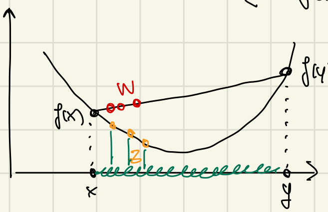
DEFINIZIONI E TEOREMI

f convessa: $X \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, $f: X \to \mathbb{R}^n$ è convessa se $\forall x, y \in X$, $\forall \lambda \in [0,1]$ vale

$$f(\boxed{\lambda x + (1-\lambda) y}) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

$$z \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$



$f(\lambda x - (1-\lambda)) \leq \lambda f(x) - (1-\lambda) f(y)$

$\forall x \leq y \in X, \quad \forall \lambda \in [0,1]$

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso $\quad f: X \to \mathbb{R}^n$

$\downarrow$

insieme convesso $A \subseteq \mathbb{R}^n \neq \emptyset$ se $\forall x, y \in A$, $\forall \lambda \in [0,1]$ vale $z = \lambda x + (1-\lambda) y \in A$

f concava ribalta la condizione banalmente $f(x)$ concava se $-f(x)$ convessa

conseguenze?

$N = (x - \varepsilon ; x + \varepsilon)$

OTTIMO: $x \in X$ ottimo se $\exists \; N \subseteq X : f(x) \leq f(y) \; \forall y \in N$

$\Rightarrow N$ può coincidere con X

TH FONDAMENTALE:

problema $\min \{ f(x) : x \in X \}$ con $X \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, $f: X \to \mathbb{R}^n$ convessa

$\Rightarrow$ ogni ottimo loc è globale

* PRIMA ESERCIZ

min $-x_1$

$x_2+x_3=2$

$3x_1-x_2+x_4=3$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

2 var di slack:

v_1: 1 2 $\quad$ v_4: 2 3

v_2: 1 3 $\quad$ v_5: 2 4

v_3: 1 4 $\quad$ v_6: 3 4

esempio

con v_1: $\left[\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}}_{N}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{B}\right]$

N: mando a zero $\quad$ B: ricavo

$\boxed{=0 \quad x_1\, x_3}$

$$A=\Big[\underbrace{\begin{matrix}0 & 1\\ 3 & -1\end{matrix}}_{N}\ \overbrace{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}}^{B}\Big]$$

RISOLVO:

1) $x_1\, x_2$ nella base, mando $x_3\, x_4$ a zero

$B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ $\quad$ $N=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$(B\ \cancel{N})\begin{bmatrix}x_3\\ \cancel{x_4}\end{bmatrix}=\underline{b}$

$Bx_B=b$ $\quad$ $x_B=B^{-1}b$ $\quad$ $B^{-1}=\frac{1}{|B|}(\bar{B}^t)=\frac{1}{-3}\bar{B}^t=\begin{bmatrix}1/3 & 1/3\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$$x_3=\begin{bmatrix}1/3 & 1/3\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5/3\\ 2\end{bmatrix}\begin{matrix}x_1\\ x_2\end{matrix}$$

con $x_3, x_4=\underline{0}$

$\bar{B}=\forall$ elemento b_{ij} $\quad$ $i\ (-1)^{i+j}\det(B_{ij})$

elimino i-riga j-colonna

e calcolo determin

$$\bar{B}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

27/02 ESEMPIO 18/20 FILE: PRINCIPI E FONDAMENTI

$\max\ x_1$

$x_2 \leq 2$

$3x_1 - x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$ $\rightarrow$ OR

$\boxed{\min\ -x_1}$

$\underline{x_2 + x_3} = 2$

$3x_1 - x_2 + \underline{x_4} = 3$

$x_1 x_2 x_3 x_4 \geq 0$

$$A = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{vincolo 1} \\ \text{vincolo 2} \end{array} \\ \underbrace{}_{B} \underbrace{}_{N} \end{array} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow B_{agg} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B^t_{ag} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad |B| = 0 - 3 = -3$$

$$B^{-} = \frac{B^t_{agg}}{|B|} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$Ax = b$

$Bx_B + \underbrace{Nx_N}_{=0} = b$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad x_B = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 \\ 2 + 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$x^* = \left(\underset{= 1 + \frac{2}{3}}{\frac{5}{3}}; 2; 0; 0 \right)$$

con base $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$\min -x_1$

$(x_1 x_2) = (5/3; 2; 0\ 0)$ ottimo $\boxed{FO: -5/3}$ ammissibile

$(x_1 x_3) = (1; 0; 2; 0)$ FO: -1

$(x_2 x_4) = (0; 2; 0; 5)$ FO: -0

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

base $x_1 x_2$: ✓

base $x_1 x_3$:

$$B \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_a = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad |B| = 3$$

$$B^{-1} = \frac{B_a^t}{|B|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1/3 \\ 2 + 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

base $x_1 x_4$:

$$B \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_a \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad |B| = 0$$

$\Rightarrow$ B non invertibile $\Rightarrow \nexists$ soluz di base

$\Rightarrow$ (vincoli non si intersecano)

base $x_2 x_3$:

$$B \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad |B| = 1$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B^{-1} b = \qquad \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad x^* = (0; -3; 5; 0) \text{ non ammissibile}$$

base $x_3 x_4$:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_{agg} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_a^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad |B| = 1$$

$$x_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad x^* = (0; 0; 2; 3)$$

ammissibile

esercizio pg 20 PRINCIPI E FONDAMENTI

$\max \; -4x_1 + 5x_2 \to \min \; 4x_1 - 5x_2$

1. standard
2. tutte le sol di base. Degeneri?
3. $\mathbb{R}^2$
4. non ammiss Ex
5. ammiss Ex

$x_1 + 5x_2 \geq 2$

$9x_1 - x_2 \leq 6$

$x_2 \leq 7$

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1 + 5x_2 + x_3 = 2$

$-9x_1 + x_2 \geq -6 \to 9x_1 + x_2 + x_4 = -6$

$-x_2 \geq -7 \to -x_2 + x_5 = -7$

m n

3 vincoli → 2 + 3
var surplus

⇒ so già che sarà soluz degenere se vincoli > variabili forma canonica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$\boxed{x_1 x_2 x_3}$

$$B \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 9 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_{agg} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 \\ -1 & 0 & +1 \\ 1 & 9 & -44 \end{bmatrix} \qquad B_a^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \\ -9 & 1 & -44 \end{bmatrix}$$

$|B| = -9$

$$x_B = \begin{bmatrix} 0 & 1/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1/9 & \frac{44}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9(-6) - 7\,1/9 \\ 7 \\ 2 + \frac{2}{3} - \frac{7 \cdot 44}{9} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -13/9 \\ 7 \\ -\frac{284}{9} \end{matrix}$$

non ammissibile

$\boxed{x_1 x_2 x_4}$

$$B \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 9 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_{agg} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -44 \end{bmatrix} \qquad |B| = (0 + 0 + 0) - (0 - 1 + 0) = 1$$

$+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad +\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$

$-\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$+\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -9 \qquad -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-1) \qquad +\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 45$

$$x_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \\ -9 & 1 & -44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-7\cdot 5 = \\ 7 \\ -9\cdot 2-6+7\cdot 44 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 \\ 7 \\ 284 \end{bmatrix}$$

non ammissibile

$\boxed{x_1 x_2 x_3}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{agg} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -9 & -9 \\ -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -44 \end{bmatrix}$$

$$|B| = (1+0+0)-(0+0+45) = -44$$

$$x_B = \begin{bmatrix} -1/44 & 5/44 & 0 \\ \frac{9}{44} & -1/44 & 0 \\ 9/44 & -1/44 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.727 \\ 0.5454 \\ -6.454 \end{bmatrix}$$

non ammissibile

$\boxed{x_2 x_3 x_4}$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{agg} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|B| = (0-1+0)-(0+0+0) = -1$$

$$x_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 7 \\ 2-35 \\ -6-7 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -33 \\ -13 \end{bmatrix}$$

non ammissibile

$\boxed{x_2 x_3 x_5}$

$|B| = (0+0+0) - (0+0+1) = -1$

$$\begin{matrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$B_{agg} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{matrix} -6 \\ 2+30 \\ -6-7 \end{matrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 32 \\ -13 \end{bmatrix}$$

non ammissibile

$\boxed{x_2 x_4 x_5}$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$B_{agg} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$|B| = (5+0+0) - (0+0+0) = 5$

$$x_B = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ -6 \\ -7 \end{matrix} = \begin{matrix} \frac{2}{5} \\ -2/5 - 30/5 \\ 2/5 - 35/5 \end{matrix}$$

ok non ammissibile

l'operazione di calcolo trasposto + aggiunto non modifica le colonne di una matrice che siano vettori della base canonica?
no non credo

$\boxed{x_3 x_4 x_5}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix}$$

non ammissibile

$\boxed{x_1 x_3 x_4}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{agg} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ & \\ & \end{bmatrix} = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ \dots & & \\ \dots & & \end{matrix}$$

$|B| = (0+0+0$

non invertibile $\Rightarrow \not\exists B^{-1}$

non c'è soluzione di base

$\boxed{x_1 \; x_3 \; x_5}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -9 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

$$|B| = (0+0+0) - (0+0+9) = -9$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1/9 & 0 \\ 1 & -1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{x_1 \; x_4 \; x_5}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_{agg} \begin{bmatrix} 1 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad |B| = (1+0+0) - (0+0+0) = 1$$

$$x_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 2 \\ -18-6 \\ -7 \end{matrix}$$

non ammissibile

non di base ammn:

$$\min \; 4x_1 - 5x_2$$

$$x_1 + 5x_2 - x_3 = 2$$
$$9x_1 - x_2 + x_4 = 6$$
$$x_2 + x_5 = 7$$

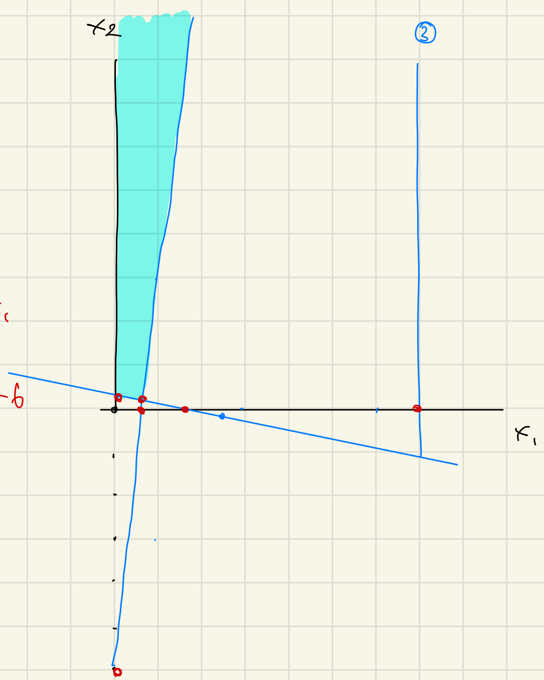
$x_1 + 5x_2 \geq 2$

$9x_1 - x_2 \leq 6$

$x_2 \leq 7$

$y \geq \frac{2}{5} - \frac{1}{5}x_1$

$x_2 \geq 9x_1 - 6$



$x_1 + 5x_2 - x_3 = 2$

$9x_1 - x_2 + x_4 = 6$

$x_2 + x_5 = 7$

$x\,(0, 7, 33, 13, 0)$

① ok ② ok ③ ok

$x\,(-1, 1, 3, -2, 6)$

NO

$x\,\left(\frac{1}{2}, 6, \frac{57}{2}, \frac{15}{2}, 1\right)$

① ok ② ok ③ ok

$x\,(0 \quad 1 \quad 3 \quad 7 \quad 6)$

① ok ② ok ③ ok

$x\,\left(\frac{16}{23} \quad \frac{6}{23} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{155}{23}\right)$

① ok ② ok ③ ok

file potenziamento risoluzione grafica

ES 2

min $-8x_1 + 9x_2$

$-x_1 + 9x_2 \leq 72$

$-2x_1 + 9x_2 \geq 18$

$x_1 \leq 9$

$x_1, x_2 \geq 0$

canonica

$-x_1 + 9x_2 + x_3 \leq 0$ $\quad x_3 \leq 72$

$2x_1 - 9x_2 + x_4 \leq 0$ $\quad x_4 \leq 18$

$x_1 + x_5 \leq 0$ $\quad x_5 \leq 9$

standard?

x_1, x_2

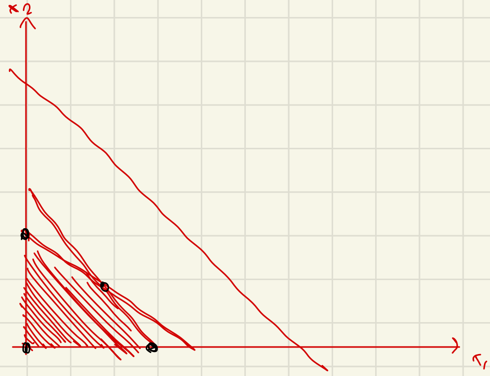
funzione obiettivo

max $8x_1 + 10x_2$

$5x_1 + 4x_2 \le 200$

$3x_1 + 6x_2 \le 180$

$4x_1 + 2.5x_2 \le 108$



$6y = 180 - 3x$

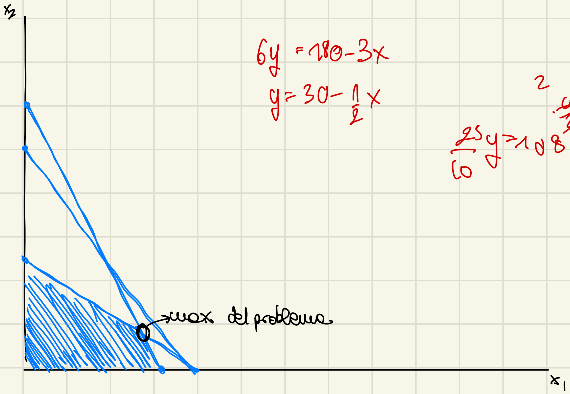
$y = 30 - \frac{1}{2}x$

2

$\frac{25}{10}y = 108 - 4x$

$4 \cdot \frac{10}{25}$ $\frac{40}{25}$ 1.7

graficamente



Es 1 TE 25 gennaio 2017

min $35(x_{11}+x_{12}) + (x_{21}+x_{22}-10) + 13x_{31} + 50(x_{41}+x_{42})$

$4x_1 + 5x_2$

$1.5x_1 + 2.5x_2$

$3x_1$

$0.5x_1 + 1x_2$

$x_{11} \ge 0.4(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41})$

$x_{21} \ge 0.15(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41})$

$\overbrace{x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}}^{\text{insieme formano una 1 caramella}} \ge 1000$

$x_{12}+x_{22}+x_{42} \ge 1800$

la parte che devono essere già almeno 10kg in magazzino?

$\max \; x_1 + kx_2$

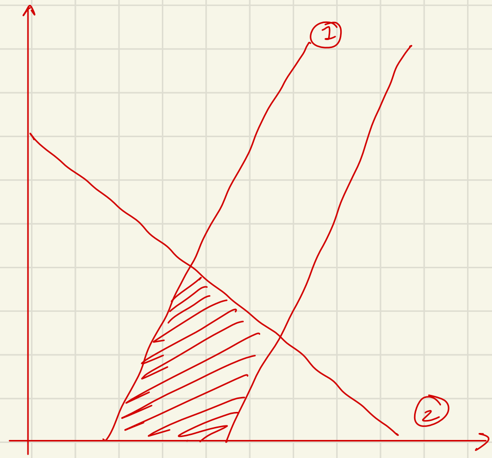
$y = 4x - 2$

$-4x_1 + x_2 \leq -2$ (1)

$x_1 + 2x_2 \leq 18$ $\quad 2y = 18 - x$

$2x_1 - x_2 \leq 7$

$x_1, x_2 \geq 0$



$\nabla f = (1, k)$ $\qquad k = 2$

Sia dato il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\min \quad -x_1 + 20x_2$$

$$x_1 \leq \frac{11}{10}$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 5$$

$$2x_1 + 6x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Trovare l'ottimo del problema tramite l'algoritmo del simplesso matriciale.
- Se si fosse applicato il metodo del simplesso al problema privato del terzo vincolo, la soluzione ottima sarebbe cambiata? Perché?

- standardizza
- ricava da tabella init (subito) B, N, c_B^T, c_N^T
- inizia i calcoli
- mat I base, $B^{-1}N$, $B^{-1}b$, $-c_B^T \cdot B^{-1}b$, etc etc

22/03/2023

Modellizzazione e uso del software Gurobi (I)

Alla fine di ogni giornata lavorativa, la banca di Matriciopoli deve aggiornare gli estratti conto di migliaia di carte di credito. Si stima che ognuna delle h filiali in media debba processare g TB di dati. Il reparto ICT, raccolti tutti i dati di ogni filiale, li invia ad una rete di n calcolatori che possono lavorare in parallelo e deve quindi decidere come suddividere il carico. Ciascun calcolatore i, $i = 1, \ldots, n$ ha una velocità di elaborazione pari ad α_i GB/s e i dati possono essere inviati ad esso con una velocità di β_i GB/s. La banca vuole che in ogni caso ogni calcolatore elabori almeno l'Ω% e al massimo il Θ% dei dati totali e che le elaborazioni siano terminate entro τ secondi. La banca vuole minimizzare il carico complessivo dei calcolatori più datati (contrassegnati con un indice i pari).

- parti dalla FO: min carico di lavoro calcolatori indici pari

n num calcolatori a disposizione

come traduco in formule lineari?

- cerco calcolo del calcolatore $\frac{2, 4, 6 \ldots}{n \text{ pari}}$ misuro in? scelgo GB

ogni carico è una var $\Rightarrow x_2, x_4, \ldots$

- per formulare FO mi servono le variabili $\forall i$ pari $x_i \geq 0$ = GB assegnati al calcolatore

min $x_2 + x_4 + x_6 + \ldots$

NB. sono in un modello parametrico
come quantifico? come definisco?
come compatto la formula?

Funz Obiett:

$\Rightarrow$ min $\sum_{i=1}^{n/2} x_{i \cdot 2}$

VINCOLO:
- voglio operaz che durano al max τ secondi

$\bigcirc \leq \tau$

per ora ci metto t tempo trasferimento dati + T tempo elaborazione

Vincolo che vale $\forall i$, per ogni calcolatore

$\Rightarrow$ es. calcolatore $i=2$ $\quad x_2 \cdot \underbrace{\frac{1}{\beta_2}}_{\text{vel. elab}} + x_2 \underbrace{\frac{1}{\alpha_2}}_{\text{vel. trasferim}}$

$\Rightarrow$ $x_i \cdot \frac{1}{\beta_i} + x_i \cdot \frac{1}{\alpha_i} \leq \tau \quad \forall i = 1 \ldots n$

← questo vale x tutti calc non solo quelli con indici pari

LE VARIAB CHE USO NELLA FO NON MI BASTANO PER ESPRIMERE I VINCOLI!

↓

POSSO SOLO AGGIUNGERE VARS
UNA IN PIÙ È OK, UNA IN MENO NO!

almeno → $\geq$
massimo → $\leq$

VINCOLO:

- % max e min di elaborazione

$$x_i \geq \frac{\Omega}{100} \cdot (hg \cdot 1000) \qquad \forall i$$

$$x_i \leq \frac{\theta}{100} \cdot (hg \cdot 1000)$$

- vincolo su TUTTI i carichi = carico lavoro totale distribuito

$$\sum_{i=1}^{i} x_i = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{filiali}}}{h}\overset{\text{calcolatori}}{g} \cdot 1000 \rightarrow TB \rightarrow GB$$

11:50 Mer 22 mar ••• 69%

BancaMatriciopoli Fine

```java
import gurobi.*;

public class BancaMatriciopoli {

	static int n = 21;
	static int h = 5;
	static double g = 0.2 * 1000;
	static double omega = 0.01;
	static double teta = 0.08;
	static double[] alfa = {3.7, 5.2, 6.8, 6.1, 7.3, 7.4, 9.5, 1.4, 9.9, 4.9, 9.6,
			8.2, 9.0, 4.8, 10.0, 7.0, 3.1, 2.9, 2.4, 9.4, 5.6};
	static double[] beta = {2.6, 2.4, 0.6, 1.2, 1.8, 0.7, 1.8, 0.4, 1.6, 1.5, 1.6,
			0.5, 2.9, 0.7, 1.6, 0.4, 0.6, 2.4, 1.7, 2.8, 0.8};


	public static void main(String[] args) {
		try {
			GRBEnv env = new GRBEnv("esercitazione.log");
			impostaParametri(env);
			GRBModel model = new GRBModel(env);

			GRBVar[] xi = aggiungiVariabili(model);

			aggiungiFunzioneObiettivo(model);
			aggiungiVincoloDatiTotali(model, xi);
			aggiungiVincoloPercentualeMinima(model, xi);
			aggiungiVincoloPercentualeMassima(model, xi);
			int tau = 63; aggiungiVincoloTempo(model, xi, tau);

			model.update();
			solve(model);

			//quesito1(model);
			//quesito2(model);


		} catch (GRBException e) {
			e.printStackTrace();
		}
	}

	private static void impostaParametri(GRBEnv env) throws GRBException {
		env.set(GRB.IntParam.Method, 0);
		env.set(GRB.IntParam.Presolve, 0);
	}

	private static GRBVar[] aggiungiVariabili(GRBModel model) throws GRBException {
		GRBVar xi[] = new GRBVar[n];
		for(int i = 0; i < n; i++) {
			if(i % 2 == 0)
				xi[i]= model.addVar(0, GRB.INFINITY, 1, GRB.CONTINUOUS, "x_" + i);
			else
				xi[i]= model.addVar(0, GRB.INFINITY, 0, GRB.CONTINUOUS, "x_" + i);
		}

		return xi;
	}

	private static void aggiungiFunzioneObiettivo(GRBModel model) throws GRBException {
		model.set(GRB.IntAttr.ModelSense, GRB.MINIMIZE);
	}

	private static void aggiungiVincoloDatiTotali(GRBModel model, GRBVar [] x) throws GRBException {
		GRBLinExpr lhs= new GRBLinExpr();
		for(int i = 0; i < n; i++)
			lhs.addTerm(1.0, x[i]);
```

```
    }

    private static GRBVar[] aggiungiVariabili(GRBModel model) throws GRBException {
        GRBVar xi[] = new GRBVar[n];
        for(int i = 0; i < n; i++) {
            if(i % 2 == 0)
                xi[i]= model.addVar(0, GRB.INFINITY, 1, GRB.CONTINUOUS, "x_" + i);
            else
                xi[i]= model.addVar(0, GRB.INFINITY, 0, GRB.CONTINUOUS, "x_" + i);
        }

        return xi;
    }

    private static void aggiungiFunzioneObiettivo(GRBModel model) throws GRBException {
        model.set(GRB.IntAttr.ModelSense, GRB.MINIMIZE);
    }

    private static void aggiungiVincoloDatiTotali(GRBModel model, GRBVar [] x) throws GRBException {
        GRBLinExpr lhs= new GRBLinExpr();
        for(int i = 0; i < n; i++)
            lhs.addTerm(1.0, x[i]);
        model.addConstr(lhs, GRB.EQUAL, h * g, "richiesta_tot");
    }

    private static void aggiungiVincoloPercentualeMinima(GRBModel model, GRBVar [] x) throws GRBException {
        for(int i = 0; i < n; i++) {
            GRBLinExpr lhs = new GRBLinExpr();
            lhs.addTerm(1.0, x[i]);
            model.addConstr(lhs, GRB.GREATER_EQUAL, omega * h * g, "perc_minima_" + i);
        }
    }

    private static void aggiungiVincoloPercentualeMassima(GRBModel model, GRBVar [] x) throws GRBException {
        for(int i = 0; i < n; i++) {
            GRBLinExpr lhs= new GRBLinExpr();
            lhs.addTerm(1.0, x[i]);
            model.addConstr(lhs, GRB.LESS_EQUAL, teta * h * g, "perc_max" + i);
        }
    }

    private static void aggiungiVincoloTempo(GRBModel model, GRBVar [] x, int _tau) throws GRBException {
        for(int i = 0; i < n; i++) {
            GRBLinExpr lhs= new GRBLinExpr();
            lhs.addTerm((alfa[i]+beta[i])/(alfa[i]*beta[i]), x[i]);
            model.addConstr(lhs, GRB.LESS_EQUAL, _tau, "tempo_max_" + i);
        }
    }

    private static int solve(GRBModel model) throws GRBException
    {
        model.optimize();
        return model.get(GRB.IntAttr.Status);
        /*
         * 2 ottimo finito
         * 3 infeasible
         * 4 illimitato
         * 9 time limit
         */

    }


}
```

degenere

~~bool deg = f~~

```
for (GRBVar v : model.getVars()) {
if (v.get(IntAttr.VBasis) == 0) ~~deg = t~~; return t
}
~~return deg;~~ return false;
```

20/04/2023

Dal tema d'esame del 19 luglio 2021

Sia P il seguente problema di Programmazione Lineare, con $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \min \quad & 10x_1 - 11x_2 \\ & x_2 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 \geq 12 \\ & 5x_1 + x_2 \leq \alpha \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

3 vincoli
2 variab

a. Trovare, giustificando i passaggi effettuati:
   1. l'intervallo per α affinché P sia impossibile;
   2. l'intervallo per α affinché il politopo di P abbia esattamente 4 vertici ammissibili;
   3. l'intervallo per α affinché la base (x_1, x_2, x_5) sia quella ottima per P (dove $x_5 \geq 0$ è la variabile di slack associata al terzo vincolo);

b. Scelto α appartenente all'intervallo trovato al punto [a.1], formulare il problema D, duale di P e determinare, nella maniera ritenuta più opportuna, se esso ammetta o meno soluzione ottima, fornendo in caso una soluzione ammisibile.

b. scelgo $\alpha = 1$

duale: $\max \ 10y_1 + 12y_2 + 1y_3$

$0y_1 + y_2 \leq 10$

$1y_1 + y_2 + 1y_3 \leq -11$

$y_1 \leq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \leq 0$

3 variab 2 vincoli

COME STUDIO IL DUALE?

1. come capisco se è impossibile? → non riesco a fare symplex due fasi $z \neq 0$ dopo I^a fase

2. duale illimitato?

$y_1 + y_2 + 5y_3 \leq 10$ (1)

$y_2 + y_3 \leq -11$ (2)

$y_1 \leq 0$

$y_2 \geq 0$

$y_3 \leq 0$

$y_2 = 0$

$y_3 = -11$

(2) $0 - 11 \leq -11$ ✓

(1) $y_1 + 0 - 55 \leq 10$

$y_1 = 0 \Rightarrow -55 \leq 10$ ✓

$\Rightarrow$ trovo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -11 \end{pmatrix}$ esempio sol ammissibile

D è illimitato

$\min \; x_1 + x_2$

$3x_1 - x_2 + x_3 \le 4 \quad +x_4 = 0 \quad -1$

$2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 10 \quad +x_5 = 0 \quad -1$

$x_i \ge 0$

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
x_1 & -1/3 & 1 & 0 & -2/3 & -1/3 & \\
x_2 & 5/3 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & \\
\hline
\text{base ottimo} & 1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & -8/3
\end{array}$$

$$B = \begin{array}{cc} x_2 & x_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & +2 \end{pmatrix} \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \cdot\cdot & -1 \end{pmatrix}$$

$|B| = -2 - (1)(1) = -3$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad B^{-1}b = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \Big($$

ora ricavo N non in base $(x_1 x_4 x_5)$ lavoro sulla forma standard

$$N = \begin{array}{ccc} x_1 & x_4 & x_5 \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1}N = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 & -2/3 & -1/3 \\ 5/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

punto 2: cosa succede al tableau ottimo se coeff di x_1 viene -1

$x_1: \; 1 \longrightarrow -1 \qquad \Delta c_1 = \underbrace{-1-1}_{c_f - c_i} = -2$

ANALISI DI SENSITIVITÀ roba da avere chiara per capire la dualità

ex: prob min la base è ottima quando è ammissibile x il primale (var ottima ≥ 0)

$\Longleftrightarrow$ una anche B ammissibile x il duale $B^{-1}b \ge 0$

(CCR var in $N \ge 0$)

$c^t_N - c^t_B \cdot B^{-1} N \ge 0$ → da ricordare come si ricava questa formula

Δc_i: x_1 è in base o fuori base? fuori

come varia (1) $c^t_N - c^t_B \cdot B^{-1} N \ge 0$

(2) $c^t_N + \Delta c^t_N - c^t_B B^{-1} N \ge 0$ è ancora vero? sì, ancora ottima / no, ho perso è ottimo

1) sostituisco tutti i valori che ricavo dal problema e il valore da Δc_1 se (2) è vero ok

2) $\boxed{c_N^t - c_B^t B^{-1} N} \geq -\Delta c_N^t$

CCR all'ottimo delle variabili fuori base

⇓

ce li ho già senza altri calcoli (sono nel tableau)

$\frac{7}{3}$

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \geq -\begin{pmatrix} \Delta c_1 & \cancel{\Delta c_2} & \cancel{\Delta c_3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 7/3 \geq -\Delta c_1 \\ 2/3 \geq 0 \quad ✓ \\ 1/3 \geq 0 \quad ✓ \end{cases}$$

$-\Delta c_1 \leq 7/3$

$\Delta c_1 \geq -7/3$

con cosa cambiano? $\Delta c_1 = -2$

$-2 \geq -\frac{7}{3}$ sì → la BASE RIMANE OTTIMA

nuovi CCR

* calcolo *

---

altro punto:

CONDIZ DI ORTOGONALITÀ

ora mi servono

$(x_1\ x_2\ x_6)$ base ottima ⇒ $B^{-1}b = (\dots)$

fuori base $(x_3\ x_4\ x_5) \Rightarrow \begin{matrix} =0 \\ =0 \\ =0 \end{matrix}$

forma standard

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + \cancel{x_4} = 19 \\ x_2 + \cancel{x_5} = 4 \\ x_1 + \cancel{x_3} + x_6 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \\ x_6 = 4 \end{cases}$$

duale di un max:

$$\max \; x_1 + (5 + \Delta c_2)x_2 - x_3$$

0 dal testo

$3x_1 + 4x_2 \leq 19$

$x_2 \leq 4$

$x_1 + x_3 \leq 5$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\min \; 19y_1 + 4y_2 + 5y_3$

$3y_1 + 0y_2 + 1y_3 \geq 1$

$0y_1 + 1y_2 + 0y_3 \geq 5$

$1y_1 + 0y_2 + 1y_3 \geq -1$

$y_1 \geq 0$

$y_2 \geq 0$

$y_3 \geq 0$

TUTTO IN ORDINE:

DUALE F. STANDARD:

$3y_1 + y_3 - y_4 = 1$

$4y_1 + y_2 - y_5 = 5$

$2y_3 - y_6 = -1$

$\underline{y} \geq 0$

condiz ortogonalità

var duale trovata | var slack primale

$y_1 \; x_{1}$ — y_1?

$y_2 \; x_5$ — y_2?

$y_3 \; x_6$ — $x_6 = 4$, $y_3 = 0$

$y_4 \; x_1$ — $y_4 = 0$

$y_5 \; x_2$ — $x_2 = 0$, $y_5 = 0$

questi prodotti tutti $= 0$ per ortogonalità

$y_6 x_3 = 0$

sostituisco i valori delle var duali nella forma standard

$$\begin{cases} 3y_1 = 1 \\ 4y_1 + y_2 = 5 \\ -y_6 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 1/3 \\ y_2 = 11/3 \\ y_6 = 1 \end{cases} \rightarrow \text{soluz ottima duale} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 11/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

* CONTROLLA I PASSAGGI

1. sol. duale trovata è ammissibile?
2. come fa sol rimanere ammissibile (al più non ottima) per variabilità di Δc_2

ci aiuta per l'ottimalità

la sensitività con centro

$$B \text{ ottima} \iff \begin{cases} B^{-1} b \geq 0 \\ c_N^T - c_B^T B^{-1} N \leq 0 \end{cases}$$

ammissibilità duale in max (primale)

no sol.: $\exists$ cliente che non riceve a suff

$$\sum_i s_j < r_i$$

nel raggio

3 mag 1 cogliere sconto in culo

x_1 x_2 x_3

$$\sum_i \begin{pmatrix} k \geq d : & 0 \\ & 1 \end{pmatrix} x_i \geq r$$

$(d-k) \leq 0$

$\min \ -16x_1 - 10x_2 - 2x_3$

$4\cancel{0}x_1 + 3\cancel{0}x_2 + 2\cancel{0}x_3 + x_4 = 30\cancel{0}k$

$7\cancel{0}x_1 + 9\cancel{0}x_2 + 2\cancel{0}x_3 + x_5 = 80\cancel{0}k$

$8\cancel{0}x_1 + 7\cancel{0}x_2 + 12\cancel{0}x_3 + x_6 = 100k$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_4	4	3	2	1	0	0	30 k	← esce
x_5	7	9	2	0	1	0	80 K	
x_6	8	7	12	0	0	1	100 K	
	-16	-10	-2	0	0	0	0	
	↑ entra							

$\frac{30}{4}$ 7.5

$\frac{80}{7}$ ~11

$\frac{100}{8}$ di più

	1	2	3	4	5	6	
1	1	3/4	1/2	1/4	0	0	7.5k
5	0	15/4	-3/2	-7/4	1	0	27.5K
6	0	1	8	-2	0	1	40 k
	0	2	6	4	0	0	120K

	7	9	2	0	1	0	80
(-7)	1	3/4	1/2	1/4	0	0	7,5
	0	15/4	-3/2	-7/4	0	0	27,5

	8	7	12	0	0	1	100
(-8)	1	3/4	1/2	1/4	0	0	7.5
	0	1	8	-2	0	1	40

	-16	-10	-2	0	0	0	0
(+16)	1	3/4	1/2	1/4	0	0	7.5
	0	2	6	4	0	0	120

ESERCITAZIONE POST LEZIONE 10/05

es preprocessing

$$\min \quad -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 - 2x_5$$

$$7x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 2(1 - x_4') + 2x_5 \leq 7$$

$$-6(1 - x_1') + 2x_2 - 3(1 - x_3') + 4x_4 + 9_5 \leq 7$$

① $7x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4' + 2x_5 \leq 9$

② $6x_1' + 2x_2 + 3x_3' + 4x_4 + 9x_5 \leq 16$

① $x_1 = 0$ e $x_3 = 0$ viola il vincolo

$x_1 + x_3 \geq 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{x_1 + x_3 = 1}$ (*)

$x_1 = 1$ e $x_3 = 1$ viola il vincolo

$x_1 + x_3 \leq 1$

② $x_1' = 1$ e $x_5 = 1$ $\Rightarrow$ nessun altro può essere 1 altrimenti $\geq$ di 16

$x_1 = 0$ e $x_5 = 1$

$(1 - x_1)$

$x_3 = 1$ sicuro da (*)

$$6(1 - \underset{}{\overset{0}{x_1}}) + 2x_2 + 3(1 - \underset{1}{x_3}) + 4x_4 + 9\overset{1}{x_5} \leq 16$$

$$6 \quad + \quad 3 \quad + \quad 9$$

x_1 non può essere 0 se x_5 è 1

$x_1 + x_5 \geq 2$ $\quad x_1 + x_5 \leq 0$

POST 15|05

$$\begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

scompongo con:

I_1: $R_1\ R_8\ R_2$ $\boxed{\text{Ok}}$

I_2: $R_3\ R_5\ R_6$

è TUM

TAGLI

$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \le 8$

$x_1 + 3x_2 + x_4 + 2x_5 \le 5$

$\Rightarrow$ $\cancel{2}x_1 + \cancel{2}x_2 + \cancel{4}^{2}x_3 + \cancel{4}^{2}x_4 + \cancel{2}x_5 \le \frac{13}{2} \rightarrow 6.\cancel{5}$

$\Rightarrow$ taglio: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 6$

* esempio taglio di Gomory

$\min -x_2$

$3x_1 + 2x_2 \le 6$ $\qquad 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$

$-3x_1 + 2x_2 \le 0$ $\qquad -3x_1 + 2x_2 + x_4 = 0$

$x_1, x_2 \ge 0$ int

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	3	2	1	0	6
x_4	-3	$\boxed{2}$	0	1	0
	0	-1	0	0	0

$\frac{6}{-1} = -6$ WTF

$\frac{0}{-1} = 0 \leftarrow$

1. miglior ccr $\Rightarrow$ x_2 entra
x_4 rapporto minimo minore $\Rightarrow$ esce

x_4: $-3\ \ 2\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ /2$

x_3: $+3\ \ 2\ \ 1\ \ 0\ \ 6$

x_4: $-2\left(-\frac{3}{2}\ \ 1\ \ 0\ \ \frac{1}{2}\ \ 0\right)$

$6\ \ 0\ \ 1\ \ -1\ \ 6$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	6	0	1	-1	6
x_2	$\boxed{-3/2}$	1	0	1/2	0
	-3/2	0	0	1/2	0

$-\frac{3}{2} / -\frac{3}{2} = 1 \leftarrow$ cambia

$6 / -\frac{3}{2} = -4$

2. ccr migliore entra x_1; $\cancel{x_2}$ x_3 rapporto min esce

c^t: 0 -1 0 0 0

x_3: $(-3/2 \quad 1 \quad 0 \quad 1/2 \quad 0) \cdot 1$

$-3/2 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0$

② x_3: 6 0 1 -1 6 /6

$x_1 \equiv \boxed{1 \quad 0 \quad 1/6 \quad -1/6 \quad 1}$

$-3/2 \quad 1 \quad 0 \quad 1/2 \quad 0$

x_2: $(1 \quad 0 \quad 1/6 \quad -1/6 \quad 1) \cdot 3/2$

$0 \quad 1 \quad 1/4 \quad -1/4 \quad 3/2$

$-3/2 \quad 0 \quad 0 \quad 1/2 \quad 0$

c^t: $(1 \quad 0 \quad 1/6 \quad -1/6 \quad 1) \cdot 3/2$

$0 \quad 0 \quad 1/4 \quad -1/4 \quad 3/2$

②

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	0	1/6	-1/6	1
x_2	0	1	1/4	-1/4	3/2
	0	0	1/4	-1/4	3/2

x^* sol ottima $(x_1, x_2) \equiv (1; \frac{3}{2}; 0 \quad 0)^t$ $\quad z_{PL} = -\frac{3}{2}$

genero il Taglio dalla riga $t=2$ $\quad x_2 + 1/4\, x_3 - 1/4\, x_4 = \frac{3}{2}$

$\varphi(\bar{b}_t) - \sum_j \varphi(\bar{a}_{tj}) x_j \leq 0$

ESERCITAZIONE 17|05|2023

FILE: ese 4

FO: max rendimento

somma investita in A $\cdot$ 0.035 + somma in B $\cdot$ 0.084 + ...

x_A x_B x_C ⇒ variabile $x_i \geq 0$ conteggia gli euro investiti nel fondo i-esimo $\forall i = A \dots E$

$y_C, y_D \in \{0, 1\}$ +

⇒ max $x_A \cdot 0.035 + x_B \cdot 0.084 + x_C \cdot 0.041 + x_D \cdot 0.044 + x_E \cdot 0.065$

CCR

vincoli:

- importo tot = 100'000 $\qquad \sum_i x_i = 100'000$ (tot importo)
- durata media pesata ≤ 6 $\qquad \sum_i t_i \cdot \frac{x_i}{100'000} \leq 6$

% di investimento di x_i rispetto al totale

$5x_A + 12x_B + 3x_C + 4x_D + 5x_E \leq 6 \cdot 100K \qquad \sum_i t_i \cdot x_i \leq (6 \cdot 100'000)$ (tot importo)

durata investimento i

- rischio medio pesato ≤ 1.5 $\qquad \sum_i r_i \cdot x_i \leq (1.5 \cdot 100'000)$

$2x_A + 3x_B + 1x_C + 4x_D + 5x_E \leq 1.5 \cdot 100K$ coefficiente di rischio

- almeno 20% fondi nel pubblico
  - ⇒ B ed E sono pubblici
  - ⇒ 20% è 100'000 $\cdot$ 0.2 $\qquad x_B + x_E \geq \underbrace{100'000 \cdot 0.2}_{20'000}$
- inv pubblico ≤ 50'000 € $\qquad x_B + x_E \leq 50'000$

- regole di mercato: non posso investire sia in C che D
  - ⇒ serve sapere non solo QUANTO investo ma anche SE investo
  - ⇒ variabili binarie × la nuova informaz $\qquad y_C + y_D \leq 1$

y_C e y_D

ogni volta che variabili aggiuntive ad-hoc × un vincolo

⇓

C'È UN LEGAME DI COERENZA TRA LE NUOVE VARIABILI AGGIUNTE NUOVE, E QUELLE CHE C'ERANO GIÀ?

• $y_c = 1 \Rightarrow x_c \geq 0$

$y_c = 0 \Rightarrow x_c = 0$

$x_c \leq M y_c$

il max investibile? sì

+

$x_D \leq 100000\, y_D$

80000 xk 20% occupato da altro

=> questo è da un vincolo di questo constrico

• investimento in fondi priv {A} possibile solo se investo in almeno altri due pubblici

$$y_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{ investo o meno}$$

$$x_i \leq M y_i$$

$y_A \longleftrightarrow$ (# invest)

$\sum_i y_i$	y_A
4	≥ 0
3	≥ 0
2	≥ 0
1	0
0	0

devo restringere il dominio di y_A (binaria)

=> come TRONCO?

impongo un UB → chiamo vincolo $\leq$

0 — y_A — 1, UB

trovo la possibilità di essere 1

$$y_A \leq y_B + y_C + y_D + y_E$$

$\sum_i = 0$ $y_A \leq 0$ $y_A = 0$ ✓

$\sum_i = 1$ $y_A \leq 1$ NO!

allora divido

$$y_A \leq (y_B + y_C + y_D + y_E)\frac{1}{2}$$

molto fico

$\sum_i = 1$ $y_A \leq \frac{1}{2}$ $y_A \leq 0.5$, $y_A = 0$ ✓

$\sum_i \geq 2$ $y_A \leq \frac{2}{2} = 1$ $y_A = 1$, $= 0$ ✓

sennò era l'unico modo ☆

PUNTO B.

minimizza $\left|\left(\underset{\substack{\text{PUBB} \\ \downarrow \\ \{B,E\}}}{\text{investim.}} - \underset{\substack{\text{PRIV} \\ \downarrow \\ \{A\}}}{\text{invest}}\right)\right|$

min $|x_B + x_E - x_A|$ il valore assoluto non è una funz lineare! lo sostituisco con un'exp di max

min $(\max\{x_B+x_E-x_A, +x_A - x_B - x_E\})$

$w \geq 0$ nuova variabile

$w \geq x_B + x_E - x_A$

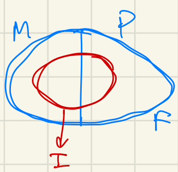
$w \geq -x_B - x_E + x_A$

$w = \max\{\dots\}$

$\Rightarrow$ min w nuova $\boxed{\text{FO}}$

ESERCIZIO 2

POV insiemistico



min $q \cdot S$ costo dello scrutatore parametro

variabili

$q \geq 0$ intero n° persone assunte

r_i intero n° persone assegno al seggio i $\forall i \in \bar{K}$ insieme dei seggi $i \dots k$

$x_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{persona } i \text{ assegnata al seggio } k \\ 0 \end{cases}$

vincoli

• almeno w scrutatori $\forall$ seggio (parametro)

conteggio M ed F $\Rightarrow$ (Dopo PROVA)

$\Rightarrow$ mancano informazioni! so quanti assumo ma non quanti e dove

nuova variabile

$r_i \geq w \quad \forall i \in \bar{K}$

LEGAME TRA r_i E Q?

$\sum r_i = q$ tutte le persone assunte sono la somma delle persone che ho nei vari i seggi

• età media × seggio sarà $\in [25, 50]$

⇒ non ho info sufficienti

nuova variabile, più precisa x_i

$$\begin{array}{c|c}
 & i=1 \;\cdots\; i=q \\
\begin{array}{c} k=1 \\ \vdots \\ k=\bar{k} \end{array} & \begin{bmatrix} x_{ik} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{bmatrix}
\end{array}$$

età media

persona età persona

$$\frac{\sum_{i \in P} x_{ik} \cdot a_i}{\sum_{i \in P} x_{ik}} \leq 50 \qquad \forall k$$

→ somma di (0 e 1 · età)

considera la persona i nel seggio

$\sum_{i \in P} x_{ik}$ → numero dei componenti del seggio (somma di 1 e 0)

vogliono entrambi

$$\frac{\sum_{i \in P} x_{ik} \cdot a_i}{\sum_{i \in P} x_{ik}} \geq 25$$

NON È LINEARE!

DIVISIONE TRA VINCOLI

$$\Rightarrow \quad \sum_{i \in P} x_{ik} \cdot a_i \quad \begin{matrix} \leq 50 \\ \geq 25 \end{matrix} \cdot \left(\sum_{i \in P} x_{ik} \right)$$

LEGAME x_{ik} CON R E q?

var inutile

$\cancel{r_k = \sum_i x_{ik}}$ ma non ho r_k!

$$q = \sum_i r_i \rightarrow q = \sum_{i \in P} \sum_{k \in K} x_{ik}$$

$\sum$ persone in un seggio ↓ $\sum$ tutti i seggi = tot persone

$$\Rightarrow \quad \min \left[\sum_{i \in P} \sum_{k \in K} x_{ik} \cdot s \right]$$

⇓ non mi serve più q

ORA SISTEMO ALTRI VINCOLI:

• nu donne = nu uomini

$$\sum_{i \in F} x_{ik} = \sum_{i \in M} x_{ik}$$

invece di complicarmi la vita con variab che contano # donne o altro

⇒ faccio sommatorie su insiemi F ed M!

• almeno 20% ha già fatto scrutatore ($\forall$ seggio)

$$\underbrace{\sum_{i \in I} x_{ik}}_{\text{persone nel seggio } k \text{ che hanno già fatto scrutatori}} \geq 20\% \underbrace{\sum_{i \in P} x_{ik}}_{\text{tot persone nel seggio } k} \qquad \forall k$$

VINCOLO DI COERENZA

• MANCA VINCOLO: OGNI PERSONA È UN SEGGIO SOLO!

attenzione a non dimenticare al max un seggio

$\leq$ * mettessi $=1$, assumerei tutti da P, poco senso

$$\sum_{k \in K} x_{ik} \leq 1 \qquad \forall i$$

per ogni persona sommo i seggi k a cui è associato

PUNTO B

almeno 3 seggi
- età media ≥ 30
- $J > W$ persone

vincoli A UN SOTTOINSIEME DI SEGGI

HARD SOFT

$$\begin{cases} \sum_{i \in P} x_{ik} \geq J - M(1-w_k) \\ \sum_{i \in P} x_{ik} \cdot a_i \geq 30 \cdot \sum_{i \in P} x_{ik} - N(1-w_k) \end{cases}$$

$M, N \gg 0$

come li impongo a solo un certo nu di seggi?

Li trasformo in vincoli SOFT che attivo a piacimento

* come ammorbidisco un vincolo di $\geq$?

diminuisco il 2° membro di una gran quantità che moltiplico per una var ausiliaria

$$w_k = \begin{cases} 1 & J - M \text{ allora è un valore molto piccolo} \Rightarrow \text{vincolo perde EFFICACIA} \\ 0 & \text{il vincolo è normale} \end{cases}$$

$\forall k \in K$

che fico.

$\Rightarrow$ serve anche un limite a quanti w_k che assumono 1

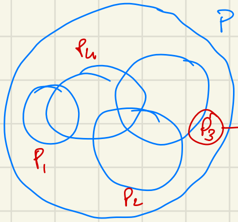
$$\sum_{i \in P} (1-\cancel{w_k}) \geq 3 \qquad w_k$$

$\rightarrow$ applico i vincoli disgiuntivi: posso scrivere queste relazioni di w_k anche con

a 1 il vincolo è SOFT, che voglio per tutti i seggi TRANNE 3 quindi inverto e metto $\geq$ di 3 easy LOL GG EZ LMAO

ESERCIZIO 3

POV icinematico:



variabili

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{assunto} \\ 0 & \text{non assunto} \end{cases} \qquad \forall i \in P$$

$$x_{it} = \begin{cases} 1 & \text{se cameno } i \text{ copre turno } t \\ 0 & \end{cases} \qquad \forall i \in P,\ \forall t \in T$$

min spesa
↓
costo fisso + variabile

$$\min \sum_i y_i \cdot f + \sum_{i \in P} \left(\sum_{t}^{T} x_{it} \cdot c_t \right)$$

costo per turno.
somma di tutti i turni
su tutti gli assunti.

- LEGAME TRA X E Y

se $y_i = 0$ $\quad \sum_i x_{it} = 0$

se non assunto, non assegno a nessun turno!

$$\sum_{t=1}^{T} x_{it} \le y_i T \qquad \forall i \in P$$

turni assegnati a i

assunzione

num turni totali ⇒ Dmodo alternativo per formulare questo legame??

- grado exp medio minimo di e_t

media pesata exp

exp richiesta al turno

$$\forall t = 1 \ldots T \qquad \sum_{i \in P_t} x_{it} \cdot e_i \ge E_t \cdot \sum_{i \in P_t} x_{it}$$

$\sum_i x_{it}$
↓
totale persone nel turno

linearità

- al max U_t persone a turno

$$\sum_{i \in P_t} x_{it} \le U_t \qquad \forall t = 1 \ldots T$$

• devo avere comune che NON copre turni per cui NON È DISPONIBILE

ci sono alcune $x_{it}=0$

ciclo le non disponibili at

$$x_{it}=0 \qquad \forall t=1\dots T \qquad \forall i \notin P_t$$

metto a 0 persona i non disponibile in t

persone disponibili

$\boxed{\text{FINE}}$

31/05/2023

terminiamo l'esercitazione 4

turni non consecutivi: come modellizzo?

x_{it} ← turni

	t=1	t=2	...								t=T
comune i=1	1	0	0	1	0	...			0	1	0
i=2											
i=3	0	1	1	1	0	0	..	0	0	0	0
i=4	1	0	1	0	...	0	0	0	0	1	1

non ammissibili

spezzo turni a coppie: t=1, t=2 $\quad x_{i1}+x_{i2}\le 1$ ⇒ così il modello sceglie al max uno tra i due turni (o nessuno o uno solo)

così si risolve aver anche 3 1

t=2, t=3 $\quad x_{i2}+x_{i3}\le 1$

⇒ modellizzo: $x_{it}+x_{i(t+1)}\le 1$ ~~∀t turno~~ $\forall t=1\dots T-1$

$\forall i$ comune

* ULTIMO PUNTO: "se uno fa più turni, devono essere consecutivi"

fissiamo il comune i.

x_{it} ← turni

colonna

	$t=1$	$t=2$	...							$t=T$
$i=1$	0	1	1	1	0	..				0
$i=2$	0	0	..				0	1	1	1 1
$i=3$	1	0	1	0	..					0
$i=4$	1	1	0	0	1 1	1 1	0	...		0

non ammissibili

$w_{i2}=1$ $\begin{cases} x_{i3}=0 \\ x_{i4}=0 \\ \dots \\ x_{iT}=0 \end{cases}$ schiaccio un tot di variabili a zero

⇒ quando ~~smette~~ di lavorare non può tornare a lavorare

⇒ devo introdurre nuova informazione, una nuova variabile

variabile binaria

$$w_{it} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ smette a } t \\ 0 & \text{se non smette} \end{cases}$$

→ "lavora in t ma non in $t+1$"

impongo un limite superiore alle variabili ⇒ vincolo di $\leq$

$$x_{i3} \leq 1 - w_{i2}$$
$$x_{i4} \leq 1 - w_{i2}$$
$$\dots$$
$$x_{iT} \leq 1 - w_{i2}$$

sapendo che se $w_{i2}=1$ è perché ho smesso di lavorare a $t=2$

impongo la disug ad ogni turno successivo al t-esimo

⇒ $\forall i$ ~~$\forall t=1\dots T$~~ $\forall q=t+1\dots T$ $\quad x_{i\cancel{(t+1)}} \; x_{iq} \leq 1 - w_{it}$

inverto il significato di w_{it}

sommatoria dei turni successivi a t

big M che permette alla sommatoria di variare se $w_{it}=0$

⇒ RIASSUMO IN UN SOLO VINCOLO: $\displaystyle \sum_{q=t+1}^{T} x_{iq} \leq (1-w_{it}) \cdot T$

$\forall t=1\dots T-2$

perché $T-2$

ORA LEGAME

$w \longleftrightarrow x$

⊛ $x_{it}=1$ AND $x_{i(t+1)}=0 \Rightarrow w_{it}=1$

⊛ [$X_{it}=1$ AND $(1-x_{i(t+1)})=1 \Rightarrow w_{it}=1$] uso questa versione

PATTERN COMUNE NEGLI ESERCIZI

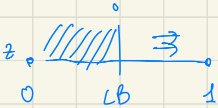
NB. $x\,y\,z \in \{1,0\}$

se $x=1 \wedge y=1 \Rightarrow z=1$ $\Rightarrow$ voglio modellizzare la funzione logica AND

$z = x \cdot y$ → uso la moltiplicazione fra variabili non è lineare

idea: schiaccio z a 1 quando x e y sono 1

$\Rightarrow$ 1 è il max val di z $\Rightarrow$ metto un LOWER BOUND, $\geq$



$z \geq x+y-1$

$x=1$, $y=1$: $z \geq 2-1 \Rightarrow z \geq 1$

$x=0$, $y=1$: $z \geq 1-1 \Rightarrow z \geq 0$ VINCOLO NON HA EFFETTO

$x=0$, $y=0$: $z \geq -1 \Rightarrow$ NON HA EFFETTO

$\Rightarrow$ ma dovrei schiacciare a zero! e non lasciarlo libero

- come butto a 0 la z se almeno uno è nullo:

$z \leq x$ $\quad$ $z \leq y$ $\quad$ OK questo vincolo è inutile a meno che x e y siano 0 $\quad$ $\boxed{\text{OK}}$

MODELLIZ. DI AND LOGICO IN PROGR. LINEARE

(4) $\left[x_{it} = 1 \text{ AND } (1 - x_{i(t+1)}) = 1 \Rightarrow w_{it} = 1 \right]$

$$\begin{cases} w_{it} \geq x_{it} + \cancel{(1} - x_{i(t+1)}) \cancel{- 1} \\ w_{it} \leq x_{it}, \quad w_{it} \leq x_{i(t+1)} \end{cases}$$

posso compattare questi tre vincoli?

ESERCITAZIONE 5

- saper risolvere un generico PL?
  - simplesso
  - dualità
  - simplesso duale
  - grafico (2 variabili)

① risolvere RELAX CONTINUO (PL) (ver EIR)

TE 2020

Dal tema d'esame di novembre 2020

sia dato il seguente problema di Programmazione Lineare Intera:

$$\min \quad \overset{0}{-x_1} + x_2 - 3x_3$$

$$x_1 \leq 0$$
$$x_3 \leq 4$$
$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 \leq 10$$
$$10x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 30$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad \textit{intere}$$

$x_1 \leq 0$, $x_1 \geq 0$ $\Rightarrow x_1 = 0$

a. Trovare la soluzione ottima per il problema tramite un algoritmo di Branch & Bound, adottando una tecnica di ricerca in profondità, scegliendo per primo il ramo corrispondente ad un vincolo $\leq$. Risolvere ogni sottoproblema per via grafica.

prima spezzo esercizio poi lavoro su semi blocco

b. Riportare l'albero di ricerca ottenuto indicando sui rami i branching effettuati, i criteri di fathoming applicati e numerando i sottoproblemi secondo l'ordine di esplorazione.

⇒ ho 2 variabili

⇒ devo fare Relax Continuo:

Risolvo OGNI sottoproblema dell'albero

$$\min \quad x_2 - 3x_3$$

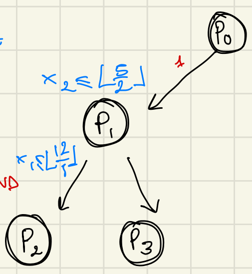
$$x_3 \leq 4$$
$$-2x_2 + 5x_3 \leq 10$$
$$6x_2 + 5x_3 \leq 30$$
$$x_2, x_3 \geq 0 \quad \text{intere}$$

$5x_3 \leq$

$5x_3 \leq -6x_2 + 30$

$x_3 \leq -\frac{6}{5}x_2 + 6$

primo figlio ⇒ sul vincolo $\leq$ della fraz



$z^*_{PL} = -\frac{13}{2}$ non intero

$x_2 \leq \lfloor \frac{5}{2} \rfloor$

PRIMO BOUND

$z^{*(1)}_{PL} = \boxed{-6.4}$ non intero

$x_1 \leq \lfloor \frac{12}{5} \rfloor$

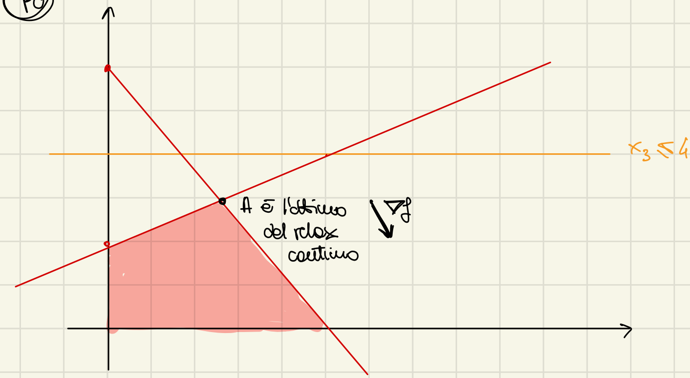
2° BOUND

$z^{*(2)}_{PL} = \boxed{-6}$ intero

CHIUDO IL NODO

intero incombente $(0, 2)$

(P0)



min

$x_2 - 3x_3 = 0$

$-3x_3 = -x_2$

$x_3 = \frac{1}{3}x_2 + K$

$\nabla\left(\frac{f}{\partial x_2} ; \frac{f}{\partial x_3}\right) = (1, -3)$

(*) $A = \begin{cases} -2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 6x_2 + 5x_3 = 30 \end{cases}$ $\quad x_2 = 5/2 \quad x_3 = 3 \quad FO = -\frac{13}{2}$

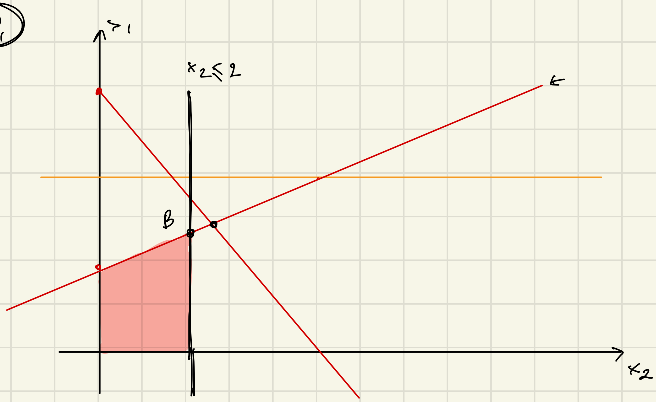
OTTIMO DEL RELAX $\in \mathbb{Z}$?
(variab, non FO)

sì, finito

no, uso B&B oppure Gomory

(P1)

$x_2 \leq \lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$

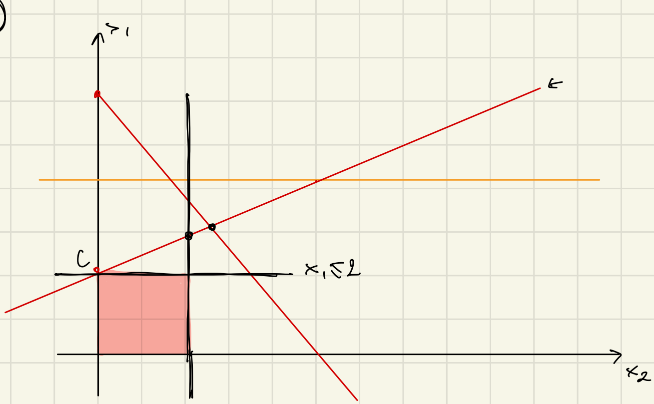


$B \begin{cases} x_2 = 2 \\ 6x_2 + 5x_3 = 30 \end{cases}$

$x_3 = \frac{12}{5}$

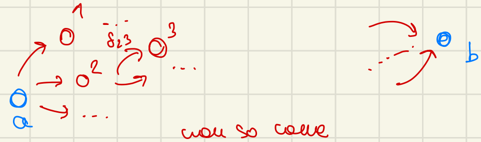
(P3)

$x_1 \leq \lfloor \frac{12}{5} \rfloor = 2$



$C = \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}$ $\quad FO = -6$

7/06/2023 ULTIMA ESE



non so come è fatto il grafo

settembre 2009

grafo ~~non~~ orientato

non ci sono archi in entrata da a partenza
né nodi di uscita dalla fine b, ne archi

$\forall i \in N \cup \{a\}$ $\boxed{\text{lunghezza}}$ δ_{ij} arco

$\forall$ nodo i, $S_i \subseteq A$

insieme degli archi in salita da o in un certo nodo

es. $S_1 = \{(1,5)(1,6)\}$

se arco $\notin S_1 \Rightarrow$ allora è discesa o piano

RICHIESTA:

+ cammino a-b, semplice, il più corto possibile

$\Downarrow$

modellizzazione: problema del cammino minimo

$$\forall (i,j) \in A \qquad x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se percorro l'arco} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

lunghezza percorso totale (costo totale del cammino)

$$\min \sum_{(i,j)\in A} \delta_{ij} x_{ij}$$

* com'è fatto il cammino? parte da un nodo ed arriva in un altro
devo aggiungere questi vincoli!

1. almeno un arco uscente da a lo percorro

sommatoria archi uscenti dal nodo a

$$\sum_{i|(a,i)\in A} x_{ai} = 1$$

→ non $\geq$ perché ~~percorro~~ tocco ogni nodo 1 volta sola

2. almeno un arco entrante in b lo percorro

sommatoria archi entranti in b

$$\sum_{i|(i,b)\in A} x_{ib} = 1$$

3. vincolo fondamentale, VINCOLO DI FLUSSO:
"non è detto che io percorra tutti i nodi"

- mi serve un cammino a-b con un qualunque sottoinsieme di nodi toccati
- se passo da un nodo $\neq a \neq b$ allora dovrò sia entrare che uscire da questo (conservazione flusso)

TANTE USCITE QUANTE ENTRATE

$$\forall i \in N \quad \sum_{k|(ik) \in A} x_{ki} = \sum_{k|(ki) \in A} x_{ik} \quad \boxed{\leq 1}$$

≤ 1 → sarebbe superfluo

$N = \{$insieme nodi esclusi a e b$\}$

↑ entranti ↑ uscenti

* $\boxed{=1}$ indicherebbe un problema del travelling salesman

inizio REC adesso

minimizzo ~~il~~ costo totale + ho solo costi positivi
⇒ non c'è nessun caso in cui un loop o passare 2 volte in un nodo sia vantaggioso → il modello farà da solo che queste sommatorie varranno 1 o 0

— RICHIESTE —

(A) distanza tot in salita ≤ 2 km

distanza in salita da dist tot $\leq 2 \cdot 1000$

$$\sum_{i \in N} \left(\sum_{(ij) \in S_i} x_{ij} \, \delta_{ij} \right) \leq \cancel{2 \cdot 1000} \; 2000$$

↓ per ogni nodo ...

↓ prendo tutti gli archi in salita

doppia sommatoria
fa l'unione di tutti i sottoinsiemi S_i

(B) n° tratti percorsi in salita è al max la metà di tutti gli archi percorsi

$$\sum_i \sum_{\forall ij \in S_i} x_{ij} \le \frac{1}{2} \cdot \sum_{\forall ij} x_{ij}$$

$$\boxed{\sum_{i\in N} \sum_{(i,j)\in S_i} x_{ij}} \; \boxed{\le \frac{1}{2}} \; \boxed{\sum_{(i,j)\in A} x_{ij}}$$

(C) non voglio percorrere due tratti in salita consecutivamente

$$\sum_i \sum_{ij\in S_i} x_{ij}$$

tutti in salita da un nodo

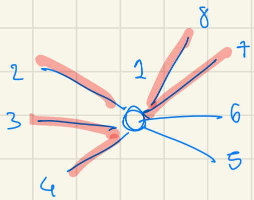
arco prima: $k\,i$

arco dopo: $i\,h$

con le sommatorie così però li conto

tratti non in salita? $\sum_i \sum_{ij\notin S_i} x_{ij}$

=> modifico il vincolo di flusso con queste sommatorie? non sono corretti aspetta non c'è consecutività



S_1 $\{(1,8)(1,7)\}$

se $x_{21} = 1 \Rightarrow x_{18} = x_{71} = 0$

31

41

se $x_{i1} = 0$ (2,3,4)

$\Rightarrow x_{18,17,16,15} = \{0,1\}$ libero

=> "numero archi entranti in i in salita" $\Longleftrightarrow$ "numero archi uscenti da i in salita"

legame

da scoprire e sfruttare

$$\sum_{k\in N} \sum_{k(k,i)\in S_k} x_{ki} = \alpha \qquad \sum_{k(i,k)\in S_i} x_{ik} = \beta$$

• se $\alpha = 1 \rightarrow \beta = 0$

$\Vert$

applicano

$$(*)\begin{cases} 1-\alpha = 0 \longrightarrow \beta = 0 \\ 1-\alpha = 1 \longrightarrow \beta \geq 0 \text{ libero} \end{cases}$$

schiacciare β a zero → cerco eiu sop che sia nullo ⇒ $1-\alpha$ è perfetto

$\beta \leq 1-\alpha$

con questo vincolo rispetto anche la seconda condizione su β $\boxed{ok}$

$$\boxed{\sum_{k|(ik)\in S_i} x_{ik} \leq \sum_{k\in N} \sum_{k|(ki)\in S_k} x_{ki}}$$

$\forall i \in N$

con impegno di girare tutti i nodi

esce da ~~entra in~~ i

S_i = scelta esce da i

con questo considero tutti i nodi che entrano in i (in scelta)

ma devo anche ciclare tutti gli i

febbraio 2022

$\min\ -2x_1+x_2-x_3$

RICHIESTA a...d

$x_1+x_2+x_3 \leq 6$ $\quad x_1+x_2+x_3+x_4=6$

$-x_1+2x_2 \leq 4$ $\quad -x_1+2x_2+x_5=4$

$x_{1,2,3} \geq 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	1	1	1	0	6
x_5	0	3	1	1	1	10
	0	3	1	2	0	12

a) quante sol di base ottime ho? vedo dal tableau ottimo
≡ ho ottimo multiplo?

NO.

multiplo: ho almeno una var fuori base con CCR=0

ho 2 vincoli e 2 variabili in base
entrambe in base con CCR =0

⇒ ho 1 sola sol di base

b) quante sol ottime non di base ho?

ZERO. non ho multipli, non posso chiedermi se sono in base o no!

d) mantenere inalterata la soluz (la base) di a cerco val max e min di b_1
⇒ analisi di sensitività

sol ottima ⟷ { ammissib. primale $B^{-1}b \geq 0$ (1)
ammissib. duale $c_N^t - c_B^t B^{-1} N \geq 0$ (2) }

lavoro in min quindi
var duali ≥ 0 ⇒ var duali ≡ CCR primali

• ? vero Δb da operare

(V) la (2) rimane vero $\forall \Delta b$ (non influenzata

la (1) funziona così:

per quali Δb

$$\boxed{B^{-1}}(b+\boxed{\Delta b}) \geq 0 \; ?$$

sottointeso si varia un valore alla volta

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_s \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6+\boxed{\Delta b} \\ 4 \end{pmatrix} \geq 0$$

inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6+\Delta b \\ 4 \end{pmatrix} \geq 0$$

sistema

$$\Rightarrow \begin{cases} 6+\Delta b \geq 0 \\ 6+\Delta b+4 \geq 0 \end{cases}$$

Soluz

$$\boxed{\Delta b \geq -6}$$

$$\Delta b \geq -10$$

$$\Delta b \in (+\infty; -6]$$

(2) richiesta vuole valore max e min di Δb?

PASSAGGIO FINALE

PASS ESSENZIALE

valore iniziale di b nel problema

$$\Delta b = b^f - \boxed{b_i} \geq -6$$

$$\Delta b = b^f - \cancel{6} \geq -\cancel{6}$$

era 6

$$b^f \geq 0$$

$$\Rightarrow b^f \in [0; +\infty)$$

DUE FASI

giugno 2020

quando un esercizio dice simplesso

$\Rightarrow$ intendo $\begin{cases} \text{primale} \\ \text{duale} \\ \text{due fasi} \end{cases}$

$$\min \quad -3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$-4x_1 + 2x_3 \geq 5\sigma$$

$$x_1 + 10x_2 + 4x_3 \geq 6$$

$$1,2,3 \geq 0$$

1. verifica simplesso con $\sigma \geq 0$, ottimo finito

$$-4x_1 + 2x_3 - x_4 = 5\sigma$$
$$x_1 + 10x_2 + 4x_3 - x_5 = 6$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

passo al due fasi

è chiaro non ci sia sol di partenza (xk solo vincoli ≥ 0)?? non ho capito

PROBLEMA AUSILIARIO

$$\min \quad \lambda_1 + \lambda_2$$

$$-4x_1 + 2x_3 - x_4 + \lambda_1 = 5\sigma$$

$$x_1 + 10x_2 + 4x_3 - x_5 + \lambda_2 = 6$$

$$x_i \geq 0 \qquad \lambda_i \geq 0$$

	1	2	3	4	5	λ_1	λ_2		
λ_1	-4	0	2	-1	0	1	0	5σ	R1
λ_2	1	10	4	0	-1	0	1	6	R2
	0	0	0	0	0	1	1	0	R3

↓ PRIMA FASE

dopo aver costruito il tableau calcolo la sua forma ~~canonica~~ standard

$R3 = \boxed{R3 - R1 - R2}$ → spariscono gli 1 in c^t per le var in base

⇒ easy

	1	2	3	4	5	λ_1	λ_2	
λ_1	-4	0	2	-1	0	1	0	5σ
λ_2	1	10	4	0	-1	0	1	6
	3	-10	-6	1	1	0	0	

ADESSO POSSO FARE PIVOT

⇒ c^t minore entra

⇒ chi esce?

in λ_1 ho pivot $= 0$ ⇒ non posso fare pivoting

sicuramente farò uscire λ_2 a favore di x_2

(questo vale $\forall \sigma \in \mathbb{R}$)

	1	2	3	4	5	1	2	
x_1	-4	0	2	-1	0	1	0	5σ
x_2	1/10	1	4/5	0	-1/10	0	1/10	3/5
	4	0	-2	1	0	0	1	-5σ

entra

chi esce?

- $\min \left\{ \frac{5\sigma}{2} ; \frac{3/5}{2/5} \right\}$

$\frac{5}{2}\sigma \leq \frac{3}{2}$ ⇒ ~~entra x_3 esce x_1~~ (I)

$\frac{5}{2}\sigma > \frac{3}{2}$ ⇒ ~~entra x_3 esce x_2~~ (II)

caso (I):

	1	2	3	4	5	1	2	
x_3	-2	0	1	-1/2	0	1/2	0	5σ
x_2	9/10	1	0	1/5	-1/10	-1/5	1/10	$3/5 - \sigma$
	0	0	0	0	0	1	1	0

$\frac{5}{2}\sigma \leq \frac{3}{2}$ $\quad \sigma \leq \frac{3}{5}$

SOLUZ OTTIMA AUSILIARIO

con λ_i non in base

⇒ P ha soluzione

caso (II):

	1	2	3	4	5	1	2	
x_1	-9/2	-5	0	-1	1/2	1	-1/2	$5\sigma - 3$
x_3	1/4	1/2	1	0	1/4	0	1/4	3/2
	9/2	5	0	1	-1/2	0	3/2	$3 - 5\sigma$

situazione non ottimale...

itero ancora...

non posso fare pivot su un valore negativo

	1	2	3	4	5	1	2	
x_3	-9	-10	0	-2	1	2	-1	$100\sigma - 6$
x_2	-2	0	1	-1/2	0	1/2	0	100
	0	0	0	0	0	1	1	0

$\forall \sigma \in \mathbb{R}$?

⊗ lascio a voi la verifica dell'ottimo finito ⊗

B. $\boxed{\sigma = 0}$ → P degenere?

→

sono nel caso ①:

TAB OTTIMO:

	1	2	3	4	5	1	2	
x_3	-2	0	1	-1/2	0	1/2	0	5σ
x_2	9/10	1	0	1/3	-1/10	-1/6	1/10	$3/5 - \sigma$
	0	0	0	0	0	1	1	0

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{array}{l} R1 \\ R2 \end{array}$$

2° fase × capire se degenere

-3	4	5	0	0	0	R3

da mandare a zero

$\Rightarrow R3 = R3 - 4R2 - 5R1$

	1	2	3	4	5	
x_3	-2	0	1	-1/2	0	0
x_2	9/10	1	0	1/3	-1/10	3/5
	-3	4	5	0	0	0
−						
	5/2	0	0	17/10	2/5	-12/5

ottimo degenere

è ottimo

base ottima: $(x_2\ x_3)$ $= \begin{pmatrix} 0 \\ 3/5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}$

ho più basi associate allo stesso vertice!

posso provare a sostituire nella base ottima al posto della var nulla, una altra variabile.

• $(x_2\, x_4)$ è un'altra ottima?

$$B = \begin{array}{cc} x_2 & x_4 \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/10 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ottimo non cambia!

BASE OTTIMA

• posso mettere $x_i\ \forall i \neq 3$ e avere base ottima?

$$B = \begin{array}{cc} x_2 & x_5 \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$$

$|B| = 0$ NON INVERTIBILE

NON È BASE

(C) trova 2 sol ottime di base per D

ho scoperto P degenere per $\sigma = 0$ $\Rightarrow$ D avrà ottimo multiplo

$\Downarrow$

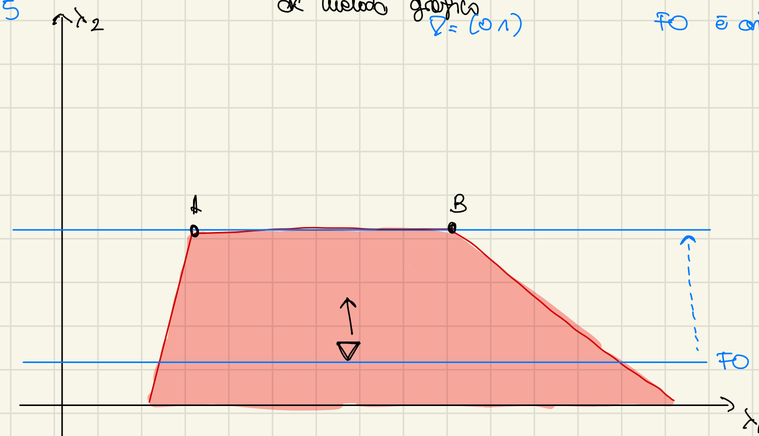
$\exists$ almeno 2 sol di base con lo stesso ottimo

trasformo e passo in D

$$D: \quad \max \quad 0\lambda_1 + 6\lambda_2$$
$$-4\lambda_1 + \lambda_2 \leq -3$$
$$0\lambda_1 + 10\lambda_2 \leq 4$$
$$2\lambda_1 + 4\lambda_2 \leq 5$$
$$\lambda_i \geq 0$$

2 variabili $\rightarrow$ ok metodo grafico $\nabla = (0\ 1)$

FO è orizzontale



DOMANDE DI TEORIA da min 1:54:00

* FEB 2022

1. boh è sparato

2. Problema a var pari

[modelliz]

DOMANDA: sol base ammissibile per D?

sia D duale $\boxed{y_1 = 1 \quad y_2 = 0}$ var dei due vincoli

totale variabili D standard ha n+2 variabili

P

n + 3

var slack

D

n + 2

slack vincoli di P

a v1 → y_1

a v2 → y_2

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ di base ammissibile?

1. controllo segni variabili

chi stabilisce il segno?

prob max → stabilito da var ob

prob min → segno vincoli ≡ segno var

$y_1 \geq 0$ ⇒ $y_1 = 0 \geq 0$

$y_2 \leq 0$ ⇒ $y_2 = 0 \leq 0$

$\boxed{ok}$

2. posso analizzare soluz base

↓

vertice

↓

∗ sol ammiss D

=> rappresento! ho due variab

immagino di aver $6 = n$

V1: $x_1 + x_2 + x_3 + x_6 \leq 10$

V2: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 100$

↓

$x_i \geq 0$

x_1	$1y_1 + 1y_2$	$\geq$	$\boxed{1}$
x_2	$y_1 + y_2$	$\geq$	$\boxed{1}$
x_3	....		
+			
x_6	.....		
x_4	y_2	$\geq$	$\boxed{0}$
x_5	y_2	$\geq$	$\boxed{0}$

→ 1 è nella FO con $c_i = 1$

vincoli uguali per metà di n

→ xk $x_{4,5}$ non è nella FO

||

insieme al vincolo $y_2 \leq 0$

$\Rightarrow y_2 = 0$ $\boxed{OK}$

$x_i \dots x_{n-1} \geq 0$

$x_n \in \mathbb{R}$ libero

↓

il suo vincolo in D? $\underbrace{y_1}_{1} + \underbrace{y_2}_{0} = 0$ non soddisfatto

=> VINCOLI STRUTTURALI NON RISPETTATI

D È IMPOSSIBILE

=> quella sol non sarà quindi ammissibile LOL es 3 V o F

P con $f_0 = f$ (non so se min o max)

x_i, x_{i+1}, x_{i+2}: 3 soluz di base ottime alla
i, i+1, i+2 esima iterazione → ho iterato queste 3 volte il simplex

le diseq non possono essere entrambe verificate

$f(x_i) > f(x_{i+1})$

$f(x_{i+1}) < f(x_{i+2})$

per come funziona il simplex la soluz o cresce (max)
o dimin (min
o rimane stabile (entrambe)

- se P fosse di min (1) potrebbe valere
- ma la (2) ribalta il segno
  ⇒ ultima FO trovata è maggiore!
  allora non può essere prob di min
  ⇒ ma con (1) non vale

⇒ FALSA

se ho $x_r = 0$ spostato in base

$c_r = 0$ o $\neq 0$

non mi sposto geometricamente!
rimango sullo stesso vertice

3.2 B & B aggiunge vincoli a cercare convex hull

⇒ no perché cerco un valore intero che è l'ottimo
⇒ BB fa sottoproblemi con vincoli INVALIDI → perdo le soluz di P_1 in P_0 e viceversa
→ sposto la regione

concetto di vincolo valido ("che non perde punti $\in X$")

⊕ Gomory taglio VALIDO = non perde sol intere! elimina solo frazion

$\boxed{3.3}$ Prim: da un vertice analizzo tutti gli archi uscenti e cerco il minore costo

k-1 importante xk solo con termine

- PRIM è SEMPRE CONNESSO AD OGNI ITERAZIONE
(calcolo $\delta(S)$ che è quello che garantisce la connessione)

$\boxed{\text{TE}}$

11 luglio 2022

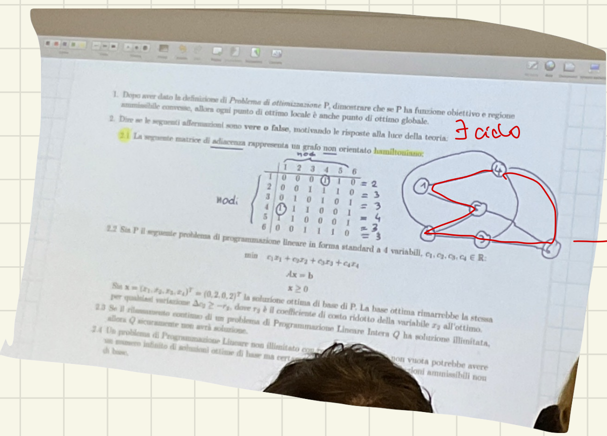
1. P, se ha FO e regione convessa $\Rightarrow \forall$ punto ottimo locale è anche globale
   ↑
   è uno dei primi th nelle slide

2. matrice adiacenza (nodo-nodo), grafo non-orientato hamiltoniano
   V o F?

   hamiltoniano → ciclo hamiltoniano

   + rappresenta grafo!

   x cond necessaria è soddisfatta
   "ogni nodo ha grado ≥ 2" somma 1 sulle righe ↓ sì ok
   "grafo connesso"
   ↓
   cioè che guardo WTF



condiz sufficienti?

$\frac{6}{2} = 3$

⊗ dalle condiz, guardando la mat non so affermare....

→ HAMILTONIANO
↓
così risolto graficamente

2.2 prob P in forma STD con 4 variab $c_i \in \mathbb{R}$

↳ si non è strano

$$\min \quad c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

tutto ok? no 4var in STD quindi già aggiunto check

$x = (x_i)^t = (0 \ 2 \ 0 \ 2)^t$ soluz ottima di base

$x_2 \quad x_4 \in x_B$

$x_1 \quad x_3 \in x_N$

STA APPLICANDO ANALISI SENSITIV.

base ottima non cambia $\forall \ \Delta c_2 \geq -r_2$

è in base

con r_2 CCR di x_2 a ottimo

quali sono le condiz di analisi sens.? due cose diverse per x_B e x_N

"i CCR devono rimanere ≥ 0"

$$c_N^t - c_B^t B^{-1} N \geq 0$$

se tocco x_B modifico qui

$$c_N^t - c_B^t B^{-1} N + \Delta c_B^t B^{-1} N \geq 0$$

$$\boxed{c_N^t} + \boxed{\Delta c_N^t} - \cancel{c_B^t B^{-1} N} \geq 0$$

termini di riferimento

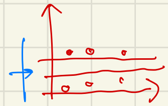
$$\Rightarrow \quad c_N^t \geq -\Delta c_N^t$$

ma l'analisi qui è su $x_2 \in x_B$ e questa è la cond ottimalità per le x_i fuori base

$\Rightarrow$ FALSA

2.3 relax continuo di PLI Q ha sol illimitata ⇒ Q non ha sol

FALSO



consiglio:
- relax illimitato potrebbe essere anche con Q inammissibile o NON

FO relax → sol +∞

ma i pti interi ∃

2.4 PL non illimitato con regione connesa ⇒ potrebbe avere numero infinito di soluz ottime di base ma finito di sol ammissibili non base

sol base al max
$\binom{n}{m}$ → var → vincoli

⇒ i vertici hanno sempre numero finito di sol ammissibili di base (vertici) e non base(?)

sono i punti della regione, che può essere illimitato!

è proprio il contrario!

⇒ FALSO

TE ho saputo bene TH FOND TH EQUIV

Quesiti di teoria (6 punti/quesito, voto minimo: 17/30)

1. Enunciare il Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare e spiegare come questo risulti utile nella risoluzione di un problema di Programmazione Lineare.

2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando le risposte alla luce della teoria:

2.1 Sia P un problema di Programmazione Lineare di minimo con funzione obiettivo f e siano $\mathbf{x}^i$, $\mathbf{x}^{i+1}$ e $\mathbf{x}^{i+2}$ tre soluzioni non ottime di base trovate rispettivamente alla i-esima, $(i+1)$-esima e $(i+2)$-esima iterazione del metodo del simplesso. Siamo sicuri allora che le due relazioni seguenti non possono essere entrambe verificate:

$$f(\mathbf{x}^i) < f(\mathbf{x}^{i+1}) \qquad f(\mathbf{x}^{i+1}) = f(\mathbf{x}^{i+2})$$

2.2 Sia P il problema di Programmazione Lineare $\{min \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x}|A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$, D il suo duale, $\mathbf{x}^*$ la soluzione ottima di base di P, $\mathbf{y}^*$ la soluzione ottima di base di D e B_D la matrice di base ottima associata.

2.2.1 A seguito di una variazione $\Delta\mathbf{c}$ dei coefficienti della funzione obiettivo di P, $\mathbf{y}^*$ rimane ammissibile per D se e solo se $B_D^{-1}(\mathbf{c} + \Delta\mathbf{c}) \geq 0$.

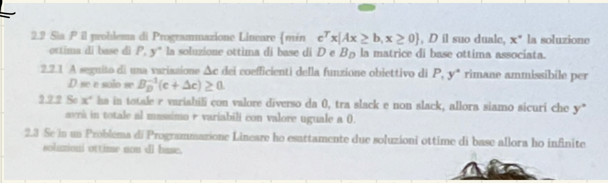
2.2.2 Se $\mathbf{x}^*$ ha in totale r variabili con valore diverso da 0, tra slack e non slack, allora siamo sicuri che $\mathbf{y}^*$ avrà in totale al massimo r variabili con valore uguale a 0.

2.3 Se in un Problema di Programmazione Lineare ho esattamente due soluzioni ottime di base allora ho infinite soluzioni ottime non di base.

$\boxed{2.1}$ $f(x^{i+1}) = f(x^{i+2})$ è ok $\forall$ caso min o max

$f(x^i) < f(x^{i+1})$ $\Rightarrow$ ho problema di minimo!
il simplesso non seleziona mai soluz/vertici che PEGGIORANO la FO

$\boxed{2.2}$ 2



2.2 Sia P il problema di Programmazione Lineare $\{min \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x} | A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$, D il suo duale, $\mathbf{x}^*$ la soluzione ottima di base di P, $\mathbf{y}^*$ la soluzione ottima di base di D e B_D la matrice di base ottima associata.

2.2.1 A seguito di una variazione $\Delta\mathbf{c}$ dei coefficienti della funzione obiettivo di P, $\mathbf{y}^*$ rimane ammissibile per D se e solo se $B_D^{-1}(\mathbf{c} + \Delta\mathbf{c}) \geq 0$.

2.2.2 Se $\mathbf{x}^*$ ha in totale r variabili con valore diverso da 0, tra slack e non slack, allora siamo sicuri che $\mathbf{y}^*$ avrà in totale al massimo r variabili con valore uguale a 0.

2.3 Se in un Problema di Programmazione Lineare ho esattamente due soluzioni ottime di base allora ho infinite soluzioni ottime non di base.

$x^* \to P$

$y^* \to D$

coeff per P $\to$ fornisce molto per D

Δc $\to$ rimane y^* ammiss se $\boxed{B_D^{-1}(c + \Delta c) \geq 0}$

analisi di sensitività

ok VERA CONDIZ CORRETTA

quindi che formula chiamo la teoria?

$B^{-1} b \geq 0$

giusto

$\boxed{B^{-1}}(b + \Delta b) \geq 0$

$\boxed{2.2.2}$ chiedi sempre "che regole sto applicando"?

x^* ho r variabili $\neq 0$ $\boxed{\text{tra slack e non slack}}$ $\Rightarrow$ siamo sicuri che y^* avrà al max r vars $= 0$

sono già in STD

GIUSTIFICAZIONE: complementary slackness $\to$ ortogonalità

- annullamento del prodotto

x^* r var $\neq 0$ $\to$ y^* al meno (?) r var $= 0$ almeno

$\downarrow$

annullamento del prodotto non vuole solo 1 o 2... var $= 0$ ma ne basta ALMENO uno

$\Rightarrow$ almeno $r = 0$

NON POSSO DIRE CHE È MAX

$\boxed{2.3}$ PL ho 2 sol ottime $\Rightarrow$ ho ∞ sol ottime non di base
VERO

2:07:00

$\boxed{TE}$ boh che palle

* posso avere in PL coefficienti exp

* Tipicamente #colonne > #righe in A
(var) (vincoli)

se così non fosse? vincoli > variabili
TUM → unimod
UM $\not\Rightarrow$ TUM

NB. mi basta trovare A UM per dire sol intere

$\boxed{2.2}$

D ottimo multiplo $\Rightarrow$ P $\boxed{\text{degenere}}$
lo vedo dalle var $\boxed{x_B}$

non posso sapere il viceversa se non ho queste info

$\boxed{2.3}$ P e PL standard n var

* soluz ho $k \leq n$ var $\neq 0$ $\Rightarrow$ P ha al max k vincoli
var slack

non è vero, potrei avere
delle var ex a zero (?)
e non ho quindi la certezza

$\boxed{2.4}$ Soluzione TSP: permutazione → è FACILE
(non ottimo, è almeno ammissibile)
sicuro

FINE APPUNTI PRESI
A LEZIONE

Cominciamo ad esercitarci! Politopi convessi teoremi

$4x_1 - 11x_2$

- $A(1\ 5)$
- $B(3\ k)$
- $C(6\ 4)$

th equivalenza
ogni sol di base è vertice
$\Rightarrow$ l'ottimo sta tra A, B, C
th fondamentale
ottimo locale è globale

$$\begin{cases} 4\cdot 1 - 11\cdot 5 = 4-55 = -51 \\ 4\cdot 3 - 11k \leq -51 \\ 4\cdot 6 - 11\cdot 4 = 24-44 = -20 \end{cases}$$

$$-11k \leq -51-12$$

$$k \leq -\frac{63}{11}$$

grafico.

2. Sia dato un problema di PL a 2 variabili, con funzione obiettivo $\min 4x_1 - 11x_2$ e regione ammissibile delimitata dai vertici $A(1, 5)$, $B(3, k)$ e $C(6, 4)$, con $k \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{23}{5}\}$ (ossia si eclude il caso che i 3 punti siano allineati).
   - 2.1 Determinare l'intervallo di valori di k affinché l'ottimo del problema sia il vertice B;
   - 2.2 Attribuito a k il valore 5, determinare le espressioni delle disuguaglianze che descrivono il politopo ABC.

CAE – SIMPL: CASI PARTICOLARI

- Rappresentare nel piano $\mathbb{R}^2$ la regione ammissibile dei seguenti problemi di PL, indicando se vi sono casi di problemi a soluzione illimitata o con soluzione ottima multipla:

max x_1	*max* $-x_1$	*min* $-5x_1 + x_2$
$x_2 \le \frac{1}{2}$	$x_2 \le \frac{1}{2}$	$-25x_1 + 5x_2 \ge 20$
$x_1 + x_2 \ge 1$	$x_1 + x_2 \ge 1$	$x_1 \le 5$
$x_1, x_2 \ge 0$	$x_1, x_2 \ge 0$	$x_1, x_2 \ge 0$

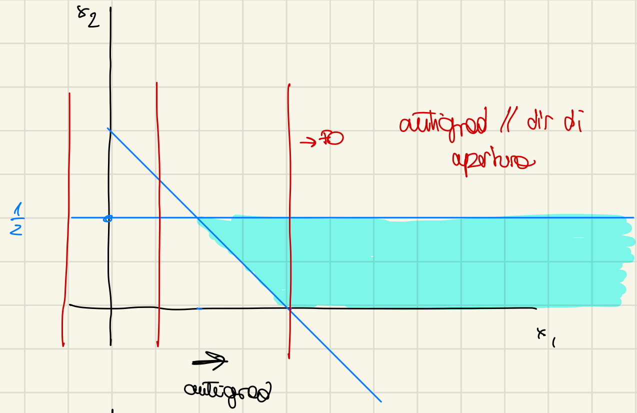
- Sia dato il seguente problema di PL con funzione obiettivo *min* $\alpha x_1 - 7x_2$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, e poliedro definito da: $\{-x_1 + 2x_2 \le 4; x_1 \ge 2; x_1 \le 7; x_1, x_2 \ge 0\}$.
  - Determinare il valore del parametro α affinché il problema ammetta soluzione ottima multipla.
  - Posto $\alpha = 0$, rimuovendo quale/i vincolo/i il problema diventerebbe a soluzione illimitata?

$x_1 \ge 1 - x_2$

① min $-x_1$

$x_2 + x_3 = \frac{1}{2}$

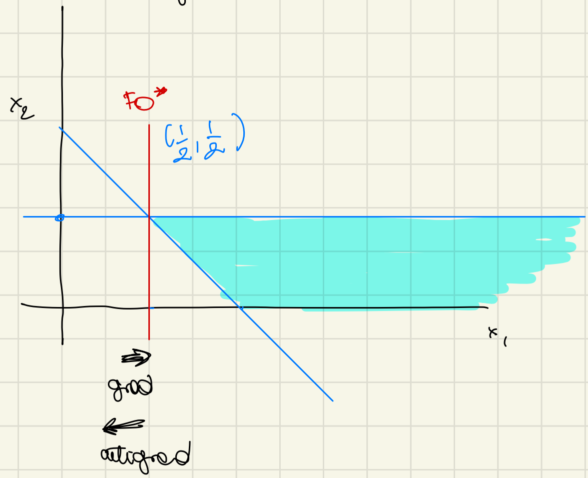
$x_1 + x_2 - x_4 = 1$



② min x_1

$x_2 + x_3 = \frac{1}{2}$

$x_1 + x_2 - x_4 = 1$



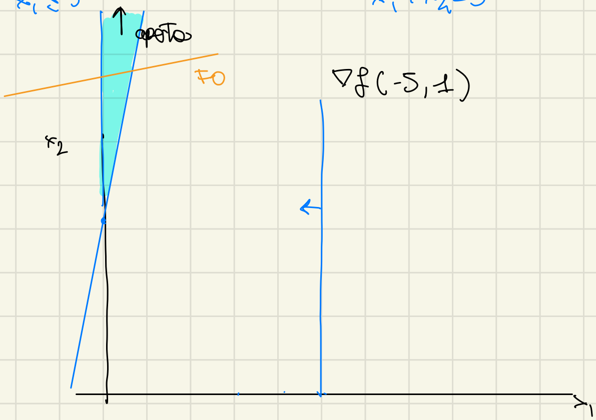
③ min $-5x_1 + x_2$

$-25x_1 + 5x_2 \geq 20 \rightarrow -25x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 20$

$x_1 \leq 5 \qquad x_1 + x_4 = 5$

$-5x_1 + x_2 \geq 4$

$y \geq 4 + 5x_1$



$\nabla f(-5, 1)$

$\Rightarrow$ soluzione illimitata

④

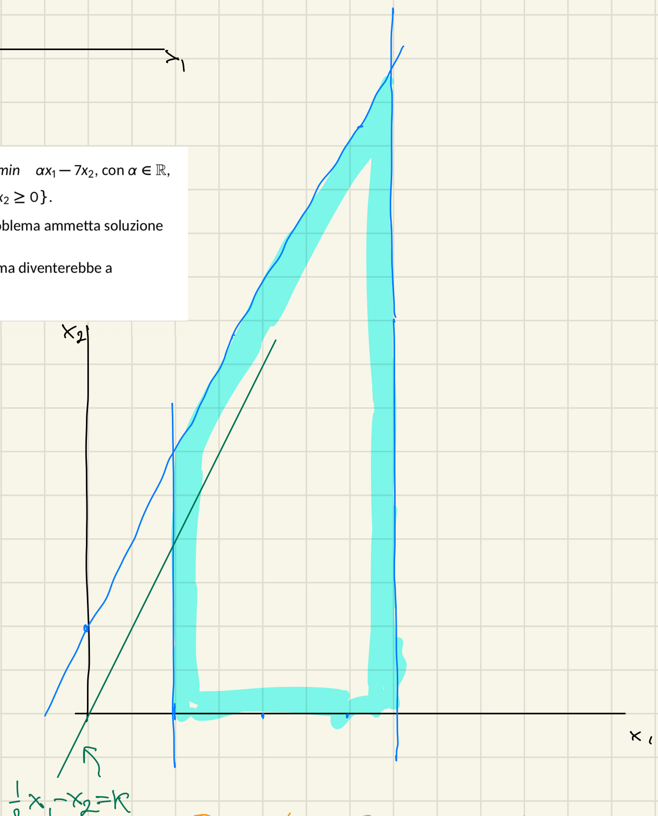
- Sia dato il seguente problema di PL con funzione obiettivo *min* $\alpha x_1 - 7x_2$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, e poliedro definito da: $\{-x_1 + 2x_2 \leq 4; x_1 \geq 2; x_1 \leq 7; x_1, x_2 \geq 0\}$.
  ① – Determinare il valore del parametro α affinché il problema ammetta soluzione ottima multipla.
  ② – Posto $\alpha = 0$, rimuovendo quale/i vincolo/i il problema diventerebbe a soluzione illimitata?

min $\alpha x_1 - 7x_2 \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

$-x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1 \geq 2$

$x_1 \leq 7$



①

α: soluz multiple

$\Rightarrow \nabla f \parallel$ ad un vincolo

$\alpha x_1 - 7x_2 = k \quad (\nabla f)$

1° vincolo $\quad (-1 \;\; 2) \Rightarrow \frac{2}{-1} = -2$

$(\alpha \;\; -7) \Rightarrow -\frac{7}{\frac{7}{2}} = -2 \qquad \alpha = \frac{7}{2}$

$\frac{7}{2}x_1 - 7x_2 = k \rightarrow \frac{1}{2}x_1 - x_2 = k$

traslati di

$x_2 = \frac{1}{2}x_1$ ⊗

② min $-7x_2$ con $\alpha = 0$

rimuovo il 1° vincolo

$\Rightarrow$ ho regione aperta

PRINCIPI E FONDAMENTI

Cominciamo ad esercitarci!

$1\,2\,3\,4\,5$

$\binom{5!}{3!}$ $\frac{5 \cdot 4^{2} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\,\cancel{2!}} = 10$

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\max \quad -4x_1 + 5x_2$$

$$x_1 + 5x_2 \geq 2$$

$$9x_1 - x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 7$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

123 ⓪ 234 ⓪ 345 ⓪
124 ⓪ 235 ⓪
125 ⓪ 245 ⓪
134 ⓪
135 ⓪
145 ⓪

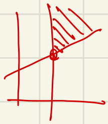
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} I & II & III & IV & V \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:ccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & e_{ij} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

1. Portare il problema in forma standard;
2. Elencare tutte le soluzioni di base: ci sono soluzioni di base degeneri?
3. Disegnare nel piano $\mathbb{R}^2$ la regione ammissibile del problema;
4. Fornire un esempio di soluzione non di base ammissibile per il problema;
5. Fornire un esempio di soluzione non di base non ammissibile per il problema.

vedi sopra all'inizio

06/03/2023 "cominciamo ad esercitarci"

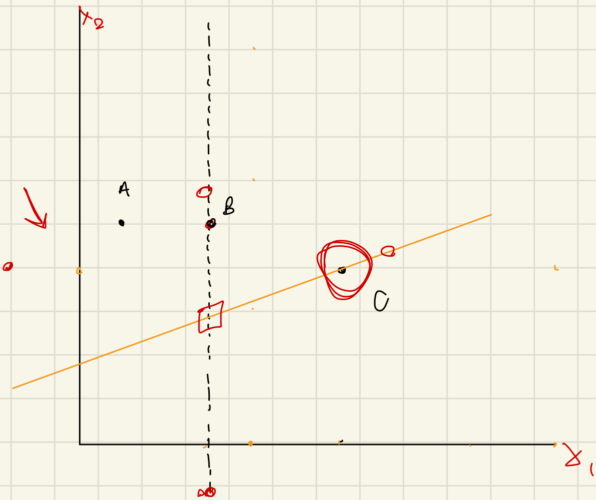
1 vertice $\not\Rightarrow$ sicuro ottimo



la regione potrebbe essere illimitata e aperta nella direzione del

2. Sia dato un problema di PL a 2 variabili, con funzione obiettivo min $4x_1 - 11x_2$ e regione ammissibile delimitata dai vertici $A(1, 5)$, $B(3, k)$ e $C(6, 4)$, con $k \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{23}{5}\}$ (ossia si esclude il caso che i 3 punti siano allineati).
   - 2.1 Determinare l'intervallo di valori di k affinché l'ottimo del problema sia il vertice B;
   - 2.2 Attribuito a k il valore 5, determinare le espressioni delle disuguaglianze che descrivono il politopo ABC.

min $4x_1 - 11x_2$ $\quad 4x - 11y = 0 \quad y = \frac{4}{11}x$



$x = 6$

$y = 4$

FO:

$4x - 11y = c$

$24 - 44 = c$ trovo C

$\downarrow -20$

FO $= c$

$4x_1 - 11x_2 = -20$

$\downarrow$ con dati di B

$(3, k)$

$12 - 11k = -20$

vincolo

$-11k \leq -32$

$k \leq \frac{32}{11}$

$+\cancel{11}k = +\frac{32}{11}$

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

POLITOPI CONVESSI E TEOREMI (PUNTO 1)

1. Dato il problema di PL riportato nel precedente *Cominciamo ad esercitarci!*, trovare il valore ottimo della funzione obiettivo, senza ricorrere al metodo grafico.

$n=5$

$m=3$

$\min\ 4x_1 - 5x_2$

$x_1 + 5x_2 - x_3 = 2$ 1

$9x_1 - x_2 + x_4 = 6$ 2

$x_2 + x_5 = 7$ 3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	1	5	-1	0	0	2
x_4	9	-1	0	1	0	6
x_5	0	1	0	0	1	7
	4	-5	0	0	0	0

1. $0+0-2=2$ ⊗
2. $0-0+6=6$
3. $7=7$

non ammissibile!

$x_1 + 5x_2 \geq 2$

$9x_1 - x_2 \leq 6$

$x_2 \leq 7$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 2 \\ \cancel{9}x_1 = \frac{1}{9}x_2 + \frac{6}{9} \end{cases}$$

$(-x_2 \frac{1}{9} + \frac{2}{3})$

$-\frac{1}{9}x_2 + \frac{2}{3} + x_2 = 2$

$\frac{8}{9}x_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{2}$

$x_1 = -\frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{6}{9} = \frac{1}{2}$

$* \quad 4 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot \frac{3}{2} = 2 - \frac{15}{2} = -\frac{11}{2}$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 2 \\ x_1 = 0 \end{cases} \quad x_2 = \frac{2}{5}$$

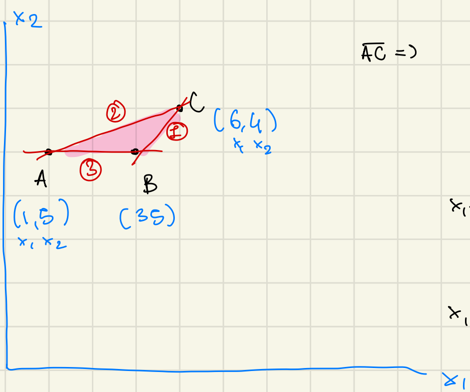
FO: -2

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad x_1 = 2$$

FO: 8

2. Sia dato un problema di PL a 2 variabili, con funzione obiettivo $\min 4x_1 - 11x_2$ e regione ammissibile delimitata dai vertici $A(1,5)$, $B(3,k)$ e $C(6,4)$, con $k \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{23}{5}\}$(ossia si esclude il caso che i 3 punti siano allineati).
   - 2.1 Determinare l'intervallo di valori di k affinché l'ottimo del problema sia il vertice B;
   - 2.2 Attribuito a k il valore 5, determinare le espressioni delle disuguaglianze che descrivono il politopo ABC.

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$



$\overline{AC} \Rightarrow$

$x_2 \geq 5$ ($\leq$)

③ $x_2 = 5$

② $\frac{x_1 - 1}{6 - 1} = \frac{x_2 - 5}{4 - 5}$

$x_1 - 1 = -5x_2 + 25$

$\frac{x_1}{5} - \frac{1}{5} = \frac{x_2}{-1} + 5$

$x_1 + 5x_2 = 26$

$x_1 + 5x_2 \leq 26$ ($\geq$)

$x_1 + 3x_2 \geq 18$ ($\leq$)

① $\frac{x_1 - 3}{6 - 3} = \frac{x_2 - 5}{4 - 5} \Rightarrow \frac{x_1}{3} - 1 = \frac{x_2}{-1} + 5$

$x_1 - 3 = -3x_2 + 15$

$x_1 + 3x_2 = 18$

Com. Ese – SOLUZ_INIZIALE (metodo due fasi)

prima riguardo gli esempi → ok ci sono sium

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\max \quad x_1 + 10x_2$$

$$-x_1 \leq -3\beta$$

$$-x_1 - x_2 \geq -\frac{1}{2}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

con $\beta \in \mathbb{R}^+$

- Posto $\beta = 1$, verificare tramite il Metodo delle 2 Fasi che il problema è impossibile.
- Trovare l'intervallo del parametro β affinché il problema diventi ammissibile. Attribuito quindi un valore a piacere a β nell'intervallo trovato, trovare l'ottimo del problema tramite il metodo del simplesso e verificare la soluzione trovata con il metodo grafico.

$\beta = 1$

$\min \ -x_1 - 10x_2$

$-x_1 + x_3 = -3 \Rightarrow x_1 - x_3 = 3\beta$

$-x_1 - x_2 - x_4 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 = \frac{1}{2}$

$\downarrow$

$\min \ y_1 + y_2$

$+x_1 + 0 - x_3 + y_1 = +3$

$+x_1 + x_2 + x_4 + y_2 = +\frac{1}{2}$

1ª FASE

		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
(1)	y_1	+1	0	−1	0	1	0	+3
(2)	y_2	+1	+1	0	+1	0	1	+1/2
		0	0	0	0	1	1	0

⇒ canonica

$-((1) + (2)) + (c^T \mid FO)$

$-(2 \ \ 1 \ \ -1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \mid 7/2)$

$(0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 1 \mid 0)$

$-2 \ \ -1 \ \ 1 \ \ -1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ -\frac{7}{2}$

$-\frac{6}{2} \ -\frac{1}{2}$

$-\frac{7}{2} + \frac{8}{2}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2		
y_1	1	0	−1	0	1	0	3	
y_2	$\boxed{1}$	1	0	1	0	1	1/2	esce
	−2	−1	1	−1	0	0	$-\frac{7}{2}$	

x_1 entra

$\frac{3}{1} = 3$

$\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{1}$

RIGA x_1 = RIGA y_2 ÷ (PIVOT)

$c^T \mid FO = (1 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 1/2) \ (2)$

$(\boxed{-2} \ \ -1 \ \ 1 \ \ -1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ -\frac{7}{2})$

$(0 \ \ -1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 2 \ \ -\frac{5}{2})$

RIGA y_1 = RIGA y_1 − RIGA x_1 (1)

$(1 \ \ 0 \ \ -1 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0 \mid 3)$

$-(1 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 1 \mid 1/2)$

y_1: $(0 \ \ -1 \ \ -1 \ \ -1 \ \ 1 \ \ -1 \mid \frac{5}{2})$

$3 - \frac{1}{2} = \frac{6}{2} - \frac{1}{2}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
y_1	0	−1	−1	−1	1	−1	5/2
x_1	1	$\boxed{1}$	0	1	0	1	1/2
	0	−1	1	1	0	2	$-\frac{5}{2}$

entra

$\frac{\frac{5}{2}}{-1} = -\frac{5}{2}$

$\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$

pivot negativo! NO

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
y_1	1	0	−1	0	1	0	3
x_2	1	1	0	1	0	1	1/2
	1	0	1	1	0	3	2

RIGA x_2 = RIGA x_1 $\div \overset{1}{\text{PIVOT}}$ ⊗

RIGA y_1 = RIGA y_1 − RIGA x_2 (−1)

$$\begin{array}{cccccccc} & (0 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & \mid \tfrac{5}{2}) \\ + & (1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \mid \tfrac{1}{2}) \\ & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \mid 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccc} c^t \mid FO = & (0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 & \mid \tfrac{5}{2}) \\ & (1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \mid \tfrac{1}{2})\ (+1) \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & \mid 2 \end{array}$$

trovato ottimo $\Rightarrow$ $c^t \geq 0$

$z^* > 0 \Rightarrow z^* = 2$ $\Rightarrow$

$\exists\, y_i$ in base e diversa da zero

---

punto 2

$$\min\ y_1 + y_2$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 \quad + y_1 &= 3\beta \\ x_1 + x_2 \quad + x_4 \quad + y_2 &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$3\beta \leq \frac{1}{2}$

$\beta \leq \frac{1}{6}$

$\frac{3\beta}{1}$

$\frac{\frac{1}{2}}{1}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
y_1	1	0	−1	0	1	0	3β
y_2	1	1	0	1	0	1	1/2
	0	0	0	0	1	1	0

$\Rightarrow$ canonica

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
y_1	1	0	−1	0	1	0	3β
y_2	1	1	0	1	0	1	1/2
	−2	−1	1	−1	0	0	$-3\beta-\frac{1}{2}$

$y_1 + y_2 = (2\ \ 1\ \ -1\ \ 1\ \ 1\ \ 1 \mid 3\beta + \tfrac{1}{2})$

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
x_1	1	0	−1	0	1	0	3β
y_2	0	1	1	1	−1	1	$\frac{1}{2}-3\beta$ esce
	0	−1	−1	−1	2	0	$3\beta-\frac{1}{2}$

entra

$$\begin{array}{lccccccc} & x_1 & & & & & & \\ y_2 \equiv & (1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \mid \tfrac{1}{2}) \\ - & (1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \mid 3\beta) \\ & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & \mid \tfrac{1}{2}-3\beta \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccc} & x_1 & & & & & & \\ c^t \mid FO & (-2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & \mid -3\beta-\tfrac{1}{2} \\ (2) & (1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \mid 3\beta) \\ & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & \mid 3\beta-\tfrac{1}{2} \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
x_1	1	0	-1	0	1	0	3β
x_2	0	1	1	1	-1	1	$\frac{1}{2}-3\beta$
	0	0	0	0	1	1	0

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & \overset{x_2}{0} & -1 & 0 & 1 & 0 & \vert\, 3\beta \end{pmatrix}$$

θ (RIGA di x_2)

$$c^t \,|\, FO = \begin{pmatrix} 0 & \overset{x_2}{-1} & -1 & -1 & 2 & 0 & \vert\, 3\beta - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & \vert\, \frac{1}{2} - 3\beta \end{pmatrix}$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \;|\; 0$$

$\Rightarrow c^t \geq 0$

$\Rightarrow z^* = 0$

$\Rightarrow \forall \beta \leq \frac{1}{6} \Rightarrow$ prob ammissibile $\qquad x^t = [\, x_1 \; x_2 \; ; \; \underline{0} \,]$

$\beta \in \left]0, \frac{1}{6}\right]$ (OK) TUTTO GIUSTO

$3\beta = \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{2} - 3\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

• pongo $\beta = \frac{1}{6}$: inizio la 2^a FASE

$(3\beta, \frac{1}{2} - 3\beta, 0, 0)$

min $-x_1 - 10x_2 \Rightarrow -\frac{1}{2} - 10\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

$-x_1 + x_3 = -3\beta \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = \frac{1}{2} \\ x_1 + x_2 + x_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$

$-x_1 - x_2 - x_4 = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

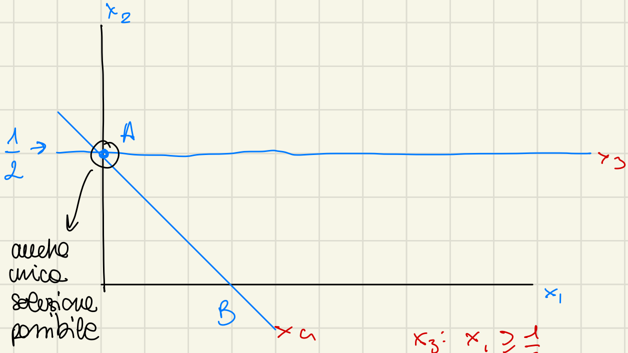
	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	0	$\boxed{-1}$	0	$\frac{1}{2}$
x_2	0	1	1	1	0
	0	0	0	0	$+\frac{1}{2}$

vincolo ridondante

$c^t \geq 0$

$\Rightarrow \exists_i : x_i \in B \wedge x_i^* = 0$

$\Rightarrow$ soluzione di base ottima e degenere



$x_3: \; x_1 \geq \frac{1}{2}$

$x_4: \; x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2}$

$x_2 \leq \frac{1}{2} - x_1$

FINE

ESEMPIO — DUALITÀ

$$\min \quad 10x_1 + 20x_2 + 30x_3$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \quad &\geq 1 \\ x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1 \quad - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \leq 0$

x_3 libero

$\downarrow$

$$\max \quad \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3$$

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + \quad \lambda_3 &\leq 10 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 \quad &\geq 20 \\ \lambda_2 - \lambda_3 &= 30 \end{aligned}$$

$\lambda_1 \geq 0 \qquad \lambda_2 \leq 0$

λ_3 libero

$c^t \begin{bmatrix} 10, 20, 30 \end{bmatrix} \rightarrow b \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$

$b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow c^t \begin{bmatrix} 1, 2, 3 \end{bmatrix}$

vincoli $\begin{bmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{bmatrix} \rightarrow$ variab $\begin{bmatrix} \geq & \leq & \text{lib} \end{bmatrix}$

variab $\begin{bmatrix} \geq & \leq & \text{lib} \end{bmatrix} \rightarrow$ vincoli $\begin{bmatrix} \leq & \geq & = \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x \rightarrow \lambda^t \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

min vincoli concordi var

---

②

$$\max \ -45x_1 - 37x_2 + x_3 - 5x_4$$

$$-2x_1 + \qquad x_3 - 32x_4 = 0$$

$$4x_1 + 5x_2 - 19x_3 + 13x_4 \leq 10$$

x_1 libero

$x_2\ x_3\ x_4 \leq 0$

max variab concordi vincoli

$\rightarrow$

$b \begin{bmatrix} -45 \\ -37 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$

$c^T \begin{bmatrix} 0 & 10 \end{bmatrix}$

$A \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & -19 \\ -32 & 13 \end{bmatrix}$

λ_1 libero

$\lambda_2 \geq 0$

$v_1 = b_1$

$v_{2,3,4} \leq b_i$

$$\min \quad 10\lambda_2$$

$$\begin{aligned} \lambda_1(-2) + \lambda_2 \cdot 4 &= -45 \\ \lambda_2 5 &\leq -37 \\ \lambda_1 - 19\lambda_2 &\leq 1 \\ -32\lambda_1 + 13\lambda_2 &\leq -5 \end{aligned}$$

λ_1 lib

$\lambda_2 \geq 0$

PRIMALE

min → mantengo variab = vincoli

max → mantengo vincoli = variab

max $-x_1 + 5x_2$

$-x_1 + x_2 \geq 2$ $\quad \lambda_1 \geq 0$

$-2x_1 - x_2 \leq 6$ $\quad \lambda_2 \leq 0$

$x_1 \leq 0$ $\quad v_1 \geq b$

$x_2 \geq 0$ $\quad v_2 \leq b$

$c^t \begin{bmatrix} -1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow b \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

$b \begin{bmatrix} \cancel{0}\,2 \\ 6 \end{bmatrix} \rightarrow c^t \begin{bmatrix} \cancel{0}\,2 & 6 \end{bmatrix}$

$A \begin{bmatrix} -1 & +1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

DUALE

min $\cancel{0}\,2\lambda_1 + 6\lambda_2$

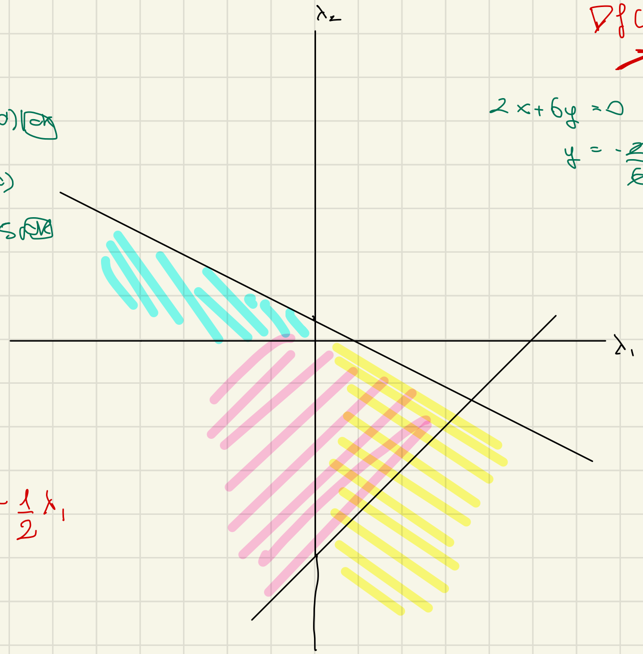
$-\lambda_1 - 2\lambda_2 \geq -1$ (00) $\boxed{ok}$

$\lambda_1 - \lambda_2 \leq 5$ (00)

$0 \leq 5$ $\boxed{ok}$

$\lambda_1 \cancel{\geq}\, \leq 0$

$\lambda_2 \cancel{\leq}\, \geq 0$



$\nabla f\,(2\ 6)$

$2x + 6y = 0$

$y = -\frac{2}{6}x$

$\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 1$

$\lambda_2 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda_1$

$-\lambda_1 + \lambda_2 \geq -5$

$y \geq -5 + x$

RIFACCIO

$\boxed{\text{PRIMALE}}$

max $-x_1 + 5x_2$

$-x_1 + x_2 \ge 2$

$-2x_1 - x_2 \le 6$

$x_1 \le 0 \to V_1$

$x_2 \ge 0 \to V_2$

$\to$

min: variabili mantengono segno

$b\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix} \to c^t\begin{bmatrix}2 & 6\end{bmatrix}$

$c^t\begin{bmatrix}-1 & 5\end{bmatrix} \to b\begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}$

$A\begin{bmatrix}-1 & +1\\ -2 & -1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}-1 & -2\\ +1 & -1\end{bmatrix}$

max
le var → vincoli
concordi

min $2\lambda_1 + 6\lambda_2$

$-\lambda_1 - 2\lambda_2 \le -1$ (OO) no

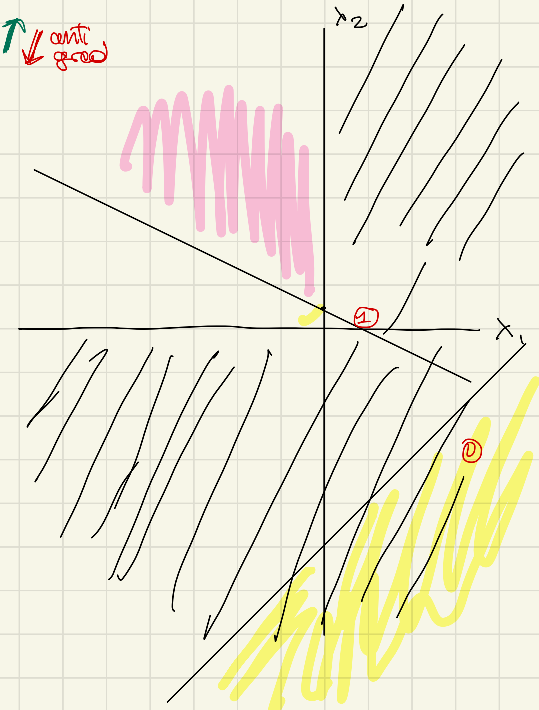
$\lambda_1 - \lambda_2 \ge 5$ (OO) no

$\lambda_1 \le 0$

$\lambda_2 \ge 0$

anti grad

impossibile



① $x + 2y \ge 1$

$y \ge \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$

$-x + y \le -5$

② $y \le -5 + x$

$$\min \sum_{i}^{n/2} x_i$$

$$\sum_{i}^{n/2} x_i + x_n \leq 10$$

$$\sum_{i}^{n} x_i \geq 100$$

$$\min \; c^T x$$

$$Ax \geq b$$

$$x \leq My$$

$$\lambda^t b$$

$$\lambda^t A \leq c^T$$

$$\sum_i x_{i,j} \geq 2 \qquad \forall j$$

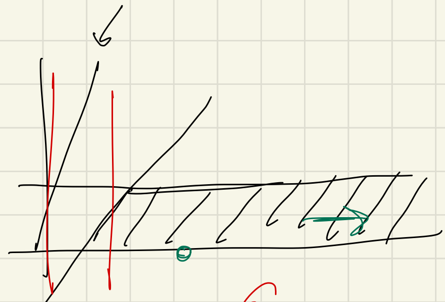
$$B^{-1}(b + \Delta b) \geq 0$$

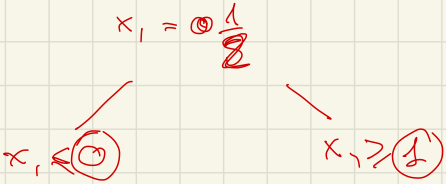
$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

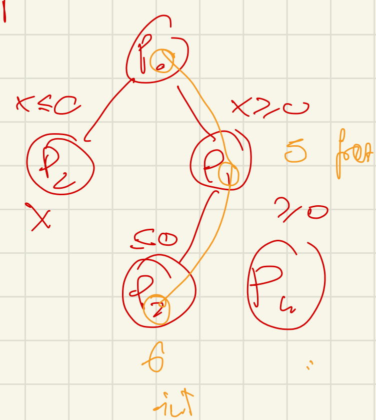
$$B^{-1}\Delta b \geq -B^{-1} b$$

$$c_N^t - c_B^t \boxed{B^{-1}N} = \left[\tfrac{1}{4} \;;\; \tfrac{3}{8}\right]$$

$$c^T x$$







COMINC. ESERCIT. – SIMPLESSO DUALE

Trovare l'ottimo del seguente problema di PL tramite l'algoritmo del simplesso duale:

$$\max \quad -2x_1 - 7x_2 - 10x_3$$
$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9$$
$$2x_1 - 5x_2 \leq 4$$
$$8x_1 - x_2 \leq 2$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 \geq 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Quale procedura alternativa poteva essere adottata per trovare l'ottimo del problema? che fare?

$\min \quad 2x_1 + 7x_2 + 10x_3$

$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 9$

$2x_1 - 5x_2 + x_5 = 4$

$8x_1 - x_2 + x_6 = 2$

$2x_1 - x_2 + x_3 - x_7 = 2$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	3	2	3	1	0	0	0	9
x_5	2	-5	0	0	1	0	0	4
x_6	8	-1	0	0	0	1	0	2
x_7	-2	1	-1	0	0	0	1	-2
	2	7	10	0	0	0	0	0

-2 → non ammiss. x_7 esce

$\left|\frac{2}{-2}\right| ; \left|\frac{7}{1}\right| ; \left|\frac{10}{-1}\right|$

$\downarrow$ 1 ; 7 ; 10

$\downarrow$ x_1 entra

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	0	7/2	3/2	1	0	0	3/2	6
x_5	0	-4	-1	0	1	0	1	2
x_6	0	3	-4	0	0	1	4	6
x_1	1	-1/2	1/2	0	0	0	-1/2	1
	0	8	9	0	0	0	1	-2

$[1; 0; 0; 6; 2; 6; 0]$

6 → È $\boxed{-6}$ MA CRISTO BEATO IN CROCE

⊕	8	-1	0	0	0	1	0	2
	-8	4	-4	0	0	0	4	-8
	2	-5	0	0	1	0	0	4
⊕	-2	1	-1	0	0	0	1	-2
	3	2	3	1	0	0	0	9
⊕	-3	3/2	-3/2	0	0	0	3/2	-3

DOMANDA 4: $\begin{cases} CCR \geq 0 \\ B^{-1}b \geq 0 \end{cases}$ $\boxed{OK}$

$\left[\frac{1}{4}; 0; \frac{3}{2}; \frac{15}{4}; \frac{7}{2}; 0; 0\right]^t$

FO: 2

K=3 elementi nulli ⇒ non di base

⇒ FO: $\frac{1}{2} + 0 + 10 \cdot \frac{3}{2} = 31/2$ ⇒ non ottimo

$\frac{3}{4} + 0 + \frac{9}{2} + \frac{15}{4} = 9$ $\boxed{OK}$

$1/2 - 0 + 7/2 = 4$ $\boxed{OK}$ ⇒ è ammissibile

$2 - 0 + 0 = 2$ $\boxed{OK}$

$1/2 - 0 + 3/2 - 0 = 2$ $\boxed{OK}$

$\min \quad 2x_1 + 7x_2 + 10x_3$

$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 9$

$2x_1 - 5x_2 + x_5 = 4$

$8x_1 - x_2 + x_6 = 2$

$2x_1 - x_2 + x_3 - x_7 = 2$

il duale è:

$\lambda^t b$

$\lambda^t A \,?\, c^t$

max $-2x_1 - 7x_2 - 10x_3$
$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 9$
$2x_1 - 5x_2 \le 4$
$8x_1 - x_2 \le 2$
$2x_1 - x_2 + x_3 \ge 2$
$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

$\rightarrow$

$$\min \ \lambda^t \begin{bmatrix} 9 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^t \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & -5 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} -2 & -7 & -10 \end{bmatrix}$$

Duale:

$\min \ 9\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4$

$$\begin{array}{ll} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 8\lambda_3 + 2\lambda_4 \ge -2 & -\lambda_5 = 2 \\ 2\lambda_1 - 5\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 \ge -7 & -\lambda_6 = -7 \\ 3\lambda_1 + \lambda_4 \ge -10 & -\lambda_7 = -10 \end{array}$$

due vincoli attivi

$\frac{3}{4} + 0 + 12 + \frac{15}{2} - \frac{7}{2} \ne 2$

non ammi. per il duale

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$
$$\left[\frac{1}{4};\ 0;\ \frac{3}{2};\ \frac{15}{4};\ \frac{7}{2};\ 0;\ 0 \right]^t$$

OTTIMO TROVATO PRIMA

$x^* \ [1;0;0;6;2;6;0]$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_4 = 0 \quad \lambda_5 = 0 \quad \lambda_6 = 0 \quad \Rightarrow$ 4 variabili nulle, 3 vincoli $\Rightarrow$ sol. degenere?

SISTEMO

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7				
x_4	0	7/2	3/2	1	0	0	3/2	6			
x_5	0	-4	-1	0	1	0	1	2			
x_6	0	3	-4	0	0	1	4	-6 ← esce			
x_1	1	-1/2	1/2	0	0	0	-1/2	1	8/3	9/4	4/1
	0	8	9	0	0	0	1	-2		↑ entra	

	B		B	B	B			
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	0	37/8	0	1	0	3/8	3	15/4
x_5	0	-19/4	0	0	1	-1/4	0	7/2
x_3	0	-3/4	1	0	0	-1/4	-1	3/2
x_1	1	-1/4	0	0	0	1/8	0	1/4
	0	59/4	0	0	0	9/4	10	-31/2

non degenere
non multipla

$$x^* = \left[\frac{1}{4};\ 0;\ \frac{3}{2};\ \frac{15}{4};\ \frac{7}{2};\ 0;\ 0 \right]$$

$$\begin{array}{c|ccccccc|c|c} + & 8 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \\ & -8 & 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 4 & -8 & \\ + & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & \\ & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \\ + & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 & \\ & -3 & 3/2 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & -3 & -\frac{2}{4} \\ + & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & \\ & 0 & 1/4 & -1/2 & 0 & 0 & 1/8 & 1/2 & -3/4 & -\frac{16}{4} - \frac{3}{4} \\ + & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & \\ & 0 & 3/4 & 1 & 0 & 0 & -1/4 & -1 & 3/2 & \frac{4}{2} + \frac{3}{2} \\ + & 0 & 7/2 & 3/2 & 1 & 0 & 0 & 3/2 & 6 & \\ & 0 & 9/8 & -3/2 & 0 & 0 & 3/8 & 3/2 & -9/4 & \frac{15}{4} \\ + & 0 & 8 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \\ & 0 & +27/4 & -9 & 0 & 0 & 9/4 & 9 & -27/2 & \frac{24}{4} - \frac{9}{4} \end{array}$$

MODELLI PLI

Problema dello zaino e oltre

Nella tabella sottostante sono riportate le caratteristiche di 8 oggetti, ognuno con un proprio peso e un proprio valore, appartenenti ciascuno ad una categoria.

Oggetto num.	1	2	3	4	5	6	7	8	i
Peso	4	6	14	19	3	18	2	10	p_i
Valore	3	7	6	7	8	9	15	4	v_i
Categoria	B	B	C	A	A	A	C	A	

1. Elaborare la formulazione matematica per il problema dello zaino definito sugli oggetti sopra riportati e con uno zaino di capacità 55.
2. Trovare una soluzione ammissibile per il problema applicando uno degli algoritmi greedy imparati a lezione.

Problema dello zaino e oltre (continuazione)

3. Utilizzando le variabili già definite o introducendone, se necessario, delle nuove, formulare ulteriori vincoli lineari affinché:
   - 3.1 si possano selezionare almeno 3 oggetti di categoria A e al massimo 1 oggetto di categoria C;
   - 3.2 si possa selezionare l'oggetto 2 solo se l'oggetto 4 non viene selezionato;
   - 3.3 si possa selezionare l'oggetto 5 solo se sia l'oggetto 1 che 8 sono selezionati;
   - 3.4 si possano selezionare oggetti della categoria A solo se almeno 1 oggetto della categoria B è stato selezionato;
   - 3.5 si debba selezionare un numero necessariamente pari di oggetti di categoria A.

y_i sceglie l'oggetto i

$$\max \sum_i v_i y_i$$

$$\sum_i p_i y_i \le 55$$

$$y_i \in \{0,1\}$$

CRITERIO VALORE riordino per valore

15	9	8	7	7	6	4	3
2	18	3	6	19	14	10	4

fine

$V_{tot} = 46$

introduco x_i che indica la categoria dell'oggetto i

$x_4+x_5+x_6+x_8 \ge 3$ (A)

$x_3+x_7 \le 1$ (C)

\# (A) (B)

$\boxed{3.4}$ $(x_4+x_5+x_6+x_8) \le (x_1+x_2)4$

\# (A)

$\boxed{3.5}$ $(x_4+x_5+x_6+x_8)$

$\boxed{3.2}$ $y_2 \le (1-y_4)$

$\boxed{3.3}$ $y_5 \le \cancel{1-y_1+y_8}$ $\cancel{y_1+y_8}$

$y_5 \le y_8$

$y_5 \le y_1$

qui modellizzo ok xk co che al max ho 4 oggetti di A

$z_1 = \#A$ è 2

$z_2 = \#A$ è 4

$z_3 = \#A$ è 0

$$(y_4+y_5+y_6+y_8) = 2z_1+4z_2$$

$z_1+z_2+z_3=1$ solo 1 z_i attivo alla volta

$2x -$
$\cancel{3x \le 4}$

Quesiti sui vincoli disgiuntivi

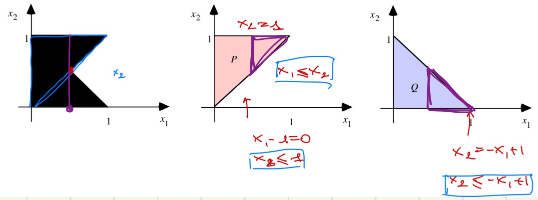
Quesito 1: Come cambiano le modellizzazioni nel caso in cui i vincoli da disgiungere sono di ≤ e non di ≥? → boh

Quesito 2: modellizzare **regioni concave**. Come possiamo modellizzare la regione nera in in figura? (Unione di due regioni convesse *P* e *Q*)

→ dopo $x_1 \ge \frac{1}{2}$ vale l'unione dei due

oppure dopo $x_2 \ge x_1$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

vale P e non Q



possibilità:

$x_2 \ge x_1 + My_1$

dove mi sposto?

$x_2 \ge x_1$

esempio

$x_2 \ge \frac{1}{2} + 1$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$x_2 \ge x_1 - My_1$

$x_2 \ge x_1 - My_1$
$x_2 \le 1$
$x_2 \le -x_1 + 1 + Ny_2$
$y_1 + y_2 \le 1$ binarie

$M = 1$
$N = 1$

$x_2 \ge x_1 - y_1$
$x_2 \le 1$
$x_2 \le -x_1 + 1 + y_2$
$y_1 + y_2 \le 1$

$y_1 = 1$

$x_2 \ge x_1 - 1$
$x_2 \le 1$
$x_2 \le -x_1 + 1$
ma
$x_2 \le -2 + 1$
non funziona
$x_1 - x_2 \ge 0$
quindi
$-x_1 + 1$
può al più essere 0
quindi x_1 non supera 1 e x_2 è nullo!

al max è 1
$x_1 \le x_2 + 1$
al max è 2

2

$u = \min\{x_1, x_2\} = x_1(1 - y_1) + x_2 y_1$

$x_1 - x_2 \le y_1 M$ $M >> 0$

↓

$y_1 = 0$ significa $x_1 \le x_2$
x_2 maggiore (o $x_1 = x_2$)
$\Rightarrow u = x_1$

$y_1 = 1$ significa $x_1 - x_2 \le$ qnt positiva
x_1 maggiore
$\Rightarrow u = x_2$

BOH VABBÈ NON HO CAPITO UN CAZZO

M serve perché se la differenza tra le due fosse "grande abbastanza" e avessimo solo $x_1 - x_2 \le (y_1 =) 1$ allora questo vincolo non verrebbe verificato, y_1 sarebbe spinto a zero e u assumerebbe il valore di x_1

$\Rightarrow$ M potrebbe valere $M = x_1 + x_2$ così sono sicuro di superare la loro differenza

FILE PIANI DI TAGLIO

Sia dato il seguente problema di PLI:

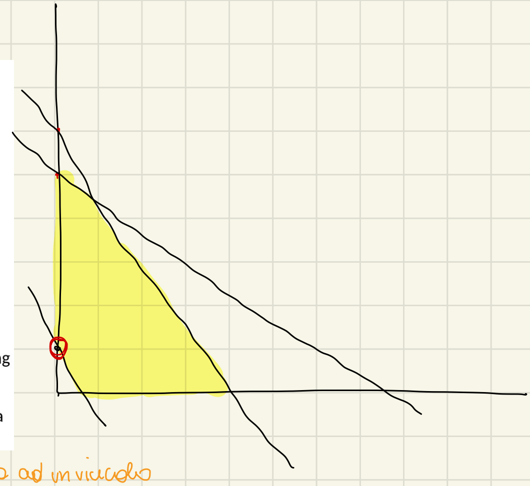
$$\max \quad 3x_1 + \omega x_2$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 15 \qquad 3y = 15 - 2x$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12 \qquad 2y = 12 - 3x$$

$$2x_1 + x_2 \geq 1 \qquad y = 1 - 2x$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \textit{intere}$$



1. Posto $\omega = 3$, trovare l'ottimo intero del problema con l'algoritmo di Cutting Planes (taglio di Gomory) e rappresentare nel piano $\mathbb{R}^2$ i tagli trovati.
2. Posto $\omega = 2$, è possibile trovare il nuovo ottimo intero del problema senza ricorrere al metodo dei piani di taglio? Perché?

↳ sì perché FO è parallela ad un vincolo

$$\max \quad 3x_1 + 3x_2$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 15 \qquad 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12 \qquad 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 12$$

$$2x_1 + x_2 \geq 1 \qquad 2x_1 + x_2 - x_5 = 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \mathbb{R}$$

1. cerco l'ottimo rilassato

	1	2	3	4	5	
x_3	2	3	1	0	0	15
x_4	3	2	0	1	0	12
x_5	$\overset{-2}{2}$	$\overset{1}{-1}$	0	0	$\overset{1}{-1}$	$\overset{-1}{1}$
	3	3	0	0	0	0

$B^{-1}b$ ha elementi negativi

non ho soluzione iniziale xk 3° vincolo esclude (0,0)

$$\min \sum_i y_i$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + y_1 = 15$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 + y_2 = 12$$

$$2x_1 + x_2 - x_5 + y_3 = 1$$

	1	2	3	4	5	y_1	y_2	y_3	
y_1	2	3	1	0	0	1	0	0	15
y_2	3	2	0	1	0	0	1	0	12
y_3	2	1	0	0	-1	0	0	1	1
	0	0	0	0	0	1	1	1	~~28~~ 0

$\ominus$(7 6 1 1 -1 1 1 1 28)

	1	2	3	4	5	y_1	y_2	y_3	
y_1	2	3	1	0	0	1	0	0	15
y_2	3	2	0	1	0	0	1	0	12
y_3	2	1	0	0	-1	0	0	1	1
	-7	-6	-1	-1	1	0	0	0	~~0~~

-28

$\frac{2}{2}$

$-\frac{3}{2}+2$

$-\frac{3}{2}+\frac{12}{8}$

-1

$\frac{21}{2}$

$-\frac{12}{2}$

	1	2	3	4	5	y_1	y_2	y_3		
y_1	2	3	1	0	0	1	0	0	15	15/2
y_2	3	2	0	1	0	0	1	0	12	12/3
y_3	2	1	0	0	-1	0	0	1	7	2/1 ← esce
	-7	-6	-1	-1	1	0	0	0	~~0~~ -28	

↑ entra

$(1 \quad \tfrac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad -\tfrac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2})$

	1	2	3	4	5	y_1	y_2	y_3		
y_1	0	2	1	0	1	1	0	-1	14	$\frac{14}{2}$
y_2	0	1/2	0	1	3/2	0	1	-3/2	21/2	$\frac{21}{2}$ 2
x_1	1	1/2	0	0	-1/2	0	0	1/2	1/2	$\boxed{\frac{1}{2}\ \frac{2}{1}=1}$ esce
	0	$-\frac{5}{2}$	-1	-1	$-\frac{5}{2}$	0	0	7/2	~~0~~ $-\frac{49}{2}$	

↓ entra

1. $(2 \quad 3 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 15)$
   $-(\times 2)$
2. $(3 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 12)$
   $-(\times 3)$
3. $(-7 \quad -6 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cancel{0})$ -28

$(7 \quad \tfrac{7}{2} \quad 0 \quad 0 \quad -\tfrac{7}{2} \quad 0 \quad 0 \quad \tfrac{7}{2} \quad \tfrac{7}{2})$

$\frac{-28\cdot 2}{2}+\frac{7}{2}$ $\quad -56+7 \quad -\frac{49}{2}$

	1	2	3	4	5	y_1	y_2	y_3			
y_1	-4	0	1	0	3	1	0	-3	12	$\frac{12}{3}$	4
y_2	-1	0	0	1	2	0	0	-2	10	$\frac{10}{2}$	5
x_2	2	1	0	0	-1	0	0	1	1	1	$a_{ij}<0$
	5	0	-1	-1	-5	0	0	6	-22		

1. $+(-4 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \quad +2 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \quad -2)$
2. $+(-1 \quad -\tfrac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad +\tfrac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad -\tfrac{1}{2} \quad -\tfrac{1}{2})$
3. $+(5 \quad \tfrac{5}{2} \quad 0 \quad 0 \quad -\tfrac{5}{2} \quad 0 \quad 0 \quad \tfrac{5}{2} \quad \tfrac{5}{2})$

↓

1. $(-1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \quad 10)$
   $+\tfrac{8}{3} \quad 0 \quad -\tfrac{2}{3} \quad 0 \quad -2 \quad -\tfrac{2}{3} \quad 0 \quad 2 \quad -8$
2. $(2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1)$
   $-\tfrac{4}{3} \quad 0 \quad \tfrac{1}{3} \quad 0 \quad 1 \quad \tfrac{1}{3} \quad 0 \quad -1 \quad 4$
3. $(5 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad -5 \quad 0 \quad 0 \quad 6 \quad -22)$
   $\tfrac{20}{3} \quad 0 \quad \tfrac{5}{3} \quad 0 \quad 5 \quad \tfrac{5}{3} \quad 0 \quad -5 \quad 20$

	1	2	3	4	5	y_1	y_2	y_3	
x_5	-4/3	0	1/3	0	1	1/3	0	-1	4
y_2	1/3	0	-2/3	1	0	-2/3	0	0	2
x_2	2/3	1	1/3	0	0	1/3	0	0	5
	$\frac{35}{3}$	0	2/3	-1	0	5/3	0	1	-2

↓

3. $(\tfrac{35}{3} \quad 0 \quad \tfrac{2}{3} \quad -1 \quad 0 \quad \tfrac{5}{3} \quad 0 \quad 1 \quad -2)$
   $\tfrac{5}{3} \quad 0 \quad -\tfrac{2}{3} \quad 1 \quad 0 \quad -\tfrac{2}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 2$

	1	2	3	4	5	y_1	y_2	y_3	
x_5	-4/3	0	1/3	0	1	1/3	0	-1	4
x_4	1/3	0	-2/3	1	0	-2/3	0	0	2
x_2	2/3	1	1/3	0	0	1/3	0	0	5
	$\frac{40}{3}$	0	0	0	0	1	0	1	0

← ~~soluzione degenere iniziale~~

SECONDA FASE

	1	2	3	4	5	
x_3	$-4/3$	0	$1/3$	0	1	4
x_4	$1/3$	0	$-2/3$	1	0	2
x_2	$2/3$	1	$1/3$	0	0	5
	-3	-3	0	0	0	$\emptyset$

max $3x_1+3x_2$ — min $-3x_1-3x_2$

$2x_1+3x_2 \le 15$ — $2x_1+3x_2+x_3=15$

$3x_1+2x_2 \le 12$ — $3x_1+2x_2+x_4=12$

$2x_1+x_2 \ge 1$ — $2x_1+x_2-x_5=1$

$x_1, x_2 \ge 0$ R

FO: $-3\cdot(0)-3(5)$

	1	2	3	4	5	
x_3	$-4/3$	0	$1/3$	0	1	4
x_4	$1/3$	0	$-2/3$	1	0	2
x_2	$2/3$	1	$1/3$	0	0	5
	-1	0	1	0	0	15

entra

$2\left(1/3\right)$ 1.2 $(-3 \quad -3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \emptyset)$

$(2 \quad 3 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 15)$

$5\left(\frac{2}{3}\right)$ 7.5

1	$3/2$	$1/2$	0	0	$15/2$

B & B ESEMPIO

(P_0) $\max \ \frac{1}{2}x_1 + x_2$ $\qquad$ min $\ -\frac{1}{2}x_1 - x_2$

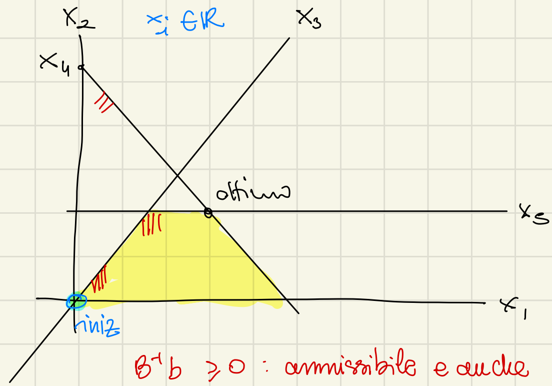
$4y = 5x$

$5x_1 - 4x_2 \geq 0$ $\qquad\qquad$ $-5x_1 + 4x_2 + x_3 = 0$

$4x_1 + 3x_2 \leq 16$ $\quad 3y = 16 - 4x \quad \Rightarrow$ $\quad 4x_1 + 3x_2 + x_4 = 16$

$x_2 \leq 2$ $\qquad\qquad$ $x_2 + x_5 = 2$

x_1, x_2 interi $\qquad\qquad$ $x_i \in \mathbb{R}$



	1	2	3	4	5		
3	-5	4	1	0	0	0	$\frac{0}{4}$ ←
4	4	3	0	1	0	16	$\frac{16}{3}$
5	0	1	0	0	1	2	$\frac{2}{1}$
	$-\frac{1}{2}$	-1	0	0	0	0	
		entro					

$B^{-1}b \geq 0$: ammissibile e anche degenere

↓ CCR ≤ 0 : non ottima

	1	2	3	4	5	
2	$-5/4$	1	$1/4$	0	0	0
4	$31/4$	0	$-3/4$	1	0	16
5	$5/4$	0	$-1/4$	0	1	2
	$-7/4$	0	$1/4$	0	0	0

$(4 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 16)$

$(+\frac{15}{4} \quad -3 \quad -\frac{3}{4} \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

$(0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2)$

$(5/4 \quad -1 \quad -1/4 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

$(-1/2 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

$(-5/4 \quad 1 \quad 1/4 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

QUI PROVO A NON FAR USCIRE LA 3 MA LA 5

↓

	1	2	3	4	5		
3	-5	0	1	0	-4	-8	$\frac{-8}{-5}$ pivot neg
4	4	0	0	1	-3	10	⇐ pivot nullo
2	0	1	0	0	1	2	
	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	1	2	
	entra						

	4	3	0	1	0	16
x_4:	0	-3	0	0	-3	-6
	-5	4	1	0	0	0
x_3':	0	-4	0	0	-4	-8
	$-1/2$	-1	0	0	0	0
CCR:	0	1	0	0	1	2

||

prosegue

	1	2	3	4	5	
3	0	0	1	5/4	-31/4	9/2
1	1	0	0	1/4	-3/4	5/2
2	0	1	0	0	1	2
	0	0	0	1/8	5/8	13/4

TABLEAU OTTIMO

	-5	0	1	0	-4	-8
x_3:	5	0	0	5/4	-13/4	25/2
	0	1	0	0	1	2
x_2:	invariata					
CCR:	-1/2	0	0	0	1	2
	1/2	0	0	1/8	-3/8	5/4

$\frac{8}{4} + \frac{5}{4}$

soluzione non intera: $x^* \left(\frac{5}{2} \quad 2 \quad \frac{9}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right)$ $\quad z^* = \frac{13}{4}$

* impongo vincoli per generare sottoproblemi su x_1 $\quad \frac{5}{2} = 2.5$

inizio da P_1

$\boxed{x_1 \le \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \rightarrow 2}$ e $x_1 \ge \left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil \rightarrow 3$

$x_1 + x_6 = 2$

	1	2	3	4	5	6	
3	0	0	1	5/4	-31/4	0	9/2
1	1	0	0	1/4	-3/4	0	5/2
2	0	1	0	0	1	0	2
6	1	0	0	0	0	1	2
	0	0	0	1/8	5/8	0	13/4

sottraggo

← Tableau sporco: porto in forma canonica

	1	2	3	4	5	6	
3	0	0	1	5/4	-31/4	0	9/2
1	1	0	0	1/4	-3/4	0	5/2
2	0	1	0	0	1	0	2
6	0	0	0	-1/4	3/4	1	-1/2 esce
	0	0	0	1/8	5/8	0	13/4

entra

$B^{-1}b \le 0$

$\exists\, a_{ij} < 0 \quad \Rightarrow$ applico il duale

$CCR \ge 0$

	1	2	3	4	5	6	
3	0	0	1	0	-4	5	2
1	1	0	0	0	0	1	2
2	0	1	0	0	1	0	2
4	0	0	0	1	-3	-4	2
	0	0	0	0	1	1/2	3

3: $0 \quad 0 \quad 1 \quad 5/4 \quad -31/4 \quad 0 \quad 9/2$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad -5/4 \quad 15/4 \quad 5 \quad -5/2$

1: $1 \quad 0 \quad 0 \quad 1/4 \quad -3/4 \quad 0 \quad 5/2$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad -1/4 \quad 3/4 \quad 1 \quad -1/2$

2: $0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 2$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

CCR: $0 \quad 0 \quad 0 \quad 1/8 \quad 5/8 \quad 0 \quad 13/4$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad -1/8 \quad 3/8 \quad 1/2 \quad -1/4$

$\frac{12}{4}$

soluzione ottima: $x^*(2; 2; 2; 2; 0\ 0)$ $\quad z^*_{PL} = 3$

CHIUDO IL NODO

$\boxed{P_2}$ $\quad x_1 \geq 3 \qquad x_1 - x_6 = 3$

	1	2	3	4	5	6	
3	0	0	1	5/4	-31/4	0	9/2
1	1	0	0	1/4	-3/4	0	5/2
2	0	1	0	0	1	0	2
6	1	0	0	0	0	-1	3
	0	0	0	1/8	5/8	0	13/4

$(1 \quad 0 \quad 0 \quad 1/4 \quad -3/4 \quad 0 \quad 5/2$

$(-1, 0, 0, 0, 0, +1, -3)$

cambio segno e ~~sottraggo~~ sommo riga x_1

PORTO IN FORMA CANONICA

	1	2	3	4	5	6	
3	0	0	1	5/4	-31/4	0	9/2
1	1	0	0	1/4	-3/4	0	5/2
2	0	1	0	0	1	0	2
6	0	0	0	1/4	-3/4	1	-1/2
	0	0	0	1/8	5/8	0	13/4

$B^{-1}b \not\geq 0$

$CCR \geq 0 \implies$ duale su riga 6

$\exists\, a_{ij} < 0$

$0 \quad 0 \quad 1 \quad 5/4 \quad -31/4 \quad 0 \quad 9/2$

$\underline{0} \quad -31/12 \quad 3/4 \quad -31/3 \quad 31/6$

$1 \quad 0 \quad 0 \quad 1/4 \quad -3/4 \quad 0 \quad 5/2$

$-1/4 \quad 3/4 \quad -1 \quad 1/2$

$0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 2$

$1/3 \quad -1 \quad 4/3 \quad -2/3$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 1/8 \quad 5/8 \quad 0 \quad 13/4$

$5/24 \quad -5/8 \quad 5/6 \quad -5/12$

$-\frac{1}{2} : -\frac{3}{4} = \frac{2}{3}$

	1	2	3	4	5	6	
3	0	0	1	-4/3			3
1	1	0	0	0	etc		29/3
2	0	1	0	1/3	etc		4/3
5	0	0	0	-1/3	1	-4/3	2/3
	0	0	0	1/3	0	5/6	17/6

ottimo

$x^*\left(\frac{29}{3}; \frac{4}{3}; 3; 0; \frac{2}{3}; 0\right)$

$z^* = \frac{17}{6} \approx 2.83 < 3$ QUINDI

il miglior intero immediato che posso avere è 3 $\Downarrow$ l'ho già trovato dall'altro albero MI FERMO

COMINCIAMO AD ESERCITARCI — B&B uo basta faccio domani ti prego

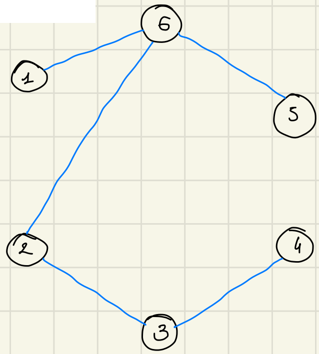
COMINCIAMO AD ESERCITARCI - DEF TH GRAFI

∃ un cammino tra ogni coppia di vertici

→ meno lati possibili

1. Disegnare un grafo $G = (V, E)$ non orientato connesso, con $|E|$ il più piccolo possibile, con $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ in cui il vertice 4 non sia adiacente né al vertice 5 né al vertice 6 e il vertice 6 abbia grado almeno 3. Scrivere quindi la sua matrice di adiacenza.

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$



2. Date la seguenti matrici di incidenza, dire se esse possono o meno rappresentare un grafo bipartito. Disegnare quindi i grafi risultanti e, in caso, individuarne la bipartizione.

	a	b	c	d	e	f	g
1	0	1	1	0	0	0	1
2	1	0	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1	0	0
4	1	1	0	~~1~~	0	1	0
5	0	0	0	0	0	1	0

↓ non è TUM.

	a	b	c	d	e	f
1	0	1	1	0	0	0
2	1	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0	1
4	1	1	0	0	1	0
5	0	0	0	0	1	1

OK è TUM ⇒ grafo bipartito

↓

∃ la partizione

grafo bipartito ⟺ A è TUM

* elementi $\in \{0 \pm 1\}$
* al max 2 $a_{ij} \neq 0$ ∀colonna

A_1 = * ∃ la partizione righe?

$I_1 = \{v_1, v_2, v_5\}$

$I_2 = \{v_3, v_4\}$

3. Verificata la totale unimodularità della seguente matrice d'incidenza, rappresentare il grafo orientato risultate. Il grafo è fortemente connesso? Quanto vale il grado uscente del nodo 3? Il grafo è hamiltoniano?

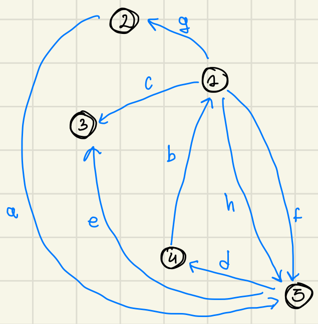
+1 esce

-1 entra

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	0	-1	1	0	0	1	1	1
2	1	0	0	0	0	0	-1	0
3	0	0	-1	0	-1	0	0	0
4	0	1	0	-1	0	0	0	0
5	-1	0	0	1	1	-1	0	-1

=> mat adiacenza x grafo orientato => $\forall A_i$ gli elementi non nulli sono 2 e sono discordi

=> è sicuramente TUM.



FORT. CONN: $\exists$ un cammino orientato fra 2 vertici qualsiasi

ESE LEZ YT

$$(P)\begin{cases} \min & 3x_1+2x_2+3x_3-x_4 \\ & -2x_1+x_2 \quad -x_4 \geq -3 \\ & 2x_1-x_2 \quad +x_4 \leq 3 \\ & x_1+x_2 = 4 \\ & 2x_2+x_3-7x_4 \geq 5 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(D)\begin{cases} \max & -3\lambda_1+4\lambda_2+5\lambda_3 \\ & -2\lambda_1+\lambda_2 \leq 3 \\ & +\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3 \leq 2 \\ & \lambda_3 = 3 \\ & -\lambda_1 \quad -7\lambda_3 = -1 \end{cases}$$

$\lambda_1 \geq 0$ λ_2 libero $\lambda_3 \geq 0$

compl. slackness

$$\begin{cases} x^t(c-A^t\lambda)=0 \\ \lambda^t(Ax^t-b)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(-2\lambda_1+\lambda_2-3)=0 & x_1=0 \\ x_2(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)=0 & x_2=0 \\ x_3[\emptyset]=\emptyset & \text{libere} \\ x_4(\emptyset)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1(-2x_1-x_2-x_4+3)=0 & \lambda_1=0 \\ \lambda_2(\emptyset)=\emptyset & \text{libero} \\ \lambda_3(2x_2+x_3-7x_4-5)=0 & \lambda_3=0 \end{cases}$$

altro...

$$\begin{aligned} \min \ & 2x_1+3x_2+x_3+x_4 \\ & x_1+x_2+x_3 = 2 \\ & 2x_1 \quad +3x_4 = 1 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \ & 2\lambda_1+\lambda_2 \\ & \lambda_1+2\lambda_2 \leq 2 \\ & \lambda_1 \leq 3 \\ & \lambda_1 \leq 1 \\ & 3\lambda_2 \leq 1 \end{aligned}$$

$\left.\begin{matrix}\lambda_1 \leq 3 \\ \lambda_1 \leq 1\end{matrix}\right\}$ ridondanti

λ_1, λ_2 libere in segno

$$\begin{cases} \lambda_1(x_1+x_2+x_3-2)=0 \\ \lambda_2(2x_1+3x_4-1)=0 \end{cases} \quad \text{inutili}$$

$$\begin{cases} x_1(2-\lambda_1-2\lambda_2)=0 \\ x_2(3-\lambda_1)=0 \\ \quad '' \quad x_3(1-\lambda_1)=0 \\ x_4(1-3\lambda_2)=0 \end{cases}$$

th due forte:

(P) $x^* = (0\ 0\ 2\ 1/3)$

$FO_{x^*} = 2+1/3 = 7/3$

(D) $\lambda^* = (1\ \ 1/3)$

$FO = 2+1/3 = 7/3$

$$\begin{cases} c^t x^* = 2 + 1/3 = 7/3 \\ b^t \lambda^* = 2 + 1/3 = 7/3 \end{cases}$$

condizioni equivalenti

$\rightarrow$

in accordo alla soluzione ottima

variab > 0 sono vincoli attivi

variab = 0 allora vincolo superfluo

APPUNTI DELLA SERE

$$\min \quad -8x_1 + 9x_2$$

$$-x_1 + 9x_2 \le 72$$
$$-2x_1 + 9x_2 \ge 18$$
$$x_1 \le 9$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$x_2 = 8 + \frac{1}{9}x_1$

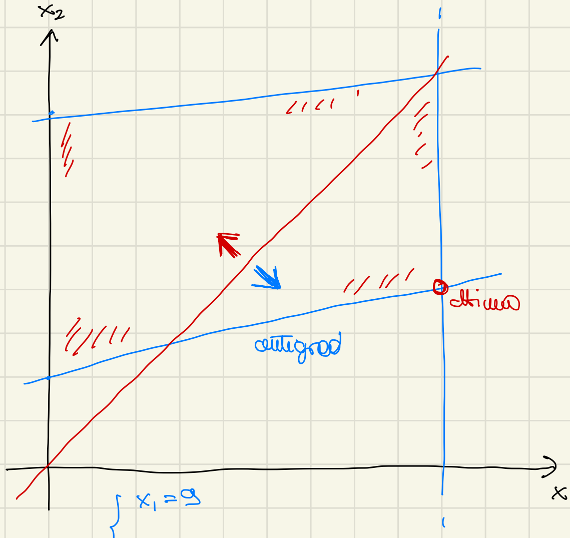
$x_2 = 2 + \frac{2}{9}x_1$

$x_1 = 9$

$\nabla f = (-8, +9)$

$9x_2 - 8x_1 = \alpha$

$x_2 = \alpha + \frac{8}{9}x_1$



$$\begin{cases} x_1 = 9 \\ -2x_1 + 9x_2 = 18; \quad -18 + 9x_2 = 18 \end{cases}$$

$9x_2 = 36$

$x_2 = 4$

$x^* (9, 4, 0, 0, 0)$

$x_2 = \alpha - \frac{1}{k}x_1$

max $x_1 + kx_2$

$-4x_1 + x_2 \le -2$ (1)

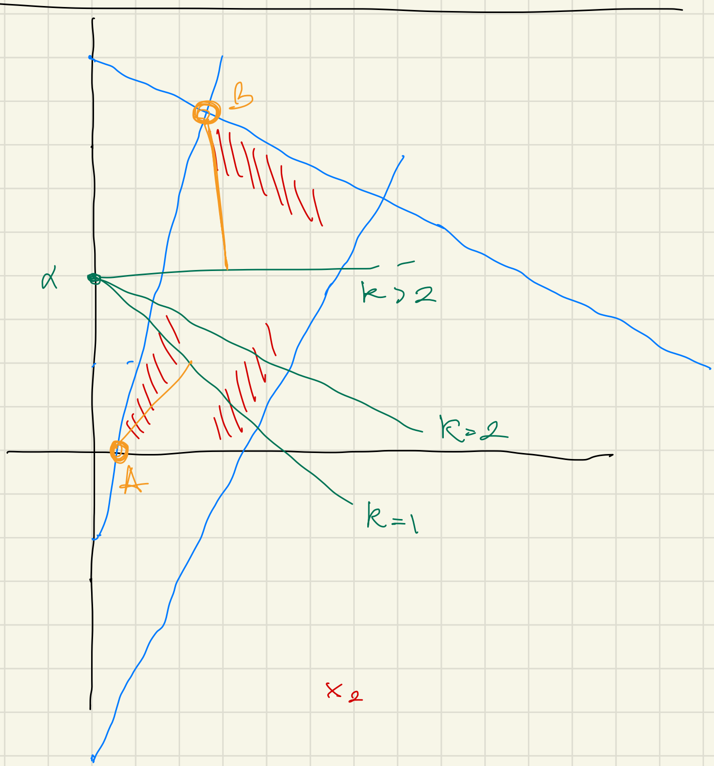
$x_1 + 2x_2 \le 18$ (2)

$2x_1 - x_2 \le 7$

$x_2 = -2 + 4x_1$

$x_2 = 9 - \frac{x_1}{2}$

$x_2 = -7 + 2x_1$



ottimo multiplo

$D = (1 \;\; k)$ $\quad -\frac{1}{k}$

$(-4 \;\; 1) \quad 4$

$(1 \;\; 2) \quad -1/2$

$(2 \;\; -1) \quad 2$

FO: $x_1 + kx_2 = \alpha$

$k = 2 \Rightarrow$ ottimo multiplo

$k < 2 \Rightarrow$ l'ottimo è A

$k > 2 \Rightarrow$ l'ottimo è B

• produce 3 leghe → x_1, x_2, x_3

↓

vendibili con guad

16, 10, 2

Sn, Zn, Cu senza ~~...~~ le risorse

↓ 300, ↓ 800, ↓ 1000

max guadagno

$$\max \quad 16x_1 + 10x_2 + 2x_3$$

Sn: $40x_1 + 30x_2 + 20x_3 \leq 300\,k$

Zn: $70x_1 + 90x_2 + 20x_3 \leq 800\,k$

Cu: $80x_1 + 70x_2 + 120x_3 \leq 1000\,k$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1..3$$

SD:

$$\min \quad -16x_1 - 10x_2 - 2x_3$$

$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 30\,k$

$7x_1 + 9x_2 + 2x_3 + x_5 = 80\,k$

$8x_1 + 7x_2 + 12x_3 + x_6 = 100\,k$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	4	3	2	1	0	0	30
x_5	7	9	2	0	1	0	80
x_6	8	7	12	0	0	1	100
	-16	-10	-2	0	0	0	0

esce

$30/4 = 7.5$

$80/7 = 11.4$

$100/8 = 12.5$

entra

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	3/4	1/2	1/4	0	0	15/2
x_5	0	15/4	-11/2	7/4	1	0	45/2
x_6	0	1	8	-2	0	1	40
	0	2	6	4	0	0	30

opposti minimi:

16 12 8 4 0 0

min $\quad -\frac{3}{4}x_1 + 20x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 6x_4$

$$\frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 + x_5 = 0$$

$$\frac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0$$

$$x_3 - x_7 = 1$$

	1	2	3	4	5	6	7	
x_5	$1/4$	-8	-1	9	1	0	0	0
x_6	$1/2$	-12	$-1/2$	3	0	1	0	0
x_7	0	0	-1	0	0	0	1	-1
	$-3/4$	20	$-1/2$	6	0	0	0	0