RICERCA

22/02/2023

minimo cenni teorici

$\boxed{PL}$

- PROGRAMMAZ. LINEARE

facile risolubile in tempi polinomiali

"determinaz dell' $\boxed{\text{ottimo globale}}$ in tempi polinomiali"

coincide con locale se prog. è lineare

$\boxed{PLI}$

cambia solo variab intere

=> comporta problema difficile

ottimo globale trovo solo in tempi esponenziali

ottimo locale in tempi polinom

solo buona ma non tutta

⇓

soluzione euristica, tempo polin e non globale

(non è il meglio possib ma è BUONA)

CONCETTI PRELIMINARI

1. come capisco "insieme X è convesso"

2. "funzione f è convessa"

DEF?

PERCHÉ SERVE? PL è un sottoinsieme della programm. convessa

più semplice basta:

$\forall x, y \in A \cap B$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ ho $z = \lambda x + (1-\lambda) y$ con $z \in A$ per la convessità di A ($x \in x$ e $y \in A$) ma pure $z \in B$ ($x \in x$ e $y \in B$) $\Rightarrow z \in A \cap B$ ♣

preso $A, B \in \mathbb{R}^n$ convessi, $A \cap B$ è convesso

DIM: dalla def convesso $\forall z \in$ insieme $z = \lambda x + (1-\lambda) y$ con $\lambda \in [0,1]$

→ per definiz di $A \cap B$: $\forall a, b \in A \cap B$: $a \in A, a \in B \wedge b \in A, b \in B$

→ se A e B sono già convessi, so che $\forall a, b \in A \cap B$ si verifica $z = \lambda x + (1-\lambda) y$ $z \in A \cap B$

=> anche $A \cap B$ è convesso

DEF: concetto modello matematico (o prob. di ottimizzazione)

- variabili decisionali ⇒ quello che cerco nel problema

x caso generale? non lineare, intero

→ funz. obiettivo (anche ext complesso)

→ vincoli sono qualsiasi cosa

PLI

Vincoli: non sono un insieme convesso nel caso PLI ⇒ motivo per cui sono difficili

vincolo uguaglianza ⇓ cioè una retta ($\mathbb{R}^2$)

vs disug ⇓ oltre alla retta fornisce anche un semipiano di soluzioni

frontiera dell'insieme delle soluzioni

PROB. NON LINEARE $\xrightarrow{\text{caso particolare}}$ PROG. CONVESSA $\xrightarrow{\text{caso particolare}}$ PROGR. LINEARE

funz e vincoli qualsiasi

f convessa, vincoli concavi/lineari

funz e vincoli sono lineari

come genero in forma algebrica il segmento che congiunge?

=> combinaz convessa dei punti

PROGRAMMAZIONE CONVESSA

DEF:

* COMBINAZ. CONVESSA (di due punti): permette di generare il segmento congiungente

dati $x, y \in \mathbb{R}^n$: $z = \lambda x + (1-\lambda) y$ comb convessa di x, y $\forall \lambda \in [0;1]$

NB. $\lambda \in [0,1]$ necessario affinché sia CONVESSA, altrimenti è una COMB. LINEARE

DEF: alternativa

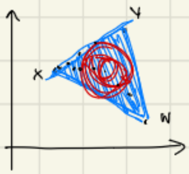
$z = \lambda_1 x + \lambda_2 y$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

* in generale: si dice combinazione convessa di k punti $\bar{x}_1, \dots \bar{x}_k \in \mathbb{R}^n$

$$z = \sum_i^k \lambda_i \bar{x}_i \qquad \text{con } \lambda_i \geq 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1$$



trovo l'area interna ai punti!

=> è una REGIONE CONVESSA

DEF:

* insieme convesso: se $\forall$ coppia di punti interni all'insieme, la loro combinaz convessa risiede completamente nell'insieme

in generale: un insieme $A \in \mathbb{R}^n$ non vuoto si dice convesso se $\forall x, y \in A$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ il punto $z = \lambda x + (1-\lambda) y$ risulta appartenere ad A.

PROPOSIZIONE:

L'intersezione di due insiemi convessi $A, B \in \mathbb{R}^n$, $A \cap B$ è ancora un insieme convesso.

DIM:

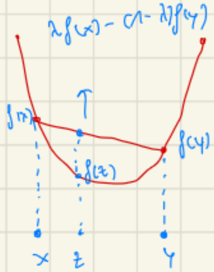
$\forall x, y \in A \cap B$, $\forall \lambda \in [0,1]$ si ha $z = \lambda x + (1-\lambda) y$

$\Rightarrow$ per la convessità di A $z \in A$

$\Rightarrow$ per la convessità di B $z \in B$

$\Rightarrow z \in A \cap B$

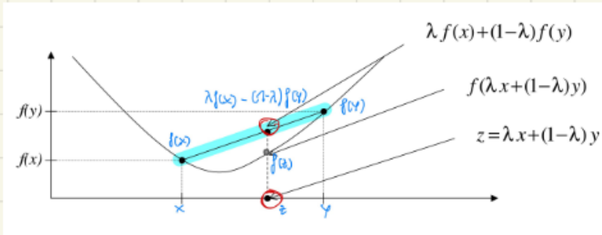
♣



DEF:

* FUNZIONE CONVESSA: sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso e $f: X \to \mathbb{R}$ convessa se $\forall x,y \in X$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ si ha:

$$\underbrace{f(\lambda x + (1-\lambda)y)}_{\text{qualsiasi punto della funzione tra x e y}} \le \underbrace{\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)}_{\text{qualsiasi punto sulla retta congiungente i due punti della funz.}}$$



osservazioni: quando ho max e min locali (= valgono solo in un intorno) posso trovare che per intorni più grandi $\exists$ punti migliori
$\Rightarrow$ se $N(x) \equiv dom(f)$ trovo che x è l'ottimo globale di

DEF:

* OTTIMO LOCALE: $x \in X$ è un ottimo locale se $\exists$ un intorno $N \subseteq X$ tale che: $f(x) \le f(y), \quad \forall y \in N$

DEF

* INTORNO ESATTO: N è un intorno esatto se un ottimo locale rispetto ad N è anche ottimo globale

NB. un intorno esatto genera l'ottimo globale

ESEMPIO:

$$N_\varepsilon(x) := \{ y \in X : \|y - x\| \le \varepsilon \text{ con } \varepsilon > 0 \} \quad \text{con } \varepsilon = 1$$

è un intorno esatto

teorema belliss
x la prog convessa

* TH FONDAMENTALE: si consideri un problema $\min\{f(x) : x \in X\}$ con $X \subseteq \mathbb{R}^n$

se sia l'insieme dei variab sia la funzione sono convesse

$\Rightarrow$ l'ottimo locale è anche globale

* in altre parole:

Sia x un punto di ottimo locale, dalla definizione ho:

- $\exists \varepsilon > 0 \quad f(x) \leq f(y) \quad \forall y \in N_\varepsilon(x) = \{ y \in X : \|y - x\| \leq \varepsilon \}$

intorno esatto

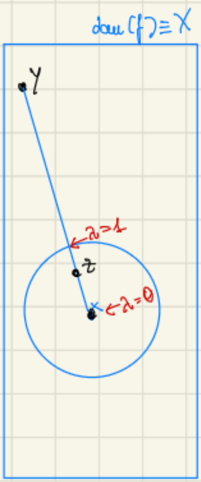
Da questa affermazione bisogna dimostrare che $f(x) \leq f(y) \ \forall y \in X$

dimostro $f(x) \leq f(y) \quad \forall y \in X$

dati f ed X convessi

per ipotesi x è ottimo locale

insieme delle soluz con distanza ε da x



- ott. locale $\Rightarrow f(x) \leq f(y) : y \in N_\varepsilon(x)$

voglio arrivare a $f(x) \leq f(y) : \forall y \in X$

* scelgo un y fuori da $N_\varepsilon(x)$

x e $y \in$ insieme convesso $\Rightarrow$ posso generare il seguente

$z = \lambda x + (1-\lambda) y$

non scelgo $\forall z$, ma $z \neq x$ quindi $\lambda \neq 1$, $\neq 0$, molto prossimo a 1 o 0

$\Rightarrow$ di sicuro $z \in N_\varepsilon(x)$

$\Rightarrow$ quindi per costruzione di TUTTI I PUNTI IN $N_\varepsilon(x)$, z ha un valore peggiore di quello di x ① $f(z) \geq f(x)$

ORA PERÒ:

(2) * f è convessa: $f(z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

* unisco le condiz trovate ed isolo y con $x \neq z$ $\lambda \in (0,1)$

$$\begin{cases} f(z) \geq f(x) \\ f(z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \end{cases}$$

$$f(y) \geq \frac{f(z) - \lambda f(x)}{\underbrace{(1-\lambda)}_{\neq 0 \text{ e positivo}}} \geq \frac{f(x) - \lambda f(x)}{(1-\lambda)} = f(x)$$

$\Rightarrow f(y) \geq f(x)$ ♣

ESERCIZIO ESEMPIO: modelli lineari (prog) $\Rightarrow$ facili da risolvere graficamente quando in $\mathbb{R}^2$

1. problema di produzione tipo I

ottimizz acquisto materiale $\Rightarrow$ modellizza il problema matematico

variabili:

qnt materiali da acquistare

- $x_1, x_2 \geq 0$

vincoli: vincoli di prod — qnt che salta fuori

- prod(A) $\geq 1.8 \Rightarrow 0.2x_1 + 0.3x_2 \geq 1.8$
- prod(B) $\geq 1.2 \Rightarrow 0.2x_1 + 0.1x_2 \geq 1.2$
- prod(C) $\geq 2.4 \Rightarrow 0.3x_1 + 0.3x_2 \geq 2.4$

vincoli

costo: $5x_1$ $6x_2$ $\rightarrow$ problema minimizza $5x_1 + 6x_2$ e rappresentalo limitatamente al 1° quadrante $(x_1, x_2 \geq 0)$

rappresento rette, mica

- $0.2x_1 + 0.3x_2 = 1.8$

$2x_1 + 3x_2 = 18$

azzero

$x_2 = \frac{18}{3} - \frac{2x_1}{3}$

- $2x_1 + x_2 = 12$
- $3x_1 + 3x_2 = 24$ non sta in $(0,0)$

$\Rightarrow$ semipiano opposto

POST LEZIONE 22/02

dimostrazione teorema

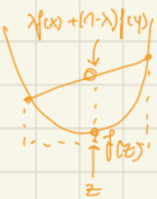
enunciato: sia $\min\{f(x) : x \in X\}$ un prob di ottimizzazione
con $X \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso e f convessa.
$\Rightarrow$ ogni punto di ottimo locale è anche globale

dimostrazione:

dalla def di insieme e funzione convessi

- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto: $\forall x, y \in A$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ $\forall z = \lambda x + (1-\lambda)y, z \in A$
- $X \subseteq \mathbb{R}^n$. $f: X \to \mathbb{R}$ $\forall \lambda \in [0,1], \forall x, y$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$
$$f(z) \leq \dots$$



- immaginiamo di prendere un intorno così costruito
1. x è un pto di min locale
2. $\varepsilon > 0$

$N_\varepsilon(x) = \{ y \in X : \|y - x\| \leq \varepsilon \}$

$\Rightarrow$ per dimostrare devo verificare che $\forall y \in N_\varepsilon(x)$: $f(x) \leq f(y)$ $\Rightarrow$ con generale che poi posso estendere a dom$(f) \Rightarrow$ globale

- sia $y \in X$ qualsiasi:

$$\begin{cases} z = \lambda x + (1-\lambda) f(y) \\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \end{cases}$$

isolo $f(y)$ $\quad f(z)$

$$f(y) \geq \frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - \lambda f(x)}{(1-\lambda)}$$

$\rightarrow > 0$ con la condiz $\lambda \in [0,1]$

$f(z) - \lambda f(x) \geq f(x) - \lambda f(x)$ sempre vero perché x è pto di min da HP $\Rightarrow$ $f(y) \geq \dfrac{f(x) - \lambda f(x)}{(1-\lambda)} = \dfrac{(1-\lambda)}{(1-\lambda)} f(x)$

quindi $z \in N_\varepsilon(x)$: $f(z) \geq f(x)$ ma $f(y) \geq f(x)$

il punto più forte che verifica la condiz di ottimo è x e rimane quello $\forall z$ nell'intorno locale $\Rightarrow$ non solo! $\forall$ punto locale + punto su segmenti generati con qualsiasi punto di X

$\Rightarrow$ vale su dom(f) GLOBALE

27/02/2023

REGIONE AMMISSIBILE CHE SALTA FUORI TOGLIENDO LE ZONE INDICATE DAI VINCOLI → tutti i punti (infiniti) in questa regione sono soluzioni accettabili

⇒ regione convessa (∩ di insiemi convessi)

⇒ non limitato

POV GRAFICO:

deriva dalla convessità dei dei problemi PL

* VERTICI: punti di intersezione tra i vincoli strutturali del problema
  ⇒ un problema di PL ha un numero di vincoli finito (n)
  ⇒ anche se i punti della regione ammissibile sono ∞ i vertici $\exists$ in numero finito

⇒ se esiste, l'ottimo è tra i vertici del problema. PERCHÈ?

* Come trovo i vertici?
  In generale metto a sistema i vincoli, così ne trovo l'intersezione
  ⇒ in realtà devo intersecare LA FRONTIERA della regione individuata dai vincoli.

* Gradiente f.obj
  la funzione "migliora" nella direzione del suo gradiente

non so che cazzo sia sta roba che ho scritto

Quando il fascio di funz determinato dalla FO va ad intersecare la regione ammissibile in un punto di tangenza ⇒ trovo un vertice

sposto il fascio del vincolo lungo la direzione ad esso $\perp$ e concorde al verso di ∇FO

DEF:

* regione amm. LIMITATA: quando si può trovare una norma euclidea per cui si può disegnare una ipersfera che contenga interamente la regione.

FILE: PRINCIPI E FONDAMENTI

* FORMULAZIONE DEI PROBLEMI DI PL

FORMA CANONICA:

$$\min \; c^t \bar{x}$$
$$A\bar{x} \geq \bar{b}$$
$$\bar{x} \geq 0$$

necessaria per applicare gli algoritmi di risoluzione

FORMA STANDARD:

$$\min \; c^t \bar{x}$$
$$A\bar{x} = \bar{b}$$
$$\bar{x} \geq 0$$

con $c, x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

FO:

$\bar{c}^t \cdot \bar{x}$ è un prodotto interno $(1 \dots n) \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ che risulta in uno scalare

$$\min \; c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

VINCOLI:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{array}\right\} \text{\# m vincoli strutturali}$$

- ogni vincolo ha n coefficienti (legati alle n variabili)
  $\Rightarrow$ matrice A ha m righe (vincoli) x n colonne (variabili)

$x_1, x_2 \dots x_i \dots x_n \geq 0$ # n vincoli non negatività pag 5/20

rango mat A indica il num di vincoli indip. (non ridondanti

RICORDI DA ALGEBRA:

• un sistema lineare ha soluzione quando:

$A\underline{x} = \underline{b}$ $\qquad r(A|\underline{b}) = r(A)$ $\qquad r(A) = m$

CASI:

① $n = m$

$A\underline{x} = \underline{b}$

$\det A \neq 0$

$\exists$ una sola soluzione $x = A^{-1} \cdot \underline{b}$

② $n > m$ + var di vincoli $\qquad \infty^{n-m}$ soluzioni

$n - m$ = gradi di libertà

=> scelgo $n-m$ variabili da fissare per trovare tutti gli altri • quali scelgo?

$$\binom{n}{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

↑ CASO FORMA STANDARD

perché aggiungiamo variabili in modo da avere solo vincoli di disuguag.

ho n vertici max in un problema o $n-m$ sono in surplus e le azzero per trovare la soluzione

=> $\binom{n}{n-m}$ possibili vertici ~ num finito!

problema con ∞ sol (≡ punti reg ammiss) => ha al max un num finito di soluzioni ottime potenziali

* FORMULAZIONI RICONDUCIBILI ALLA STANDARD

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \Rightarrow a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + y_i = b_i$$

$y_i \geq 0$ VARIABILE DI SLACK: misura la differenza tra il 1° ed il 2° membro per un vincolo di disuguaglianza

=> la introduco così posso considerare vincoli di uguaglianza e quindi la frontiera del vincolo stesso

• ad ogni vincolo trasformato, il problema cresce dimensionalmente.

mi interessano le frontiere dei vincoli - dette spigoli - perché mi interessa cercare le loro intersezioni: i VERTICI

⇓

* per intersecare due vincoli mi basta porre a zero le var di slack di questi due (metto a sistema con $y_i = 0$)

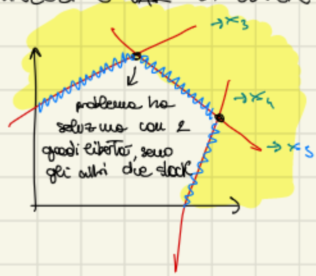
slack azzerata significa che non c'è diff tra 1° e 2° membro => uguaglianza

nel caso standard $n > m$ scopro che le variabili in soprannumero vengono settate a zero quando sto generando dei vertici

VARIAB NON VINCOLATE IN SEGNO

p7/20 non ho capito

* VINCOLI E VAR DI SLACK



1. problema canonico con x_1, x_2

aggiungo $x_{3,4,5}$ per trasformare semipiani in rette

2. problema standard con vincoli uguaglianza e ora $x_{1,2,3,4,5}$

TRASFORMAZIONE VINCOLO:

n $(x_1 x_2)$ $\rightarrow$ $n+m$ $(x_1\, x_2\, \underbrace{x_3\, x_4\, x_5}_{\text{var di slack}})$

m vincoli

canonica → standard

posso risolvere ∞^2 soluz

NUM MAX DI VERTICI DI UN POLIEDRO CHE IN FORMA STANDARD N VAR ED M VINCOLI

è $\binom{n}{n-m}$ [gradi di libertà]

$n-m$ da fissare a zero

nella risoluzione

* separo A in mat var (non di base) da fissare N / di base B → vettori di variabili da ricavare dal sistema

RECAP

$(n-m)$ var non di base

m vincoli
n variabili

$A\underline{x} = b$ → $\begin{bmatrix} \underline{x_B} \\ \underline{x_N} \end{bmatrix}$ → scompongo vettore var in due per separare base e non di base ($\underline{x_B}$: m, $\underline{x_N}$: $n-m$)

$m \times m$ ← $(B|N)$

B ↓ ricavate dal sistema

N: $m \times n-m$, $\underline{x_N} = 0$ fissate

var eccedenti $n-m$ da fissare

* $B\underline{x_B} + N\underline{x_N} = b$

* $B\underline{x_B} = \underline{b}$

$\underline{x_B} = B^{-1} \cdot \underline{b}$

var ecc a zero trovo questa restrizione del sistema

$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \dots \\ \dots \end{bmatrix}$ $\quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $\quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

$\underline{x_B} = B^{-1} \cdot b$

$A\underline{x} = \underline{b}$ $\Rightarrow$ se $\det A \neq 0$, $\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$

$A\underline{x} = b$

$(B|N)\underline{x} = b$

$x \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_B \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$ con $(x \dots x_B)$ vettori della base (m)

$(x_{B+1} \dots x_N)$ vettori extra $(n-m)$

$A \rightarrow (B|N)$ $\Rightarrow$ $B\underline{x_B} + N\underline{x_N} = b$

$\underline{x_B}$ ricavate dal sistema, $\underline{x_N}$ fissato

$(m \times m)(m \times 1)$ $\quad (m \times n-m)(n-m \times 1)$

* SOLUZIONI DI BASE (inizio)

(n orig + m vincoli)

Le variabili originali di un problema (dalla forma canonica): n−m var

Ora ho aggiunto le var di slack (sono in forma standard): n variabili

forma standard:

$$\min \underline{c}^T \underline{x}$$
$$A\underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq 0$$

* A è una matrice $m \times n$ con $n > m$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & & & a_{1m+1} & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & a_{mm} & & & a_{mn} \end{array}\right]$$

$$= (\;B \;|\; N\;)$$

B ↓ $(m \times m)$ matrice di base (?)

N ↓ $m \times (m-n)$ 4 gradi di libertà

* x è il vettore delle variabili totali (decisionali + slack)

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x_B \\ \hline x_N \end{matrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow 1 \times m \\ \rightarrow 1 \times (n-m) \end{matrix}$$

variabili in base

variabili fuori base ⇒ SURPLUS! sono azzerate

SISTEMA CHE DESCRIVE IL MODELLO:

$$\underline{A}\underline{x} = \underline{b} \quad \Rightarrow \quad (B, N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \underline{b}$$

$$Bx_B + Nx_N = \underline{b}$$

ci sono esattamente n var con CCR=0

(definizioni)

DEF:

* SOLUZIONI DI BASE: considero il vettore $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix}$ in cui le (n-m) componenti di x_N sono fissate e nulle, è detto soluzione di base se

$$\boxed{x_B = B^{-1} b}$$ e le variabili in x_B sono dette di base

DEF:

* SOL. BASE AMMISSIBILE: una soluzione di base $x = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix}$ si dice ammissibile se $x_B \geq 0$

Def

* SOL. BASE DEGENERE: se ogni componente di x_B è > 0 allora si chiama NON DEGENERE.
Se invece $\exists$ almeno una variabile di base con valore nullo allora la soluzione è DEGENERE

* esempio determinaz sol di base *
osserva bene l'esempio a pag 18/20 * vedi ESE

NB se in un problema trovo che in ogni vertice della regione ammissibile ho esattamente (n-m) variabili nulle

$\Rightarrow$ il sistema dei vincoli ammette una ed una sola soluzione

$\Rightarrow$ soluz ammissibile che rispetta tutti i vincoli

QUESTA PARTE NON SONO SLIDE MA PORTA A VOCE

06|03|2023

ANALISI DELLE SOLUZIONI DI BASE: SIMPLESSO

"interseco i vincoli ricavo i vertici del poliedro ⇒ le soluzioni di base" ← idea di partenza

soluz di base non sono limitate ai soli vertici

1 scrivo il modello in forma standard (min e uguaglianze)

2 ogni vincolo sarà associato ad una variabile di slack che mi indica se il suo vincolo è soddisfatto in uguaglianza stretta o meno.

⇒ quando $x_i=0$ (slack) significa che sono sulla frontiera del suo vincolo

⇒ $x_i>0$: mi trovo sul semipiano ammissibile ⇒ vincolo inutilizzato!

⇒ $x_i<0$: mi trovo sul semipiano opposto

$x_1=x_2=0$
↓
$x_3>0$ ridondante!

3 inizio a cercare le soluzioni di base

* passo successivo: iterazione del simplesso

Una volta calcolate le soluzioni di base, ho trovato tutti i vertici del poliedro.

⇒ Faccio un'analisi di questi punti trovati:

valutaz soluz degenere

- analizzo quante variabili nulle appaiono e le confronto con la cardinalità dell'insieme delle variabili fuori base

⇒ in $\mathbb{R}^2$ sono 2, sono le var corrisp ai vincoli intersecati, sono quelle nulle

- so che giocando con quali variabili vanno a zero e quali sono positive, trovo diverse intersezioni dei vincoli

⇒ spostamento tra vertici!

immagino di essere in $\mathbb{R}^2$ ↓

spostamento tra vertici:

idea del simplesso

* due variabili passano da positive (in base) ad azzerate (fuori base) e viceversa

*: cardinalità di x_B

→ nel caso di vertice degenere, le var che cambiano possono non modificare il vertice ad uno adiacente ma solo la base

→ sposto tra vertici adiacenti finché ne trovo uno che è migliore di tutti i suoi vicini

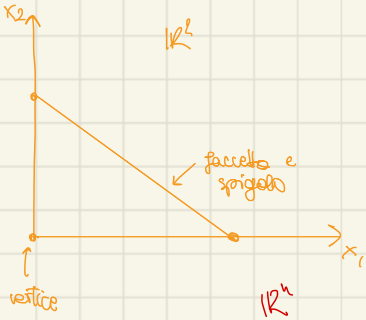
⇒ ottimo locale, nell'intorno dei suoi "vicini" ⇒ dal TH fondamentale, con P convesso per ipotesi

⇓

il vertice è un ottimo globale

CCR delle slack ^{P} → valori variab D

in $\mathbb{R}^2$ questo non vale, la ridondanza non fa crollare



ridondanza dei vincoli è relativa in $\mathbb{R}^n$ alla REGIONE AMMISSIBILE

↓

se tolgo un vincolo ridondante

VERTICE DEGENERE RIMANE

la STRUTTURA/REGIONE "CROLLA" non è più identificata

$\mathbb{R}^n$

LIMITATEZZA $\Leftrightarrow$ RIDONDANZ

$\mathbb{R}^2$

RIDONDANZA $\Rightarrow$ LIMITAT

vertici escono da intersez. => pongo n-m variabili di slack a zero

∞^{n-m} soluzioni

*POTENZIALE SOLUZ. OTTIMA: tutti i vertici sono soluzioni di base, e viceversa.
se dal modello riesco a generare i vertici => genero anche le sol. di base!

Dal POV del sistema: se lo risolvo (trovo $\underline{x}$) ottengo i vertici del problema

$(m\times n)(n\times 1)=(m\times 1)$

$$A x = b$$

* sono nel caso $n>m$ perché ho introdotto m variabili di slack durante la standardizzazione
↓ surplus
"elimino" n-m variabili => fisso i gradi di libertà
=> fisso x_N a zero così li elimino dal sistema

$$[B|N]\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b$$

se ho n var ne scelgo m alla volta
$\binom{n}{m}$ fisso a 0 le var extra => trovo i vertici

$\binom{n}{m} \rightarrow B$ $\qquad$ $\binom{n}{n-m} \rightarrow N$

sfrutto la scomposizione per trovare le soluz. di base con cui cerco i vertici

scelgo queste e faccio B "genero tutte le possibili matrici di base"

CASISTICA SOLUZIONE DI BASE

- B non invertibile => non esiste un VERTICE assoc. alla base (non c'è la soluzione)
- B invertibile => calcolo il valore di x_B variabili di base
  det B $\neq 0$ e quadrata
  - ↓ trovo x_B strett. positivo
    SOLUZ. DI BASE NON DEGENERE
    $x = (\underset{>0}{x_B}, \underset{=0}{x_N})$
  - ↓ trovo almeno una var di x_B nulla
    SOLUZ. DI BASE DEGENERE
    problematica
    le var a 0 devono essere n-m
    se ce n'è anche solo 1+
    => devo capire quale var sta in base o no => a turno tutte
    => un vertice genera tante sol di base

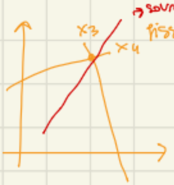
NB. se $\exists$ un elemento di $x_B < 0$ allora la soluzione non è ammissibile

proposizione non generalizzabile a R^n con $n>2$

* in $\mathbb{R}^2$ se ho vertici degeneri => associati a vincoli ridondanti

esempio:

1 vertice degenere <-> associato a + basi



-> sovrannumero e ne ho tanti quanti sono le var a 0 fissi
=> ho + vincoli di quanti siano necessari a generare il vertice

tanti modi per scegliere k var fuori base -> tante basi ad ogni vertice così

trovo 6 vertici di cui 1 genera una matrice con det = 0
=> non invertibile

se imposto $x_N \rightarrow 0$ => $Bx_B + \cancel{Nx_N} = b$
↓ var di base a 0 non le soluzioni!

$x_B = B^{-1}\cdot b$
↑ le calcolo così
$x = (x_B, x_N)$
↓ considerale! anche se sono nulle

FILE: POLITOPI CONVESSI E TEOREMI

vettore $(n \times 1)$ — $(1 \times n)$ — scalare => prodotto commutato

DEF:

* **IPERPIANO:** $H = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha^t \underline{x} = \alpha_0 \}$

[una retta è un iperpiano generalizzato a $\mathbb{R}^2$]

NB: normalmente un iperpiano separa in due lo spazio in cui esso esiste => identifico due spazi diversi

=> i vincoli sono iperpiani che separano lo spazio in una regione ammissibile ed una no

es. retta tra due semipiani

semispazio affine perché $\alpha_0 \neq 0$ => traslazione affine

DEF:

* **SEMI-SPAZIO:** $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha^t \underline{x} \geq \alpha_0 \}$ ed $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha^t \underline{x} \leq \alpha_0 \}$

* **PUNTO ESTREMO:** ($\equiv$ VERTICE) punto che non posso esprimere come combinazione convessa.

  => punto $\underline{x}$ di un insieme convesso P per cui non esistono due punti distinti x_1, x_2 tali che $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \quad \lambda \in (0,1)$

• semipiano ammissibile è quello che contiene l'origine

DEF:

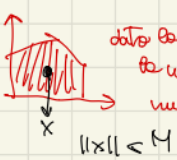
* **POLIEDRO:** (convesso) è l'intersezione di un numero finito di semispazi ed iperpiani

* **POLITOPO:** (convesso) un poliedro limitato e non vuoto

$$P := \{ x \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} = \underline{b} \ ; \ \underline{x} \geq 0 \}$$

limitato se: $\exists M > 0 : \|x\| \leq M \quad \forall x \in P$

NB: ogni poliedro ha un numero finito di vertici (punti estremi)



dato la regione, $\forall$ punto di essa la norma euclidea è $<$ di M numero suff grande

=> tutta la regione ammissibile sta in un'ipersfera raggio M (cioè non va all'infinito)

2ª PARTE
08/03

* TH DI MINKOWSKI-WEYL

Ogni punto di un $\boxed{\text{politopo}}$ si può ottenere come combinazione convessa dei suoi vertici

perché a differenza del poliedro è convesso

nei poliedri posso fare una combinazione simile ci una devo stare attento alla direzione d'apertura

DIM

Siano $(x_1, \dots x_k) \in \mathbb{R}^n$ i vertici di $P := \{ x \geq 0 : Ax = b \}$

$$y \in P \Rightarrow \lambda_1 \dots \lambda_k \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \quad \text{tali che}$$

$$\Rightarrow \quad y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$$

NB. questo teorema conferma che i vertici sono sufficienti a generare tutta la regione ammissibile

$\Rightarrow$ la base dello spazio è costituita da vertici

* TH: REG. AMM. È CONVESSA

L'insieme $P := \{ x \geq 0 : Ax = b \}$ è convesso.

insieme convesso: $\forall x_1 x_2 \in P$ il segmento congiungente sta nell'insieme

DIM

$\forall \lambda \in (0,1)$:

$z = \lambda x + (1-\lambda) y \in P$

x e y sono $\in P$ $\Rightarrow$ soddisfano il sistema dei vincoli

$\Rightarrow$ anche la loro comb. z soddisfa il sistema

* Se P contiene un solo punto il teorema è dimostrato.
* Altrimenti provo che:

$$\forall x, y \in P, \quad \forall \lambda : 0 < \lambda < 1, \quad \lambda x + (1-\lambda) y \in P$$

Indichiamo con A_i la colonna i-esima

$$x \in P \Rightarrow A_1 x_1 + \dots + A_n x_n = b \quad \cdot (\lambda)$$

$$y \in P \Rightarrow A_1 y_1 + \dots + A_n y_n = b \quad \cdot (1-\lambda)$$

$\Rightarrow$ faccio la comb. di questi due:

moltiplico e sommo le due

$$A_1(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1) + \dots + A_n(\lambda x_n + (1-\lambda)y_n) = b$$

inoltre $\left.\begin{array}{l} x_i \geq 0 \\ y_i \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda x_i + (1-\lambda) y_i \geq 0 \quad \forall i$ con $\lambda \in (0,1)$

garantisce ogni componente di $z \geq 0$ e che soddisfa i vincoli
$\Rightarrow z$ è sol ammiss. del sistema

$\Rightarrow$ perciò $\lambda \underline{x} + (1-\lambda)\underline{y} \in P$ ♣

TH DI EQUIVALENZA (tra vertici e soluzioni)

Un punto $\underline{x} \in P$ è vertice del poliedro non vuoto $P := \{\underline{x} \geq 0 : A\underline{x} = \underline{b}\}$

$\Leftrightarrow$ $\underline{x}$ è una soluzione di base ammissibile del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$

DIM: 1. $\underline{x}$ è sol. di base ammissibile $\Rightarrow$ $\underline{x}$ è un vertice

2. $\underline{x}$ è un vertice $\Rightarrow$ $\underline{x}$ è sol. di base ammissibile

PUNTO 1

Dimostro per assurdo quindi sia $x^t = [\underbrace{x_1 \dots x_k}_{x_B}, \underbrace{0 - 0}_{x_N}]^t$ una soluzione ammiss. di base con $x_i > 0$ per $i = 1 \dots k$

$\Rightarrow$ SIA x NON UN VERTICE

k=m, soluzione non degenere

k<m soluzione degenere

m → numero vincoli

- Per definiz, i vertici non si possono esprimere come combinazione convessa di qualsiasi altri punti. Vado a cercarli per avere l'assurdo.

$$y^t = [y_1 \dots y_k, 0 - 0] \in P$$
$$z^t = [z_1 \dots z_k, 0 - 0] \in P$$

con $y \neq z$ e tali che:

$$x = \lambda y + (1-\lambda) z \quad \text{per un qualche } \lambda \in]0,1[$$

nella costruzione di y e z mantengo a k i termini non nulli così da essere coerente alla costruzione di x.

* Dalle ipotesi costruite sappiamo che:

$y \in P \Rightarrow Ay=b \Rightarrow A_1y_1 + \dots + A_k y_k = b$

$z \in P \Rightarrow Az=b \Rightarrow A_1z_1 + \dots + A_k z_k = b$

con $\alpha_i = y_i - z_i$
$\forall i = 1 \dots k$

* Sottraggo l'equazione di z a quella di y:

$$(y_1 - z_1)A_1 + \dots + (y_k - z_k)A_k = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_k A_k = 0$$

dall'ipotesi $y \neq z$

$\Rightarrow$ Esistono allora k scalari $(\alpha_1 \dots \alpha_k)$ non tutti nulli (perché $\exists$ almeno un $y_i \neq z_i$)
tali che $\sum_i^k \alpha_i A_i = 0$

$\Rightarrow$ Le colonne $A_1 A_2 \dots A_k$ sono LINEARM. DIPENDENTI e non possono essere parte della stessa base B

$\Rightarrow$ ASSURDO perché x^+ era noto come soluzione di base e si era negato l'essere vertice

Quindi ogni soluz di base ammissibile è vertice

PUNTO 2

Suppongo per assurdo che $\underline{x}$ sia un vertice di P, ma non una soluzione di base di $Ax=b$

K qui non ho implicaz sulla cardinalità della base, semplicemente separo componenti positivi e nulli

* Essendo $\underline{x} = [x_1 \dots x_k, 0 - 0]$ con $x_i > 0$ $\forall i = 1 \dots k$ e vertice $\in P \Rightarrow$

$x \in P \Rightarrow Ax = b \Rightarrow A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_k x_k = b$ (1)

* Se abbiamo imposto $\underline{x}$ NON sol. di base, allora varrà la negaz della sua DEF:

$A_1 A_2 \dots A_k$ sono linearmente dipendenti $\Rightarrow$

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_k A_k = 0 \quad (2) \qquad (\alpha_1 \dots \alpha_k) \neq \underline{0}$$

* Sommo le due equazioni, la (2) moltiplicata per $\varepsilon > 0$:

$$(x_1 + \varepsilon \alpha_1)A_1 + \dots + (x_k + \varepsilon \alpha_k)A_k = b$$

ho generato una sol. valida x_k
$A(x_i + \varepsilon\alpha_i) = b$
↓
dai coeff posso generare punto $\in P$

stessa cosa della somma

- Sottraggo allo stesso maniera

$$(x_1 - \varepsilon\alpha_1)A_1 + \dots + (x_k - \varepsilon\alpha_k)A_k = b$$

ora uso questi due punti ($\equiv$ soluzioni) per generare il vertice e quindi trovare y

- Vado a definire:

$$y = [\, x_1 - \varepsilon\alpha_1, \dots, x_k - \varepsilon\alpha_k, 0 - 0\,]^t$$

$$z = [\, x_1 + \varepsilon\alpha_1 \dots x_k + \varepsilon\alpha_k, 0 - 0\,]^t$$

e per y e z continua a valere: $Ay=b$, $Az=b$ (sono sempre punti)

- Scegliendo un ε sufficientemente piccolo si trova $y, z \geq 0$ e $\in P$ con $y \neq z$

$\Rightarrow$ per costruzione $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$ cioè x può essere espresso come combinazione convessa stretta di due altri punti di P

$\Rightarrow$ ASSURDO perché x era per ipotesi un vertice

Ogni vertice è anche una soluzione di base ammissibile.

$\Rightarrow$ perfetta equivalenza.

♣

---

caso peggiore trovato solo dopo ANNI

i software usano questo costesso!

il caso medio è polinomiale $O(m)$

RAGIONAMENTO:

il simplesso mi può far pensare che PL sia difficile (da $O(C(^n_m))$)

$\Rightarrow$ mi serve un altro metodo che mi convince PL sia invece O(polinomiale)

caso medio è complesso! anche se è facile

domanda esame:

simplesso al max $O(esp) \Rightarrow$ PL è diff

$\rightarrow$ no, c'è un metodo facile per PL

* TH FONDAMENTALE DELLA PL

Sia dato il problema:

$$\min c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con rango$(A) = m$:

1. se esiste una soluzione ammissibile $\Rightarrow$ esiste una soluzione ammissibile di base

   $\exists$ un punto interno al politopo
   $\Rightarrow \exists$ un vertice se la soluzione non è vuota

2. se esiste una soluzione ammissibile ottimale $\Rightarrow$ esiste una soluzione ammissibile ottimale di base

   se ammette ottimo $\Rightarrow$ questo sta nelle soluzioni di base
   $\Rightarrow$ per il th eq. questo ottimo è un vertice

come dimostro questa roba

Teorema fondamentale:
le soluzioni di base contengono una soluzione ottimale (se esiste)

+

sol base ≡ vertici

Teorema di equivalenza:
x è soluzione ammissibile di base se e solo se è punto estremo della regione ammissibile

$\Downarrow$

i punti estremi della regione ammissibile contengono una soluzione ottimale
(se esiste)

conseguenza: non serve analizzare TUTTE le soluzioni, solo quelle di base
continuità, mi pare

* le sol di base esistono in numero finito (anche molto grande, ma finito)
  e quindi anche il worst case permette di controllare con n passi finiti tutti i vertici

  $\downarrow$

  CIOÈ COMBINO m COLONNE DI A E NE VERIFICO L'AMMISSIBILITÀ $\rightarrow$ ovviamente non combino alla cieca

PRIMA PARTE DEL SIMPLESSO

* ES *

$$\begin{array}{l} \max \ 3x_1 + 5x_2 \\ x_1 \le 4 \\ 2x_2 \le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

1. FORMA STANDARD

$\rightarrow$

$\min \ -3x_1 - 5x_2$

$x_1 + x_3 = 0$ — x_3

$2x_2 + x_4 = 0$ — x_4

$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 0$ — x_5

$x_{1,2,3,4,5} \ge 0$

$Ax = b$

A: 3 vincoli $\times$ 5 variabili

B: 3×3 è sempre quadrata con # dei vincoli

quante mat di base?

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \, 3!} = 10$$

sol base canonica: $x_1 = x_2 = 0$ (origine assi)

ricavo che le slack azzerano i vincoli

$x_3 = 4$

$x_4 = 12$

$x_5 = 18$

$$\begin{array}{ccc|ccc} x_1 & x_2 & & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

x_N — x_B base

base canonica mat identità

misura distanza tra punto soluz e slack eguagliano $\Rightarrow$ se ammissibile è positiva

$x_B = B^{-1} \cdot b$

se $B = I_n \Rightarrow B^{-1} = I_n$ $\quad x_B = I_n \cdot b = b$ allora la soluz è esattamente la mat termine noto

TABELLA

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	1	0	1	0	0	4
x_4	0	2	0	1	0	12
x_5	3	2	0	0	1	18
	-3	-5	0	0	0	

A

$\rightarrow$ tutte le variabili

valore slack per avere questa base

b termini noti

variabili di base associate

ho i costi solo per le var non in base

vettore coeff costi ridotti

metto qui i coeff che hanno nella funz obiettivo

x_2 ha costo migliore quindi punto a spostarmi verso $x_2 > 0$

$\Rightarrow$ ma ha $x_{3,4,5}$ diventino zero per fare posto a x_2

$\downarrow$

scelgo poi la var che chiede la min variazione di x_2

importanti perché dal vertice (0,0) mi dice in che direzione spostarmi! è il gradiente! mi dice dove la soluz è migliore

"quanto varia f obiettivo se la var fuori base entra in base"

se la var diventa positiva miglioro di!

08 / 03 / 2023 FILE: PL – simplesso → sul file esempio di alg simplex, devo fa esercizi

NOTE SUL TABLEAU DEL SIMPLESSO (+ simplex in generale)

* la mat individuata da colonne e righe delle $x_i \in \bar{x}_B$ è la matrice identità

(???) ⇒ dal PoV matriciale: per ottenere $\bar{x}_B$, devo premoltiplicare A

* la convenienza (= i CCR) per le variabili x_B in base è nulla
  ⇒ perché sono appunto già in base
  > le x_N hanno un CCR ≠ 0, (immagino prob di min):

negativo (vantaggioso) positivo (svantaggioso)

$\boxed{\text{CCR:}}$ sono i contributi per unità che l'entrata in base di una variabile porterebbe alla FO
↓
$\Delta f = \Delta x_i \cdot CCR_i$

* SIMPLESSO, IDEA BASE: seguendo i costi ridotti più promettenti, prima o poi convergo all'ottimo locale ⇔ globale
  dimostrato da Cauchy

* **PIVOTING**: azione di scambio delle variabili fuori base ↔ in base

- È la regola che uso per determinare quale x_i esce di base a garantire l'**ammissibilità** della nuova soluzione di base
  ⇒ garantita dalla regola dei rapporti minimi

- la regola per scegliere la variabile che entra invece garantisce l'**ottimalità** della nuova soluzione di base
  ⇒ garantita dalla scelta della colonna con CCR promettente (CCR indica la "direzione" di spostamento lungo il vincolo)

* Quando iterando l'operazione di pivoting trovo un vettore CCR completamente $c^T \geq 0$ (caso prob. di minimo)
$\Rightarrow$ ho la CONDIZ. SUFFICIENTE ad affermare di avere una soluzione ottima

l'ottimo che trovo con queste soluzioni di base si chiama OTTIMO DEGENERE

NB. non è necessaria perché se la nego e trovo un c^T con almeno un elemento negativo ricado in una situazione di DEGENERAZIONE CICLANTE

$\Rightarrow$ significa che $\exists$ almeno una variabile nella base che assume valore zero

* ESISTONO REGOLE DI PIVOTING PIÙ SOFISTICATE? possono evitare la degenerazione?

$\Rightarrow$ METODO DI BLAND

Suppongo di avere uno scenario dove devo iterare il simplesso.

ENTRATA

Secondo il simplesso, scelgo di far entrare la variabile con CCR più promettente. Ma con Bland:

$\Rightarrow$ scelgo di far entrare la variabile con indice minore

USCITA

Quando è lecito scegliere, scelgo

Secondo il simplesso, scelgo di far uscire la variabile con il rapporto $\frac{b_i}{a_{ij}}$ minore (rispetto alla colonna A_j della variabile in entrata.
Con Bland:

$\Rightarrow$ scelgo di far uscire, a parità di rapporto, la variabile con indice minore

internet dice che vedo la colonna della var entrante
$\rightarrow$ prendo la prima in base che troverebbe un pivot positivo $\Rightarrow$ questa uscirà

	x_3	x_5
	-7	-8

Bland: scegli x_3

Simplex: scegli -8

NB. Bland funziona come anti-ciclo SOLO SE lo applico sin dalla prima iterazione del simplesso

$\rightarrow$ mi aiuta a scegliere nel caso di
$\rightarrow$ rapporto minimo uguale per più variabili
$\Rightarrow$ da usare dopo il simplesso!!
evita la DEGENERAZ CICLANTE tra le basi di uno stesso vertice

cosa succede se 2 var hanno stesso rapporto minimo?

	x_4	
x_2	3	6
x_3	2	4

se $x_4 \rightarrow x_3$ $\quad x_4 = \frac{4}{2}$ e $x_3 = 0$

se $x_4 \rightarrow x_2$ $\quad x_4 = \frac{6}{3}$ e $x_3 = 0$

$x_4 = 2$ in entrambi i casi!

conseguenza rapporto minimo fa sì che alla prossima iterazione, la soluzione sarà degenere (perché avendo 2 robe a zero)
rischio caso soluz ciclante, non è detto che cicli al 100%

13/03/2023

* SIMPLESSO: CASI PARTICOLARI

1. REGIONE AMMISSIBILE NON LIMITATA & F.OBIETT. CHE SI SPOSTA NELLA DIREZ. DI APERTURA

=> SOLUZIONE ILLIMITATA

è facile geometricam, non analiticamente

Quando ho sol. illimitata?

Per avere una soluzione illimitata è necessaria una regione illimitata

=> ma non è sufficiente

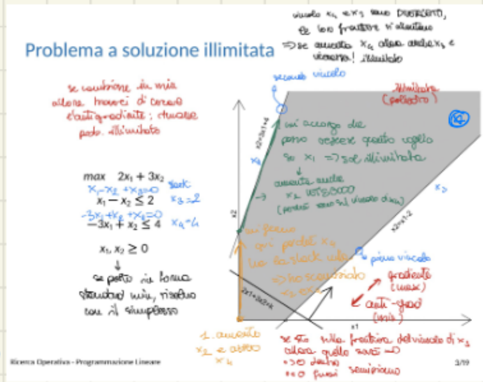
esempio slide 3/19

* è necessario che il gradiente trovi la direzione di miglioramento della FO come medesima a quella di apertura della regione

gradiente (flusso curve di livello)
↓
è lui a controllare l'∃ di una soluz. illimitata

NB. trovo la regione illimitata quando le frontiere di due vincoli divergono ⊗

=> così individuano la direzione di apertura.



Quando ∃ vincoli dove le variabili hanno segno discorde, questo è un indizio perché significa che durante le operazioni di pivot, questa discordanza andrà a peggiorare gli equilibri numerici

indica appunto che ci sono segni opposti

* nel tableau non posso scambiare qualcosa che ha $\boxed{\text{pivot negativo}}$!

per bilanciare il vincolo le due variabili si fanno aumentare reciproc. senza limiti ⊛

COLONNA full neg: fa crescere tutte le variabili perché le può bilanciare tutte (avendo segno neg)

=> quando trovo colonne (var entranti) con a_{ij} e c_j tutti negativi allora non esiste nessuna variabile che la bilanci

=> non ho limiti e può crescere all'infinito

farà aumentare illimitatamente anche altre variabili

=> così ho trovato di avere una soluzione illimitata

NB. => CONSIDERIAMO SOL. ILLIM. COME AMMISSIBILE

l'ottimo esiste ma non lo raggiungo xk è a ∞

⊛ ES: immagino

		x_2			
x_3	1	-1	1	0	2
x_4	-3	1	0	1	4
	-2	-5	0	0	0

candidato ad entrare

regola rapporti

$\frac{4}{1}$ e $\frac{2}{-1}$ => vince x_3 → e il vincolo ora è $-x_2 + x_3 = 2$

esce x_3 che diventa $x_3 = 0$

COEFF NEGATIVO aumenta la var che entra ma anche quella che esce senza che nessuna delle 2 sia vincolata

2. OTTIMO MULTIPLO

in $\mathbb{R}^2$ posso avere 2 soluzioni ottime
$\Rightarrow$ implica potenziali ∞ altri punti soluz. ammiss. non di base ma ottimi

DEF: non ho un solo ottimo che risolve il problema di ottimizzazione
$\Rightarrow$ il valore ottimale è unico, ma lo ottengo con TANTE altre soluzioni e non solo una. Rimane comunque un numero FINITO.

coef. costo ridotto: esprime convenienza nell'inserire la variabile in base.
La FO varia in questo modo: $\boxed{\Delta f = c_K \cdot \Delta x_K}$

Δx_K: unico val = rapporto minimo

* un'ottimo multiplo corrisponde ad una situazione con $\Delta f = 0$
  $\Rightarrow$ non perché non mi sono spostato, il che implicherebbe $\Delta x_K = 0$

questo è il caso di degenere, che comunque non è mutual. esclusivo con multiplo

  $\Rightarrow$ FO non varia poiché $c_K = 0$
  ovvero la variazione fornita da una variabile è nulla, non influisce sulla FUNZ. OBIETTIVO.
  $\Rightarrow$ posso spostarmi OVUNQUE lungo il vincolo associato a x_K (a patto di non rompere altri vincoli)
  e dal TH di MINKOWSKI so che tutti questi punti ottimi, che sono soluzioni ammissibili non di base, si possono ottenere combinando (conness.) altri vertici

tranti i vertici ottimi (2) ho che sol pr che soluzione di base. come trovo le soluz che generano. $= \lambda \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$

$\Delta x_K = 0$: vertice non cambia, non mi sposto! nel piano e quindi sol degenere

$c_K = 0$: mi muovo nel piano ma F.O non cambia anche se trovo un altro vertice (la var cambia e diventa positiva)

ESE: Dare soluzioni ottime con almeno una soluzione non di base (in $\mathbb{R}^2$)
* Ho più punti che trovano l'ottimo $\Rightarrow$ sono in ottimo multiplo
Ho sicuramente 2 sol di base ottime, le chiamo x e y

$$z = \lambda x + (1-\lambda) y \quad \text{con } \lambda \in (0,1)$$

ottengo z sicuramente valore ottimo

$$f(x) = f(y) \overset{?}{=} f(z)$$

$$\cancel{\lambda f(x)} + f(x) - \cancel{\lambda f(x)}$$

$$f(z) = f(\underbrace{\lambda x + (1-\lambda) y}_{\text{simm}}) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) = f(x)$$

PAGINA PER I MIEI RAGIONAMENTI SCHIZOFRENICI

QUAL È IL MAX VALORE CHE POSSO AVERE x_i?

In forma standard:

$$\min -3x_1 - 2x_2$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 14$$

$$x_1 - x_2 + x_5 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

La corrispondente tavola del simplesso risulta:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(1)	x_3	-1	2	1	0	0	4
(2)	x_4	3	2	0	1	0	14
(3)	x_5	1	-1	0	0	1	3
(0)		-3	-2	0	0	0	0

← riga di pivot

candidata

Soluzione di base iniziale: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 4$, $x_4 = 14$, $x_5 = 3$,

Valore funzione obiettivo: 0.

Variabile candidata più promettente: x_1

ESCE: c^t migliore $\Rightarrow c_1 = -3$

ENTRA: rapporto $\Rightarrow \frac{4}{-1}$ = nulla

$\frac{14}{3} = 4.5\ldots$

$\frac{3}{1} = 3$ $\boxed{ok}$

Qual è il massimo valore che x_1 può assumere?

1 vincolo non pone limiti

2 vincolo $x_4 \Longrightarrow 0\ x_1 \Longrightarrow \frac{14}{3}$

3 vincolo $x_5 \Longrightarrow 0\ x_1 \Longrightarrow 3$

Cardine (pivot): 1

$(1) \Longrightarrow (1) + (3)$

$(2) \Longrightarrow (2) - 3 * (3)$

$(0) \Longrightarrow (0) + 3 * (3)$

al posto di x_4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	1	1	0	1	7
x_4	0	5	0	1	-3	5
x_1	1	-1	0	0	1	3
	0	-5	0	0	3	9

in base · " · "

candidato!

Soluzione di base corrente: $x_2 = x_5 = 0$, $x_3 = 7$, $x_4 = 5$, $x_1 = 3$

Funzione Obiettivo: -9; cardine: 5.

MAX VALORE DI x_i?

i vincoli sono i rapporti minimi (perché scorri sulle righe ≡ vincoli)

(1) N.A. pivot negativo

(2) l'uscita di x_4 comporterebbe $x_4 = 0$ in $3x_1 + 2x_2 + x_4 = 14$

$\Rightarrow$ il max valore sarebbe (con anche $x_2 = 0$) $x_1 = \frac{14}{3}$

(3) stesso ragionamento, $x_5 = 0$ in $x_1 - x_2 + x_5 = 3$

$\Rightarrow$ il max sarebbe (con anche $x_2 = 0$) $x_1 = 3$

Nuova tavola del simplesso:

x_4 e $x_5 \in X_N \Rightarrow$ sono nulle $\Downarrow$ sto nella loro intersezione B

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	1	-1/5	8/5	6
x_2	0	1	0	1/5	-3/5	1
x_1	1	0	0	1/5	2/5	4
	0	0	0	1	0	14

tutti i coeff $\geq 0 \Rightarrow$ ho trovato l'ottimo

Soluzione di base corrente: $x_4^* = x_5^* = 0$, $x_3^* = 6$, $x_2^* = 1$, $x_1^* = 4$.
Funzione Obiettivo: -14.

Osservazione: nella tavola finale il coefficiente della variabile x_5 (variabile fuori base) nella funzione obiettivo è 0.

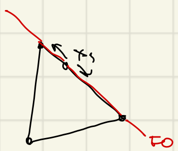
$\Downarrow$

Operando come se la variabile x_5 avesse coefficiente negativo si ottiene una nuova soluzione (diversa da quella inizialmente ottenuta) ma con lo stesso valore della funzione obiettivo (e quindi ugualmente ottima).

COME RICONOSCERE OTTIMO MULTIPLO DAL TABLEAU?

Questo è un tableau ottimo perché $c^t \geq 0$
con $\{x_1, x_2, x_3\}$ in base (con valore $\neq 0$)
e $\{x_4, x_5\}$ fuori (con valore fisso nullo)

$\Rightarrow \exists$ un CCR di una variabile $\in X_N$ (x_5) che è nullo anziché positivo



$\Rightarrow$ potrei muovermi lungo x_5 (trovare soluzioni nuove e diverse) mantenendo immutata la FO [perché la colonna 5 ha a_{ij} negativo rispetto a x_5]
$\Rightarrow$ come nella illimitata, posso far crescere le variabili mantenendo l'equilibrio!

$\Rightarrow$ OTTIMO MULTIPLO

$\Downarrow$

però stavolta non è tutta la colonna
quindi il movimento è limitato. (diff. con illimitato)

non sono degenere perché il (−) mi permette di muovermi!

+ $c_i = 0$ è non negativo, quindi non forzo nemmeno iterazioni

o negativo?
DEG: $c_i = 0$
no a_{ij} positivi

BOH NON MI RICORDO

se il c_i^t anziché essere negativo è nullo, posso ricadere nel caso DEGENERE ma senza ciclare

(???)

ok forse ci sono

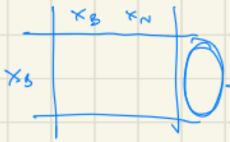
• COME CAPISCO SE UNA SOL. È DEGENERE?

Il vettore soluzione $x^t = [x_B; x_N]$ ha almeno una componente di x_B non positiva ma $x_{B_i} = 0$. Significa che la soluzione non fissa solo $(n-m)$ variabili a zero, ma almeno una in più.

3. SOLUZIONE DEGENERE

• I CCR ci permettono di individuare un ottimo multiplo, per il caso di situazione degenere devo osservare i coefficienti della riga

CASO NORMALE:



se i valori delle var in base sono $\neq 0$ allora non degenere

se scambio var con valore nullo ⇒ entra var nulla ok non ho un quantitativo da giocarmi ⇒ cambia base, ma non vertice

↓

rischio ciclare!

CASO DEGENERE:

Se esiste almeno una variabile in base x_B con $B^{-1}b = 0$ (valore assunto) allora mi trovo in presenza di una soluzione degenere

⇒ perché anche in base o meno non cambia la soluzione trovata
≡ punto individuato

⇒ ∃ più basi per identificare un vertice!

significa che è presente almeno un...

DEF: chiamo un vincolo ridondante se è presente in soprannumero (sono in $\mathbb{R}^n$ e ho un vertice intersezione di $n-1$ vincoli ⇒ l'n-esimo è di troppo!)

NB. in $\mathbb{R}^2$ togliere vincoli essenziali fa crescere la regione ammissibile invece se ne ho di ridondanti è meglio rimuoverli (semplifico il problema)

- **Soluzione di base degenere:** almeno una variabile in $\mathbf{x}_B$ assume valore nullo.
- **Rischio di degenerazione ciclante:** se il problema ammette soluzioni di base degeneri, è possibile che il metodo del simplesso generi una sequenza di basi ammissibili $B_1, \ldots, B_q$, $q > 1$, con $B_1 = B_q$ tutte associate allo stesso vertice.

  Questo accade perché ad ogni cambio di base (operazione di pivoting) la funzione obiettivo rimane costante.
- **Regola di Bland:** se usassimo un qualsiasi criterio deterministico per la scelta della variabile entrante e della variabile uscente, l'algoritmo genererebbe la stessa sequenza di basi ammissibili indefinitamente. Usando la regola di Bland evitiamo che questo succeda impedendo al simplesso di ciclare.

SOL DEG rischio di ciclare, ma non lo farò se la var in base è a zero
ho la certezza? NO
controesempio:
$x_2 = 0$ candidata per $x_3 = 2$
se ho il pivot negativo, la escludo anche se CCR<0

DEGENERE ∃ anche quando $c^+ \geq 0$ (potrei pensare ottimo!) ma ho degen anche con $c_i < 0$

se la var che entra e quella che esce assume valore zero
⇒ FO non cambia

① l'algoritmo ripercorre le
→ basi associate a questo vertice degenere
(rischio questo ∃ qualche var a 0)

② → CCR=0 FO non cambia ma var pone a positivo, quindi trovo effettivamente un'altra base ≡ vertice. SOL. MULTIPLA, ma OTTIMO MUL. solo se trovo CCR=0 per x_N all'ottimo

Esempio problema p12/19

* Immagino: hai sol x di base $= [x_B, x_N]$ con n var $\begin{cases} m \text{ base} \\ n-m \text{ fuori} \end{cases}$ → sono a zero
→ so che q variabili < m di base a 0
⇒ in questa situaz generale, quante basi trovano il vertice degenere?

$[x_{B_1}, \ldots, x_{B_m}; x_{N_1}, \ldots, x_{N_{n-m}}]$

$\binom{n-m+q}{q}$ → modo per combinare quelle a zero della base

q sono nulle

m−q = variab non nulle

se coeff opposti ⇒ var cercano entrante
⇒ quindi non si scambiano

4. SOLUZIONE IMPOSSIBILE

DEF: la regione ammissibile è vuota e i semipiani non si intersecano

∄ regione ammissibile
dopo i vincoli hanno semipiani che non si intersecano

* COMPLESSITÀ ALG. SIMPLESSO?

Dato un generico problema di PL in forma standard, con n variabili ed m vincoli

⇒ WORST CASE SCENARIO:

il simplesso analizza tutte le soluzioni di base ammissibili prima di trovare la ottima

e sono un binomiale $\binom{n}{m}$ soluzioni ⇒ DIFFICOLTÀ ESPONENZIALE

E quindi i problemi di PL dovrebbero essere non facili!

⇒ il simplesso ha una alta efficienza nel caso medio

caso peggiore: il cubo di Klee-Minty

15/03/2023 FILE: SOLUZIONE_INIZIALE

potrebbe essere
- origine ∉ regione
- regione vuota => impossibile

* DETERMINAZIONE DI UNA SOLUZIONE INIZIALE

Tipicamente la soluzione di partenza del simplesso è quella identificata dall'ORIGINE degli assi (tutte le slack a zero). A volte questo punto non appartiene alla regione ammissibile!

=> ES: quando ho un vincolo trasformato (forma standard) che mi ho portato un termine noto ad avere valore negativo

x_i .... $| -b$

$x_i = B^{-1}(-b)$
ma $x_i \geq 0$!
quindi vincolo non soddisfatto

SITUAZIONE TIPICA

	x_B	x_N	
x_B	I	A_N	$B^{-1}b$
	0	ccr	

=> COME TROVO UN PUNTO DA CUI PARTIRE?

* METODO DUE FASI *

opera con la risoluzione sequenziale di due fasi distinte

IDEA DI FUNZIONAMENTO:

1° FASE) → A) se ∄ sol. iniz potrebbe ∄ sol problema ovvero impossibile => fine.

B) se invece la regione ≠ ∅ posso determinare una soluz iniziale, un vertice ammissibile per far partire il simplesso

B) 2° FASE) eredita dalla fase 1 il vertice, verifica di trovare l'ottimo (simplesso classico)

NB. La situazione senza soluzione iniziale c'è quando ∃ almeno un termine noto (= una componente di b) negativo. CASO VINCOLI ≤

per i vincoli ≥, vale l'opposto

15/03/2023

Non so quale variabile portare in base per avere un vertice iniziale → non posso capire guardando la matrice iniziale

1ª FASE

In questa situazione non abbiamo punto (=sol) da cui partire né slack da mettere in base per trovarne un altro (?)

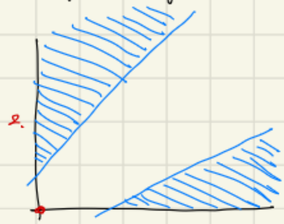
* mi accorgo che non ho una soluz anche perché il tableau non contiene la mat Identità

IN BREVE... quello che fa la 1ª fase è capire in quale di questi due casi ricado:

origine non è soluzione, ∄ regione ⇒ 1 o 2

l'origine non è soluzione, ma ∃ un vertice da cui posso partire, allora

⇒ posso stabilire questo nuovo vertice



l'origine non è soluzione e NON ESISTONO vertici alternativi

⇒ problema impossibile

base

↓

TRASFORMAZIONE IN PROBLEMA AUSILIARIO

PROBLEMA CON VINCOLI ≤

canonica

$\min c^t x$

$Ax \leq b$

$x \geq 0$

→ standard

$\min c^t x$

$\boxed{Ax + s = b}$

$x, s \geq 0$

con:

1. $b \geq 0$ ⇒ $x=0, s=b$ ammissibile

⇒ continuo con il simplesso

questa parte non è chiarissima

2. $\exists i : b_i < 0$ ⇒ $x=0, s=b$ non ammissibile

⇒ ∄ sol iniziale per simplex

PROBLEMA CON VINCOLI ≥

canonica

$\min c^t x$

$Ax \geq b$

$x \geq 0$

→ standard

$\min c^t x$

$\boxed{Ax - s = b}$

$x, s \geq 0$

con:

1. $b \leq 0$ ⇒ $x=0, s=-b$ ammissibile

⇒ continuo con il simplesso

2. $\exists i : b_i > 0$ ⇒ $x=0, s=-b$ non ammissibile

⇒ ∄ sol iniziale per simplex

aggiungere le variabili ausiliarie sporca il tableau ⇒ dovrò riportarlo in forma canonica

mi suggeriscono che una ulteriore condizione da imporre è $\boxed{b \geq 0}$

si introduce una y per ogni vincolo $\Rightarrow \# \bar{y} = m$

PROBLEMA CON VINCOLI $=$: in questo caso non ho da introdurre slacks.
posso dire subito che con $b_i < 0$ non ho soluzione di partenza
SONO GIÀ IN FORMA STANDARD?
al problema $Ax = b$ ho aggiunto delle variabili $y = b$

che fine hanno fatto le slack? quelle che vanno a zero, tratto in base ~~solo~~ le ausiliarie, saranno le uniche $\neq 0$

NB. le variabili y non sono parte del problema originale

$\begin{cases} Ax = b \\ Ax + y = b \end{cases}$ non hanno soluzione contemporaneamente, si escludono.
(a meno che $y = 0$...)

* STEP SUCCESSIVO:

Costruiamo la soluzione di partenza mettendo in base le y.
$\Rightarrow$ l'obiettivo è poi minimizzare $\boxed{\sum_i y_i}$, così da avere $y \to 0$
$\Rightarrow$ vorrei delle variabili y piccole, per approssimare il problema ausiliario a quello originale
funzione di ottimo per il prob ausiliario da studiare

sol iniziale ausiliario: $x = 0$ & $y = b$
ottimo cercato z^*

* SVOLGIMENTO 1ª FASE

Dunque ho costruito un problema ausiliario, e decido di chiedere che le variabili ausiliarie vadano a zero, cioè vengano minimizzate.

- Se questo, risolvendolo correttamente trovo un ottimo ove le $y = 0$
  $\Rightarrow$ il sistema di partenza ha soluzione, e l'ottimo ausiliario trovato sarà il punto di partenza ($\equiv$ vertice iniziale) per applicare la seconda fase
  $y^* = 0 \Rightarrow x^*$ è ammissibile per $A\underline{x} = b$

$y^* = 0$ significa che ho un'approx. fedele in cui ho soluzione

- Se risolvendo l'ausiliario trovo l'ottimo con $y \neq 0$
  $\Rightarrow$ la soluzione non è ammissibile ed il problema originale non ha soluzione

$y^* \neq 0$ non mi permette di dire $Ax + s = b \sim Ax = b$

$y^* \neq 0$? vedi il teorema (A) ↓

NB. dal tableau ottimo del problema ausiliario ricavo z^*

$z^* > 0$: impossibile

$z^* = 0 \Rightarrow y^* = 0$ $\boxed{\text{OK}}$

$\boxed{z^* = 0}$ ammissibilità, come la ottengo

Ⓐ nella tavola finale dell'ottimo (1° FASE) ho tutte le variabili ausiliarie fuori dalla base (per questo sono nulle!)

$\Rightarrow$ la base così identificata avrà certe $x_i \in x_B$ ed è questa la base che utilizzerò come soluzione di partenza per la 2° FASE

(nella FO rimetterò le var originali e se necessario riporto il tableau in forma canonica - cioè $c_B^t = 0$)

Ⓑ nella tavola finale dell'ottimo ho alcune ausiliarie in base, con valore nullo $\Rightarrow$ SOLUZIONE DEGENERE

$\Rightarrow$ in questo caso devo iterare la 1ª fase forzando tutte le y_i fuori base

$\Rightarrow$ poi passo alla 2° FASE

* TH OTTIMO SOLUZIONE AUSILIARIA

$$y^* \neq 0 \iff Ax = b, \; x > 0 \text{ non ha soluzione}$$

DIM:

- $y^* \neq 0 \Rightarrow \begin{matrix} Ax = b \\ x \geq 0 \end{matrix}$ è imp

sia per assurdo $\tilde{x} \geq 0 : A\tilde{x} = b$

$\Rightarrow \exists$ soluzione di $Ax = b$ per cui $A\tilde{x} - y^* = b$

2^a FASE

(A) costruisco la base iniziale per il simplesso $x_0^+ = (x^*, 0)$ usando i valori ottenuti dal prob. ausiliario nella 1^a fase.

=> In particolare prendo il tableau ottimo ereditato dalla 1^a fase ELIMINANDO le colonne delle variabili ausiliarie y^* (hanno senso fuori base!) e ripristino l'obiettivo (in forma canonica) (devo sempre tornare ad avere i CCR delle x_B nulli)

non ho capito bene

(B) La soluzione trovata è degenere. Con opportuni scambi di variabili, posso forzare tutte le y_h fuori base, riportandomi al caso (A)
La casistica di pivoting diventa

$y_1 : \bar{a}_1 \cdots \bar{a}_{ij} \cdots 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \mid 0$

se $a_1 \ldots a_n = 0$
trovo $a_i < 0$
=> posso pivotare
UNICO CASO

- se $\exists\ \bar{a}_{ij} > 0$ nella riga di una variabile $\underbrace{x_j\ (j \leq n)}_{\text{cioè } x \text{ tra le originali}}$ allora uso quel a_{ij} come pivot => torno al caso (A)

- se $\nexists\ \bar{a}_{ij} > 0$ ma $\exists\ \bar{a}_{ij} < 0$ è lecito fare pivot anche se negativo poiché $b_i = 0$ (non va ad invalidare $x_i \geq 0$ con il segno di $B^{-1}b$)
=> questo non fa variare la funzione obiettivo, ma almeno mi libero di y_h => torno al caso (A)

$b = 0 \Rightarrow$
$x = B^{-1}b = 0$
non può essere invalidato da un pivot negativo

- se $\nexists\ \bar{a}_{ij} > 0$ e nemmeno $\bar{a}_{ij} < 0$ => l'intera riga $(\bar{a}_{i1}\, \bar{a}_{i2} \cdots \bar{a}_{in})$ è una riga di zeri! Non ho candidati validi (x_j) ad entrare in base
=> sono autorizzato a scartare le colonne $A(y_1) \ldots A(y_m)$ delle var. ausiliarie
=> ritrovo un tableau equivalente all'originale ma con una riga nulla
=> la matrice A aveva colonne L.D. => vincolo y_h ridondante e posso eliminarlo => torno al caso (A)

in tutte queste operazioni di pivot ho righe y_h con $b_h = 0$ (appunto, nulle in base) quindi scambiare variabili fuori base (so di essere in vertice degenere) significa portare una var che sarà sempre $= 0$! la FO non cambia

ESEMPIO SPORCO A CUI HO AGGIUNTO GLI SCREEN SHOTS

metodo analitico simplesso?
troverò una sol ottima $\neq 0$

NOTA: Sono sicuro che devo per forza usare due fasi?

le var di base devono avere CCR $= 0$ altrimenti non sono in forma CANONICA
mi sono portato in tableau ok, inizio symplex

1ª Fase $y^* = 0$?

Tableau non in forma canonica:

indici var di base

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	b
y_1	1	-2	-1	0	1	0	1
y_2	-1	1	0	-1	0	1	1
	0	0	0	0	1	1	0

se tutti i CCR ≥ 0 ⇒ dovrebbero essere ...!

PROB. i CCR dovrebbero essere zero! NON È IN FORMA CANONICA

Trasformiamo il tableau in forma canonica:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
y_1	1	-2	-1	0	1	0	1
y_2	-1	1	0	-1	0	1	1
	0	1	1	1	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	-2

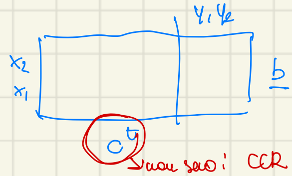
ho fatto sparire gli 1, ora è ok

Poiché la soluzione corrente è ottima e $z^* = 2 \neq 0 \Longrightarrow$ il problema originario non ha soluzione ammissibile.

ho tutte le CCR ≥ 0 non faccio altre operazioni

somma righe e le sottraggo ai CCR

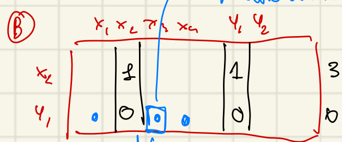
Ricerca Operativa - Programmazione Lineare 11/23



non sono i CCR del problema aus ma ci metto quelli originari

2ª Fase

se $y_1 \ominus x_3$ allora qui avrò valore > 0 ⇒ classico pivoting



scambio con una di queste ⇒ var che entra

non posso scambiarle ovviamente, che pivoting faccio con 0 al denom?

faccio iteraz symplex scambiando senza guardare CCR
⇒ voglio buttare fuori y_1 dalla base
sk var ausiliaria

entra a valore zero se c'è almeno un coeff positivo

1 fase
risolvo simplex
sul prob ausiliario

$y^* = 0$
in base
soluz
degenere
↓
le elimino
facendo
il pivoting

$y^* = 0$
le var y
finiscono
fuori base
↳
normale simplex
per avere l'ottimo
del problema originale

ho sbagliato queste cose male

candidati

$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y_1 & y_2 & \\
\hline
x_2 & & 1 & & & 0 & & 3 \\
y_1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 1 & & 0
\end{array}
$$

scelgo il x_k positivo ⇒ se i valori fossero tutti negativi, posso fare pivoting sul negat. x abbattere prima uno ↔

• scambio x_3 e y_1
andando nella dir x_3

FINE PRIMA FASE
UNICA ECCEZ SIMPLESSO

ho trovato vertice ⇒ degenere
ma non importa
cosa sposto, sarò
sempre lì

⇒ da qui prendo e tolgo var y_i per continuare il simplex

e se gli i CUR
fossero tutti nulli?
non ne posso usare
nessuno
così se tolgo
y_i e y_2 trovo
quest con riga nulla
⇓
vincolo ridondante x R
il rango era m-1
⇓
lo tolgo e continuo

vedi slide 12

pseudocodice metodo 2 fasi

infeasible=**false**;
redundant=**false**;
for each $b_i < 0$ **do**
  moltiplica l'i-esima equazione per -1; → porta forma canonica
end for
mi servono $b \geq 0$ prima di aggiungere le surplus
for $i = 1$ **to** m **do**
  aggiungi all'i-esima equazione il termine y_i; → var ausiliarie
end for
call SIMPLESSO con funzione obiettivo $z^a = \sum_{i=1}^{m} y_i$; → FO prob ausil
if z^{a*} (=valore funzione obiettivo)> 0 **then**
  infeasible=**true**; impossibile
else
  for each variabile artificiale y_i in base **do**
    if $\exists\, \bar{a}_{ij} \neq 0 | x_j$ variabile problema originario **then**
      esegui un pivoting su a_{ij}; → normale, >0 e <0
    else
      redundant=**true**; $(a_{i1} .. a_{in}) = \underline{0}$
      elimina la i-esima riga;
      $m = m - 1$;
    end if
  end for
  inserisci nel tableau la funzione obiettivo originale in forma canonica;
  elimina le colonne delle variabili artificiali;
  call SIMPLESSO;
end if

* METODO DI PENALIZZAZIONE

(non avevo appunti di questa roba)

ah sì perché è per l'orale

Partendo dal prob standard senza sol iniziale ⇒ genero l'ausiliario con

CAMBIO COSÌ $1^t y \to c^t x + M 1^t y$

$$\begin{aligned} \min\ & c^t x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \min\ & c^t x + M 1^t y \\ & Ax + y = b \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

M suff. elevato e positivo

DIFETTO: big M porta rischio di instabilità numerica

* opero come nel 2 fasi normale, cerco l'ottimo dell'ausiliario
⇒ ho due scenari ottimali possibili

① OTTIMO FINITO → $y^* = 0$ ho trovato ottimo prob OG (x^*)
→ $y^* \neq 0$ prob OG non ha soluzione

② OTTIMO ILLIMITATO → $y^* = 0$ prob OG ha sol. illimitata
→ $y^* \neq 0$ prob OG non ha soluzione

$Ax^* + y^* = b$

$z^* \in \mathbb{R} \to z^* > 0 \Rightarrow y^* \neq 0$
$\searrow z^* = 0 \Rightarrow y^* = 0$
$\boxed{x^* \text{ è ottimo}}$

$z^* \to \infty \to y^* = 0 \Rightarrow x^* \to \infty$
$\searrow y^* \neq 0$

---

file: determinaz soluz iniziale

ultima volta: due fasi

risolvo due fasi con degenere

⇒ dopo 1ª fase rimane var ausiliaria in base

⇒ forzo la sua uscita

$2x_1 - x_2 + 6x_3 = -2 \quad (\cdot 1)$

← devi avere i termini noti positivi! prima delle var surplus

20/03/2023 FILE: simplesso matriciale

* ANALISI MATRICIALE TABLEAU (che è anche quello che fa gurobi)

$$\begin{array}{c|c|c}
 & x & \\
\hline
x_B & A & b \\
\hline
 & c^t & 0
\end{array}$$

TABLEAU INIZIALE

Sia dato un problema in forma standard

$$\begin{aligned} \min\ & c^t x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

dove $A \in Mat(m \times n)$
con $r(A) = m$
$m < n$ → in forma standard contiene ANCHE le slack (derivate dal fatto che ho trasformato i vincoli in uguaglianza)

* scompongo A
$\Rightarrow A \equiv (B \mid N)$

* scompongo i vettori x^t e c^t
$\Rightarrow x^t \equiv [x_B^t \,;\, x_N^t]$
$\Rightarrow c^t \equiv [c_B^t \,;\, c_N^t]$

riformulo:

$$\begin{aligned} \min\ & c_B^t x_B^t + c_N^t x_N^t \\ & B x_B + N x_N = b \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|c:c|c}
 & x_B & x_N & \\
\hline
x_B & B & N & b \\
\hline
 & c_B^t & c_N^t & 0
\end{array}$$

TABLEAU INIZIALE SCOMPOSTO

soluzione di base corrispondente

$$\boxed{\begin{cases} x^t = (x_B^t, \underline{0}) \\ x_B = B^{-1} \cdot b \end{cases}}$$

nel simpl. le var di base alla iterazione zero sono le slack

normalmente $x_N \to 0$ con ricavo le x_B dal sistema

da qui cerco di calcolare i CR nella tavola

se partendo da A costruisco tutte le possibili mat $B(m \times m)$ trovo tutte le possibili basi
$\Rightarrow$ tutti i vertici!

posso usare a scoprire il valore delle variabili associate alla base facendo

$$B^{-1} b \equiv x_B$$

NB. se ipotizzo x_N non nullo

variabili in base esprime in funzione delle x_N

* la soluzione diventa:

$$Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow Bx_B = b - Nx_N$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

* la FO diventerà:

$$c^t_B x_B + c^t_N x_N =$$

$$c^t_B (B^{-1}b \boxed{- B^{-1}Nx_N) + c^t_N x_N} =$$

$$f(x) = c^t_B B^{-1}b + (c^t_N - c^t_B B^{-1}N) x^t_N \quad \text{con } x^t = (x_B, x_N)$$

↳ valore CCR per variabili fuori base

* e la FO varrà:

$$z_0 = c^t_B B^{-1} b \leftarrow \boxed{x_N \to 0}$$

$c^t_B | c^t_N - c^t_B B^{-1} (B|N)$
$\parallel$ c^t

DEF: il vettore $"c^t - c^t_B B^{-1} A" = [c^t_B - c^t_B B^{-1} B][c^t_N - c^t_B B^{-1} N]$
$= [\ 0^t\ ;\ r^t\ ]$

si dice vettore dei COEFF. DI COSTO RIDOTTO associato alla base B.

"Δ valore/contributo a f.o di una var se la portassi in base"

* CONDIZIONE DI OTTIMALITÀ *

valore dei CCR fuori base

Sia B una base ammissibile. Se $r^t = \boxed{c^t_N - c^t_B B^{-1} N \geq 0^t}$
$\Rightarrow$ soluzione di base ammissibile associata alla base B è ottima

E LA TAVOLA?

* la Tavola del simplesso ora avrà un aspetto diverso, ripercorro i passaggi algebrici per scoprire la forma matriciale dei CCR calcolati

passaggi per andare da una sol ad una adiacente => (0,0) → x generica
↓
operazioni di pivoting!

procedimento:

1) • trasformo B in una mat I_m

$\Rightarrow B^{-1}\cdot B = I_m$ premoltiplico A e b

	x_B	x_N	
x_B	$B^{-1}B$	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
	c^t_B	c^t_N	0

2) • rendo $c^t_B = 0^t$ (pre)

=> nel simplesso moltiplico la riga della variabile per il suo CCR e poi la sottraggo al resto della matrice + la riga CCR per poterlo annullare

	x_B	x_N	
x_B	$B^{-1}B$	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
	c^t_B	c^t_N	0

$- \; c^t_B \cdot (B^{-1}B) = 0$

• $c^t_B B^{-1}B$

$\Rightarrow c^t_B - c^t_B B^{-1} B = 0$

	x_B	x_N	
x_B	$B^{-1}B$	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
	0^t	c^t_N	0

$- c^t_B B^{-1} N = c^t_N - c^t_B B^{-1} N$

• $c^t_B B^{-1} N$

$\Rightarrow c^t_N - c^t_B B^{-1} N$

	x_B	x_N	
x_B	$B^{-1}B$	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
	0^t	$c^t_N - c^t_B B^{-1} N$	0

$- c^t_B B^{-1} b = - c^t_B B^{-1} N$

• $c^t_B B^{-1} b$

$\Rightarrow 0 - c^t_B B^{-1} b$

	x_B	x_N	
x_B	$B^{-1}B$	$B^{-1}N$	$B^{-1}B$
	0^t	$c^t_N - c^t_B B^{-1} N$	$-c^t_B B^{-1} N$

0^t ↓ CCR variabili in base

$c^t_N - c^t_B B^{-1} N$ ↓ CCR variabili fuori base

$-c^t_B B^{-1} N$ ↓ valore funzione obiettivo in B

✓ riom

MATRICIALE non richiesto in esame ma lo usa quindi

esempio pratico: c'è nelle slide

calcolo colonna x_1: $x_1 \in X_N$, allora faccio $B^{-1}\cdot N$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ +1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & +1 \end{bmatrix}$$ come calcolo B^{-1}? troppo oneroso?

due avevo le var di slack?
=> le metto in base
=> ovvero mat identità   solo x/c solo partenza esiste
=> quando prendi B^{-1} e moltiplichi per A trovi che ha dentro una mat identità quando rimoltiplichi dunque quello che avevo in corrispondenza delle slack! nelle colonne delle slack leggo l'inversa di base

$$B^{-1}\cdot A = N$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}\cdot N = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

leggo dal tableau del problema iniziale quali x_i non sono in base
=> I DATI INVECE DAL PROBLEMA CORRENTE

* CCR: $c_N^t - c_B^t \cdot B^{-1}N$ leggo i valori dal tableau iniziale

c_B^t vettore riga $(1\times m)$ coeff. delle var in base

$$c_B^t\cdot(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N^t x_N$$

$$= c_B^t \cancel{B^{-1}b} - c_B^t B^{-1} N x_N$$

$c_B^t B^{-1} b$ forma matriciale!

$(1\times m)(m\times m)(m\times 1) = 1\times 1$

$(m\times 1)(1\times m)$

abbiamo espresso il problema in funzione delle variabili che scambio

$$= c_B^t B^{-1} b + (c_N^t - c_B^t B^{-1} N) x_N$$ non di base

•1 PRE MOLTIPLICO B^{-1}

	x_B	x_N	
x_B	$B^{-1}B$	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
	c_B^t	c_N^t	0 (*)

moltiplico c_B^t e sottraggo sotto

valori var base

i valori di base devono finire a zero!

$$c_B^t - c_B^t B^{-1} B = 0$$

$c_N^t - c_B^t \cdot B^{-1} \cdot N$ variabili fuori base trovo i CCR

(*) all'inizio c'è zero: poi $0 - c_B^t B^{-1} b$ = F.O. CON SEGNO CAMBIATO x quesiti di teoria: "file quesiti 1"

1. Sia dato un problema in forma standard con n variabili e m vincoli ($n > m$). Ipotizzando una soluzione di base che contenga q variabili di base a valore nullo quante sono le basi associate al vertice in esame?

2. Un algoritmo approssimato per un problema di ottimizzazione intera NP-hard fornisce un errore garantito dall'ottimo in tempi non polinomiali, è vero? Spiegare la risposta.

3. Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni riguardanti un problema di minimo è vera o falsa motivando la risposta alla luce della teoria:
   - Se nel tableau del simplesso in corrispondenza di una variabile non di base il coefficiente di costo ridotto è nullo vuol dire che la soluzione corrente è ottima.
   - l'introduzione di un nuovo vincolo nel tableau ottimo di un problema di programmazione lineare richiede sicuramente l'uso del simplesso duale.

4. Il teorema di dualità in forma forte della Programmazione Lineare si applica anche alla Programmazione Lineare Intera. Motivare la risposta.

5. Dato un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI), sia z_{PLI} il valore della soluzione ottima intera e z_{PL} quello del corrispondente problema di Programmazione Lineare continua (PL). Se $z_{LP} \geq z_{PLI}$ cosa posso dire sul problema?

6. Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni riguardanti un problema di minimo è vera o falsa motivando la risposta alla luce della teoria:
   - la variabile duale associata ad un vincolo di minore/uguale assumerà nel problema duale un valore non-negativo.
   - i coefficienti di costo ridotto della soluzione ottima sono tutti non-negativi.

7. Sia data una soluzione di base per un problema di Programmazione Lineare. La condizione $B^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ ne garantisce l'ottimalità?

(1) m vincoli => m slack

m-n = var di partenza

quante basi associate? al v degenere

q<m azzerate,

m-n fuori base + q azzerate

-> num totale var

m-n sono a zero => var di base

n-m+q -> totali

q -> azzerate da ciclare

(2) no

(3) INIZIO REGISTRAZIONE

~~a. no, significa che il vertice trovato è degenere~~

~~=> ho + basi associate ad una soluzione~~

~~posso scambiare variabile senza contributo!~~

=> CASO OTTIMO MULTIPLO! cambio variabile cambiando soluz ma la F.O non cambia => entrambi validi

se non sono all'ottimo, so solo che ∃ +1 vertice con quel certo valore di FO.

non mi da informazioni sull'ottimo

4

5

6 è vero che CCR ≥ 0 per ottimo ma potrei avere dei CCR nulli

⇒ caso DEGENERE, scambio var con val negativo che appare solo sk segno neg

sol deg: posso avere CCR negativo anche se sono all'OTTIMO

7 $B^{-1} b \geq 0$ garantisce ottimalità?

⇒ garantisco l'ammissibilità, che la reg dei rapporti minimi funzioni e mi faccia scambiare variabili senza finire fuori regione ammissibile

⇒ nella fase ricc:  0 saranno positivi, e OK

11 1

12 colonna tutta neg

⇒ se la scambio, tutte le var crescono all'infinito

• se x_j esiste un'altra colonna non tutta neg e con CCR<0

⇒ ∃ soluzione

⇒ GARANTISCE SOLO LA DIREZIONE DI APERTURA (indicata opposto dalla variabile)

sign neg: tra var entrante ed uscente il segno È OPPOSTO

⇒ una cresce l'altra no, si compensano

PROBLEMA MAX o MIN è medesimo, se colonna full neg allora ho regione aperta

TH TQ DICE SE ... VERTICE = sol

non parlo della sua unicità

non contrario

27/03/2023 - TEORIA CON MANSINI

concetto esistenza prob duali con soluzione medesima FO

* **DUALITÀ** la teoria della dualità si sviluppa dal caso CONTINUO della PL e afferma:

  * $\forall$ problema di PL $\exists$ sempre un suo problema duale, e questo è unico

NB: non esistono due problemi PL con lo stesso duale, a meno che questi coincidano

problemi in forma canonica

Tra primale e duale $\exists$ una forte associazione anche se P e D esistono su due insiemi diversi: P ha n variabili e m vincoli, mentre D ha m variabili e n vincoli.

$\Rightarrow$ se $\exists$ problemi duali allora posso trovare soluzioni associate in coppie ovvero:
alla soluzione ottima di P e D trovo il medesimo valore della FO
quindi se sono capace di risolvere uno dei due problemi risolto anche l'altro

* **FORMA CANONICA**

PRIMALE: $\min \; c^t x$ $(1\times n)$
$Ax \geq b$
$x \geq 0$

CCR del primale $(n\times 1)$

termini noti del primale $(m\times 1)$

in forma canonica sono due problemi completamente diversi $\Rightarrow$ quando portati in STANDARD sono completamente equivalenti (ottimo coincide!)

vedi ragionamento con i binomiali

DUALE: $\max \; \lambda^t b$ $(1\times m)$
$\lambda^t A \leq c^t$
$\lambda \geq 0$

hanno la dim. delle variabili nel duale $(m\times 1)$ sono i CCR

hanno la dimensione dei vincoli nel duale $(n\times 1)$ sono i termini noti

* **FORMA STANDARD + CONVERSIONE**

La conversione si basa su "variabile $\rightarrow$ vincolo" e "vincolo $\rightarrow$ variabile", si scambiano le dim dei vettori monodimensionali ma alla fine le soluzioni sono lo stesso numero:

P: n variabili
m vincoli

D: m variabili
n vincoli

STANDARDIZZO

slack
n+m variabili
m vincoli

slack
m+n variabili
n vincoli

#soluz: P: $\binom{n+m}{m}$ D: $\binom{m+n}{n}$

$$\boxed{\frac{(n+m)!}{n!\,m!} = \frac{(m+n)!}{n!\,m!}}$$

* in forma standard P e D identificano gli STESSI VERTICI! questo significa che i due problemi sono complet. equivalenti

stesse soluzioni

attenzione che gli ottimi vanno cercati in uno $x \in \mathbb{R}^n$ nell'altro $\lambda \in \mathbb{R}^m$

RIASSUNTO IDEE:

problema di PL
↓
posso costruire il duale D → STANDARDIZZO: P e D hanno per costruzione lo stesso numero di soluzioni
↓
a due a due ogni sol. P–D identifica lo STESSO VALORE della F.O. anche se su due vertici differenti
↓
solo la SOL. OTTIMA trova sia la stessa F.O. (ottimale) che lo stesso VERTICE per P e D

in forma canonica i problemi sono diversi ma standard sono completam equivalenti perché hanno gli stessi vertici

P: mat coeff A $(m \times n)$
vett termini noti b $(m \times 1)$
vett coeff FO c^t $(n \times 1)$

D: mat coeff A $(m \times n)$
vett termini noti c^t $(n \times 1)$
vett coeff FO b $(m \times 1)$

× REGOLE DI CONVERSIONE P→D

$\forall i$ sono corrispondenti

PRIMALE (MIN)		DUALE (MAX)
$a_i^T x \geq b_i$	⟶	$\lambda_i \geq 0$
$a_i^T x \leq b_i$	⟶	$\lambda_i \leq 0$
$a_i^T x = b_i$	⟶	λ_i libera in segno
$x_j \geq 0$	⟶	$\lambda^T A_j \leq c_j$
x_j libera in segno	⟶	$\lambda^T A_j = c_j$

Se P è di min allora le variabili di D seguono il segno dei vincoli.
Le variabili invece dettano un'inversione sui vincoli di D.

NB: se fosse un primale di massimo ⇒ variabili di P mantengono il segno in D, vincoli di P subiscono l'inversione delle variabili di D

esempio:

c^t

$\min \; 10x_1 + 20x_2 + 30x_3$

3 variabili ⇓ 3 vincoli

b

$2x_1 - x_2 \geq 1 \to \lambda_1 \geq 0$

$x_2 + x_3 \leq 2 \to \lambda_2 \leq 0$

$x_1 - x_3 = 3 \to \lambda_3$ libera

$x_1 \geq 0$ → vincolo 1 $\leq c^t_1$; $x_2 \leq 0$ → vincolo 2 $\geq c^t_2$; x_3 libera → vincolo 3 $= c^t_3$

⇒

b

$\max \lambda^t b : \max 1\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\lambda^t_i A \leq c^t_i$:

c^t

$2\lambda_1 + \lambda_3 \geq 10$

$-\lambda_1 + \lambda_2 \leq 20$

$\lambda_2 - \lambda_3 = 3$

$\lambda_1 \geq 0, \; \lambda_2 \leq 0, \; \lambda_3$ libera

scrivi A
trascrivi b e c^t
poi scrivi la max FO: $\lambda^t b$
$\lambda^t_i A \leq c^t_i$

min → var_λ = segno $vinc_x$

max $var_\lambda \neq$ segno $vinc_x$

$c^t \to (1 \times n)$
$c \to (n \times 1)$

$\lambda^T_{(m \times 1)}{}^{(1 \times m)^t} \cdot A(m \times n) \Rightarrow (1 \times n)$

traspongo per poter moltiplicare e commutare correttamente

se PRIMALE è di min:
i vincoli mantengono il segno

se PRIMALE è di max:
i vincoli subiscono l'inversione del segno

→ nel passaggio cambiano la FO
→ i vincoli cambiano predicato
→ c^t passa da vett coeff a vett termini noti
→ b da termini noti a coeff FO

TEOREMI x PASSAGGIO
il 1° è dimostrato
e lo saputo
dualità debole
(DIM saputo)
dualità forte
(DIM x ORALE)

se conosco duale min→max ma ho un max
⇒ faccio il passaggio trasformo max→min e calcolo il duale lì.

x TEOREMI DUALITÀ pg 10/19

Proposizione 1

Il duale del problema duale coincide con il problema primale.

⇒ l'operazione di dualità rimane nei problemi P e D, non è possibile trovarne di diversi

x DIM: considero P ed il suo duale D. Conosco il passaggio min $\xrightarrow{D}$ max. Immagino che il D sia un problema di max e prima di calcolarne ancora il duale lo trasformo in min:

P di partenza
PRIMALE:

$$\min \; c^t x \qquad Ax \geq b \qquad x \geq 0$$

→ D trovato
DUALE:

$$\max \; \lambda^t b \qquad \lambda^t A \geq c^t \qquad \lambda \geq 0$$

STEP 1:
trasformo ⇒ max→min

−D calcolato
−D:

$$\min \; -\lambda^t b \qquad -A^t \lambda \leq -c \qquad \lambda \geq 0$$

ribalto trasposte

STEP 2:
- calcolo il duale del duale sapendo che

$(-\lambda) = x$

inverto la base traspongo $-A^t\lambda \to x^t(-A^t)$

$c = b^t$

D' duale di −D

$$D': \quad \max \; x^t(-c) \qquad x^t(-A^t) \leq -b^t \qquad x \geq 0$$

- ritrasformo il problema ottenuto da max a min ed otterrò P di partenza

$$-D': \quad \min \; -(x^t(-c))^t \qquad -(x^t(-A^t)) \leq -b^t)^t \to \qquad x \geq 0$$

$$\boxed{\min \; c^t x \qquad Ax \geq b \qquad x \geq 0}$$

♣

torno alle var x
con −c termine noto → costi
$-b^t$ costi → termine noto
inverto trasposte
$(-A^t)$ è la mat vincoli

OSSERVAZIONI 13/19
se ho un vincolo di uguaglianza allora posso sostituire con:

$$\min \; c^t x \qquad \max \; \lambda^t b$$

$Ax = b$ concordi $\lambda^t A \leq c^t$

$x \geq 0$ discordi λ non vincolato

se $Ax = b$ vale
sostituire con
$\left[Ax \gtrless b\right]$

DIM ESEG

OSSERVAZIONI slide 13/19

all'ottimo coeff (costi di base, costi di non-base)

$c_N^t - c_B^t B^{-1} N \geq 0$

$x \geq 0$
inverto segni e trasposizione

quando ottengo e come?

$c^t \begin{cases} c_B^t \\ c_N^t \end{cases}$

$c^t - c_B^t B^{-1}(A)$ → $B - c_B^t B^{-1} B$ parte in base $= 0$; $N - c_B^t B^{-1} N$ parte non base ≥ 0

* OSSERVAZIONE IMPORTANTE:

$$\begin{array}{c|c|c} x_B & x_N & \\ \hline I_n & B^{-1}N & B^{-1}b \\ \hline c_B^t - c_B^t B^{-1}B & c_N^t - c_B^t B^{-1}N & 0 \end{array}$$

Considero il problema in forma standard:
E immaginiamo di essere arrivato all'ottimo.

CRITERIO DI OTTIMALITÀ DEL PRIMALE: $\boxed{c^t - (c_B^t B^{-1})A \geq 0}$

$c_B^t B^{-1}$ è incognito = la base ottima. Da dove viene questo criterio?

condiz completa su tutti i vettori CCR

all'ottimo i CCR sono: nel tableau

$$c^t \begin{cases} c_B^t & -c_B^t B^{-1} B = 0 \\ c_N^t & -c_B^t B^{-1} N \geq 0 \quad \text{CCR dei non-base} \end{cases}$$

PONGO QUESTA CONDIZIONE

$c_B^t \, | c_N^t - \cancel{(c_B^t B^{-1}) B} - c_B^t B^{-1} N \Rightarrow c_N^t - c_B^t B^{-1} N \geq 0$

perché sono i coeff costo ridotto delle var nbase (anche se parto a ragionare da tutti i CCR)

=> osservazione:

$(m\times 1)(m\times n) \leq (n \times 1)$

sostituisco prendo nella condizione di ottimalità:

$\boxed{c_B^t B^{-1} = \lambda^t}$

$c^t - (c_B^t B^{-1})A \geq 0$

$\Rightarrow c^t - \lambda^t A \geq 0$

$\boxed{\lambda^t A \leq c^t}$ TROVO QUEST'ALTRA

ottengo esattamente i vincoli del duale dunque λ^t risolve le disequazione => è AMMISSIBILE

IMPORTANTE

* B è la base ottima del primale
una λ^t soddisfa i vincoli del duale quindi
* $\lambda^t = c_B^t B^{-1}$ è soluzione ottima del duale

il criterio di ottimalità in P implica l'ammissibilità in D

OTTIMALITÀ
AMMISSIBILITÀ

ottimo? ma abbiamo parlato solo di ammissibilità... => dimostro questa corrispondenza se ∃ e l'ottimo, la sol ott di P coincide con quella di D

DIMOSTRO CHE GLI OTTIMI COINCIDONO

⇒ posso convincermi che se $c_B^t B^{-1}$ è l'ottimo di P allora lo è anche per D?

all'ottimo c è scomponibile:

$c^t x^* = c_B^t x_B^* + c^t x_N^* \sim \emptyset$

P: min $c^t x$, $Ax \geq b$, $x \geq 0$

D: max $\lambda^t b$, $\lambda^t A \leq c^t$, $\lambda \geq 0$

* i valori delle var x_B^* all'ottimo sono $B^{-1}b$

$c^t x^* = c_B^t (B^{-1}b) + \sim\emptyset$

* so anche che all'ottimo i valori delle FO coincidono quindi

riscrivo il valore delle variabili P e D il loro valore FO all'ottimo

$x^* = \lambda^* \longrightarrow c^t x^* = \lambda^{*t} b$

⇒ scrivo il valore ottimo della FO di P in forma matriciale

$x \to x_B$

$x_B \to B^{-1}b$

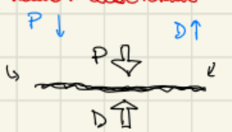
$c_B^t (B^{-1} \cdot \cancel{b}) = \lambda^{*t} \cdot \cancel{b} \quad \Rightarrow \quad \lambda^{*t} = c_B^t B^{-1}$

DIMOSTRATO

ho dimostrato $c_B^t B^{-1}$ base ottima di P è soluzione ottima di D

veramente non so da dove io abbia tirato fuori sta dimostrazione

prob di minimo che scende x cercare l'ottimo



all'ottimo coincidono (le FO) si schiacciano a vicenda sulla FRONTIERA DEI DUE MONDI

FO sono le stesse (in valore) anche se var λ ≠ var x

* TH DUALITÀ - FORMA DEBOLE

→ usa solo condizioni di ammissibilità, non ottimalità

Enunciato

Siano $P = \{\mathbf{x} \geq 0 : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\} \neq \emptyset$ e $D = \{\lambda \geq 0 : \lambda^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T\} \neq \emptyset$. Per ogni coppia di punti $\tilde{\mathbf{x}} \in P$ e $\tilde{\lambda} \in D$ si ha che:

$$\tilde{\lambda}^T \mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{x}}.$$

∀ coppia di soluz P e D ⇒

P limita superiorm. D

D limita inferiorm. P

DIM

Siano dati $\tilde{x} \in P$ e $\tilde{\lambda} \in D$. Vale sempre

1. $A\tilde{x} \geq b \qquad \tilde{x} \geq 0$ (ammiss. primale) FO: $c^t \tilde{x}$

⇒ 2. $\tilde{\lambda} \geq 0 \qquad c^t \geq \tilde{\lambda}^t A$ (ammiss. duale) FO: $\tilde{\lambda}^t b$

Da cui:

$$\tilde{\lambda}^t b \leq \tilde{\lambda}^t A \tilde{x} \leq c^t \tilde{x}$$

$$\Rightarrow \tilde{\lambda}^t b \leq c^t \tilde{x} \qquad \forall \tilde{\lambda}, \tilde{x} \quad ♣$$

Conseguenza: le funz obiettivo si limitano a vicenda

perché la funz D sale ⇒ FO del D sta sotto a FO di P, ergo solo all'ottimo coincidono

(P e D si limitano FO a vicenda)

* TH DUALITÀ – FORMA FORTE

Enunciato

(1)	se il primale ammette soluzione ottima finita	$\Longrightarrow$ $c^T\tilde{x} \in \mathbb{R}$	il duale ammette soluzione ottima finita e i valori delle due soluzioni coincidono $c^T x^* = \lambda^{*T} b$
(2)	se il primale è illimitato	$\Longrightarrow$	il duale non ammette soluzione (impossibile)
(3)	se il primale non ammette soluzione (impossibile)	$\Longrightarrow$	il duale è illimitato o impossibile

* RELAZIONE TRA SOLUZIONI PRIMALE–DUALE

1. ottimo finito $\Longleftrightarrow$ ottimo finito

2. illimitato $\Longrightarrow$ impossibile
   impossibile $\Longleftarrow$ illimitato

   • illimitato implica SEMPRE impossibile

3. impossibile $\Longrightarrow$ illimitato o impossibile
   illimitato o impossibile $\Longleftarrow$ impossibile

   • impossibile implica SEMPRE IMPOSSIBILE o ILLIMITATO

PRIMALE \ DUALE	ottimo finito	illimitato	impossibile
ottimo finito	1	NO①	NO
illimitato	NO②	NO*	3
impossibile	NO	3	2

NO: se uno dei due ha soluzione ⇒ ∃ almeno una sol amm ⇒ ∃ almeno una SAB ⇒ ∃ l'ottimo (th fondam PL)

NO*: non possono essere illimitati entrambi perché spingono in due direzioni diverse e non rispetterebbe $\tilde{\lambda}^T b \le c^T \tilde{x}$

NO①: se P ha ottimo finito, questo è un UB per D

NO②: se D ha ottimo finito, questo è LB per P

29/03/2023 da qui ho perso 2 lezioni da recuperare

su Notion ho scritto: ore 1+2 dagli appunti di cristina

* DUALITÀ: COMPLEMENTARY SLACKNESS

RECAP: • ogni problema (primale) è associato al suo duale.
• i vertici di P e D sono associati tra loro a due a due
⇒ i problemi hanno entrambi $\binom{n}{m}$ vertici e quindi sono equivalenti
• l'ottimo di P ha valore medesimo dell'ottimo di D

COND. ORTOGONALITÀ: condizioni molto potenti che permettono dal punto di vista pratico consentono di ricavare la soluzione ottima di D data quella di P (e viceversa)

⇒ queste cond. sono la partenza per lo sviluppo dei metodi primali/duali

Parto dalle condiz. di ottimalità

PRIMALE (canonica)
$\min \{ c^t x : Ax \geq b, x \geq 0 \}$ $x \in \mathbb{R}^n$, m vincoli

DUALE
$\max \{ \lambda^t b : \lambda^t A \leq c^t, \lambda \geq 0 \}$ $\lambda \in \mathbb{R}^m$, n vincoli

* dati $x^* \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda^{*t} \in \mathbb{R}^m$, questi sono ottimi per P e D SE E SOLO SE

① $Ax^* \geq b$ $x^* \geq 0$ ammissibilità P
② $\lambda^{*t} A \leq c^t$ $\lambda^* \geq 0$ ammissibilità D
③ $c^t x^* = \lambda^{*t} b$ FO coincidenti (uguaglianza P e D)

NB. la condizione "$c^t x = \lambda^t b$" è SEMPRE verificata, per tutte le coppie di vertici associate tra P e D

$\Rightarrow$ tuttavia l'ottimo è l'unica soluzione per cui entrambi i vertici risultano anche AMMISSIBILI nei rispettivi problemi

① & ②
Dall'ammissibilità abbiamo il TH DUALITÀ DEBOLE

$$\lambda^{*t} b \leq \lambda^{*t} A x^* \leq c^t x^*$$

③
Mentre dall'ottimalità posso sostituire i "$\leq$" con "$=$"

ho ottenuto due espressioni distinte dalle cond ottim

$$\begin{cases} \lambda^{*t} b = \lambda^{*t} A x^* \\ c^t x^* = \lambda^{*t} A x^* \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda^{*t} (Ax - b) \overset{!}{=} 0 \\ (\lambda^t A - c^t)\, x^* \overset{!}{=} 0 \end{cases}$$

ortogonalità

ortogonalità

MA COSA È $AX - B$?
io so che di solito $Ax \geq b$
quindi la loro differenza è
il valore delle variabili di slack

$(1 \times m) \quad (1 \times n)$
$\lambda^{*t} \cdot (x_s \in \mathbb{R}^n) = 0$
queste equazioni rappresentano
il prodotto interno tra
$(\lambda_s \in \mathbb{R}^m) \cdot x^* = 0$
$(1 \times m) \quad (1 \times n)$

$\Rightarrow$ se il prodotto interno (scalare) tra due vettori risulta nullo, allora quei vettori sono ORTOGONALI

(questo vale all'ottimo)

$\lambda^{*t}(Ax^* - b) = 0$

è raccolto con perché nel primale
$x^* \geq 0$ e $Ax^* \geq b$
quindi $Ax^* - b \geq 0$
slack sono variabili positive! $x_s \geq 0$ OK

$(c^t - \lambda^{*t} A) x^* = 0$

è raccolto con perché nel duale
$\lambda^{*t} \geq 0$ e $\lambda^{*t} A \leq c^t$
quindi $c^t - \lambda^{*t} A \geq 0$
$\lambda_s \geq 0$ OK

SIGNIFICATO
* ORTOGONALITÀ:

Se mi trovo in un punto della regione dove ∃ una variabile di slack con valore positivo (cioè ≠0)

$(c^t-\lambda^{*t}A)x^*=0$
$>0 \quad =0$
impone

$\Rightarrow \lambda_i^{*t}(Ax_i^*-b)=0$
$=0 \quad >0$
impone

significa che la corrispettiva variabile duale λ_i^* sarà NULLA, per garantire l'annullamento del prodotto

in realtà è più complicato di un prodotto normale (i valori dei singoli componenti sono particolari) vediamolo

Scrivo per esteso la condizione di ortogonalità sapendo che
- $\lambda_i^*\geq 0$
- $a_i^t x^*-b_i\geq 0$

$\forall i=1 \dots m$

(1) $\lambda^{*t}\cdot(Ax^*-b)=\sum_i^m \lambda_i^*(a_i^t x^*-b_i)=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1^*(a_1^t x^*-b_1)=0\\ \dots\\ \lambda_m^*(a_m^t x^*-b_m)=0\end{cases}$

riga

m condizioni

Idem per l'altra

colonna

(2) $(c^t-\lambda^{*t}A)x^*=\sum_j^n(c_j-\lambda^{*t}A_j)x_j^*=0 \Rightarrow \begin{cases}(c_1-\lambda^*A_1)x_1^*=0\\ \dots\\ (c_n-\lambda^*A_n)x_n^*=0\end{cases}$

n condizioni

DEF: queste condizioni sono dette di ORTOGONALITÀ o COMPLEMENTARY SLACKNESS

↓

ho in totale (n+m) condizioni di ortogonalità

$$\lambda^{*t}\cdot(Ax^*-b)=\sum_i^m \lambda_i^*(a_i^t x^*-b_i)=0$$

$\geq 0 \quad \geq 0$; $\geq 0 \quad \geq 0$

o la slack, o la variabile duale sarà NECESSARIAMENTE nulla

essendo le sommatorie composte da soli termini positivi o nulli, l'unico modo per ottenere una somma nulla è che TUTTI I TERMINI SIANO ZERO
⇒ pongo tutti gli m termini a 0 (e anche gli altri n)

se $\lambda_i \neq 0$
$\Rightarrow x_s = 0$
e viceversa

Interpretazione:

- la variabile duale λ_i^* corrispondente ad un vincolo primale del tipo $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* > b_i$ deve essere nulla;
- se $x_j > 0$ allora il corrispondente valore di $(c_j - \boldsymbol{\lambda}^{*T}A_j)$ è zero.

* TH DI COMPLEMENTARY SLACKNESS

che è tutto il ragionamento formulato prima

$\mathbf{x}^*$ e $\boldsymbol{\lambda}^*$ sono soluzioni ottimali del primale e del duale se e solo se:

$$(c_j - \boldsymbol{\lambda}^{*T}A_j)x_j^* = 0 \qquad \forall j = 1, \cdots, n$$

$$\lambda_i^*(\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* - b_i) = 0 \qquad \forall i = 1, \cdots, m$$

SE RISOLVO CON IL METODO GRAFICO

Sostituisco la soluzione ottima $y_1^* = 4/5$ e $y_2^* = 3/5$ nei vincoli:

- se il vincolo è soddisfatto come uguaglianza $\Rightarrow$ variabile di slack=0.
- se il vincolo rimane di disuguaglianza $\Rightarrow$ la differenza corrisponde al valore della variabile di slack.

$$\begin{array}{rcl}
4/5 + 2\cdot 3/5 = 2 & \Longrightarrow & y_{(2+1)}^* = 0 \\
4/5 - 2\cdot 3/5 = -2/5 < 3 & \Longrightarrow & y_{(2+2)}^* = 17/5 \\
2\cdot 4/5 + 3\cdot 3/5 = 17/5 < 5 & \Longrightarrow & y_{(2+3)}^* = 8/5 \\
4/5 + 3/5 = 7/5 < 2 & \Longrightarrow & y_{(2+4)}^* = 3/5 \\
3\cdot 4/5 + 3/5 = 3 & \Longrightarrow & y_{(2+5)}^* = 0
\end{array}$$

E la soluzione di base ottima del primale?

Per ricavarla si usano le condizioni di ortogonalità di complementary slackness.

1.

$$y_i^* \cdot x_{(n+i)}^* = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rcl}
y_1^* \cdot x_{(5+1)}^* & = & 0 \quad (y_1^* \neq 0 \quad 4/5) \Longrightarrow x_6^* = 0 \\
y_2^* \cdot x_{(5+2)}^* & = & 0 \quad (y_2^* \neq 0 \quad 3/5) \Longrightarrow x_7^* = 0
\end{array}$$

Poiché le 2 variabili di slack del primale sono nulle ($x_6^* = x_7^* = 0$) allora i vincoli del primale sono soddisfatti come uguaglianze.

2.

$$x_j^* \cdot y_{(m+j)}^* = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rcl}
x_1^* \cdot y_{(2+1)}^* & = & 0 \quad (y_{(2+1)}^* = 0) \Longrightarrow x_1^* = ? \\
x_2^* \cdot y_{(2+2)}^* & = & 0 \quad (y_{(2+2)}^* \neq 0 \quad 17/5) \Longrightarrow x_2^* = 0 \\
x_3^* \cdot y_{(2+3)}^* & = & 0 \quad (y_{(2+3)}^* \neq 0 \quad 8/5) \Longrightarrow x_3^* = 0 \\
x_4^* \cdot y_{(2+4)}^* & = & 0 \quad (y_{(2+4)}^* \neq 0 \quad 3/5) \Longrightarrow x_4^* = 0 \\
x_5^* \cdot y_{(2+5)}^* & = & 0 \quad (y_{(2+5)}^* = 0) \Longrightarrow x_5^* = ?
\end{array}$$

altra nota:

P multipla → D degenere

I valori di x_1^* e x_5^* li ricavo dai vincoli:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + x_5 = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1^* = 1 \\ x_5^* = 1 \end{cases}$$

Soluzione di base ottima del primale:

$x_1^* = 1, x_2^* = 0, x_3^* = 0, x_4^* = 0, x_5^* = 1, x_6^* = 0, x_7^* = 0.$

17/04/2023 (appunti recuperati) FILE: interpretazione duale e prezzi ombra

Partiamo con un esempio vedi slide ...

- INTERPRETAZIONE ECONOMICA

* ottimo del problema

	valore incognite	CCR
x_1: A	60	0.0
x_2: B	40	0.0
	slack	**shadow price**
x_3 (λ_1):	0	2.5
x_4 (λ_2):	60	0
x_5 (λ_3):	0	10

un aumento del b_1 (termine noto del vincolo relativo a x_3) produrrebbe un aumento di 2.5 * unità nella FO

ho delle rimanenze per la risorsa x_4: non avrebbe senso procurarmi più disponibilità! il contributo è nullo

CCR_i di λ_i

contributo × aumento delle risorsa vincolata da (x_{n+i}) slack

DEF PREZZI OMBRA:

in termini economici

La soluzione ottima del duale λ^* prende il nome di vettore dei **prezzi ombra**. Ogni sua componente mi dice quanto sono disposto a pagare per avere una unità in più della corrispondente risorsa del primale.

termini di pagamento

perché se ad esempio aumentare la manodopera mi frutta +10, io idealmente posso spendere fino a 10 per avere questo aumento della risorsa!

dal PdV economico, il duale e primale sono due problemi risolti da due agenti diversi ed in competizione, su due mercati differenti

=>

• INTERPRETAZIONE ALGEBRICA

* i CCR del duale (SHADOW PRICES) indicano il contributo in termini di funzione obiettivo, per ogni unità di cui viene aumentata la disponibilità della risorsa vincolata dalla relativa variabile di slack (P)

* Se facessi la derivata della FUNZIONE OBIETTIVO (z) primale rispetto un qualsiasi termine noto b_i otterrei il valore della corrispettiva variabile ottima del duale (λ_i)

$$\frac{\partial z}{\partial b_i} = \lambda_i^* \quad \forall i = 1 \dots m$$

* Come dimostro che una variazione Δb_i dei termini noti (dei vincoli del PRIMALE) incide a livello della funzione obiettivo?

$$\max \; c^t x$$
$$Ax \le b$$
$$x \ge 0$$
$$\downarrow$$

* ottimo $z = c^t x$

$$\Rightarrow \frac{\partial c^t x}{\partial b_i} = \lambda_i ?$$

• inizio il calcolo dicendo: all'ottimo $c^t x = \lambda^t b$

$\Rightarrow$ $\lambda^t b_i$ altri non è se non $\sum_i^m b_i \lambda_i$

$$\Rightarrow \frac{\partial\left(\sum_i b_i \lambda_i\right)}{\partial b_i} = \lambda_i$$

♣

* cosa succede quindi a fronte di una variazione Δb

$$z + \Delta z = \overset{c_B^t B^{-1} b}{c^t x^*} + \Delta c^t x^* = c_B^t B^{-1} b + \underbrace{c_B^t B^{-1}}_{= \lambda^t} \Delta b$$

$$= c_B^t B^{-1}(b + \Delta b) =$$

$$= \underbrace{c_B^t B^{-1} b}_{\text{FO ATTUALE}} + \underbrace{\lambda^{*t} \Delta b}_{\text{OTTIMO DUALE} \cdot \text{VARIAZ. } \Delta b}$$

es. se $\Delta b = \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $z + \Delta z = c_B^t B^{-1} b + \lambda^{*t} \Delta b$

$$= z + \lambda_1^* \Delta b_1$$

traslare vincolo
=> aumentare o ridurre una risorsa disp

stesso ragionamento si può fare con il duale

cambia vertice
⇓
cambiano i prezzi ombra ed il loro intervallo di validità

Soluzione ottima: 2600.0

Prodotto	Valore	Costo Ridotto
A	60.0	0.0
B	40.0	0.0

Stadio	Slack	Prezzo Ombra
assemblaggio	0.0	2.5
finitura	60.0	0.0
controllo	0.0	10.0

[I valori dei prezzi ombra rimangono tali fintanto che la soluzione ottima non varia.]

↓

quindi aumentare b_1 e b_3 non è vantaggioso all'infinito!

$\exists$ una certa soglia

POV GEOMETRICO: modificare il termine noto di un vincolo significa traslarlo (in gradiente o antigradiente), ma FO rimane ferma! fino a un certo punto

=> inevitabilmente ci sarà un momento in cui il vertice ottimo cambia! mi convinco che b influenza la z^* perché $c^T x = \lambda^T b$

* effettivo guadagno rappresentato dai prezzi d'ombra è limitato ad un intervallo limitato $(b-\Delta b, b+\Delta b)$ *