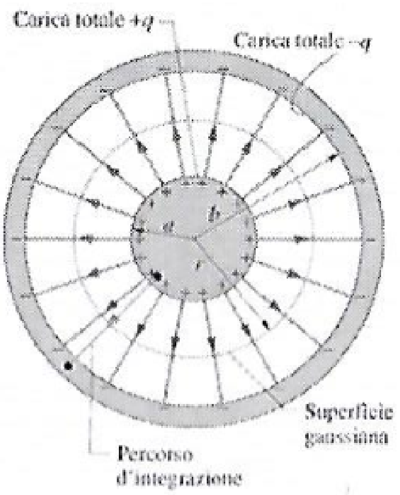
$$\Rightarrow \; E = \frac{q}{\varepsilon_0 A} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Poi inserisco il risultato nell'espressione della differenza di potenziale, e poi nella capacità:

$$|V_B - V_A| = \left| \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \right| = \frac{q}{\varepsilon_0 A} \int_0^d ds = \frac{qd}{\varepsilon_0 A}$$

$$\boxed{C = \frac{q}{|V_A - V_B|} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}} \qquad d << \sqrt{A}$$

CONDENSATORE CILINDRICO



Considero un condensatore lungo L e costituito da due cilindri coassiali di raggi a e b. Per avere le condizioni di induzione completa assumo anche b <<< L.
Posso determinare la sua capacità C partendo sempre da L. di Gauss per determinare il campo elettrostatico, da cui il potenziale.

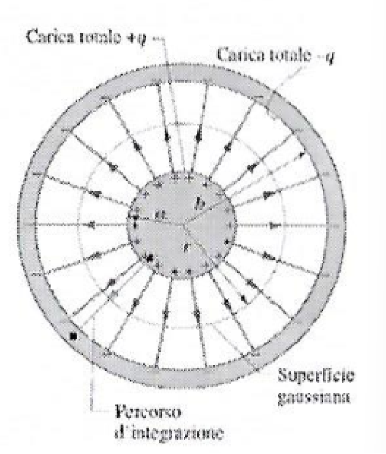
$$q = \varepsilon_0 EA = \varepsilon_0 E(2\pi r L) \quad \Rightarrow \quad E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\frac{1}{r}$$

Inserisco il campo elettrico ottenuto nell'espressione del potenziale

$$|V_B - V_A| = \left| \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \right| = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$C = \frac{q}{|V_A - V_B|} = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)}$$

CONDENSATORE SFERICO



Considero un sistema di conduttori come una sferetta circondata da un guscio sferico.
Posso determinare la capacità C partendo sempre da L. di Gauss per determinare il campo elettrostatico, da cui il potenziale.

$$q = \varepsilon_0 EA = \varepsilon_0 E\left(4\pi r^2\right) \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Inserisco il campo elettrico nell'espressione del potenziale elettrico, e poi della carica

$$\left|V_B - V_A\right| = \left|\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}\right| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}$$

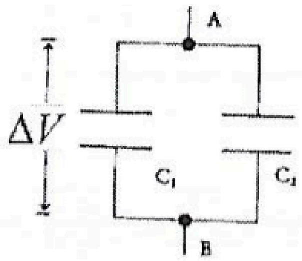
$$\Rightarrow \qquad C = \frac{q}{\left|V_A - V_B\right|} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

Osservo che se b tende ad infinito (guscio esterno molto lontano), la capacità tende a quella di una sfera di raggio a. $C \rightarrow 4\pi\varepsilon_0 a$

SISTEMI DI CONDENSATORI

Praticamente questa è la roba di CEE fatta per i condensatori. Copio e incollo molto banalmente.

Parallelo



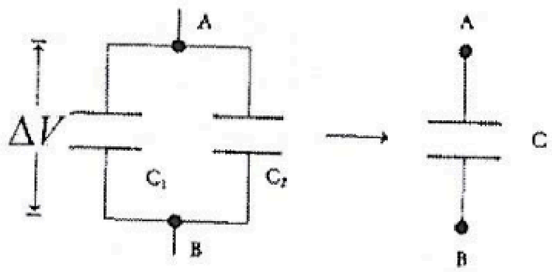
<u>Tra A e B c'è induzione completa e quindi il sistema dei 2 condensatori è un condensatore</u>

Vogliamo determinare la capacità di questo condensatore

Si ha $\begin{cases} Q_1 = C_1 \Delta V_1 \\ Q_2 = C_2 \Delta V_2 \end{cases}$ con $\Delta V_1 = \Delta V_2 = |V_A - V_B| = \Delta V$

Sommando

$$Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)\Delta V \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{\Delta V} = \frac{Q}{\Delta V} = C$$



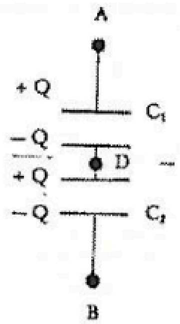
$(Q_1 + Q_2)$ è la carica di C

$$\boxed{C = C_1 + C_2}$$

Generalizzo a N condensatori in parallelo con la formula per la capacità equivalente:

$$C_{eq} = \sum_{J=1}^{N} C_j$$

Serie



Tra A e B c'è induzione completa e quindi <u>il sistema dei 2 condensatori è un condensatore</u>

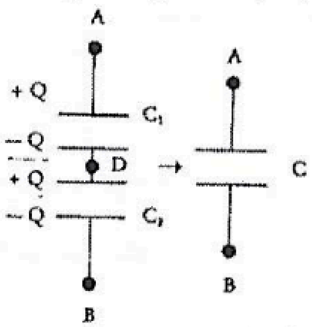
Vogliamo determinare la capacità di questo condensatore

Si ha $\begin{cases} Q_1 = C_1 \Delta V_1 \\ Q_2 = C_2 \Delta V_2 \end{cases}$ con $Q_1 = Q_2 = Q$

e quindi $\begin{cases} \Delta V_1 = \dfrac{Q}{C_1} \\ \Delta V_2 = \dfrac{Q}{C_2} \end{cases}$

E sommando $|V_A - V_B| = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \dfrac{Q}{C_1} + \dfrac{Q}{C_2} = Q\left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}\right) = \dfrac{Q}{C}$

con $\boxed{\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}}$



Generalizzo a N condensatori in serie con la formula per la capacità equivalente: $\dfrac{1}{C_{eq}} = \sum_{J=1}^{N} \dfrac{1}{C_j}$

ENERGIA IMMAGAZZINATA IN UN CAMPO ELETTRICO

Energia in un condensatore

MEMO: l'energia potenziale elettrica associata ad un sistema di cariche è $U = -L_\infty$, cioè il lavoro svolto dalla forza elettrica per portare le cariche dall'infinito alla configurazione considerata.$U = -L_\infty$, cioè il lavoro svolto dalla forza elettrica per portare le cariche dall'infinito alla configurazione considerata.

Calcolo l'energia associata ad un condensatore carico: è sufficiente determinare il lavoro per caricare il condensatore.
Suppongo sia stato già caricato di q' e quindi scrivo la sua equazione caratteristicaq' e quindi scrivo la sua equazione caratteristica

$$\Delta V' = \frac{q'}{C}$$

Per trasportare un altra dq' sul condensatore dovrò svolgere un certo lavoro, quindi scrivo l'espressione del lavoro infinitesimo per lo spostamento infinitesimo tra due punti e poi integro imponendo lo spostamento da ∞, per cui posso sostituire dL con l'opposto dell'espressione del potenziale $\Delta V' = \frac{q'}{C} = -L$

$$L = -q\,\Delta V$$

$$dL = -dq'\,\Delta V' = -dq'\frac{q'}{C}$$

$$L_\infty = \int dL = -\int_0^q \frac{q'}{C}\,dq' = -\frac{q^2}{2C}$$

$$\Rightarrow$$

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2$$

Osservazione: l'energia U è associate alle cariche presenti sulle armature del condensatore (ma siccome nell'espressione appare il potenziale, o meglio la differenza di potenziale elettrico, allora è associata anche alla differenza tra la carica delle armature)

L'energia è anche uguale al lavoro compiuto contro le forze del campo elettrico (nel condensatore) per caricare il condensatore. Viene poi restituita quando si scarica.

Dove sta l'energia U? Posso rispondere in due modi:

1. Dall'espressione $U = \frac{q^2}{2C}$ si intuisce che <u>U è localizzata dove c'è la carica</u> quindi sulle <u>armature</u>.
2. Posso anche affermare che <u>U è localizzata dove c'è il campo elettrico</u> e me ne convinco calcolando l'energia per unità di volume - densità di energia, nel caso del condensatore piano

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{\frac{1}{2}C(\Delta V)^2}{Ad} = \frac{1}{2}\frac{(\varepsilon_0 A/d)(\Delta V)^2}{Ad} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\Delta V}{d}\right)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

La densità esplicita una diretta dipendenza con il campo elettrico generato dal sistema dei due conduttori, e quindi ove c'è campo, c'è energia! Vedi prossimo paragrafo:

Energia in un campo elettrico

Si può pensare di generalizzare il risultato ottenuto nel caso particolare del generatore piano, e dimostrare che - come introdotto dalla valutazione su "dove" si trovi l'energia:

U può essere pensata localizzata dove c'è il campo elettrico

In ogni punto dello spazio si definisce la densità di energia potenziale elettrica locale dalla forma integrale dell'energia:

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2} \quad \Rightarrow \quad U = \int_{\text{tutto lo spazio}} u \, dV$$

DIELETTRICI

<u>Riassunto proprietà conduttori in equilibrio</u>: la carica di un conduttore si distribuisce sempre sulla sua superficie in modo tale che il campo ES generato da essa e da altre cariche eventualmente presenti sia nullo all'interno del conduttore.

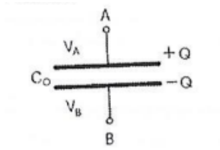
I dielettrici sono dei materiali che concettualmente posso pensare come "ciò che fa attrito sulle cariche che passano" e "consuma il campo elettrico".
Quando si riempie lo spazio tra due armature di un dielettrico, allora il campo in quella zona - a parità di carica - <u>diminuisce</u>. Materiali dielettrici sono isolanti, cioè trattengono la carica.
Pari carica => meno voltaggio se più capacità. Stesse armature, stessa carica ma può starci di più => aumenta la capacità, quindi meno differenza di potenziale.

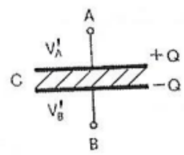
Condensatore con dielettrico

Eseguo un esperimento:
Considero un condensatore con il vuoto tra le armature ed uno lo riempio introducendo parallelamente alle armature senza toccarle, una lastra di materiale isolante, detto dielettrico. Entrambi sono carichi uguali ed isolati, in modo che la carica sulle armature resti costante. Osservo:

$$\Delta V_0 = \frac{Q}{C_0} \qquad \Delta V = \frac{Q}{C}$$

$$\Rightarrow \Delta V < \Delta V_0 \Rightarrow C > C_0$$





DEF: chiamo il rapporto tra le capacità (normale-dielettrico) **costante dielettrica relativa**

$$\frac{C}{C_0} \equiv \varepsilon_r \qquad (\varepsilon_r > 1)$$

In breve scrivo la relazione tra le DDP con e senza dielettrico:

$$\Delta V = \frac{\Delta V_0}{\varepsilon_r} < \Delta V_0 \qquad \Rightarrow \; E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} < E_0$$

Osservazione: questo caso particolare vede il <u>il dielettrico che riempie TUTTO lo spazio</u> in cui esiste anche ***E***

Faraday ha condotto degli esperimenti dove misura il potenziale V_0 e V_k e scopre che il rapporto è sempre maggiore di 1, e dipende solo dal tipo di materiale, non dalla carica sulle armature o dalla loro geometria.

Struttura microscopica

A livello macroscopico possiamo osservare delle differenze nel comportamento dei conduttori piuttosto che dei dielettrici:

> CONDUTTORI: ogni atomo ha un 1-2 elettroni “liberi” (= di conduzione) per cui la loro energia di agitazione termica è tale da superare l’energia di legame del nucleo. Quindi se applico un ***E*** campo esterno allora questi elettroni lo “seguiranno ordinatamente”, non rimarranno vincolati al nucleo => si genera corrente elettrica perché esiste un moto di cariche.

> DIELETTRICI: tutti gli elettroni sono fortemente legati ai nuclei atomici e quindi anche se ***E*** campo esterno venisse applicato, questi non si muoverebbero se non di infinitesimi locali.
Il *campo elettrico comunque modifica lo spazio e di conseguenza il materiale dielettrico*, che a sua volta creerà un campo elettrico ***E***. Vediamo nel dettaglio..

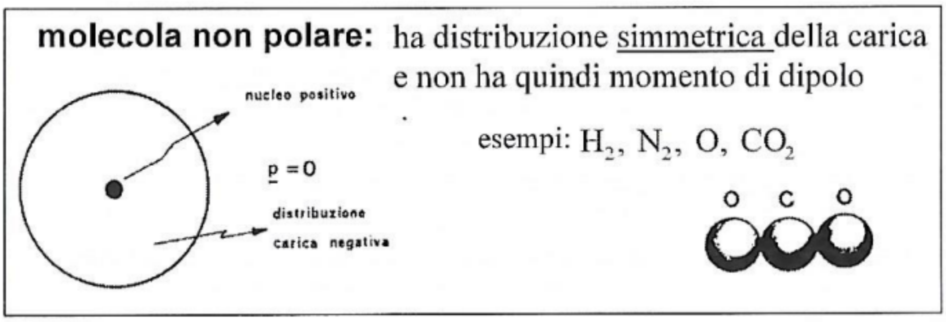
DIELETTRICO IN UN CAMPO E

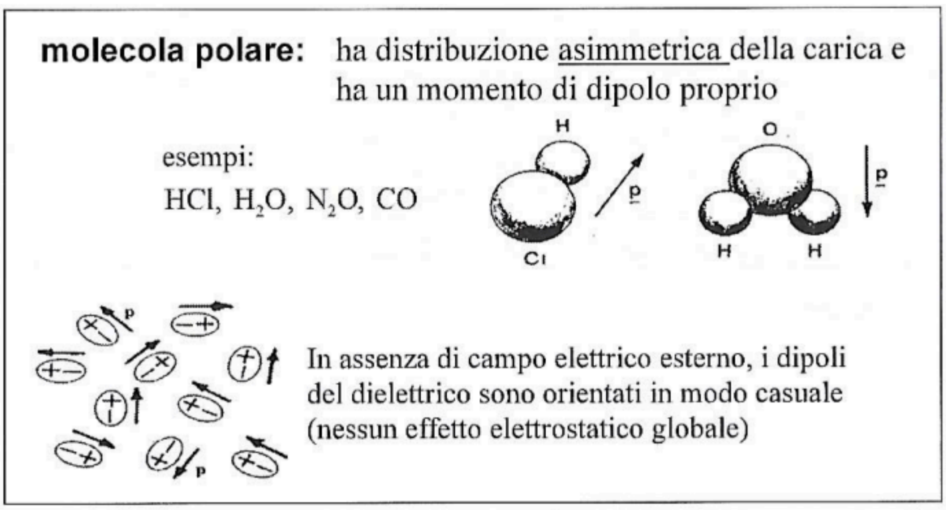
DEF: un materiale dielettrico posto in un campo elettrico esterno subisce delle modifiche, chiamiamo questo fenomeno **polarizzazione**.

Il dielettrico polarizzato genera un campo elettrico che si somma con quello elettrico: contribuisce alla polarizzazione stessa! (dipende dal campo totale)

Polarizzazione

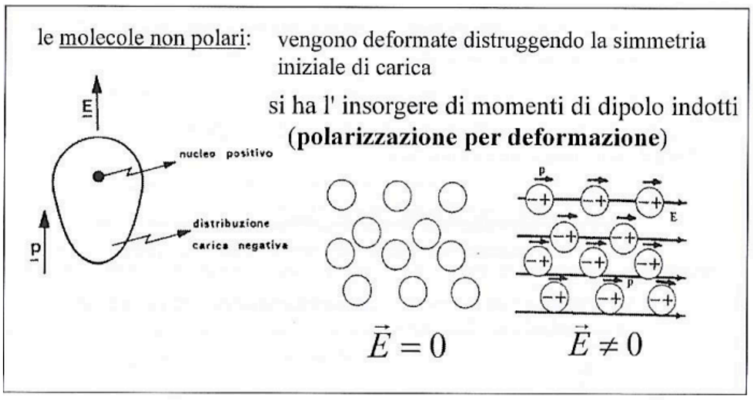
Un dielettrico posto in un campo elettrico esterno subisce delle modifiche => avviene un fenomeno di polarizzazione.
Un dielettrico polarizzato genera un campo elettrico, che si somma a quello esterno, e quindi contribuisce alla polarizzazione stessa. La polarizzazione dipende dal campo elettrico totale.



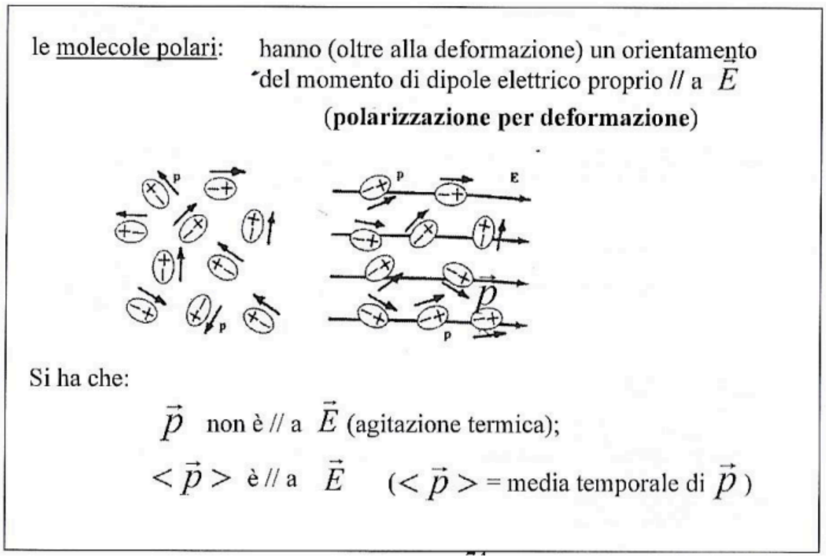


*Se applicassi un campo esterno **E**?*

MOLECOLE NON POLARI: vengono deformate distruggendo la simmetria iniziale di carica, quindi insorgono <u>momenti di dipolo indotti</u> => si parla di **polarizzazione per deformazione**.



MOLECOLE POLARI: alla deformazione si forma una componente del momento di dipolo che sarà parallelo ad ***E*** => anche questa è **polarizzazione per deformazione.**
Siccome esisteva un momento di dipolo intrinseco, il $\vec{p}$ della singola molecola non è complessivamente parallelo al campo E, poiché anche l'agitazione termica gioca un ruolo nel determinare il vettore finale.
Ma $< \vec{p} >$ valore medio temporale è parallelo al campo E.
I contributi dovuti alla distribuzione di carica sono trascurabili nel non istantaneo.
Il valore medio con solo il contributo intrinseco è nullo, perché l'agitazione termica è caotica e tende all'equilibrio medio. Per questo se esistono delle modifiche esterne che hanno un "ordine", allora questo inficerà sul valore medio, comandando la sua direzione.



Il fenomeno della polarizzazione implica degli effetti elettrostatici: per descrivere questi effetti si introduce una grandezza macroscopica..

Vettore Polarizzazione elettrica

Considero un insieme di N dipoli elettrici (N molecole polari).
Calcolo il momento di dipolo medio:

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \qquad \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = N\,\langle \vec{p} \rangle$$

Da cui il momento di dipolo risultante (per il sistema di dipoli) $\Delta\vec{p} = \Delta N\,\langle \vec{p} \rangle$ si ottiene moltiplicando il valore medio per il #N dei dipoli considerati.

>Ora invece di ragionare a singoli dipoli, considero degli infinitesimi.
Ho un volume $\Delta\tau$, considero ΔN in esso contenuti e quindi affermo che:

DEF: il **vettore polarizzazione elettrica** $\vec{P}$ è il momento di dipolo per unità di volume $\vec{P}$ è il momento di dipolo per unità di volume

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta N \langle \vec{p} \rangle}{\Delta\tau} = \frac{dN \langle \vec{p} \rangle}{d\tau}$$

Da questa definizione si evince che ogni volumetto $d\tau$ di materiale dielettrico possiede un momento di dipolo proprio, che chiamiamo $d\vec{p} = \vec{P} d\tau$.

Se il vettore $\vec{P} \neq 0$ allora il dielettrico si dice polarizzato.
E questo equivale anche a dire che l'espressione $d\vec{p} = \vec{P} d\tau$ (momento di dipolo di un infinitesimo volumetto di materiale) è diverso da zero: quindi nel dielettrico sono presenti delle **cariche** (dette di polarizzazione, dovute alla definizione di p=q*z) che generano quel $d\vec{p}$ rappresentabili mediante le seguenti densità:

$$\sigma_P \;=\; \text{densità superficiale di carica di polarizzazione}$$

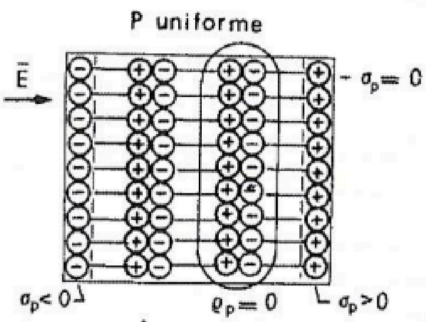
$$\rho_P \;=\; \text{densità volumica di carica di polarizzazione}$$

Queste grandezze sono tutte riferite a ragionamenti infinitesimi, su sistemi approssimati e piccoli. Non sono grandezze precise su entità locali e discrete.

NB: le cariche di polarizzazione non sono libere! Trattandosi di un isolante, le cariche degli elettroni rimangono vincolate agli atomi, poiché un campo E esterno non riesce a contrastare la forza del nucleo. Il campo comunque contribuisce sufficientemente da avere uno *spostamento locale microscopico*, che è il motivo per cui si manifestano le cariche sulle superfici del dielettrico.

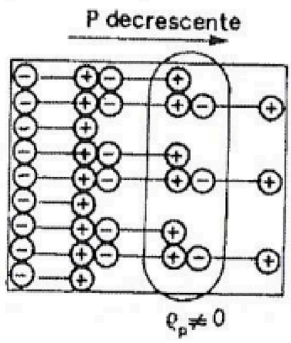
Esempio

Se $\vec{P}$ è uniforme



$\sigma_P \neq 0 \quad \rho_P = 0$

Se $\vec{P}$ non è uniforme



$\sigma_P \neq 0 \quad \rho_P \neq 0$

Quanto valgono ρ_P *e* σ_P *?*

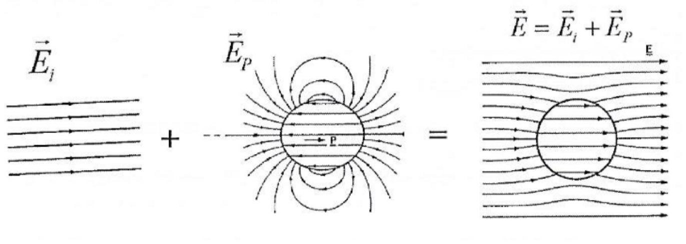
$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \equiv -\mathrm{div}\vec{P}$$

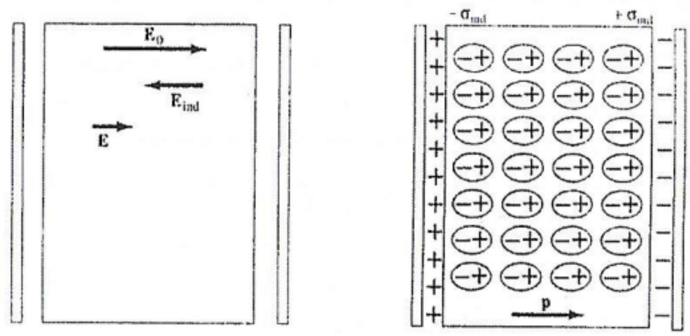
Campo E in presenza di dielettrico

Il campo totale è la somma tra quello iniziale (esterno) e quello prodotto dal dielettrico

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_P$$



Ad esempio per il condensatore piano riempito da dielettrico omogeneo, lineare, isotropo (vd. dopo)



Aggiusto le leggi dell'ES al caso dei dielettrici

>CASO VUOTO

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{(1) legge di Gauss (1a eq. di Maxwell nel vuoto)} \\ \operatorname{rot} \vec{E} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 & \text{(2) conservatività del campo elettrostatico (3a eq. di Maxwell nel caso stazionario)} \end{cases}$$

>CASO MEZZI MATERIALI:

La seconda equazione (III di Maxwell) mantiene validità, poichè non risulta dipendere da alcuna grandezza legata al mezzo.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \text{(il campo elettrostatico è conservativo ovunque)}$$

La prima invece vale solo a patto che vengano introdotte le cariche di polarizzazione per bilanciare, affinchè valga davvero l'espressione del campo totale E:

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_P$$

Queste cariche sono dovute ai momenti di dipolo indotti dal campo elettrico esterno, e noi le assumiamo come uniformemente distribuite: così possiamo descriverle utilizzando una densità volumica di carica di polarizzazione.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\varepsilon_0}$$

Ma in generale ρ_p è sconosciuta, quindi posso sostituire ρ_p con la sua espressione e fare i seguenti calcoli:

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \qquad \vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_0 \vec{E}\right) = \rho + \rho_p = \rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) = \rho$$

Per una notazione più celere, si introduce la grandezza..
DEF: il vettore **spostamento elettrico**, che unisce il contributo del campo elettrico esterno, a quello della polarizzazione del materiale dielettrico.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Sostituendo la definizione di ***D*** nella prima equazione, troviamo l'equivalente del caso nei mezzi:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

RIASSUNTO MAXWELL ELETTROSTATICA

Di seguito è riportata la formulazione delle equazioni per il caso statico generale, mezzi materiali; il caso "speciale" nei mezzi ILO, e il ragionamento per ricavare la forma integrale delle leggi partendo dalle equazioni locali.

I° e III° equazioni

$$\begin{cases} \text{div } \vec{D} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \\ \text{rot } \vec{E} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \end{cases}$$

Osservazione: In assenza di dielettrico si ha $\vec{P} = 0 \Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ e quindi la (1) ritorna

$$\nabla \cdot \varepsilon_0 \vec{E} = \rho$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Osservazione: Non esiste più solamente ***E***, c'è anche il contributo di ***D*** (spostamento elettrico) introdotto perché la sua divergenza dipende solo da ρ libera.

Osservazione: Per risolvere il sistema (2 eq) bisogna conoscere la relazione tra ***D*** ed ***E***. Oppure tra ***P*** ed ***E*** (equivalente).
Sono 3+1 equazioni scalari con 6 incognite scalari quindi c'è dell'indipendenza (=> corretto, rho è libera)

In generale $\vec{P} = f(\vec{r}, \vec{E}, T)$, ma può essere vantaggioso fare un ragionamento sulla forma di ***P*** in certi materiali:

- Quando $\vec{P} // \vec{E}$ il dielettrico si dice **isotropo**

  $\vec{P} = \alpha(\vec{r}, E)\, \vec{E}$ (α non più tensore del 2° ordine, ma funzione scalare)

- Quando $|\vec{P}| \div |\vec{E}|$ il dielettrico si dice **lineare**

  $\vec{P} = \|\alpha(\vec{r})\|\, \vec{E}$ ($\|\alpha\|$ non dipende da E)

- Quando fissato $\vec{E}$, $|\vec{P}|$ non dipende da $\vec{r}$ il dielettrico si dice **omogeneo**

  $\vec{P} = \|\alpha(E)\|\, \vec{E}$ ($\|\alpha\|$ non dipende da $\vec{r}$)

Suscettività elettrica

Se tutte queste proprietà sussistono allora il dielettrico è <u>isotropo</u>, <u>lineare</u> ed <u>omogeneo</u> (ILO). Si ha che la relazione tra il vettore polarizzazione ed il campo elettrico in un qualsiasi punto del materiale risulta $\vec{P} = \alpha \vec{E}$

Dal punto di vista microscopico, un dielettrico lineare risponde al campo E in modo tale che le sue molecole acquistano momento di dipolo elettrico parallelo al campo stesso (e quindi proporzionale). Inoltre essendo omogeneo, la polarizzazione sarà costante in ogni punto del materiale.

DEF: posso introdurre χ la **suscettività elettrica**, e quindi scrivere la relazione che sostituita all'interno dell'espressione di ***D*** spostamento elettrico: $\vec{P} = \alpha \vec{E} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$

$\varepsilon_r \equiv (1+\chi)$ è detta **costante dielettrica relativa**

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1+\chi) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

Grazie a questo "nuovo" modo (in realtà è solo un caso particolare, ovvero materiali ILO) le equazioni di Maxwell dell'elettrostatica in forma locale possono essere scritte come:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \end{cases}$$

Praticamente by-passo l'introduzione del vettore D. Questa scrittura è utile quando non conosco D in sé, ma conosco le proprietà del materiale quindi direttamente la costante dielettrica relativa.

Forma integrale di Maxwell: elettrostatica nei mezzi materiali

In forma locale		In forma integrale
$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \overset{\text{carica libera}}{\rho}$	$\Leftrightarrow$	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_i$ carica libera dentro S
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$	$\Leftrightarrow$	$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \forall l$

(1°) EQUAZIONE:

Partendo dalla forma locale della equazione , per ogni volume τ dove esiste $\vec{D}$ definisco l'integrale:

$$\int_\tau \vec{\nabla} \cdot \vec{D} d\tau = \int_\tau \rho d\tau$$

$\vec{D}$ esiste in ogni volume ove esista il campo $\varepsilon_0 \vec{E}$ e, caso con mezzo dielettrico, il vettore $\vec{P}$.
Si tenga a mente che rho è una densità volumica, quindi è sempre lecito integrarlo rispetto ad un volume.

>Ma per il TH della DIVERGENZA il primo membro diventa:
L'integrale, rispetto ad un volume, della divergenza di un campo, è uguale all'integrale, rispetto alla superficie che racchiude quel medesimo volume, del campo stesso.

$$\int_\tau \vec{\nabla} \cdot \vec{D}\ d\tau = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

>Invece grazie alla definizione di densità volumica di carica, il secondo membro diventa la carica interna al volume τ preso in considerazione:

$$\int_\tau \rho d\tau = Q_i$$

Ottengo infine la Legge di Gauss per il vettore $\vec{D}$ spostamento elettrico, ovvero il flusso di $\vec{D}$ attraverso una superficie chiusa qualsiasi è pari alla carica interna alla superficie stessa.

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_i$$

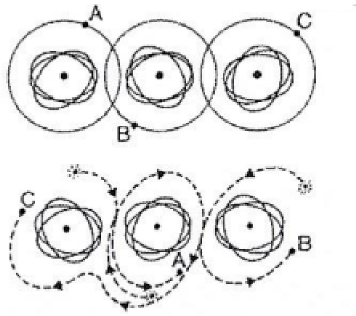
(3°) EQUAZIONE:

La dimostrazione è immediata dal TH di STOKES, per cui

$$\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S rot\vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

Lo applico ad ogni superficie *S* che abbia come contorno una linea chiusa *l* (ovvero tutte). La circuitazione del campo elettrostatico so essere SEMPRE nulla grazie al fatto che è un campo conservativo ed esiste il campo scalare V, il cui opposto della divergenza è E stesso.

CORRENTE ELETTRICA



Vogliamo studiare le modalità con cui si muovono le cariche elettriche, che sappiamo dagli esperimenti, lo fanno all'interno dei conduttori (perché per le molecole di quei materiali esistono gli elettroni liberi).

>POV: MICROSCOPICO

Consideriamo un conduttore metallico: all'incirca un elettrone per atomo è libero di muoversi, ma il numero di elettroni di conduzione per unità di volume è enorme, poiché ogni unità di volume contiene moltissimi atomi.

Come il campo elettrico influenza la corrente, ovvero il moto degli elettroni liberi?

Se il campo esterno $\vec{E} = 0$ allora gli elettroni sono sottoposti solamente ad un moto disordinato (casuale, moto di agitazione termica) e quindi la loro velocità media vale circa zero (tutte le componenti si annullano a vicenda perché è una situazione di equilibrio).

$$\bar{v} \approx 0$$

Come sappiamo dalla termodinamica (vd. Cinematica dei Gas Ideali) la velocità quadratica media però è diversa da zero, ed anzi è molto elevata.

$$v_{qm} = \sqrt{\overline{v^2}} \approx 10^6 \text{ m/s}$$

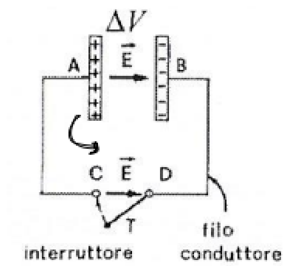
Se il campo esterno $\vec{E} \neq 0$ allora oltre all'agitazione termica, gli elettroni di conduzione hanno un <u>moto ordinato</u> dovuto alla <u>velocità di deriva</u> v_d, acquistata grazie all'azione della forza elettrica associata al campo $\vec{E}$.

Ovviamente il moto sarà concorde a quest'ultimo.
Nonostante la presenza di una forza costante, gli elettroni non accelerano perché urtano continuamente con gli ioni che hanno abbandonato soli soletti e quindi dissipano l'energia cinetica.

$$\bar{\vec{v}} = \vec{v_d} \parallel -\vec{E}$$

$$|\vec{v_d}| \approx 10^{-5} m/s$$

<u>ESPERIMENTO</u>



>Considero una situazione statica dove c'è un circuito aperto con un condensatore carico con DDP ΔV: tra le armature del condensatore si genera un campo E.

>Se ad un certo istante l'interruttore T viene chiuso si osserva che:
- ΔV ed il campo E decrescono tendendo a zero rapidamente (andamento esponenziale!)
- tendono a zero anche le cariche sulle armature ("le cariche positive si spostano e annullano le negative")
- il filo si scalda (effetto joule)
- compaiono effetti magnetici (legame E □ movimento di cariche □ B)

In realtà sono gli elettroni di conduzione che si muovono, non le cariche positive, ma per motivi storici si ha questa convenzione.

Quando si ha un <u>movimento ordinato di cariche,</u> c'è un passaggio di corrente elettrica.

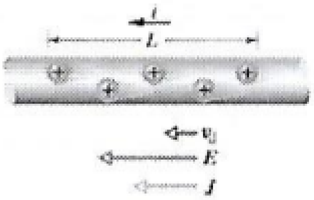
DEF: la **corrente elettrica** *i* che attraversa il piano S (sezione) di un conduttore è il rapporto tra la carica che fluisce attraverso la superficie S nel tempo ed il tempo stesso $i = \frac{dQ}{dt}$

Oss: la corrente *i* è una quantità scalare anche se ha un verso

Densità di corrente elettrica

DEF: la **densità di corrente elettrica** o vettore ***J*** è il vettore $\vec{J} = nq\vec{v}_d$.
n è il numero di portatori di carica al volume (metalli □ elettroni), q è il valore della carica del singolo portatore e v_d è la velocità di deriva dei portatori.

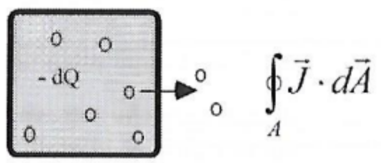
Si dimostra che la corrente è il <u>flusso</u> della **densità di corrente** $i = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$



J è un vettore definito punto per punto nel conduttore (informazione locale) mentre i è uno scalare con informazione globale.

EQUAZIONE DI CONTINUITA'

Dal <u>principio di conservazione della carica</u>:



La carica che in un certo intervallo di tempo esce da una superficie chiusa dev'essere uguale alla diminuzione della carica contenuta all'interno della superficie.

Questa quantità si può esprimere in termini infinitesimi con $-dQ = \oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$

Sia $Q(t)$ la carica che al tempo t c'è in un volume τ e supponiamo che diminuisca di dQ:

$$Q(t) = \int_\tau \rho(x, y, z, t) d\tau \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = \int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

$$-dQ = (\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A})dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{dQ}{dt} = \oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Per il <u>TH della DIVERGENZA</u>: $\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_\tau \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\, d\tau$
(Il flusso di J su una superficie chiusa è l'integrale della divergenza di J sul volume racchiuso nella superficie stessa)

Dunque sostituisco il secondo membro (flusso di $\vec{J}$), così eguagliando l'integrale della derivata parziale di ρ rispetto al tempo con la divergenza di $\vec{J}$.

Entrambi i membri sono integrati rispetto al volume generico τ, a destra per il Th. della Div. e a sinistra perchè ρ è una grandezza definita per unità di volume quindi è sempre possibile farlo.

$$\Rightarrow \quad -\int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau = \int_\tau \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\, d\tau$$

Espressione valida $\forall \tau$ volume attraversato da cariche.

DEF: chiamo l'equazione che lega la divergenza di $\vec{J}$ e la derivata parziale nel tempo della densità di carica l'**equazione di continuità della corrente**.

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

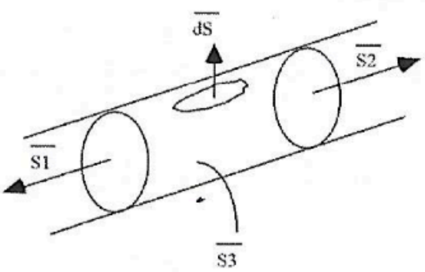
Questa espressione è la forma locale della conservazione della carica, in quanto è definita punto per punto con la densità della carica e della corrente.

Corrente stazionaria

DEF: una corrente si dice **stazionaria** se in ogni punto del mezzo conduttore, densità di carica ρ e densità di corrente $\vec{J}$, siano stazionarie.
Questo comporta che in condizioni stazionarie si parli di appunto corrente stazionaria ed:

1. $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ in ogni punto ed istante $\Leftrightarrow$ (dalla definizione di corrente stazionaria).
2. $\vec{J}$ è un **campo solenoidale** $\Leftrightarrow$
3. La corrente che attraversa una qualunque sezione di un conduttore è la stessa.

Infatti $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \Leftrightarrow \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$ per ogni S chiusa $\Rightarrow$



$$\int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

Ma

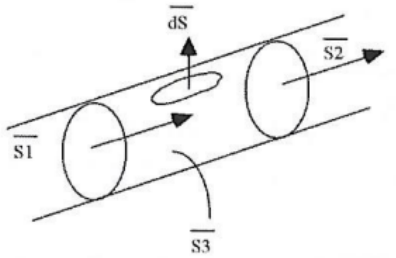
$$\int_{S_3} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

e quindi

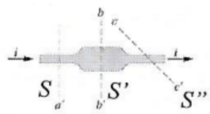
$$\int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} = I_1 + I_2 = 0$$

Se scelgo $\vec{S}_1$ equiverso a $\vec{S}_2$

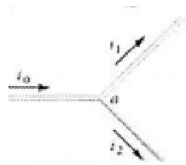
$$\Rightarrow \quad I_1 = I_2$$



Osservazione: la carica si conserva nel tempo, quindi se la corrente *i* è stazionaria (detta corrente continua, non dipende dal tempo) allora



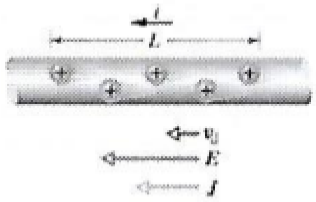
- il valore della corrente è identico qualsiasi piano io consideri attraversante il conduttore



- la corrente che entra in un nodo si diparte in modo tale che la somma delle correnti uscenti sia uguale a quella entrante

DEF: si definisce **nodo** un punto in cui convergono più di due conduttori

Legge di Ohm



In un conduttore percorso da corrente vi sono ovviamente E e J . In generale queste due grandezze sono legate da una relazione $\vec{J} = f(\vec{E})$ da determinare sperimentalmente per diversi tipi di conduttori..

Per alcuni conduttori detti <u>ohmici</u> (come i metalli, leghe metalliche, soluzioni elettrolitiche, non i gas ionizzati) questa relazione è data dalla legge di Ohm.

DEF: la **legge di Ohm** in **forma locale** è $\vec{J} = \sigma\vec{E}$.

$$\vec{J} = \sigma\,\vec{E}$$

Chiamo σ la <u>conducibilità elettrica</u>.

Chiamo $\rho = \frac{1}{\sigma}$ la <u>resistività elettrica</u>.

NB. La forma locale $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ vale punto per punto nel conduttore ohmico (relazione locale).

DEF: la **legge di Ohm** in **forma integrale** è $\Delta V = Ri$ con R definita come la resistenza elettrica.

N.B.: nella legge di Ohm $\boxed{\Delta V > 0}$ $(\boxed{\Delta V = V_A - V_B \neq V_f - V_i})$

Da questa legge osserviamo che se applichiamo fra 2 punti di conduttore una DDP costante ΔV si può verificare sperimentalmente un passaggio di corrente i a questo DDP proporzionale.

NB. la forma integrale vale tra due punti A e B appartenenti al conduttore ohmico (relazione integrale).

Osservazione: la forma locale $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ può essere anche scritta $\vec{E} = \rho\vec{J}$, sfruttando la resistività elettrica inverso della conducibilità. Queste due grandezze dipendono solo ed esclusivamente dal materiale. In realtà anche dalla temperatura (*).

Osservazione: $\vec{E} = \rho\vec{J} \Leftrightarrow \Delta V = Ri$

Ma quindi se nella forma locale appare ρ resistività e nella forma integrale appare R resistenza, e queste due sono equivalenti, che relazione c'è tra le grandezze?

Per un conduttore <u>a sezione costante</u> (A) e lunghezza L vale sempre: $R = \rho\frac{L}{A}$

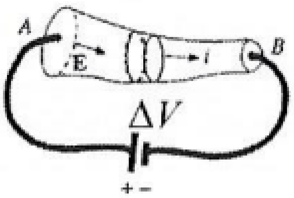
Dipendenza della resistività dalla temperatura (*)

La resistività dei metalli dipende linearmente dalla temperatura in un intervallo abbastanza ampio. Sono proporzionali.

$$\rho - \rho_0 = \rho_0 \alpha (T - T_0)$$

Effetto Joule

Per spostare la carica Q attraverso la differenza di potenziale ΔV il campo elettrico compie del lavoro, che calcolo con l'espressione $L = -Q\Delta V$ con $\Delta V = V_f - V_i$.
Per la carica infinitesima dQ sarà $dL = -dQ\Delta V$



Chiamiamo ΔV la DDP tra i punti A e B (non intesa come la DDP tra inizio-fine perché allora sarebbe B-A). E quindi il lavoro lo scrivo ancora così:

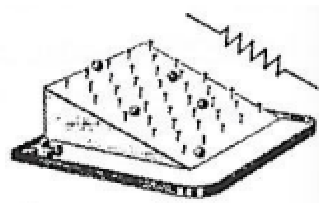
$$\Delta V = V_A - V_B > 0 \;\Rightarrow\; dL = dQ\Delta V$$

La <u>potenza sviluppata dal campo elettrico</u> nell'opporsi alla ΔV tra A e B sarà:

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{dQ\Delta V}{dt} = \frac{i\,dt\Delta V}{dt} \;\Rightarrow P = i\Delta V$$

La ΔV è il lavoro su unità di carica, quindi se so che le cariche sono esprimibili in termini di infinitesimi di tempo (grazie alla corrente), posso trovare una "potenza istantanea" dove il parametro tempo va ad eliminarsi.

<u>Se tra A e B ci fosse il vuoto</u>:
allora il lavoro compiuto da $\vec{E}$ trasformerebbe **energia potenziale** (associata a DDP) **in energia cinetica** (come quando una biglia cade nel campo gravitazionale) e la carica acquisterebbe velocità.



<u>Nella nostra situazione tra A e B c'è un resistore</u>,
allora la potenza viene **dissipata sotto forma di calore e/o luce** a causa degli urti tra portatori di carica ed il reticolo cristallino (il resistore fa "attrito" al moto delle cariche).

Se il conduttore è ohmico allora vale la seguente relazione:

$$\Delta V = Ri \;\Rightarrow P = i\Delta V = i^2 R = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

Se tra A e B ci fosse un motore, l'energia potenziale elettrica si trasforma in lavoro meccanico, erogato dal motore.
Se tra A e B ci fosse una batteria elettrica che si sta ricaricando allora l'energia viene trasformata in energia chimica e stoccata nella batteria.

Ma se esistono degli effetti dissipativi in un circuito, può il campo elettrostatico che è conservativo mantenere una corrente costante?

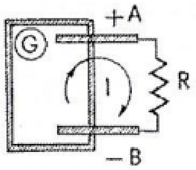
FORZA ELETTROMOTRICE

A causa di questi effetti dissipativi noti come Effetto Joule, il campo elettrostatico che è un campo conservativo, non è in grado di mantenere una corrente costante e stazionaria in un circuito (conduttore).
Ricordo la circuitazione del campo elettrostatico ed è immediato come la dissipazione andrebbe ad erodere dal lavoro complessivo (che è nullo e quindi questo non è possibile).

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad L = \oint q\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Per ottenere una corrente costante è necessario che esista qualcosa in grado di bilanciare l'energia persa attraverso la dissipazione. Siccome il campo ES non è in grado, è necessaria una "fonte" di energia, un'entità che svolge lavoro: una batteria (generatore elettrico).

DEF: chiamo **generatore elettrico** un qualsiasi dispositivo in grado di mantenere ai capi di un conduttore percorso da corrente una DDP costante.



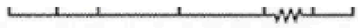
DEF: chiamo **forza elettromotrice** o FEM di un generatore elettrico il rapporto tra il lavoro dL infinitesimo compiuto dal generatore, per l'unità di carica dq (che sposta).

$$f = \frac{dL}{dq}$$

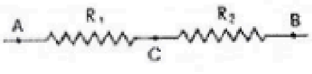
Nonostante il nome, e nonostante concorra al lavoro per spostare le cariche (e garantire una corrente costante), la FEM non è una forza, ma un lavoro su carica, quindi Joule su Coulomb.

La forza elettromotrice è calcolata utilizzando la stessa espressione della DDP, ma a meno di un segno: la FEM si oppone a questa differenza! Va a fornire l'energia necessaria a vincerla.
Unico accorgimento: usa la stessa espressione solo quando considero la DDP per un intero percorso chiuso (circuitazione, la DDP vuole due punti generici). In presenza di campo ES, senza resistori o effetti joule, la FEM è nulla.

RESISTORI IN SERIE E PARALLELO



Resistori in serie



Resistori in serie

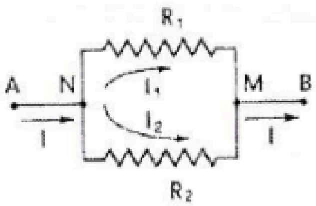
Resistori in serie: sono attraversati dalla stessa corrente

Essendo $\boxed{V_A - V_C = iR_1}$ $\boxed{V_C - V_B = iR_2 \quad \Rightarrow \quad V_A - V_B = i(R_1 + R_2)}$

$\boxed{\Leftrightarrow \quad V_A - V_B = iR}$ con $\boxed{R = R_1 + R_2}$

Se i resistori in serie sono N $\boxed{R = \sum_{i=1}^{N} R_i}$

Resistori in parallelo



Resistori in parallelo

Resistori in parallelo: hanno ai loro capi la stessa d.d.p.

$$\boxed{i_1 = \frac{V_A - V_B}{R_1} \qquad i_2 = \frac{V_A - V_B}{R_2}}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad i = i_1 + i_2 = \frac{V_A - V_B}{R}}$$

con $\boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$

Se i resistori in parallelo sono N $\boxed{\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}}$

Fisica Sperimentale C - L. Venturelli 91 CARICA ELETTRICA

Paragone resistenze-condensatori:

Resistenze e condensatori in serie e parallelo

Serie (Resistenze)	Parallelo (Resistenze)	Serie (Condensatori)	Parallelo (Condensatori)
$R_{eq} = \sum_{j=1}^{n} R_j$ Eq. 28.7	$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j}$ Eq. 28.21	$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_j}$ Eq. 26.20	$C_{eq} = \sum_{j=1}^{n} C_j$ Eq. 26.19
Stessa corrente attraverso tutte le resistenze	Stessa differenza di potenziale ai capi di tutte le resistenze	Stessa carica in tutti i condensatori	Stessa differenza di potenziale ai capi di tutti i condensatori

CIRCUITI IN CORRENTE CONTINUA

Ai tempi di maggio 2023, il mio cervello decise che questo capitolo non era rilevante alla preparazione dell'esame. Il me di 2 mesi fa merita la morte per impiccagione.

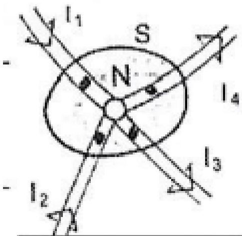
Nei circuiti in AC (corrente stazionaria) possiamo individuare queste componenti:

DEF: i **rami**, insiemi di elementi collegati in serie e posti tra due nodi
DEF: le **maglie**, una poligonale chiusa e costituita da più rami. L'insieme delle maglie costituisce il circuito.

Dato un circuito siamo poi interessati a determinare le correnti dei rami, o le DDP dei vari elementi etc… A questo scopo si sfruttano le leggi di Kirchhoff

Principi di Kirchhoff

><u>PRIMO</u>: la somma delle correnti che si dipartono da un nodo è uguale alla somma delle correnti che giungono nel nodo.



$$\boxed{i_1 + i_2 = i_3 + i_4}$$

Deriva dal principio di conservazione della carica, che applicato poi ai conduttori con corrente stazionaria ci porta all'equazione di continuità della corrente: è una conseguenza della definizione di corrente stazionaria.

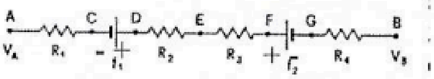
><u>SECONDO</u>: la somma algebrica delle DDP incontrate in un giro completo di una maglia è nulla.

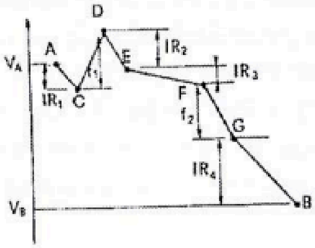
Deriva dal fatto che il campo E è conservativo, e quindi gli integrali di E tra due punti risultano diversi da zero, ma la circuitazione per un qualsiasi percorso chiuso è nullo, sempre.

Regole di calcolo: differenze di potenziale

- La variazione di potenziale attraverso un resistore nel verso della corrente è $-iR$ (nel verso opposto è $+iR$)
- La variazione di potenziale attraverso un generatore ideale di f.e.m. nel verso della f.e.m. (dal negativo al positivo) è $+f$ (nel verso opposto è $-f$)

Es: caso di un ramo (con resistori e generatori di f.e.m.)





Scegliendo un verso di percorrenza della corrente (ad es. da sinistra a destra) si ha

$$\boxed{V_B = V_A - iR_1 + f_1 - iR_2 - iR_3 - f_2 - iR_4}$$

Oss: non è necessario conoscere a priori il verso della corrente

CIRCUITI AC: CASO QUASI-STAZIONARIO *

Le leggi di Kirchhoff a rigore possono essere usate solo per circuiti stazionari, ovvero laddove istante per istante, c'è la stessa corrente in tutto il conduttore.
Introduciamo un'ipotesi ed un'approssimazione per poterle utilizzare anche nel caso "quasi stazionario".

DEF: il **caso quasi-stazionario** è quella situazione in cui le grandezze elettriche di un circuito (corrente, campo E..) variano lentamente rispetto al tempo impiegato dai segnali elettromagnetici a propagarsi nel circuito.

Quindi se per un circuito la corrente varia nel tempo ma con velocità "quasi istantanea" ovvero si propaga in ogni punto del circuito immediatamente, in modo tale che questa variazione/segnale assegni all'intensità di corrente lungo un ramo un valore comune (anche variabile nel tempo ed approssimato), allora siamo nel caso quasi-stazionario.

Si può ancora parlare di differenza di potenziale, L. di Ohm, e di Kirchhoff ma saranno ora formulate con grandezze in funzione del tempo e le relazioni tra loro varranno istante per istante.

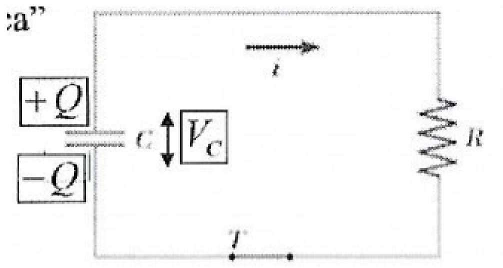
Le variabili fisiche variano in accordo alla costante di tempo del circuito $\tau = R \cdot C$. Il segnale di variazione ha lunghezza d'onda molto maggiore delle dimensioni del circuito quindi la variazione stessa della grandezza è semi-istantanea.

Osservazione: il caso non stazionario è complicato dal fatto che non vale più considerare un valore unico di corrente per tutto il conduttore => evolve la dinamica delle grandezze fisiche.

SCARICA DI UN CONDENSATORE

(30/03)

>Considero un condensatore inizialmente carico, ovvero a $t < 0$ la sua carica è Q_0, collegato ad un circuito con una resistenza (ottengo un circuito RC).



>A $t = 0$ chiudo un interruttore che fa instaurare una corrente nel circuito ed osservo che la carica del condensatore diminuisce nel tempo, attraverso la resistenza R.

Non essendo un caso stazionario a rigore non potrei usare le LdK ma per le condizioni di quasi-stazionarietà lo faccio lo stesso lol. Momento Garfield

>Voglio risolvere il circuito, studiare l'andamento delle grandezze corrente e potenziale elettrico.
Inizio con il (2) principio di Kirchhoff:

$$i(t)R - V_C(t) = 0$$

Dove V_C è la DDP tra le armature del condensatore e vale $V_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$

NB: la carica dq che attraversa la resistenza in dt è -dQ. *Perché nel momento in cui il condensatore viene collegato ad un conduttore, gli elettroni liberi che si erano disposti sull'armatura non carica positivamente, sono liberi di muoversi e "tendono a tornare" verso le cariche di segno opposto. Quindi la carica infinitesima che attraversa il conduttore - e di conseguenza la resistenza - è negativa.*

$$i(t) \equiv \frac{dq}{dt} = -\frac{dQ}{dt}$$

Sostituisco così le espressioni della corrente $i(t)$ e del potenziale $V_C(t)$ nella LdK (2).

$$\Rightarrow \qquad -\frac{dQ}{dt}R = \frac{Q}{C}$$

da cui

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC}dt$$

DEF: chiamo $\tau = RC$ **costante di tempo** caratteristica del circuito RC.
>Così però non ho ancora ottenuto risultati rilevanti. Continuo e a questo punto integro:

$$\log Q = -\frac{t}{\tau} + \text{cost} \qquad \Rightarrow \qquad Q(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

>Ho trovato l'espressione di $Q(t)$ la carica sulle armature del condensatore nel tempo: è proporzionale all'esponenziale con quel terribile esponente di un valore A che è una costante.
Posso scoprire il valore di A usando la condizione iniziale ovvero condensatore carico all'inizio (tempo zero)

$$Q(t = 0) = Q_0 \qquad \Rightarrow \qquad Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

>Da cui trovo anche la corrente e la DDP:

$$i(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{Q_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_0}{C} e^{-\frac{t}{\tau}} = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

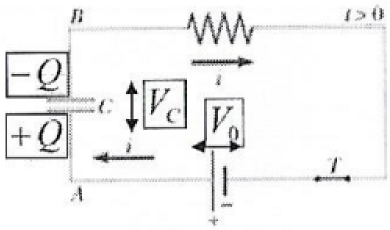
Osservazione: τ è una misura caratteristica del circuito. Si usa per confrontarla con i tempi tipici di propagazione del segnale.
La condizione di quasi-stazionarietà è soddisfatta se τ molto è maggiore del tempo impiegato dai segnali del campo elettromagnetico (che viaggiano sotto forma di onde ed alla velocità della luce).
Questo implica che nei circuiti che assumiamo essere quasi-stazionari, le variazioni siano propagate quasi istantaneamente.

Osservazione: τ è il tempo al quale la carica nel condensatore è diminuita a 1/e del valore iniziale. Dopo un certo numero di τ la carica sarà diminuita ad una bassa % dell'iniziale.

CARICA DI UN CONDENSATORE

>Considero un condensatore inizialmente scarico, ovvero a $t < 0$ la sua carica è $Q_0 = 0$, collegato ad un circuito con un generatore e una resistenza .

>A $t = 0$ chiudo un interruttore che fa instaurare una corrente nel circuito ed osservo che il condensatore viene caricato con V_0 costante attraverso la resistenza R.



Di nuovo, non siamo a rigore per le LdK ma suppongo condizioni di quasi-stazionarietà.Non potrei usare le LdK ma per le condizioni di quasi-stazionarietà lo faccio lo stesso lol. Momento Garfield

>Scrivo il (2) LdK quindi $-V_0 + i(t)R + V_C(t) = 0$

>Sia $Q(t)$ la carica del condensatore in un qualsiasi momento *t*.
Per il principio di conservazione della carica, la variazione dq nel condensatore è pari alla carica $i\,dt$ che passa nella resistenza R.
Sostituisco nella LdK:

$$dQ = i\ dt$$

$$\Rightarrow \qquad -V_0 + \frac{dQ}{dt}R + \frac{Q(t)}{C} = 0$$

>Che riordinato e integrato diventa:

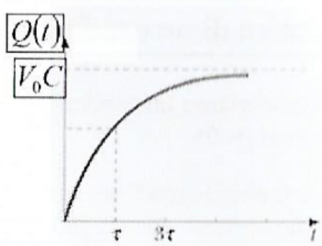
$$-\frac{dt}{RC} = \frac{d(V_0C - Q)}{V_0C - Q}$$

$$\int -\frac{dt}{RC} = \int \frac{d(V_0C - Q)}{V_0C - Q}$$

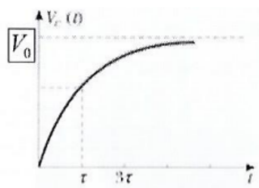
>Con la condizione iniziale $Q(t = 0) = Q_0$ posso stabilire l'espressione finale.
Inserita nelle espressioni di $V(t)$ e $i(t)$

$$\boxed{Q(t) = V_0C\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)} \quad \tau = RC$$

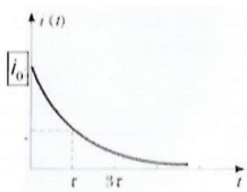
con $\boxed{\tau = RC}$ **costante di tempo** del circuito RC



$$\boxed{V(t) = \frac{Q(t)}{C} = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$



$$\boxed{i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} = i_0e^{-\frac{t}{\tau}}}$$



MAGNETOSTATICA

I fenomeni elettrici e magnetici sono fortemente correlati tranne quelli elettrici in caso dinamico.

Sperimentalmente: fin dall'antichità è noto che la magnetite sia in grado di attrarre la limatura di ferro. Tale proprietà non è distribuita uniformemente nella magnetite, ma è' possibile ad esempio costruire campioni cilindrici dove (la proprietà) è localizzata nelle basi, e questi campioni sono detti magneti. Le basi del campione sono i poli del magnete.

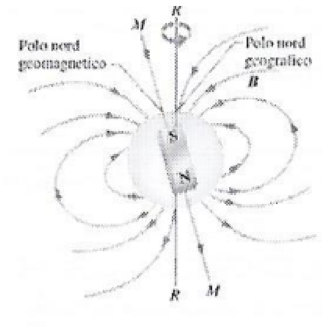
Evidenza sperimentale: la forza magnetica

Preparo due cilindri di magnetite, uno appeso al muro da un filo isolante ed uno che tengo in mano. Li avvicino.
Si osserva:
> esiste una forza (attrattiva o repulsiva, a seconda dei poli che faccio avvicinare)
> esistono 2 specie di poli (immediato dal fatto che possono attrarsi o respingersi)
Può esserne responsabile la forza elettrica? No! La magnetite è un conduttore, e sia che il cilindro appeso al muro sia carico o scarico, il secondo magnete è - per questo esperimento - sempre scarico (è tenuto in mano).

Dunque si introduce una nuova grandezza per misurare questa interazione "magnetica": la forza magnetica. Essendo l'interazione "a distanza", esiste un campo magnetico.

MAGNETI

DEF: Una bacchetta sottile di ferro, vicina ad un pezzo di magnetite, è in grado di attrarre la limatura di ferro. La vicinanza alla magnetite l'ha fatta diventare un magnete (l'immersione della bacchetta nel campo magnetico generato dalla magnetite la ha magnetizzata). Se la bacchetta è di piccole dimensioni la si chiama ago magnetico.

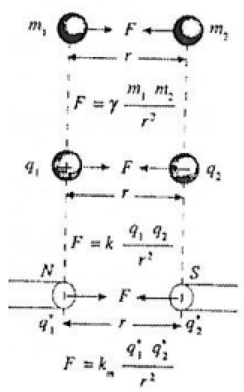


DIPOLO MAGNETICO

Si dimostra l'esistenza del dipolo magnetico in natura, sperimentalmente: un ago magnetico tende a disporsi quasi parallelo al meridiano terrestre. Questo dimostra che esiste un campo magnetico terrestre.
L'ago si comporta come un dipolo elettrico posto in campo elettrico!
Al polo dell'ago diretto verso il polo nord si attribuisce segno positivo, l'altro negativo. Seguendo questa definizione sperimentale di poli magnetici, si trova sempre che l'interazione tra poli dello stesso segno è repulsiva, oppostI è attrattiva.

Monopolo magnetico?

Coulomb conduce anche uno studio quantitativo della forza magnetica tra poli magnetici, puntiformi (approssimati dagli estremi delle barre magnetizzate) utilizzando lo stesso strumento - la macchina a torsione di Cavendish, usato per l'elettrostatica. I risultati lo conduco ad ottenere l'espressione (1) riportata sotto.



$$(1) \quad \boxed{\vec{F}_{21} = k_m \frac{q_1^* q_2^*}{r^2} \hat{r}_{21}}$$

con $\boxed{q_1^*, q_2^*}$ le masse magnetiche
$\boxed{k_m}$ = costante

L'espressione è analoga alle forze tra cariche elettriche (o masse materiali) ma…esiste una differenza fondamentale: le cariche elettriche possono sempre essere isolate, trovando l'esistenza della carica elementare, elettrone o protone, una per tipo di elettrizzazione. Invece la massa magnetica q_1^* non esiste da sola, è sempre considerata come "l'estremità opposta al polo q_2^* di un magnete".

Quindi una massa magnetica isolata, ovvero un monopolo magnetico, non esiste. I poli magnetici esistono sempre a coppie di ugual valore e segno opposto (esistono solo sotto forma di dipoli magnetici). Lo si dimostra con l'esperimento della calamita spezzata.

Quindi la (1) non riveste un ruolo fondamentale in quanto q_1^* non ha realtà fisica. Questo suggerisce che i dipoli magnetici siano gli elementi costitutivi dei magneti?

Relazione tra fenomeni magnetici ed elettrici

L'evidenza sperimentale che i dipoli siano gli elementi costitutivi elementari dei magneti suggerisce che, come le cariche elettriche erano i mattoncini dell'elettricità e ogni molecola o atomo possiede una carica, allora molecole ed atomi devono possedere un momento di dipolo magnetico m.

Nel 1800 Oersted osserva che se si avvicina un ago magnetico ad un filo percorso da corrente, questo si orienta verso il conduttore, quindi la corrente risulta responsabile dei fenomeni magnetici, ovvero: la corrente genera un campo magnetico.
L'ago immerso nel campo si orienta parallelamente a questo campo!

Ampere osserva l'interazione tra due fili (circuiti) percorsi da corrente e afferma che questa ha caratteristiche diverse dall'interazione tra cariche fisse (corrente stazionaria).
Dunque le azioni magnetiche sono manifestazioni dell'interazione tra cariche in movimento.

Per spiegare il fatto che la corrente interagisce con i magneti (intesi in generale, quindi *anche* come conduttori scarichi, dove la corrente come cariche in movimento non può esserci), è necessario che in ogni atomo o molecola esistano delle correnti microscopiche.

Questa condizione è equivalente alla necessità di avere un dipolo magnetico per osservare interazione magnetica descritta dalla (1). Quindi non solo le masse magnetiche ma anche i dipoli magnetici non hanno realtà fisica!

POV microscopico: nel caso della corrente stazionaria gli elettroni si muovono sui gusci degli atomi ma le cariche elettriche in sé sono in realtà ferme! E' solo l'orientazione del micro-moto che agisce come se ci fosse corrente (perché il campo elettrico che genera questa corrente va a disporre il momento di dipolo elettrico medio come parallelo a sé stesso). E' ben diversa dalla corrente originata da cariche in movimento!

Storicamente poi viene scoperto che, rispettivamente da Faraday e Maxwell:
> Un campo magnetico variabile nel tempo produce campo elettrico (non conservativo)
> Un campo elettrico variabile nel tempo produce campo magnetico

$$\Rightarrow$$

Campo elettrico e magnetico vanno unificati nell'unico concetto di campo elettromagnetico

Ciò che appare essere interazione magnetica in un sistema di riferimento può risultare elettrica in un altro e viceversa. Ad esempio se ci dovessimo porre in un SdR rispetto al quale le cariche che si muovono a velocità costante risultano ferme, allora esisterà una corrente stazionaria, e quindi il campo sarà solo elettrico e non magnetico (questo deriva dallo sviluppo della teoria della relatività).

CAMPO MAGNETICO B E FORZA DI LORENTZ

Dall'interazione elettrica conosco $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}$ con $\vec{F}$ la forza elettrica su q carica di prova.

In modo analogo possiamo esprimere l'interazione magnetica: si introduce un vettore B che esprime l'interazione tra poli magnetici. Sia $\vec{F}$ la forza magnetica sulla carica q di prova e v la velocità della carica q.
Possiamo osservare che:

1. F nella direzione di *v* risulta nulla.
   F nella direzione perpendicolare a *v* risulta massima.
2. $|\vec{F}| \propto q$
3. $|\vec{F}| \propto |\vec{v}|$

$\Rightarrow$ **DEF**: Quindi scrivo $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{k}$ e rinomino il vettore $\vec{k}$ come $\vec{B}$ come **vettore campo magnetico**.

DEF: chiamo $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ la **forza di Lorentz**.
Essendo presente un prodotto vettoriale, risponde alla regola della mano destra, con attenzione al segno della carica (se positivo, il verso della forza è concorde al pollice, altrimenti è contrario).

Osservazione: se la velocità della carica è $v = 0$ allora $F = 0$. La forza di Lorentz agisce solo sulle cariche in moto $\Rightarrow$ solo le cariche in moto generano campo magnetico!

Osservazione: se la forza $\vec{F}$ è perpendicolare al vettore $\vec{v}$ la forza $\vec{F}$ non compie lavoro sulla carica *q*

$$L = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \vec{v}dt = 0$$

Dal prodotto vettoriale, F risulta sempre perpendicolare al moto della carica (le componenti di F parallele a *v* sono nulle) ⇒ non compie mai lavoro! Ma allora è una forza centripeta.
Il vettore $\vec{F}$ non modifica l'energia cinetica di *q*; non causa variazioni nel modulo della velocità ma nella sua direzione (ne modifica le componenti).

Osservazione: se oltre a $\vec{B}$ c'è anche $\vec{E}$ $\Rightarrow$ su *q* agisce la forza complessiva:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

campo magnetico $= \dfrac{\text{forza}}{\text{uno carica} \cdot \text{velocità}}$

Unità di misura:

in SI in tesla (T) $\quad 1\,\text{tesla} = 1\,\text{T} = 1\dfrac{\text{newton}}{(\text{coulomb})(\text{metro/secondo})} =$

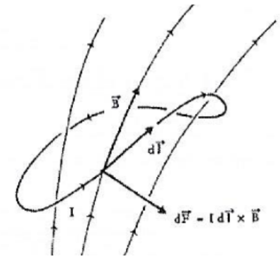
$$= 1\dfrac{\text{newton}}{(\text{coulomb/secondo})(\text{metro})} = 1\dfrac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

Viene ancora utilizzato il gauss (G) $\quad 1\,\text{tesla} = 10^4\,\text{gauss}$

La relazione $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ non è l'unico modo per definire B. Il campo magnetico non è originato solo dalla forza che agisce su una carica in moto in un campo elettrico!
Due modi equivalenti sono..

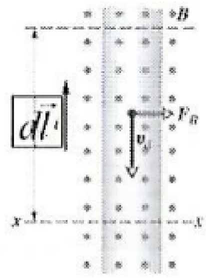
CAMPO MAGNETICO: FORZA AGENTE SU UN FILO

Dall'esperimento dell'interazione tra due fili con corrente, sappiamo che è possibile esprimere il campo magnetico attraverso la forza che agisce su un elemento di filo percorso da cariche. In generale parleremo di un circuito percorso da corrente.



Consideriamo un filo metallico in cui circola una corrente stazionaria *i*, ed immerso in un campo B esterno preesistente. Su ogni elemento infinitesimo $d\vec{l}$ del filo agisce una forza **DEF**: la **II legge elementare di Laplace**

$$d\vec{F} = id\vec{l} \times \vec{B}$$



<u>Dimostrazione</u>:

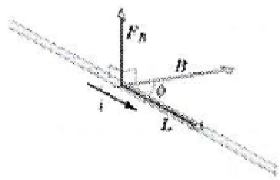
La corrente nel filo è $i = Jds$ (flusso della densità), dato $\vec{J} = nq\vec{v}_d$ e con:
n = numero di portatori di carica per unità di volume
$\vec{v}_d$ = velocità di deriva delle cariche (parallela al filo, o meglio al $d\vec{l}$)

>Su ogni carica agisce la forza di Lorentz, visto che si muovono con velocità di deriva, e la forza è pari a:

$$\vec{F} = q\vec{v}_d \times \vec{B}$$

>Su ogni tratto $d\vec{l}$ osservo la presenza di $dN = ndSdl$ portatori di carica (elettroni), per cui vi sarà una forza complessiva agente sul $d\vec{l}$, e così definita:

$$d\vec{F} = dN\, q\vec{v}_d \times \vec{B} = n\, dS\, dl\, q\, \vec{v}_d \times \vec{B} = (\vec{J}\, dS\, dl) \times \vec{B} = i\, d\vec{l} \times \vec{B}$$



>Su un filo rettilineo di lunghezza finita L percorso da corrente i avrò la forza complessiva:

$$\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B}$$

Considerando la II di Laplace in configurazione con corrente in un filo con geometria particolare trovo espressioni diverse.. (biot savart!)

Osservazione: la forza su un filo percorso da corrente che giace in un piano in cui agisce un campo uniforme B non dipende dalla forma del filo, ma solo dalla lunghezza del segmento che unisce i suoi estremi. Se il filo è chiuso ed il campo è uniforme ed è nello stesso piano del filo => allora la forza esercitata da B sul filo è nulla.

CAMPO MAGNETICO UNIFORME: FORZA AGENTE CARICA IN MOTO

(1) Considero il caso in cui la velocità iniziale $\vec{v}_0$ di q sia perpendicolare al vettore campo magnetico B.
>Siccome v perpendicolare a B, su q esiste una forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

>Poiché per definizione la forza $\vec{F} \perp \vec{v}$ (è il prodotto vettoriale della velocità e del campo), sarà sempre perpendicolare a B e v. Dunque non modifica il modulo della velocità per cui:

$$|\vec{v}| = cost = |\vec{v}_0|$$

>Ma so anche che la velocità iniziale è perpendicolare a B $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$ (da ipotesi)

$$F = qvB = qv_0B$$

Se due vettori sono sempre perpendicolari allora il loro prodotto vettoriale è sempre massimo perchè il seno dell'angolo che intercettano è 1: scrivo che il modulo di F è il prodotto dei moduli di v e B.

>La forza di Lorentz è così una forza centripeta per la carica, il cui moto divental moto circolare uniforme a partire dal momento in cui FdL inizia ad agire, ovvero dal momento in cui la q entra nella regione di spazio in cui è presente il campo B.
Scopro che la particella segue un moto circolare uniforme perché la sua situazione è circolare planare: la velocità iniziale è perpendicolare al campo magnetico, che è anche uniforme. L'accelerazione data dalla forza è solo radiale e non tangenziale. Non esistendo una componente della velocità parallela ad B, la circonferenza del moto rimarrà sul piano perpendicolare a B.

>Sono autorizzato quindi a utilizzare l'espressione della forza centripeta, che posso eguagliare alla forza di Lorentz ricavata:
m = massa ptc
R = raggio della traiettoria

$$F = ma_n = m\frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow m\frac{v_0^2}{R} = qv_0B \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mv_0}{qB}$$

Ora ho modo di esprimere le grandezze descrittive del moto di q.
>>Il raggio della traiettoria circolare dovuta al campo B è proporzionale alla quantità di moto della ptc $p = mv_0$

>>La velocità angolare: $\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{qB}{m}$

>>Periodo di rivoluzione: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$ (indipendente da v_0!)

Osservazione: a parità di carica e campo magnetico, il periodo è lo stesso. Dipenderà solo dal rapporto tra massa e carica!

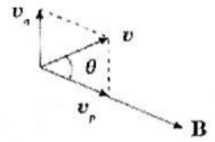
Carica maggiore	Massa maggiore
=> curva più stretta, R minore	=>curva più larga, R maggiore

(2) Considero ora il caso in cui la velocità iniziale $\vec{v}_0$ di q NON sia perpendicolare al campo magnetico $\Rightarrow$ esiste una componente della velocità parallela a B.

>Scompongo $\vec{v}_0$ in

$$\boxed{v_{0//} = v_0 \cos\theta = \text{componente } // \text{ a } \vec{B}}$$

$$\boxed{v_{0\perp} = v_0 \sin\theta = \text{componente } \perp \text{ a } \vec{B}}$$



>La F. di Lorentz risultante è dunque in modulo:

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_\perp| = |q\,\vec{v}_0 \times \vec{B}|$$

>Spezzo il prodotto tra q ed il prodotto vettoriale nelle due componenti.

$$= |q\,\vec{v}_{0\perp} \times \vec{B} + q\,\vec{v}_{0\parallel} \times \vec{B}| =$$

$$= q\,\vec{v}_{0\perp} \times \vec{B}| = qv_{0\perp}B = q\,v_0 B \sin\theta$$

Ora ho modo di esprimere le grandezze descrittive del moto di q.
Il moto nel piano perpendicolare a B è un moto circolare uniforme con:

>>Velocità $v_0 \sin\theta$

>>Raggio $R = \dfrac{mv_0 \sin\theta}{qB}$

>>Periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi m}{qB}$

La componente parallela al campo B $v_{0\parallel}$è costante con valore $v_{0\parallel} = v_0 \cos\theta$
$\Rightarrow$dunque la <u>traiettoria della carica non è una circonferenza, ma un'elica con passo</u> ove il passo p è la distanza lungo l'asse della velocità parallela a B percorsa durante un intero periodo.

$$\mathrm{p} = v_{0\parallel}T = \frac{2\pi m}{qB} v_0 \cos\theta$$

LEGGI DELLA MAGNETOSTATICA NEL VUOTO

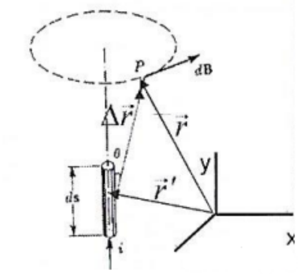
Abbiamo parlato della forza esercitata dal campo magnetico su un filo/circuito percorso da corrente, abbiamo visto come il moto di una carica puntiforme in un campo magnetico uniforme viene influenzato dallo stesso (con velocità iniziale).

Ora affrontiamo la discussione della sorgente del campo magnetico.

CAMPO B GENERATO DA CORRENTI STAZIONARIE

L'evidenza sperimentale conferma che:
> le correnti (cariche in moto) sono le sorgenti del campo magnetico
> vale il principio di sovrapposizione dei campi ***B***
B risultante da più correnti è la somma dei B_i che le correnti genererebbero singolarmente

(1) Circuito fermo con corrente stazionaria



Considero un filo conduttore (elemento di un circuito) percorso da una corrente i ed un generico punto dello spazio ad una certa distanza da esso.

> Per il principio di sovrapposizione, $\vec{B}(\vec{r})$è a somma dei $d\vec{B}(\vec{r})$elementari; che rappresentano il contributo a $\vec{B}(\vec{r})$portato da un tratto infinitesimo ds del circuito. Pongo $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$ il vettore distanza tra l'infinitesimo ds ed il punto nello spazio in cui vogliamo valutare il campo magnetico

>Vale la L. di Biot-Savart che descrive il campo magnetico generato da un infinitesimo di filo ds percorso da corrente

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{id\vec{s} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}^3|}$$

>Per il circuito di una lunghezza finita vale la circuitazione della LdB-S

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{id\vec{s} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}^3|}$$

DEF: μ_0 è detta **permeabilità magnetica del vuoto**

Nel Si vale: $\boxed{\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{T \cdot m/A} \approx 12{,}56 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{T \cdot m/A}}$

Osserv: con la L. di Biot-Savart se si conosce <u>come sono distribuite</u> le correnti, si può determinare il campo magnetico da esse generato.

Ma se questa informazione non c'è?
Nel caso in cui un problema di elettrostatica abbia una simmetria forte, la si sfrutta con la legge di Gauss. Data l'analogia campo E - campo B, esiste qualcosa di simile anche nel magnetismo.

Oss. Se il circuito non è filiforme (e quindi con sezione non trascurabile)

poichè $i = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$ allora

al posto di $i \to$ flusso J

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{i\, d\vec{s} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \left[\int_A (\vec{J} \cdot d\vec{A}) \frac{d\vec{s} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} \right] =$$

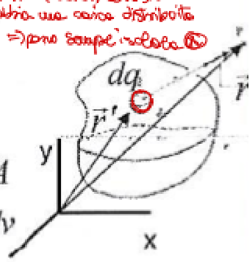
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_\tau \frac{\vec{J} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} d\tau$$

Per il campo elettrico valeva ——->

Si suddivide la carica in elementi di dimensioni spaziali infinitesime: per ciascun elemento (di valore dq) si può usare

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{|\Delta\vec{r}|^3} \Delta\vec{r}$$

sfrutto in questioni come io abbia una carica distribuita => posso sempre isolarla ①



$$\begin{cases} \text{carica lineare}: dq = \lambda\, ds \\ \text{carica superfic.}: dq = \sigma\, dA \\ \text{carica volumica}: dq = \rho\, dv \end{cases}$$

Il campo totale (dovuto a tutta la carica) è

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{|\Delta\vec{r}|^3} \Delta\vec{r}$$

(2) B generato da corrente stazionaria in filo rettilineo

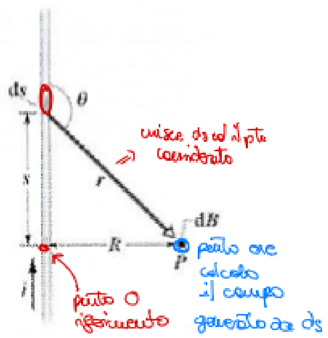
Se la corrente stazionaria osservata nel precedente sottocapitolo scorre all'interno di un filo rettilineo, allora il campo magnetico da questo generato risulta:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi R} i\hat{t}$$

Con $\hat{t}$ il versore della <u>tangente</u> alla circonferenza di raggio R, ed orientato secondo la regola della mano destra (la corrente è il pollice, le dita sono il verso delle linee di forza di B).

<u>Dimostrazione</u>:

>Partendo dalla L. di Biot-Savart valuto i singoli contributi degli infinitesimi di filo e cambio il SdR



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{s} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}^3|}$$

>Poi rinomino $|\vec{r} - \vec{r'}| = r$ e scrivo

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds\, r \sin\theta}{r^3} \qquad (\text{con } d\vec{B} \text{ entrante in P})$$

$$\Rightarrow B = \int dB = 2 \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin\theta\, ds}{r^2} \qquad r = \sqrt{s^2 + R^2}$$

$$\sin\theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{R}{\sqrt{s^2 + R^2}}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{R\, ds}{(s^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \left[\frac{s}{(s^2 + R^2)^{1/2}} \right]_0^{+\infty} = \frac{\mu_0}{2\pi R} i \qquad \text{c.v.d.}$$

(3) B generato da corrente stazionaria in spira circolare

Valutando il campo magnetico sull'asse di una spira, con z la distanza dal centro della spira, risulta

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0(\pi R^2 \hat{n})}{2\pi(z^2+R^2)^{3/2}} i = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi(z^2+R^2)^{3/2}}$$

- Al centro della spira (z=0) $\quad \vec{B}(z=0) = \frac{\mu_0}{2R} i\,\hat{n}$
- A grande distanza (z>>R) $\quad \vec{B}(z) = 2\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{\vec{m}}{z^3}$

DEF: chiamo $\vec{m}$ il **momento magnetico** della spira

$$\vec{m} = i\vec{A} = i\pi R^2 \hat{n}$$

Questo risultato è analogo al campo elettrico generato da un dipolo elettrico lungo la direzione del suo asse.

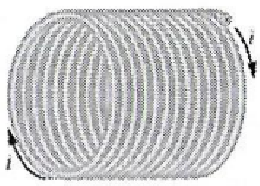
$$\vec{E}(z) = 2\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{\vec{p}}{z^3}$$

Quindi il campo magnetico generato a grande distanza da una spira percorsa da corrente è equivalente a quello di un dipolo magnetico.
Non vale per il campo generato a piccole distanze.
L'equivalenza spira-dipolo magnetico vale anche quando si studiano le azioni subite dalla spira e dal dipolo immersi in un campo magnetico esterno B.

spira percorsa da corrente $\overset{\text{parzialmente}}{\Leftrightarrow}$ dipolo magnetico

(4) B generato da corrente stazionaria in solenoide infinito

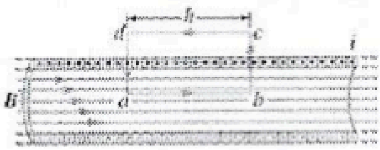
DEF: un **solenoide** è un lungo filo avvolto strettamente a forma di spirale



- Per solenoide di lunghezza infinita:

  Fuori dal solenoide $\quad \vec{B} = 0$

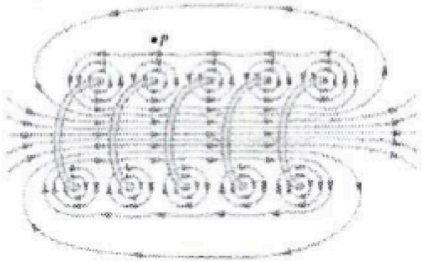
  Dentro al solenoide $\quad \vec{B} = n\mu_0\, i\,\hat{t}$

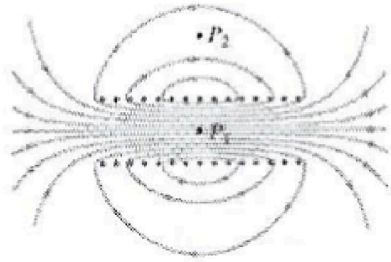


  dove n = numero di spire per unità di lunghezza

  $\hat{t}$ = versore diretto come l'asse del solenoide e orientato con la regola della mano destra

- Per solenoide reale (con lunghezza >> del raggio)





PROPRIETA' DEL CAMPO MAGNETICO: CASO STAZIONARIO

Abbiamo visto che

LEGGI DELLA ELETTROSTATICA

Per il campo elettrostatico **E** nel vuoto valgono

- $\boxed{\Phi_E \equiv \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}$ $\boxed{\text{Legge di Gauss per } \boldsymbol{E}}$

  Per qualunque superficie A (chiusa) contenente $q_{\text{int}} = \sum q_i$

- $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ $\boxed{\text{Conservatività di } \boldsymbol{E}}$

  Calcolato lungo qualunque linea chiusa

Studiamo il flusso di B ed il lavoro da B compiuto per scoprirne le proprietà..

Per il campo magnetostatico nel vuoto: $\Phi_B \equiv \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = ?$

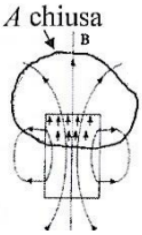
>Vado alla ricerca di un'espressione per il flusso del campo magnetico.
Lo studio della forza magnetica tra poli puntiformi ci da la formula
Traduzione: se studiassi i poli magnetici immaginandoli come isolati, troverei un'espressione analoga a Coulomb.

$$(1) \quad \boxed{\vec{F}_{21} = k_m \frac{q_1^* q_2^*}{r^2} \hat{r}_{21}} \qquad \text{con } \boxed{q_1^*,\ q_2^*} \text{ le masse magnetiche}$$

Alla luce di questa espressione facciamo delle considerazioni:
> la (1), forza magnetica, è formalmente equivalente alla L. di Coulomb
> la legge di Gauss per il campo E è ricavabile dalla L. di Coulomb

⇒ E' possibile ricavare la L. di Gauss per B a partire dalla "interazione tra poli magnetici"

A chiusa



$$\Phi_B \equiv \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \div q_{int}^* \qquad q_{int}^* = \sum q_i^*$$

Ma so bene che il dipolo magnetico non ha realtà fisica, poiché non esiste il monopolo magnetico. Quindi calcolare Φ_B attraverso ad A chiusa ritorna sempre un numero INTERO di dipoli elementari

$$\Rightarrow q_{int}^* = 0 \qquad \Phi_B \equiv \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

L. di Gauss per *B*

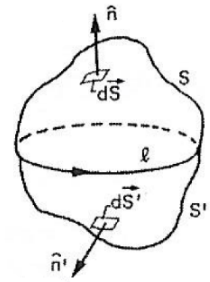
FORMA INTEGRALE: Il flusso di $\bar{B}$ attraverso una qualunque superficie chiusa è zero, poiché la magnetizzazione totale è nulla.

Conseguenze di $\Phi_B = 0$: un flusso nullo equivale alle seguenti

⇔ in una superficie A chiusa entrano tante linee di forza di B quante ne escono

⇔ le linee di forza di B sono linee chiuse, senza inizio né fine

$$\Leftrightarrow \quad \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



Dove S ed S' due superfici aperte qualsiasi, con lo stesso contorno ed orientate concordemente.

Dimostrazione

$$\Phi_B = \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS + \int_{S'} \vec{B} \cdot \hat{n}' dS =$$

$$= \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS - \int_{S'} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0 \qquad \hat{n} = \hat{n}'$$

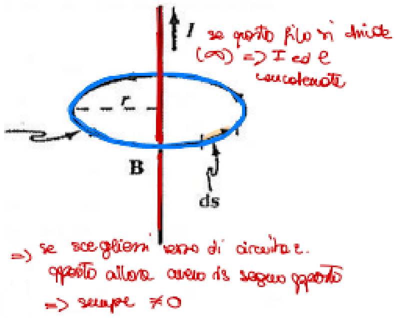
Il flusso delle due superfici S ed S' è identico, anche se la normale è inversa. Questo è dovuto al fatto che il verso di percorrenza è specchiato in uno rispetto all'altro e quindi la normale assume verso opposto (questo implica un cambio di segno).

⇔ si può parlare in modo univoco di flusso concatenato con una linea chiusa. Ovvero per ogni linea l chiusa scelta, per tutte le superfici che ci si appoggiano come contorno il valore corrispettivo di ϕ_B è costante.

⇔ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ è la **L. di Gauss** per il campo magnetico B in FORMA LOCALE. Deriva dal TH della Divergenza applicato al flusso nullo.
Si legge "la divergenza del campo magnetico stazionario è nulla in ogni punto"

Legge di Ampère

Per il campo ES è dimostrato che la circuitazione lungo un qualsiasi percorso chiuso nulla, il che implica ES conservativo. Cosa si può dire di B per $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = ?$



>Se scelgo di circuitare B lungo <u>una sua stessa</u> linea di forza ottengo

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint |\vec{B}||d\vec{s}| \neq 0$$

Che è sufficiente a dire che la circuitazione di B non è sempre nulla, e mi permette di affermare che in generale vale che $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} \neq 0$

Circuitando lungo una linea di forza, che per definizione è tangente al campo B stesso, avrò $|\bar{B}|\,|d\bar{s}| \cdot cos\theta = |\bar{B}|\,|d\bar{s}|$. Se inverto il verso di percorrenza, trovo lo stesso valore ma con segno opposto.

>A partire dalla L. di Biot-Savart possiamo dimostrare che vale

DEF L. di Ampère: La circuitazione del campo B stazionario lungo qualunque linea chiusa orientata (nel vuoto) è uguale alla corrente totale netta <u>concatenata</u> con la linea e moltiplicata per μ_0

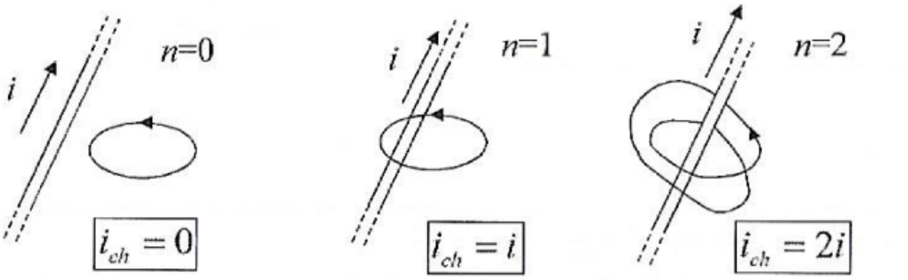
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{ch}$$

Dalle varie applicazioni di Biot-Savart osservo questo legame campo B-corrente sorgente (ovvero che devono essere concatenate). Vale anche per il filo infinito ipotizzando che si chiuda su sé stesso all'infinito.

DEF: la **corrente netta concatenata** con una **linea** è $i_ch = \sum_{j=1}^{N} n_j\, i_j$

Con i_j la corrente j-esima avente segno dipendente dal verso di percorrenza della linea: ovvero secondo la regola della mano DX, le dita saranno orientate come la linea, ed il pollice avrà segno positivo nella somma se concorde al pollice, negativo altrimenti.

Con n_j il grado di concatenazione della corrente j-esima con la linea. Ovvero il numero di volte con cui la corrente j-esima si concatena con la linea scelta per la circuitazione.



RIASSUNTO E.M. CASO STAZIONARIO

SISTEMA IN FORMA INTEGRALE:

Leggi della magnetostatica nel vuoto	Leggi dell'elettrostatica nel vuoto
• $\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$ — **Legge di Gauss per *B*** Per qualunque superficie A (chiusa)	• $\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$ — **Legge di Gauss per *E*** Per qualunque superficie A (chiusa) contenente $q_{int} = \sum q_i$
• $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{ch}$ — **Legge di Ampere** Per qualunque linea chiusa concatenante i_{ch}	• $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ — **Conservatività di *E*** Per qualunque linea chiusa

B:

> ha linee di forza chiuse
> non è conservativo

> ha linee di forza aperte (partono o arrivano sulle cariche)
> è conservativo

E:

□

i due campi ***B*** ed ***E*** appaiono indipendenti ma non lo sono

L. di Ampère: forma locale

Ricavo la forma locale della prima equazione per la magnetostatica, partendo dalla legge di Gauss per B. Con questa equazione trovo il legame tra le leggi per elettromagnetismo stazionario, che formalizzano come B sia generato dalle cariche Q elettriche in moto.
Posso anche dire che i fenomeni magnetici esistono in quei SdR per cui le cariche Q sono in movimento rispetto al sistema stesso.

>Considero $n_i = 1$ per ogni corrente i concatenata.
Per definizione di $\vec{J}$ vale

$$i_{ch} = \sum_{j=1}^{N} i_j = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

>Scrivo quindi la legge di Ampère che diventa

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{ch} \qquad \Rightarrow \qquad \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

> Sfrutto il Th. di Stokes applicato al campo magnetico $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_A rot\vec{B} \cdot d\vec{A}$

$$\Rightarrow \qquad \int_A rot\vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu_0 \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

DEF: la forma locale della circuitazione del campo B è chiamata **IV equazione di Maxwell** (versione caso stazionario e nel vuoto).

NB. So che $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ vale solamente nel caso stazionario, ovvero solo esclusivamente in presenza di correnti di conduzione perché altrimenti non si rispetterebbe l'eq di continuità della corrente.

>Poiché la divergenza di un rotore è nulla se si calcolasse la divergenza dell'equazione appena ricavata:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\nabla} \cdot (\mu_0 \vec{J}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

E questo rispetta la $(\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t})$
Dunque si può utilizzare questa forma della (IV) solo in caso stazionario.

Avendo trovato le corrispettive forme locali, il sistema di equazioni diventa:

Le leggi sono (in forma locale):

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0} \quad (1)$$

2ª equazione di Maxwell nel vuoto

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}} \quad (2)$$

4ª equazione di Maxwell nel vuoto nel caso stazionario

Per l'elettrostatica

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_0=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1')$$

1ª eq. di Maxwell nel vuoto

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}_0=0 \quad (2')$$

3ª eq. di Maxwell nel caso stazionario

Che in forma integrale si scrivono:

$$\boxed{\oint_A \vec{B}\cdot d\vec{A}=0} \quad A \text{ chiusa}$$

$$\boxed{\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}=\mu_0\, i_{ch}}$$

Per l'elettrostatica

$$\boxed{\oint_A \vec{E}_0\cdot d\vec{A}=\frac{Q}{\varepsilon_0}} \quad A \text{ chiusa}$$

$$\oint \vec{E}_0\cdot d\vec{l}=0$$

Osservazione: con il teorema di Helmholtz, usando la (1) e la (2) otteniamo la legge di Biot-Savart

La L. di Ampere, in caso di un problema con particolare simmetria, permette di ricavare ***B***. Esattamente come la legge di Gauss permetteva per il campo ES.

Ipotesi:

> se il campo magnetico ha simmetria cilindrica $\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$

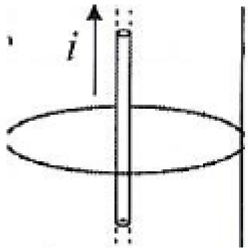
> la L. di Ampere detta $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}=\mu_0\, i_{ch}$

⇒ è allora immediato ricavare $|\vec{B}|$

Analizzo alcuni casi di simmetria e ne ricavo il modulo del campo magnetico.. Ma posso anche studiare la forma delle linee di forza del campo magnetico.

Questi esempi evidenziano anche il legame tra campo e correnti concatenate, posso ricavare la legge di Ampere a partire da Biot-Savart volendo, e utilizzando questi esempi come base. (questa è la strada che prende il mazzoldi per costruire la IV di maxwell)

Filo rettilineo infinito con corrente stazionaria

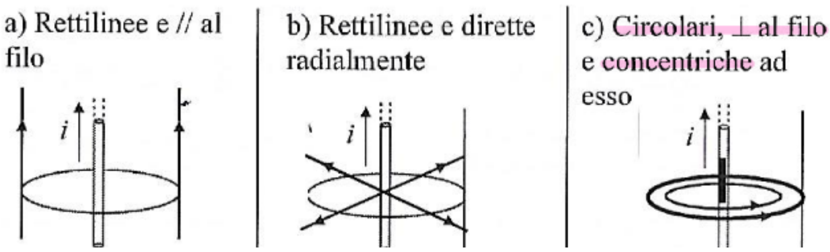


Visto qui qualcosa di simile che precede.
A partire dalla legge di Biot-Savart si era arrivati alla forma del campo come $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi R} i\hat{t}$ ma posso arrivare a questo stesso risultato anche a partire dalla circuitazione di Ampere.

Il problema ha simmetria cilindrica - il problema è simmetrico rispetto all'asse passante per il filo. Quindi anche B deve avere simmetria cilindrica ovvero B è uniforme lungo la circonferenza con al centro il filo, ma come sono fatte le linee di forza di B?

Immagino che possano essere (a) (b) o (c) => è possibile dimostrare che le linee di forza devono essere perpendicolari al filo e tangenziali alle circonferenze.

Lo posso anche intuire dal fatto che se la simmetria cilindrica implica B uniforme lungo circonferenze concentriche, allora le linee di forza sono tangenti ad una circonferenza per tutti i suoi punti ⇒ le linee di forza sono circolari, concentriche e perpendicolari al filo.



La forma delle linee di forza si può dimostrare anche sfruttando la circuitazione del campo B, ed è quello che ci interessa fare ora.

>I casi (a) e (b) non sono possibili per la L. di Ampere perchè calcolando la circuitazione lungo la circonferenza disegnata in figura si otterrebbe:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \left(\vec{B} \cdot d\vec{s} = 0\right)$$

Uso proprio una circonferenza così costruita per la simmetria cilindrica di B.

>Ma questo è assurdo perchè la circonferenza concatena la corrente i ⇒ dunque solo (c) è accettabile.

>Quindi ripropongo la circuitazione del campo che scopro valere..

$$\Rightarrow \qquad \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint |\vec{B}| \cdot |d\vec{s}| = |\vec{B}| \oint \cdot |d\vec{s}| = |\vec{B}|\, 2\pi R$$

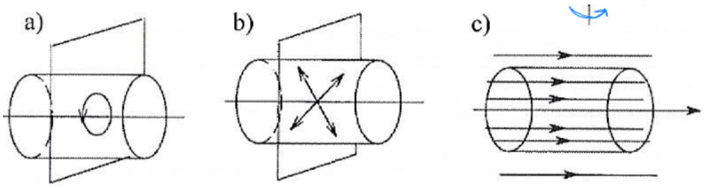
Ma so anche che $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{ch}$ e quindi trovo il campo magnetico generato dal filo:

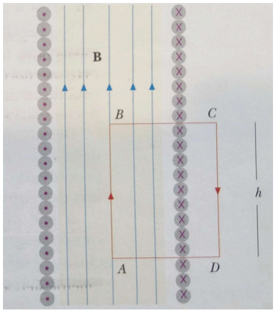
$$\Rightarrow \qquad |\vec{B}| = \mu_0 \frac{i}{2\pi R}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi R} i\hat{t}$$

Solenoide di lunghezza infinita con corrente stazionaria

Il problema ha simmetria cilindrica - il problema è simmetrico rispetto all'asse passante per il filo. Quindi anche B deve avere simmetria cilindrica ovvero B è uniforme lungo la circonferenza con al centro il filo, ma come sono fatte le linee di forza di B?





>Due possibilità sono il caso (a) che le descrive circolari e perpendicolari all'asse centrale, ed il caso (b) quindi radiali e perpendicolari all'asse. Ma entrambi sono scenari impossibili perché lungo la linea l_1 (in figura ABCD) si avrebbe una circuitazione nulla $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$

⇒ ma la linea l_1 concatena la corrente i! E la concatena n volte, dove n sono le spire concatenate.
Cerco l'assurdo circuitando rispetto ad una linea parzialmente interna ed esterna al solenoide. Si osserva che il campo risulta nullo se circuitassi una linea COMPLETAMENTE INTERNA al solenoide: questo perchè so che per questa geometria del problema le correnti scorrono lungo solo la superficie del solenoide (=nelle spire), ergo non concatena le correnti NB. E' lo stesso risultato della circuitazione di B lungo una linea COMPLETAMENTE ESTERNA al solenoide.

>Dunque vale il caso (c) per cui le linee di forza del campo magnetico sono rettilinee e parallele all'asse. Riassumiamo i risultati della circuitazione:

Calcolando lungo l_2 (linea completamente interna) e l_3 (linea completamente esterna) che non sono concatenate ad alcuna corrente trovo (come mi aspetto) sempre $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$

⇒ Ho anche la dimostrazione che B - che (c) descrive longitudinale al solenoide - non dipende, sia dentro (con l_2) che fuori (con l_3) dal solenoide, dalla distanza dall'asse
⇒ B è uniforme, con due accorgimenti:

Scopro $\vec{B} = 0$ fuori dal solenoide $\vec{B} \neq 0$ e dentro il solenoide.

> Scoperta la forma di B, nota la simmetria cilindrica, sfrutto Ampere per determinare il campo dentro al solenoide - lungo la linea l_1. La circuitazione vale:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{ch} = \mu_0 \Delta N i$$

> Sia ΔN il numero di spire concatenate a l_1 e sia n il numero di spire per unità di lunghezza (densità di spire).

$$B \; \Delta s = \mu_0 \Delta N i \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \mu_0 \frac{\delta N}{\Delta s} i \, \hat{t} \;\; = \;\; \mu_0 n i \hat{t}$$

NON ESISTENZA DEL POTENZIALE-SCALARE

Dalle proprietà del campo B sappiamo che esso non è conservativo, poiché la sua circuitazione lungo un percorso chiuso non è, in generale, nulla, dalla L. di Ampere: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \, i_{ch}$
Legge la cui forma locale sfrutta il rotore del campo (IV di Maxwell)

$$(4)\ \vec{\nabla} \times \vec{B_0} = \mu_0 \vec{J} \neq 0$$

Un campo non-irrotazionale implica un campo non conservativo, il che significa che non esiste una funzione scalare monodroma ϕ tale che $\bar{B}_0 = -\bar{grad}\,\phi$.

>Ma per la validità di (4) si implica che $\vec{J} \neq 0$. Sappiamo che la densità di corrente è diversa da zero solo in piccole regioni dello spazio (quello dove ci sono i conduttori, perchè ovviamente senza conduttore non c'è corrente, e senza corrente non c'è densità).
Mentre $\mu_0 \neq 0$ è sempre vero, perché μ_0 è una costante sperimentale.

E' dunque possibile fare un ragionamento generale nello spazio - utilizzare l'equazione (4) ovunque, ignorando/escludendo queste regioni minime (i conduttori)? In quel caso potrei affermare che il campo magnetico è irrotazionale ed esisterebbe il potenziale magnetico!

>No, poichè $\vec{\nabla} \times \vec{B_0}(\vec{r}) = 0$ avrei: con $\vec{r} \in D$

E implicherebbe che in ogni punto dello spazio D si trova $\vec{J} = 0$ dove purtroppo D <u>non è semplicemente connesso</u>.

Ho la conferma che non esiste una monodroma ϕ tale che $\vec{B_0} = -\phi$

NB: si trova l'assurdo grazie al rotore che introduce una definizione di campo conservativo. Ovvero $\exists$ il potenziale scalare associato ad un campo vettoriale <u>se e solo se</u> si considerano regioni di spazio semplicemente connesse.
⇒ In breve, il legame tra rotore e correnti concatenate (o $\vec{J}$) spiega perché non esiste il potenziale magnetico

Volendo è possibile definire un potenziale magnetico ma questo varrà solo localmente, non sarà una grandezza univoca. Questo però ha utilità limitata

In un sottoinsieme D_i (di D) che sia semplicemente connesso possiamo definire φ_i monodroma tale che

$$\vec{B}_0(\vec{r}) = -\vec{\text{grad}}\,\varphi_i(\vec{r}) \qquad \text{con} \qquad \vec{r} \in D_i$$

Ma in un altro sottoinsieme D_j avremo un'altra φ_j.

Per la magnetostatica nel vuoto, sono sufficienti due leggi a descrivere tutto (la II e la IV di Maxwell così formulate). Come per la ES bastavano la I e III di Maxwell.

MAGNETOSTATICA NEI MEZZI MATERIALI

Il campo elettrico è conservativo, dunque si osserva che l'effetto di E non permane nel tempo oltre all'esistenza del campo stesso… Questo non vale per il campo magnetico.
Il materiale in un campo E subisce delle modifiche, se è dielettrico si polarizza ad così potrà generare a sua volta un campo E. Ma nel momento in cui E esterno cessa di esistere, la polarizzazione per deformazione scompare e non genera più campo elettrico.

Si osserva che in un campo magnetico esterno, un materiale subisce delle modifiche, dovute al fenomeno della magnetizzazione.
Questo materiale magnetizzato genererà a sua volta un campo magnetico, che si sommerà a quello esterno contribuendo anch'esso alla magnetizzazione! Fin qui la situazione è analoga al campo elettrico.

Esiste una classificazione dei materiali in tre famiglie. La si scopre sperimentalmente inserendo - parzialmente - diversi cilindri in un solenoide percorso da corrente.

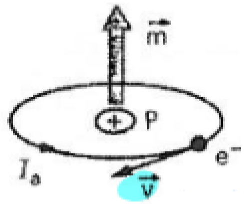
DEF: chiamo **materiali ferro-magnetici** quelli attratti da una forza molto intensa $\mu_r \ggg 1$

DEF: chiamo **materiali paramagnetici** quelli attratti da una forza molto piccola $\mu_r \gtrapprox 1$

DEF: chiamo **materiali diamagnetici** quelli respinti da una forza molto piccola $\mu_r \lessapprox 1$

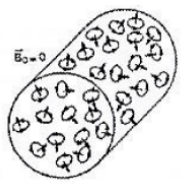
POV microscopico
L'interpretazione dell'esperimento che studia la magnetizzazione dei materiali è data dall'equivalenza parziale tra spira percorsa da corrente e dipolo magnetico, ora spiego..
>Ogni atomo del materiale è associato a delle piccole correnti secondo il modello planetario:

Ogni elettrone orbita attorno al nucleo ⇒ immagino che l'orbita dell'elettrone sia un conduttore e la corrente che lo attraversa è rappresentata dalla carica dell'elettrone.
Cariche in moto generano un campo magnetico!
Quindi così costruita ho una spira microscopica immaginaria, a cui poi associo un momento magnetico detto orbitale, sommato al momento magnetico intrinseco dovuto allo spin dell'elettrone - per il moto di rotazione di e attorno al proprio asse.

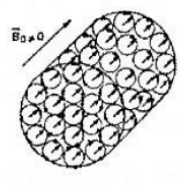


Come si comporta la spira in presenza o meno di un campo B esterno?
Per queste valutazioni si tiene a mente che le spire, ad una distanza sufficientemente maggiore del loro raggio, sono equivalenti ai dipoli magnetici - da qui parleremo di dipoli.

>Senza campo magnetico i dipoli magnetici (atomi) sono orientati casualmente, quindi con un effetto magnetico risultante (macroscopico) nullo. Poiché il materiale è in equilibrio.



>In presenza di campo magnetico esterno il materiale si magnetizza ed i dipoli si orientano. Quindi esiste a livello macroscopico una corrente di magnetizzazione dovuta alla combinazione di tutte le correnti atomiche (che sono ora orientate ed allineate quindi siummano tutte insieme siuuuu)



Vettore Magnetizzazione

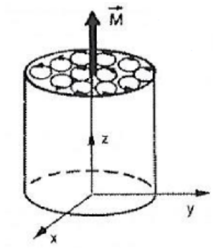
Per misurare l'effetto del campo sugli atomi di un materiale si introduce una grandezza macroscopica "comoda", analogamente al ragionamento sulla polarizzazione dielettrica.

DEF: chiamo $\vec{M}$ il momento di dipolo o **vettore magnetizzazione** per unità di volume, misura in Ampère su metro. Ove $\vec{m}_i$ sia il momento di dipolo magnetico dell'i-esimo atomo tra i ΔN nel volume τ, mentre $< \vec{m}_i >$ è il valore medio dei $\vec{m}_i$
Osservo che dipende dal momento di dipolo magnetico, e quindi dalla corrente atomica.

$$\vec{M} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\sum_i^{\Delta N} \vec{m}_i}{\Delta \tau} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta \tau} < \vec{m} >$$

>Il vettore magnetizzazione indica il momento di dipolo delle molecole di un materiale per unità volumica ⇒ a parità di campo magnetico, gli atomi due materiali con momento di dipolo diverso subiranno una magnetizzazione diversa

Correnti di magnetizzazione



Si consideri un cilindro magnetizzato.

Se $\vec{M}$ è uniforme:

>All'interno del materiale le correnti atomiche si annullano tra loro perché una <u>superficie interna</u> risulta in media attraversata in un verso da tante correnti quante nel verso opposto ⇒ non c'è corrente macroscopica.
Non vale neanche l'effetto Joule perché non c'è un vero movimento di cariche, la natura della corrente è "magnetica".

>Sulla <u>superficie esterna</u> del materiale le correnti atomiche contribuiscono a generare una <u>corrente di magnetizzazione</u>, quindi in questo caso ESISTE corrente macroscopica. Si utilizza la grandezza macroscopica
DEF: **densità di corrente** amperiana (o **di magnetizzazione**) **superficiale** $\vec{J}_{ms}$.
Descrive la corrente macroscopica che si genera sulla superficie esterna di un materiale magnetizzato con vettore $\vec{M}$ uniforme.

Se $\vec{M}$ non fosse uniforme:

Esiste corrente macroscopica non solo sulla superficie esterna, ma anche all'interno, dovuta al fatto che le correnti atomiche NON si annullano tra loro in ogni superficie interna del materiale. Si utilizza quindi la grandezza macroscopica:
DEF: **densità di corrente** amperiana (o **di magnetizzazione**) **di volume** $\vec{J}_{mv}$ descrive la corrente macroscopica che si genera all'interno e sulla superficie esterna di un materiale magnetizzato con vettore $\vec{M}$ non uniforme.

<u>In generale..</u>

$$\begin{cases} \vec{J}_{mv} = \vec{\nabla} \times \vec{M} \equiv \mathrm{rot}\vec{M} \\ \vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n} \end{cases}$$

con $\hat{n}$ $\perp$ alla superficie del materiale

In elettrostatica

$$\boxed{\begin{cases} \rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\mathrm{div}\vec{P} \\ \sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} \end{cases}}$$

Queste correnti generano un campo $\vec{B}_M$

Il campo totale sarà $\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_M$

LEGGI DELLA MAGNETOSTATICA NEI MATERIALI

RICORDO:
Nel vuoto valgono

(1) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ legge di Gauss, II di Maxwell

(2) $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ legge della circuit. di Ampere, IV di Maxwell (staz+vuoto)

Queste equazioni valgono per la magnetostatica nel vuoto e di conseguenza vanno "aggiustate" in presenza di materia.

>La (1) in realtà continua a valere, poiché il campo $\vec{B}$ è solenoidale ovunque.

>La (2) invece necessita di introdurre le correnti di magnetizzazione, poiché la magnetizzazione del materiale apporta delle modifiche alle molecole dello stesso, per cui contribuiscono a generare il campo magnetico totale. Aggiungo alla densità di corrente di conduzione $\vec{J}$ quella di magnetizzazione $\vec{J}_m$.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{J}_m)$$

Questa espressione però non è molto utile perchè in generale non abbiamo modo di conoscere $\vec{J}_m$ ⇒ ha quindi senso ricavare un'equazione che dipenda solo dalla densità di corrente di conduzione.

>Scrivo l'espressione di $\vec{J}_{mv}$ e la inserisco nella IV di Maxwell

$$\vec{J}_{mv} = \nabla \times \vec{M} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \nabla \times \vec{M}) \quad \Rightarrow$$

$$\nabla \times (\frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0}) = \vec{J}$$

Il termine tra parentesi - quello a cui applichiamo il rotore - è una differenza tra vettori divisa per un valore scalare. Dunque è un vettore anch'esso. Vado a definirlo e riformulo la legge.

NB. Se conosco la divergenza del campo, e conoscendo il rotore conosco anche la densità di corrente ⇒ Helmholtz permette di trovare il campo stesso.

Campo H

DEF: il vettore **campo H** è $\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0}}$ Per cui da prima si ha $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$

>E quindi le equazioni di Maxwell per la magnetostatica (valide nel vuoto e nei materiali) diventano:

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{B} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \mathrm{r\vec{o}t}\vec{H} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \end{cases}$$

Osservazione: in assenza di materia si trova $\vec{M} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0}$ e dunque:

> La II di Maxwell non varia

> La IV di Maxwell invece diventa: $\nabla \times \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J} \;\Rightarrow\; \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

E così le equazioni (II)+(IV) ritrovano esattamente le equazioni - in forma locale - della magnetostatica nel vuoto. (tutto torna! fico!)

Osservazione: non esiste più solo il campo $\vec{B}$ ma anche $\vec{H}$, introdotto per semplicità di calcolo/descrizione, in quanto il suo rotore dipende solo da $\vec{J}$ di conduzione.
Il rotore del campo $\vec{B}$ dipende dalla somma dei contributi di $\vec{J}$ di conduzione e $\vec{J}_m$ di magnetizzazione.

Osservazione: Per risolvere il sistema (II)+(IV) Maxwell della magnetostatica generale è necessario conoscere la relazione tra $\vec{H}$ e $\vec{B}$ oppure $\vec{M}$ e $\vec{B}$ o $\vec{H}$, perché il sistema è composto da 3+1 equazioni scalari con 6 incognite scalari (= le tre componenti nello spazio di B ed H) => vedi il prossimo sottocapitolo

IPOTESI:
materiale isotropo
lineare
omogeneo

TESI:
relazione
materiale
magn
$\bar{B}, \bar{H}$
$\Downarrow$
$\bar{B} = \mu_0 \mu_r \bar{H}$

Relazione H-B e M

In generale vale $\vec{M} = f(\vec{r}, \vec{B}, T)$

Ma per ragioni storiche si preferisce scrivere $\vec{M} = f(\vec{r}, \vec{H}, T)$
Dunque possiamo scrivere che in generale vale $\vec{M} = ||\alpha(\vec{r}, H)||\;\vec{H}$ con α tensore del secondo ordine.

>Se il materiale è <u>isotropo, lineare ed omogeneo</u> o ILO, si ha allora che: $\vec{M} = \alpha \vec{H}$

Oppure possiamo introdurre una nuova grandezza **DEF**: χ_m detta **suscettività magnetica** che possiamo usare per descrivere la magnetizzazione del materiale.

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

>Che sostituito nell'espressione del campo B, ricavata da H:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 (1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

DEF: chiamo $\mu_r \equiv (1 + \chi_m)$ **permeabilità magnetica relativa** ed è un valore scalare costante che dipende dal materiale magnetizzato.

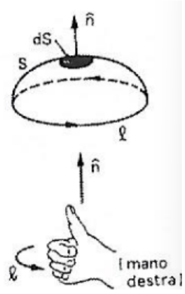
DEF: chiamo $\mu = \mu_0\, \mu_r$ la **permeabilità magnetica assoluta**

Forma integrale di Maxwell per la magnetostatica

Per ora le equazioni di Maxwell rivisitate e valide per la magnetostatica con e senza materiali sono

In forma locale		In forma integrale		Per elettrostatica in forma integrale
$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$	$\Leftrightarrow$	riscrivo tale quale $\boxed{\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0}$	per ogni A chiusa	$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_i$
$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}}$ Densità di corrente di conduzione	$\Leftrightarrow$	$\boxed{\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = i_{ch}}$ per ogni l chiusa	corrente di conduzione concatenata a l	$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \forall l$

La forma integrale della II di Maxwell è immediata, dal TH della DIV.



La forma integrale della (IV) di Maxwell o equazione (II) invece si ottiene così:

>Sia l una curva orientata ed S una superficie che ha l stessa come contorno.
Il flusso di $\vec{J}$ - la corrente associata - attraverso la superficie S, con $\hat{n}$ orientato in modo da vedere l circolare in accordo alla regola della mano destra), data la (II) in forma locale:

$$\int_S \dot{J} \cdot d\dot{S} = \int_S (\vec{\nabla} \times \dot{H}) \cdot d\dot{S}$$

>Ma per il Th. di Stokes posso sostituire il secondo membro con la circuitazione del campo H

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

> Inoltre sappiamo che la corrente (totale) di conduzione concatenata con la linea l

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \sum I_i$$

La circuitazione della densità di una corrente è la sommatoria delle correnti concatenate!

>Quindi eguagliando il primo e secondo membro trovo la <u>legge della circuitazione di Ampère</u> per il campo magnetico nei materiali (e vuoto):

$$\oint_l \vec{H} \cdot dl = \sum I_i$$

Relazione B-H: caso particolare

>Se il mezzo materiale riempie TUTTO lo spazio posso rivedere il sistema (*) delle equazioni di Maxwell.

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \end{cases} \quad (*)$$

- <u>CASO MATERIALE ILO</u>

  Vale la relazione tra M e H seguente: $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$
  Il legame tra M ed H è diventato lineare, una proporzionalità quindi definire ed utilizzare un intero altro vettore è inutile
  ⇒ per cui dalla definizione di H ottengo che $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$

  Le equazioni di Maxwell (*) sono riscritte come
  La II è invariata, mentre la IV assume la forma $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{J}$

  $$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{J} \end{cases} \quad (**)$$

  Oss: Queste riformulazioni sono medesime alle equazioni nel vuoto ma a μ_0 si sostituisce $\mu_0 \mu_r$ ed inoltre il vettore magnetizzazione diventa

  $$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = (\mu_r - 1)\vec{H} = \frac{(\mu_r - 1)}{\mu_0 \mu_r}\vec{B}$$

  ⇒ il vettore $\vec{H}$ non è più necessario! Grazie alla linearità del legame H-M

  I materiali dia e paramagnetici sono mezzi ILO, per cui posso sempre scrivere

  $$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \qquad (\Leftarrow \ \vec{M} = \chi_m \vec{H})$$

  $$\mu_r \approx 1$$

- <u>CASO MATERIALE NON ILO</u>

  La μ_r non è una grandezza scalare costante e quindi non vale più la relazione $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$. Continuo ad utilizzare il sistema (*) così scritto.

  I materiali ferromagnetici invece non sono lineari, cioè le relazioni $\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$ e $\vec{M} = \vec{M}(\vec{H})$ non sono lineari e non vale scrivere $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$
  Inoltre il comportamento del materiale dipende dalla sua "storia magnetica"

>Se il mezzo NON RIEMPIE tutto lo spazio, devo utilizzare (*) originale.
Questo implica che:

⇒ $\vec{B}$ e $\vec{H}$ sono discontinui sulla superficie che separa due mezzi diversi.

⇒ $\vec{B}$ conserva la componente normale $B_{n1} = B_{n2} \quad (D_{n1} = D_{n2})$

⇒ $\vec{H}$ conserva la componente tangenziale (se non c'è corrente di conduzione all'interfaccia): $H_{t1} = H_{t2} \quad (E_{t1} = E_{t2})$

PROPRIETA' DEI MATERIALI

	MATERIALI	
	diamagnetici	**paramagnetici** i più importanti
CARATTERISTICHE MACROSCOPICHE χ_m	< 0 $\lvert\chi_m\rvert \approx 10^{-9} \div 10^{-4}$	> 0 $\chi_m \approx 10^{-7} \div 10^{-4}$
$\Leftrightarrow$ μ_r $(\equiv 1 + \chi_m)$	<1 (≈ 1)	>1 (≈ 1)
antiparallelo ad $\bar{H}$ e $\bar{B}$ ma $\Leftrightarrow$ $\vec{M}$ $(= \chi_m \vec{H})$ stessa direzione	antiparallelo a $\vec{H}$ e $\vec{B}$	parallelo a $\vec{H}$ e $\vec{B}$
$\vec{B}$ rispetto al caso del vuoto risulta	indebolito (di poco)	rafforzato (di poco)
χ_m dipende da T?	no (a parte qualche sostanza)	sì: legge di Curie $\chi_m = C\frac{\rho}{T}$ con ρ =densità T =temperatura per $T \approx 1K$ e $B \approx 3 \div 4T$ $\vec{M}$ satura
CARATTERISTICHE MICROSCOPICHE Le molecole hanno momento magnetico proprio?	no! (la struttura degli orbitali elettronici è simmetrica e gli elettroni (in n° pari) si accoppiano con gli spin antiparalleli	sì!
La magnetizzazione é per	induzione si interrompe un qualcosa boh non ho capito	orientamento (c'è anche l' induzione, ma è meno importante)

circa min 10 della 2° rec

μ_r dipende da $\bar{H}$
e per piccolissimi intervalli
pose ac costante ma
comunque non è rigoroso

$\mu_r(\bar{H})$ funzione del campo $\bar{H}$

Materiali Ferromagnetici

I materiali ferromagnetici invece non sono lineari, cioè le relazioni $\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$ e $\vec{M} = \vec{M}(\vec{H})$ non sono lineari e non vale scrivere
Inoltre il comportamento del materiale dipende dalla sua “storia magnetica”

⇒ si dice dunque che χ_m (e di conseguenza μ_r) non è definibile.

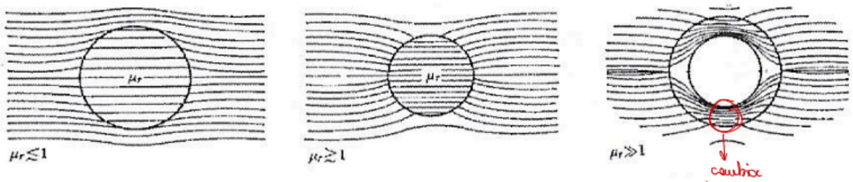
>Se comunque, nonostante la non linearità, il mezzo è <u>isotropo</u> e <u>omogeneo</u> posso introdurre lo stesso queste grandezze ma ovviamente saranno
- non costanti, dipendono dal campo applicato
- a più valori (per un valore di H si possono avere diversi valori di B (ed M))

> In questo caso, la costante magnetica relativa del mezzo diventa

$$\mu_r \approx 10^3 \div 10^6 \quad \Rightarrow \text{B risulta molto rafforzato rispetto al caso nel vuoto}$$

ES Modifiche a B uniforme prodotte da mezzo...

Diamagnetico paramagnetico ferromagnetico



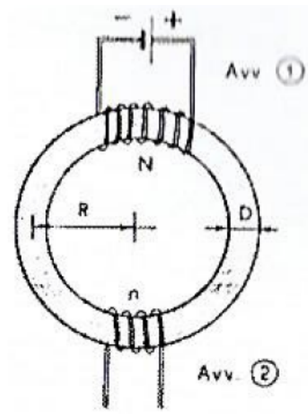
cambia direzione di B e risulta anche molto + grande in valore

Per $T > T_C$ (temperatura di Curie) diventa paramagnetico con

$$\chi_m = \frac{C\rho}{T - T_c}$$

(per ferro T_C=1040 K, per gadolinio T_C=289 K)

DISPOSITIVO PER RELAZIONE B E H NEI FERROMAGNETICI



Si consideri un anello di materiale ferromagnetico <u>isotropo</u> ed <u>omogeneo</u> (per cui posso utilizzare la μ_r nell’ordine di $10^{3\sim6}$ - con D << R, con due avvolgimenti di filo conduttore.

Il primo avvolgimento è percorso da corrente (c’è un generatore di DDP).
>Le linee di forza di B e di H, essendo parallele alla superficie dell’anello, sono circolari.

Risulta $\vec{H} = 0$ al di fuori dell’anello.
Ma $\vec{H} = \dfrac{N}{2\pi r} I$ al suo interno - dato che $\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = N\ I$

⇒ in questo caso H dipende solo dalla corrente I e non dal mezzo in sé!

Variando I varia anche H e per cui B, che dipende invece dal mezzo. Per misurare B si misura la corrente che nel 2° avvolgimento viene indotta dalla variazione del flusso di B attraverso il 2° avvolgimento (vd. dopo, campi elettrici indotti)

CICLO DI ISTERESI

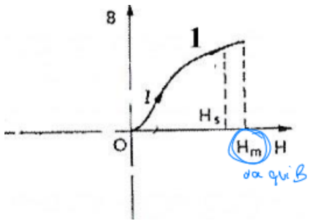
Con il dispositivo discusso nel sottocapitolo precedente possiamo determinare la relazione tra B ed H quando il mezzo considerato è un materiale ferromagnetico. Ovviamente in generale non è vero che $\vec{B} = \mu\vec{H}$, ma perchè vale la definizione $\vec{H} = \dfrac{\vec{B} - \mu_0\vec{M}}{\mu_0}$

Questa definizione particolare dice che il campo H dipende dalla corrente imposta nel primo avvolgimento del dispositivo. Va beh

<u>INIZIO</u>

>Si considera il dispositivo ferromagnetico, sia esso inizialmente smagnetizzato. Per cui il vettore magnetizzazione è nullo e quindi

$$\vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \mu_0\vec{H}$$



>Facciamo passare una corrente - nel primo avvolgimento - da zero ad un certo valore in modo che $H = H_l$

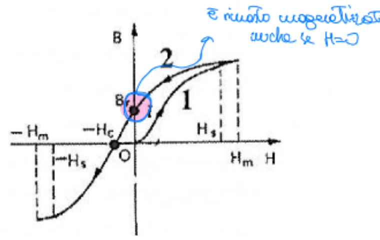
Si ha la curva 1 che chiameremo <u>curva di 1° magnetizzazione</u>

Oss: il campo $\dot{B}$ varia rapidamente per H piccolo, poi da un valore H_m che definiremo come soglia di saturazione della magnetizzazione, B cresce proporzionalmente a

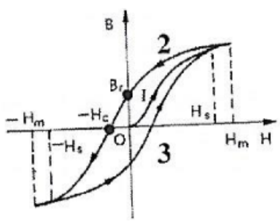
$$\mu_0\vec{H} \quad \Leftrightarrow \quad M \quad \text{satura}$$

Il campo B non cresce più rapidamente con H, quindi “basta, è magnetizzato saturo”. La crescita è ora lineare e più “dolce”.

>Scegliamo ora $H_l = H_m$, quindi la prima magnetizzazione va a saturare completamente il dispositivo



Dunque diminuiamo la corrente fino a zero in modo che ora il campo H imposto diventi $H = 0$ (annullo il contributo della corrente di magnetizzazione), e poi la inverto fino ad ottenere $H = -H_m$.
Troviamo così la <u>curva di 2° magnetizzazione</u>



>Riportando poi H da $-H_m$ fino a H_m: ottengo la <u>curva di 3° magnetizzazione</u>.
Le curve sono differenti! Questo poiché esiste una *storia magnetica* che influenza l’effetto di magnetizzazione di un campo B esterno su di un materiale ferromagnetico.

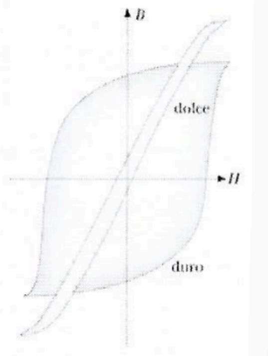
DEF: le curve 2 e 3 assieme rappresentano il **ciclo di isteresi** - partono e arrivano tra gli stessi “punti”, o valori coordinati per B e H - ad un H ho più B .
La forma del ciclo di isteresi dipende dal materiale e dal H_l scelto.

Oss: sulla curva 2 per $H = 0$ si ha $B = B_r \neq 0$, il che significa che nonostante la corrente che genera campo magnetico sia “spenta”, il materiale è rimasto magnetizzato! E quindi produce un campo magnetico suo, “relativo” al materiale usato.

$$(\;\; B = \mu_0(H + M) \quad H = 0 \quad \Rightarrow \;\; B = \mu_0 M \;\;)$$

Oss: per annullare B campo residuo, bisogna applicare un campo esterno inverso, detto $H = -H_c$ campo magnetico di coercizione.

- **Ferromagneti dolci** elettromagneti motori
  (= hanno ciclo di isteresi stretto):
  sono usati nelle macchine elettromagnetiche (elettromagneti, generatori, motori, trasformatori, ecc.)
- **Ferromagneti duri** campo residuo molto intenso
  (= hanno ciclo di isteresi largo con B_r elevato):
  sono usati per i magneti permanenti
  il lavoro compiuto dipende dall'area
  ⇒ convengono stretti



Poichè l' energia per unità di volume spesa per far compiere al materiale un ciclo di isteresi è proporzionale all' area contenuta nel ciclo ⇒ nelle macchine e.m. (con correnti alternate) conviene usare materiali dolci

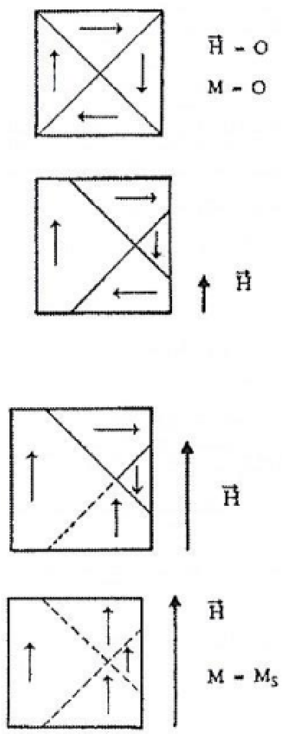
Oss: Ad un singolo valore di H, corrispondono più valori di B, e sono - caratterizzati - stabiliti a seconda di come si è arrivati a quel valore di H - ovvero dalla storia magnetica del materiale.

Ferromagnetismo: POV microscopico

A livello microscopico l’interpretazione del ferromagnetismo non è giustificabile dai modelli classici, ma è necessario utilizzare un quadro quantistico, poiché il ragionamento è legato agli spin del materiale.

Gli spin degli elettroni disaccoppiati (es. 3 nel ferro) sono soggetti a *interazioni quantistiche non magnetiche* che tendono ad orientarli parallelamente ed equiversi (al contrario dei magneti normali che se sono vicini si dispongono anti parallelamente).

Esistono così delle *regioni magnetizzate* (*domini di Weiss*) dalle dimensioni $\approx 10\mu m$, orientate fra loro in modo diverso (nel ferro seguono gli assi cristallografici). Nei domini si osserva che gli spin sono fra loro paralleli.



Se il mezzo non è magnetizzato, $\vec{M} = 0$, e si applica un $\vec{H}$, allora gli spin degli elettroni vicini a un dominio orientato come $\vec{H}$ tendono a ruotare paralleli ad esso, accrescendo così il dominio! Ma a spese dei domini vicini.
⇒ corrisponde al un rapido aumento di $\vec{M}$ con $\vec{H}$

Quando i domini che crescono hanno raggiunto la massima dimensione possibile, i domini che non lo erano si orientano paralleli ad $\vec{H}$
⇒ corrisponde quindi ad $\vec{M}$ che cresce lentamente con $\vec{H}$ ($\vec{M} = \alpha \vec{H}$)

>Alla saturazione magnetica, i domini sono tutti paralleli ad $\vec{H}$.

CAMPI ELETTRO-MAGNETICI VARIABILI NEL TEMPO

Come modifico le leggi del caso stazionario, per avere quelle più generali e valide a descrivere B ed E nel tempo?

In condizioni stazionarie, le leggi dei fenomeni elettrici e magnetici sono - in forma integrale - le seguenti equazioni di Maxwell:

$$\boxed{\Phi_E \equiv \oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}} \quad 1^a \qquad \boxed{\Phi_B \equiv \oint_A \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0} \quad 2^a$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0 \quad 3^a \qquad \boxed{\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0\, i_{ch}} \quad 4^a$$

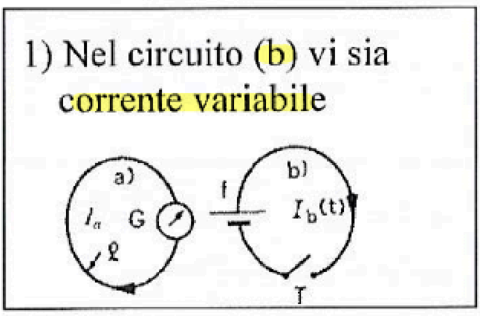
Da questo quadro i campi E e B appaiono indipendenti.. In realtà non lo sono. Infatti la carica elettrica, che è la sorgente di E, quando è in movimento è anche sorgente di B.
⇒ Ma il movimento è un fatto relativo, ciò che in un SdR è E può diventare B in un altro e viceversa. Esempio: nel SdR che si muove con le cariche esiste solo E, in un SdR che vede le cariche muoversi esistono sia E che B!

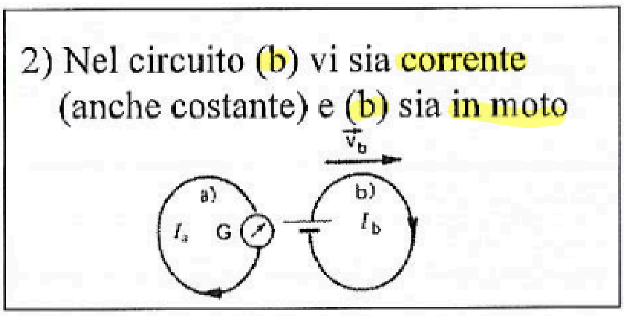
⇒ *$\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono manifestazioni di un'unica entità fisica: il campo elettromagnetico*

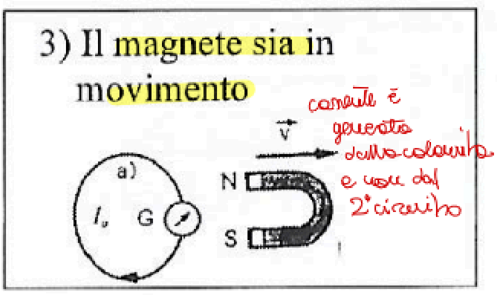
Questa affermazione è rafforzata e dimostrata da considerazioni sui fenomeni non stazionari. Ad esempio..

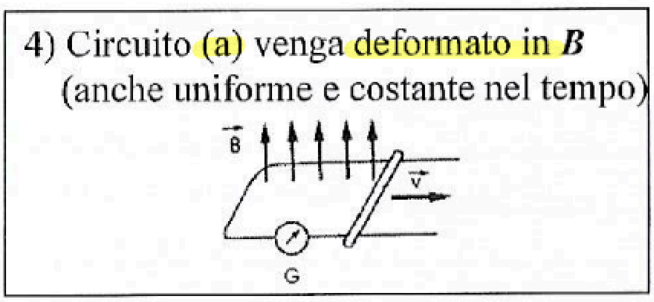
INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

Considero un circuito conduttore, in quest'ultimo si osserva passaggio di corrente quando si presenta uno dei seguenti casi:









In tutti questi casi la corrente nel circuito (a) è dovuta al fatto che il circuito è immerso in un campo B il cui flusso concatenato col circuito stesso è variabile nel tempo.
Questo fenomeno è descritto dalla..

Legge di Faraday-Lenz*: quando il flusso di B, ϕ_B, concatenato con un circuito varia nel tempo, nel circuito si genera una forza elettromotrice f_i detta forza elettromotrice indotta data da

$$f_i = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

Questa è la prima formulazione

DEF: si dice **forza elettromotrice indotta** il lavoro svolto per unità di carica per spostare le cariche lungo l'intero circuito.

$$f_i = \frac{L}{q} = \Delta V = -\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s}$$

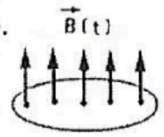
Questa affermazione ci permette di fare un'osservazione e "correggere" la prima formulazione della legge di Faraday-Lenz. Vediamola più avanti.

Il segno negativo? Nel circuito (a) c'è una FEM indotta, che a sua volta genera un campo B.
Il segno indica come questo campo sia orientato
$\rightarrow$ la corrente indotta ha segno tale che secondo la mano dx, il campo B da essa generato si oppone alla variazione del flusso del B originario in cui è immerso il circuito.

Osserv: La corrente indotta in (a) sarà data da $i = \frac{f_i}{R}$ dove R è la resistenza totale del circuito (a) stesso.
Il suo verso di circolazione è quello che contrasta la variazione del flusso. Se la FEM è generata da un B che cresce - $d\phi_B > 0$ - allora la corrente indotta dalla DDP genererà un campo B_i indotto che si oppone alla variazione dell'originale, quindi che lo fa diminuire.

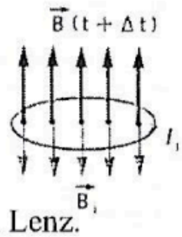
Oss: Quando in un circuito conduttore si ha una forza elettromotrice indotta, questa fa circolare una corrente che genera un campo $\boldsymbol{B}_i$.
Il flusso di $\boldsymbol{B}_i$ concatenato col circuito è $\neq 0$.
Il segno meno nella Legge di F-L indica che il flusso di $\boldsymbol{B}_i$ tende a compensare la variazione del flusso di $\boldsymbol{B}$ (Legge di Lenz)

Es: circuito immerso in B uniforme e crescente nel tempo.
Det. Il verso della corrente indotta



Poiché $\boxed{B(t+\Delta t) > B(t)}$

$\boxed{\Rightarrow \Phi_B}$ aumenta nel tempo
$\Rightarrow$ (per Lenz) $\boldsymbol{B}_i$ deve compensare questo aumento
$\Rightarrow \boldsymbol{B}_i$ opposto a $\boldsymbol{B}$ $\Rightarrow I_i$ in senso orario

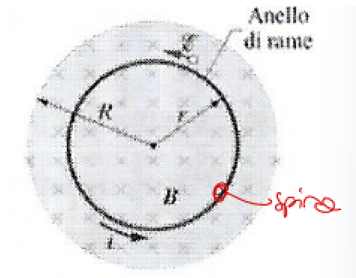


Oss: supponiamo per assurdo che non valga la legge di Lenz.
$\Rightarrow I_i$ in senso antiorario $\Rightarrow \boldsymbol{B}_i$ concorde a $\boldsymbol{B}$
$\Rightarrow \boldsymbol{B}_{tot}$ cresce sempre di più (una crescita iniziale innesca un processo spontaneo di crescita)
$\Rightarrow$ cresce I_i (e la potenza termica dissipata nella spira) in contraddizione con il principio di conservazione dell'energia

Oss: abbiamo visto che se $\boxed{B(t+\Delta t) > B(t)}$ $\Rightarrow \boldsymbol{B}_i$ opposto a $\boldsymbol{B}$
Se invece $\boxed{B(t+\Delta t) < B(t)}$ $\Rightarrow \boldsymbol{B}_i$ concorde a $\boldsymbol{B}$

importante
Il campo indotto $\boldsymbol{B}_i$ non si oppone al campo $\boldsymbol{B}$, ma alla sua variazione

CAMPI ELETTRICI INDOTTI



Esperimento:

Immagino $\vec{B}$ che stia dentro una superficie cilindrica.
Inseriamo un anello di materiale conduttore in B uniforme ⇒ B occupa un volume cilindrico, quindi avrò un problema a simmetria cilindrica.

>Supponiamo che B cresca nel tempo, quindi variando il campo magnetico varia anche il suo flusso - $d\phi_B > 0$.

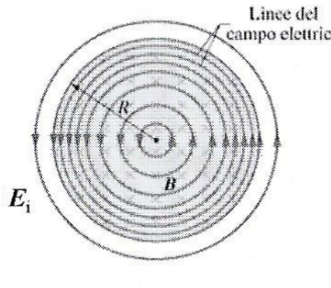
⇒ per la L. di Faraday-Lenz esiste una FEM f_i nell'anello, indotta dal campo B, e questa fa circolare la corrente i
⇒ se esiste una corrente allora ci sono delle cariche (che si muovono), quindi esiste anche un campo elettrico E_i!
Questo perchè so che il campo magnetico non è in grado di mettere in moto cariche (affinché il campo B influenzi il moto di una carica è necessario che esista una componente della velocità $\perp$ al campo B stesso diversa da zero) ⇒ solo il campo elettrico può farlo.

□

Un campo ***B*** variabile nel tempo genera ***E***

DEF: chiamo **campo elettrico indotto** E_i il campo elettrico responsabile del movimento degli elettroni di una corrente indotta da un campo magnetico - ovvero il campo di una f_i.

>Che forma ha il campo elettrico indotto?



E_i non è generato da cariche elettriche che interagiscono, ma dalla variazione di B. Le linee di forza di E_i dovranno essere quindi linee chiuse. In questo caso le linee, per simmetria cilindrica, saranno delle circonferenze.

E_i non ha sorgenti, non sono le cariche a generare campo elettrico ma è il campo a muovere delle cariche - non ci sono delle vere cariche sorgenti! - che partono da una situazione di equilibrio quindi il numero di poli elettrici positivi e negativi è lo stesso! Ergo, le linee non possono essere aperte

>Questa è la proprietà fondamentale di E_i che lo distingue dal campo elettrico E dovuto a cariche elettriche in interazione reciproca.

Osservazione: se B diminuisce, il verso delle linee del campo E indotto sarà opposto (ragionamento sempre perchè la corrente ha il verso opposto alla variazione secondo la regola della mano dx etc etc)

Riformulazione di Faraday-Lenz + Forma Locale

Scoprendo l'esistenza del campo elettrico indotto, so che esiste un legame tra la variazione di flusso magnetico e il campo elettrico. La formalizzo scrivendo la L. di Faraday-Lenz così

$$f_i = \frac{L}{q} = \frac{\oint \vec{F} \cdot d\vec{s}}{q} = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

>Dunque adesso appare chiaro che è sempre il campo elettrico (stavolta indotto) il responsabile dell'esistenza della FEM indotta, e non il campo magnetico in sé.
⇒ Quando c'è $B(t)$ variabile nel tempo allora c'è anche E_i

⇒ Osservo che il campo elettrico E_i è un campo non conservativo - la sua circuitazione non è nulla! - e quindi non ammette potenziale, e quindi non contribuisce nemmeno a quello del campo elettrostatico.

⇒ Osservo che in condizioni stazionarie il campo elettrico, detto elettrostatico E_s, è un campo conservativo (III legge di Maxwell, caso stazionario)

$$\oint \vec{E}_s \cdot d\vec{s} = 0$$

>Quindi il **campo elettrico totale** sarà in generale la somma del campo elettrostatico E_s e quello indotto E_i. Se dovessi quindi calcolare la circuitazione di E totale, troverei la L. di Faraday-Lenz, poiché il campo elettrostatico è conservativo e ha contributo nullo.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint (\vec{E}_s + \vec{E}_i) \cdot d\vec{s} = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

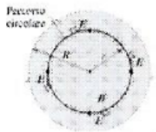
Osserv: mi convinco che questa equazione ha validità generale perchè, se sono in condizioni stazionarie, so che varrà $\frac{d\Phi_B}{dt} = 0$ e di conseguenza la circuitazione $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ risulta nulla

In condizioni stazionarie ritrovo sempre E_s conservativo e nessuna forza e.m. (a meno che siano presenti generatori elettrici).

>La legge di Faraday-Lenz è estremamente utile in caso di circuiti con una forte simmetria, perché ci permette di determinare il campo elettrico totale.

Oss: nel caso della pag. precedente per simmetria si ha

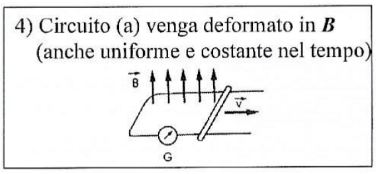
$$f_i = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E\, 2\pi r \Rightarrow E = \left| \frac{1}{2\pi r} \frac{d\Phi_B}{dt} \right|$$



140

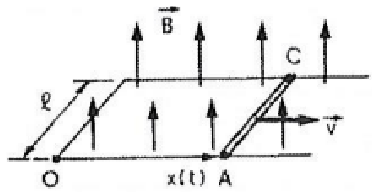
CARICA ELETTRICA

Interpretazione fisica dell'induzione elettromagnetica: caso 4



Consideriamo il caso 4), quello particolare dove il circuito concatenato al campo magnetico cambia forma: caso di <u>flusso tagliato</u>.

DEF: chiamo **flusso tagliato** la configurazione del circuito variabile nel tempo in B costante



>Consideriamo il caso in cui B è uniforme e perpendicolare al circuito conduttore rettangolare con barra $\bar{AC}$ in moto con velocità v.

>Dalla L. di F-L abbiamo che il circuito è sede di una forza elettromotrice

$$|f_i| = |\frac{d\phi_B}{dt}| = \frac{d}{dt}[B\,x(t)|\overline{AC}|] = B\,|\overline{AC}|\frac{dx}{dt} = B\,v\,|\overline{AC}|$$

Ed è lo stesso risultato che si ottiene da F. di Lorentz ($\equiv qE$)

DEF: Infatti sulle cariche di AC agisce F. di Lorentz che corrisponde a un **campo elettromotore -** diretto come AC, responsabile del moto delle cariche. Esiste solo sul lato del circuito con velocità non nulla.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_L}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$$

Se considero le cariche libere nel circuito ⇒ nella bacchetta AC gli elettroni si muovono con velocità v, e per induzione.

La forza elettromotrice presente nel circuito vale $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = Bv|\overline{AC}|$

>Quindi in questo caso, flusso tagliato, l'induzione elettromagnetica è dovuta alla F. di Lorentz, che si rende responsabile del moto delle cariche (e quindi genera la FEM indotta) solo grazie al fatto che il circuito si deforma con una certa velocità perpendicolare al campo magnetico B esterno

Osserv: in tutti gli altri casi in cui in cui applichiamo la legge di Faraday-Lenz, essa non è riconducibile a fenomeni già noti, <u>è un fenomeno nuovo</u>. Questo è l'unico caso in cui può essere "rimpiazzata" da conoscenze pregresse.

Faraday-Lenz: forma locale

Cerchiamo la forma locale della III legge di Maxwell - è comoda perchè vale punto e punto e non necessita di calcolare integrali.
>Partendo dall'equazione che già conosciamo, consideriamo un circuito in quiete e scriviamo: $f_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$

$$\Rightarrow \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

In questo caso suppongo che A non dipende da t, viene meno la dipendenza dell'espressione dalla direzione di movimento, poiché è in quiete, quindi si scrive la derivata parziale rispetto al tempo del solo campo magnetico.

>Per il Th. di Stokes $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A}$ possiamo riscrivere il primo membro:

$$\Rightarrow \quad \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

Questa espressione è vera per qualunque forma del circuito (anche non rigido), quindi dato qualsiasi valore di $A \Rightarrow$ Soddisfa la necessità del rotore di vale in ogni punto.

>Supposto una qualsiasi superficie A arbitraria e aperta posso formulare:

$$\Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{III di Maxwell, o L. di Faraday-Lenz locale}$$

Osser: questa espressione vale anche se non vi sono circuiti nel punto dello spazio considerato. □

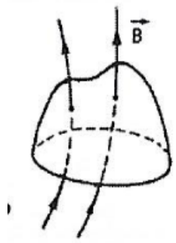
In generale, se il campo magnetico varia nel tempo allora è presente un campo elettrico non conservativo.

In altre parole, se B NON è costante allora il rotore di E non è nullo, e quindi il campo elettrico totale compie lavoro ⇒ questo indica che il campo E non solo esiste, ma ha contributi indotti.

>Se esistono cariche elettriche e B è uniforme, allora il campo E è solo elettrostatico, con rotore nullo.
>Se non esistono cariche e B è uniforme, allora il campo E non esiste direttamente ⇒ non c'è interazione elettrostatica, né il contributo indotto.

>Se $B = const \Rightarrow rot\,\vec{E} = 0$ per cui si ritorna a (III) caso stazionario, dunque questa formulazione è valida in generale. E attraverso i materiali?

AUTOINDUZIONE



Consideriamo un circuito filiforme in condizioni quasi-stazionarie.
"Quasi-stazionarietà": le variazioni delle grandezze elettriche avvengono in tempi molto lenti rispetto ai tempi di propagazione dei segnali nel circuito)

>La corrente i che scorre nel circuito genera un campo B.

$$\text{Se} \quad i = i(t) \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}(t)$$

Se la corrente varia nel tempo allora varia il valore di corrente concatenato alla circuitazione di B, quindi varia il modulo di B.
Se la corrente varia nel tempo, allora non si parla più di corrente stazionaria e per l'equazione di continuità: $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

$\Rightarrow$ Φ_B il flusso di B concatenato col circuito varia nel tempo

$\Rightarrow$ **DEF**: Nel circuito viene a generarsi, per la L. di Faraday-Lenz, una FEM indotta detta f_a forza elettromotrice autoindotta

>Ma dalla L. di Biot-Savart è noto che il campo magnetico è proporzionale alla corrente $B(t) \div i(t)$ e sapendo che il flusso elementare (contributo infinitesimo a $d\phi_B$) si scrive come $d\Phi_B = \vec{B}(t) \cdot d\vec{A}$:

$$\Rightarrow \quad \Phi_B = Li$$

Si ottiene che il flusso di B concatenato con il circuito è proporzionale alla corrente.

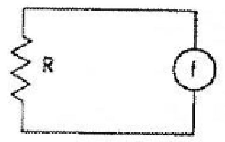
DEF: chiamo il coefficiente L l'**induttanza del circuito**, esprime il legame di proporzionalità tra il campo e la corrente che lo genera. Si misura in Henry (ohm*s)

>Il valore di L dipende solo dalla geometria del circuito, ed eventualmente dal materiale circostante ad esso (perché se il campo dovesse magnetizzare il materiale nelle vicinanze del circuito, allora comparirebbe una corrente di magnetizzazione che porterebbe un contributo al campo B stesso..

>Secondo F-L la **fem autoindotta** vale:

$$f_a = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

Circuito RL: fem auto-indotta



Consideriamo un circuito con resistenza R e generatore di FEM f.
Se $i = i(t)$ $\Rightarrow$ esiste una fem per auto-induzione
Come visto prima, il flusso di B è proporzionale ad i, e quindi se la corrente varia nel tempo, lo farà anche il flusso.

>L'equazione descrittiva del circuito è

$$Ri = f + f_a = f - L\frac{di}{dt}$$

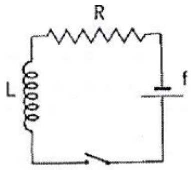
Nota:
A volte la FEM autoindotta è molto minore di quella del generatore, per cui $f_a << f$ e quindi è trascurabile.

DEF: Se però nel circuito è inserito un solenoide (L elevato) oppure se vi sono correnti variabili rapidamente (ma non troppo: siamo nel caso quasi-stazionario!) $\Rightarrow$ f_a non è trascurabile!
⇒ Inserisco in simbolo di induttanza nel circuito e ne tengo conto durante i calcoli di risoluzione. Ottengo così un **circuito RL con generatore di FEM costante**

Risoluzione:

Il circuito è descritto dall'equazione prima introdotta, ed una condizione iniziale.

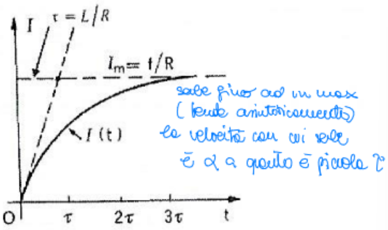
$$\begin{cases} RI = f - L\frac{di}{dt} \\ i(0) = 0 \end{cases}$$



DEF: definisco con $\tau = \frac{L}{R}$ la **costante di tempo** di un **circuito RL**

>Sostituisco all'interno del sistema la grandezza così definita:

$$\Rightarrow \quad \frac{di}{i - \frac{f}{R}} = -\frac{dt}{\tau}$$



>E integro..

$$\Rightarrow \ln(i - \frac{f}{R}) = -\frac{t}{\tau} + cost$$

Sono in grado di risolvere questa equazione differenziale inserendo la condizione iniziale

$$i(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{f}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

>Dal grafico della corrente i scopro che in un circuito RL, tende ad un massimo, a cui arriva dopo un tempo 3τ

>Per quanto riguarda il calcolo della f_a autoindotta, parto dalle sua definizione:

$$f_a = -L\frac{di}{dt} = -fe^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Per $t = 0$ osservo $f_a = -f$ ovvero la fem autoindotta annulla completamente il generatore, motivo per cui la condizione iniziale è $i(0) = 0$
- Per un qualsiasi t abbastanza grande, circa $t > 5\tau$ osservo $f_a = 0$ - tende ad azzerarsi col tempo - quindi si dice che è attiva solo la FEM del generatore, per cui torna l'espressione della corrente i totale che scorre nel circuito come:

$$i = \frac{f}{R}$$

EQUAZIONI DI MAXWELL

Per quanto riguarda il caso stazionario, le leggi che descrivono i fenomeni elettrici e magnetici sono espresse dalle 4 equazioni di Maxwell in questa forma

Caso stazionario nel vuoto

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0} \quad 1^a \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0 \quad 2^a$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) = 0 \quad 3^a \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{x}) \quad 4^a$$

>Grazie alle osservazioni svolte sui campi elettromagnetici variabili nel tempo posso riformulare l'intero sistema, introducendo la dipendenza dal tempo per grandezze, e ottenendo così le leggi descrittive dell'elettromagnetismo nel caso più generale - quello dinamico.

Caso generale, in funzione del tempo:

>La (I) e la (II) continuano a valere in questa forma

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x},t) = \frac{\rho(\vec{x},t)}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x},t) = 0}$$

>Mentre la (III) viene corretta (a causa dell'esistenza del campo elettrico indotto)

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x},t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{x},t)}{\partial t}}$$

Per la IV legge di Maxwell?

Per quanto riguarda la quarta legge sappiamo adesso non esiste solo la corrente per conduzione - dal movimento di elettroni per interazioni tramite campo, e quella di magnetizzazione - per effetto del campo magnetico sui materiali, ma anche quella indotta da campi B a flusso variabile.
Scopriamo come adattarla alla realtà.

>Partendo dall'equazione già nota, applichiamo l'operatore divergenza per scoprire come varia nel tempo..

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

□

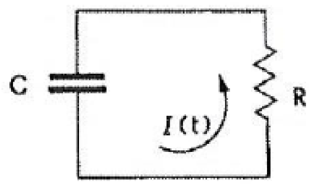
$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\mu_0 \vec{J}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$$

>Ma la divergenza di un rotore è nulla quindi il primo membro che risulterebbe sempre nullo - in ogni punto dello spazio - implica anche il secondo $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$!

>Ma questo è vero solo nel caso stazionario, essendo in generale, valida l'equazione di continuità $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

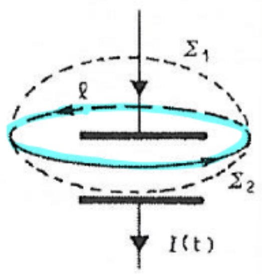
So che nel caso dinamico la derivata parziale nel tempo della densità di carica non è nulla, quindi la divergenza di J non può essere nulla quando le grandezze evolvono nel tempo!

In termini più fisici..



Consideriamo un circuito RC in fase di scarica. Il condensatore sia piano e a facce circolari. Applichiamo la L. di Ampere alla linea l in figura - attraverso le due facce del condensatore. La quarta legge dice

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{ch}$$



>Ma quanto vale la corrente concatenata i_{ch}?
Per definizione si sa essere la corrente che attraversa una qualunque superficie A aperta avente per contorno la linea l scelta.

>Scelgo a turno le due superfici - $\Sigma 1$ e $\Sigma 2$ - e calcolo la circuitazione:

$$A = \sum_2 \quad \Rightarrow i_{ch} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$
$$A = \sum_1 \quad \Rightarrow i_{ch} = -I \quad \Rightarrow \quad \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{s} = -mu_0 \ I \neq 0$$

Trovo due soluzioni diverse quindi la formula non vale per ogni superficie data una linea chiusa!

Quindi la (IV) equazione non è più valida nel caso dipendente dal tempo.
Deriva dalla proprietà del campo B data dall'inesistenza dei monopoli magnetici: le linee di forza di B che entrano in una superficie chiusa sono le stesse che escono ⇒ la sua circuitazione rispetto ad una A chiusa è nulla ⇒ presa una linea l su cui far poggiare due superfici aperte, la loro circuitazione sarà uguale ed opposta (per il verso di percorrenza di l) - dunque l'integrale su tutta l'area chiusa è nullo e tutto torno.
⇒ integrare il campo B su due aree con la stessa l per contorno, non può dare risultati diversi.

>Modificchiamo la IV equazione..
Partiamo dall'equazione di continuità della corrente, da cui prima avevamo trovato l'assurdo.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

>Per la I equazione di Maxwell che sappiamo essere valida.. $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
Possiamo ricavare l'espressione di ρ e sostituirlo nel secondo termine)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0$$

>Estraendo dalla derivata parziale ε_0 perchè è una costante, e nabla poiché entrambi operatori lineari, posso riordinare l'espressione e raccogliere la divergenza

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot (\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = 0$$

Troviamo un'equazione che rappresenta la divergenza nulla di un *vettore* definito come la *somma tra la densità di corrente e la derivata parziale del campo elettrico nel tempo*.

Osservando il vettore che abbiamo scritto

- Nel caso stazionario ritorno ad avere $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$ e quindi il vettore diventa solo il contributo di $\vec{J}$, non essendoci alcune correnti indotte. ok torna tutto
- Il vettore ha sempre divergenza nulla

Idea di Maxwell:

$\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ è un buon candidato a essere sostituito a $\vec{J}$ nella IV equazione! Lo scrivo, ma so che non sto dimostrando nulla per ora.

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

>Le osservazioni sperimentali confermano la validità di questa equazione. Non è ricavabile da altre equazioni o leggi, quindi conveniamo che debba essere una vera e propria legge a sé stante.

DEF: La quantità $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ha le dimensioni di una densità di corrente ed è chiamata **densità di corrente di spostamento**.
Questo termine aggiuntivo esiste per soddisfare l'equazione di continuità della corrente anche quando c'è un campo elettrico che varia nel tempo.

DEF: Il suo flusso attraverso una superficie *S* è detto **corrente di spostamento** I_S attraverso *S*

$$I_s = \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

NB. Anche se I_S è chiamata *corrente*, è una grandezza <u>non</u> collegata ad alcun moto di carica!
Perchè chiaramente, se una corrente è legata ad un campo $E(t)$ che varia nel tempo, quest'ultimo è certamente non elettrostatico, ed un campo elettromotore implica che non ci siano cariche che interagiscono, ma una f indotta che genera corrente (perchè è generato da un campo B con flusso variabile, che per F-L so generare ⇒ la corrente di spostamento esiste a prescindere dalla presenza di conduttori e cariche reali.

FORMA LOCALE PER QUESTA FORMULAZIONE CON IL CONTRIBUTO DI MAXWELL?

La legge della circuitazione di Ampère affermava che "la circuitazione del campo magnetico è proporzionale alla corrente concatenate al percorso chiuso".

>Nel caso generale e dipendente dal tempo però so che oltre alle correnti di conduzione, esistono quelle di spostamento. Per cui la circuitazione del campo B diventa così:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (i_{ch} + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt})$$

Con $\Phi_E = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$, considerando A una qualunque superficie aperta avente per contorno la linea l che rappresenta il circuito considerato. A deve essere orientata secondo la regola della mano destra.

Oss: quando si ha $i_{ch} = 0$, ma assistiamo all'esistenza di solo correnti di spostamento, osserviamo che l'equazione diventa

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

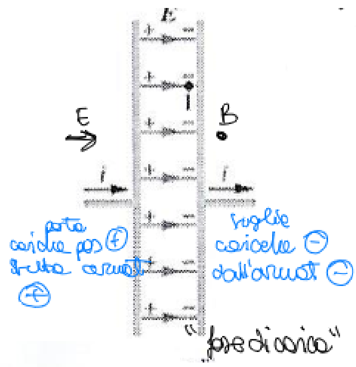
Ed è analoga alla III legge del caso dinamico $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$; quindi ci conferma che

□

Ogni volta che esiste E variabile nel tempo, questo genera un campo B

In questo caso il campo B non è generato da cariche elettriche in modo *(v.d. Forza di Lorentz)* ma dalla variazione del campo E (ecco trovata la specularità dei due campi!) ⇒ la conferma della simmetria tra B ed E è un altro dei trofei del James

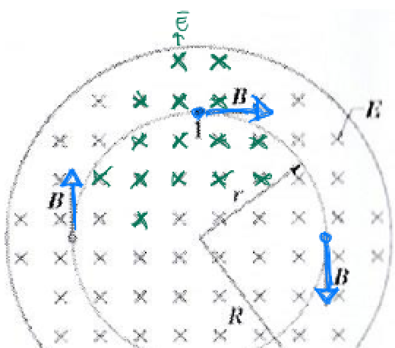
ESEMPIO: CAMPO B INDOTTO DA E VARIABILE



Considero un condensatore in fase di carica.

E varia nel tempo, quindi genera un campo B ⇒ esiste una forza elettromotrice indotta che da origine ad una corrente di spostamento, e da questa si genera il campo magnetico

⇒ Otteniamo un campo magnetico che non è più generato solo da correnti (concatenate), da cariche in moto!



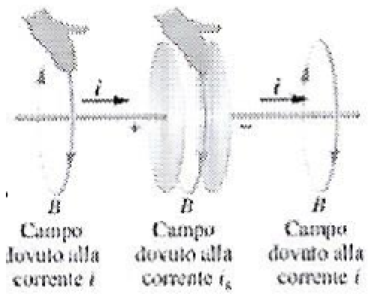
CORRENTI DI SPOSTAMENTO

Nella legge di Ampère-Maxwell il termine $\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ ha le dimensioni di una corrente; lo chiamiamo <u>corrente di spostamento</u> nel definirlo, seppur non ci sia nessun moto di carica. Cerco di uniformare la notazione e compatto l'espressione:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (i_{ch} + i_{s,ch})$$

Con $i_{s,ch}$ la corrente di spostamento concatenata alla linea l.

><u>Riprendo il condensatore in carica per verificare la validità</u>..
Si determinano le correnti presenti quando si carica un condensatore
Tra le armature c'è i_s mentre nel circuito c'è i_c



>La corrente di spostamento tra le armature:

$$i_s = \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d(EA)}{dt} = \varepsilon_0 A \frac{dE}{dt}$$

>La corrente di conduzione nel circuito:

$$i = \frac{dq}{dt} = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_0 d(EA)}{dt} = \varepsilon_0 A \frac{dE}{dt} \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

Quindi risulta $i_s = i_c$

Moto di cariche per conduzione $\equiv$ corrente di spostamento nel condensatore. Ora i risultati tornano (vd. p103)
So che esiste anche una variazione del campo E, se calcolassi la circuitazione di B ?

>Possiamo anche calcolare il campo B nella regione tra i piani delle armature, ovviamente il contributo dato dalle correnti di conduzione sarà nullo, e sarà presente solo il termine inerente alle correnti di spostamento.
Utilizzo la III di Maxwell

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

>Nel condensatore $r \leq R$

$$B(2\pi r) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}[E(2\pi r^2)]$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} \frac{dE}{dt} r$$

>Fuori dal condensatore $r \geq R$ $B(2\pi r) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}[E(2\pi R^2)]$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} \frac{dE}{dt} \frac{R^2}{r}$$

ELETTROMAGNETISMO: NEL VUOTO

CASO GENERALE

Le 4 equazioni di maxwell hanno due forme equivalenti, l'unico accorgimento è che la forma locale implica di avere i due campi $\vec{B}$ ed $\vec{E}$ continui e derivabili (perché viene applicato l'operatore divergenza)

FORMA INTEGRALE

$$(1) \quad \Phi_E \equiv \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Il flusso di E attraverso una superficie chiusa è il prodotto scalare tra il campo E e l'area chiusa considerata. Dipende solo dalle cariche contenute ad A stesso, a meno di una costante di proporzionalità (inversa).

$$(2) \quad \Phi_B \equiv \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Il flusso di B attraverso una superficie chiusa - valida sia in caso dinamico che stazionario - è nullo. Implica che le linee di forza del campo B siano sempre chiuse, ed evidenzia l'inesistenza del monopolo magnetico.

$$(3) \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

La circuitazione del campo E su una linea chiusa qualsiasi è la derivata temporale del flusso magnetico nel tempo. Significa che se esiste un campo B variabile nel tempo, questo induce un campo elettrico E (non conservativo).

$$(4) \quad \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (i_{ch} + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt})$$

La circuitazione del campo B è proporzionale (di μ_0) alla somma dei contributi dati dalle correnti concatenate al circuito *l* e dalle correnti di spostamento.
Le correnti di spostamento sono calcolate come la derivata temporale del flusso del campo elettrico, anch'esso concatenato al circuito *l*, moltiplicato per la costante

dielettrica del vuoto.
Circuito $l \equiv$ moto dei portatori di carica

FORMA LOCALE

$$(\text{ I }) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$(\text{ II }) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(\text{ III }) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Se esiste un campo elettrico E che varia nel tempo, allora esiste un campo elettrico con rotore non nullo (a causa della corrente non stazionaria). Questo campo E dunque genera un campo magnetico indotto variabile nel tempo.
In realtà non è proprio il campo elettrico a generare B, ma l'esistenza di uno implica l'altro.

$$(\text{ IV }) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

>A queste va aggiunta la forza su una carica puntiforme immersa in un campo elettro-magnetico.

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Oss: se conosco ρ e $\vec{J}$ risolvo i problemi di scoprire i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Da qui posso studiare il moto di una carica (o portatore di carica) in un generico campo elettro-magnetico.

>Valori al contorno: il valore dei campi E.M. al limite di certe regioni considerate. In generale vanno all'infinito e bisogna porre le condizioni all'infinito. Posso comunque risolvere il problema.

>In ogni caso da queste ultimate ricavo le formule nel caso con i materiali e non, caso stazionario o dipendente dal tempo.

CASO GENERALE NELLA MATERIA

Se si tratta di un mezzo ILO (isotropo, lineare ed omogeneo), basta sostituire nelle equazioni nel vuoto

$$\varepsilon \to \varepsilon_0 \quad \text{e} \quad \mu \to \mu_0$$

>In generale, poiché valgono le seguenti relazioni lineari $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ e $\vec{B} = \mu \vec{H}$, si osserva che le equazioni diventano:

<u>FORMA INTEGRALE</u>

$$(\ 1\ ) \qquad \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = q_{int}$$

$$(\ 2\ ) \qquad \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

La circuitazione del campo magnetico su un'area chiusa, anche attraverso i materiali, è nulla, implicando che linee di forza sono chiuse.

$$(\ 3\ ) \qquad \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$(\ 4\ ) \qquad \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{s} = i_{ch} + \frac{d\Phi_D}{dt}$$

<u>FORMA LOCALE</u>

>Nella forma locale, le relazioni strutturali assumono questa forma $\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ $\quad \vec{H} \equiv \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$

$$(\ \mathrm{I}\ ) \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \qquad\qquad (\ \mathrm{III}\ ) \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(\text{ II }) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad\qquad (\text{ IV }) \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

NB. dalle equazioni di Maxwell, si può ricavare matematicamente che il campo elettromagnetico si propaga sotto forma di onde (le onde elettromagnetiche)

ONDE ELETTROMAGNETICHE