RICERCA

22/02/2023

minimo basi teoriche

$\boxed{PL}$

- PROGRAMMAZ. LINEARE

facile risolvibile in tempi polinomiali

" determinaz dell' $\boxed{\text{ottimo globale}}$ in tempi polinomiali"

coincide con locale se prog. è lineare

$\boxed{PLI}$

cambia solo variab intere

=> comporta problema difficile

ottimo globale trovo solo in tempi esponenziali

ottimo locale in tempi polinom

solu buona ma non tutta

⇓

soluzione euristica, tempo polin e non globale

(non è il meglio possib ma è BUONA)

CONCETTI PRELIMINARI

1. come capisco
" insieme X è convesso "

2. "funzione f è convessa"

DEF?

PERCHÉ SERVE? PL è un sottoinsieme della programm. convessa

più semplice basato:

$\forall x, y \in A \cap B$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ ho $z = \lambda x + (1-\lambda) y$ con $z \in A$ per la convessità di A ($x \in x$ e $y \in A$) ma pure $z \in B$ ($x \in x$ e $y \in B$) $\Rightarrow z \in A \cap B$ ♣

preso $A, B \in \mathbb{R}^n$ convessi, $A \cap B$ è convesso

DIM: dalla def convesso $\forall z \in$ insieme $z = \lambda x + (1-\lambda) y$ con $\lambda \in [0,1]$

→ per definiz di $A \cap B$: $\forall a, b \in A \cap B$: $a \in A, a \in B \ \wedge \ b \in A, b \in B$

→ se A e B sono già convessi, so che $\forall a, b \in A \cap B$ si verifica $z = \lambda x + (1-\lambda) y$ $z \in A \cap B$

⇒ anche $A \cap B$ è convesso

DEF: concetto modello matematico (o prob. di ottimizzazione)

- variabili decisionali ⇒ quello che cerco nel problema

× caso generale? non lineare, intero

→ funz. obiettivo (anche est complessa)

→ vincoli sono qualsiasi cosa

PLI

Vincoli: non sono in insieme convesso nel caso PLI ⇒ motivo per cui sono difficili

vincolo uguaglianza ⇓ cade una retta ($\mathbb{R}^2$)

vs disug ⇓ oltre alla retta, fornisce anche un semipiano di soluzioni

frontiera dell'insieme delle soluzioni

PROG. NON LINEARE
funz e vincoli qualsiasi

$\xrightarrow{\text{caso particolare}}$

PROG. CONVESSA
f convessa
vincoli concavi/lineari

$\xrightarrow{\text{caso particolare}}$

PROGR. LINEARE
funz e vincoli sono lineari

PROGRAMMAZIONE CONVESSA

come genero in forma algebrica il segmento che congiunge?

=> combinaz. convessa dei punti

DEF:

* COMBINAZ. CONVESSA (di due punti): permette di generare il segmento congiungente
  dati $x, y \in \mathbb{R}^n$: $z = \lambda x + (1-\lambda) y$ comb convessa di x, y $\forall \lambda \in [0;1]$

NB. $\lambda \in [0,1]$ necessario affinché sia CONVESSA. altrimenti è una COMB. LINEARE

DEF: alternativa

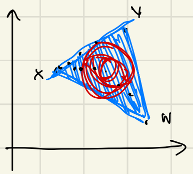
$z = \lambda_1 x + \lambda_2 y$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

* in generale: si dice combinazione convessa di k punti $\bar{x}_1, \dots \bar{x}_k \in \mathbb{R}^n$

$$z = \sum_i^k \lambda_i \bar{x}_i \qquad \text{con} \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1$$



trovo l'area interna ai punti!

=> è una REGIONE CONVESSA

DEF:

* insieme convesso: se $\forall$ coppia di punti interni all'insieme, la loro combinaz convessa risiede completamente nell'insieme

in generale: un insieme $A \in \mathbb{R}^n$ non vuoto si dice convesso se $\forall x, y \in A$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ il punto $z = \lambda x + (1-\lambda) y$ risulta appartenere ad A.

PROPOSIZIONE:

L'intersezione di due insiemi convessi $A, B \in \mathbb{R}^n$, $A \cap B$ è ancora un insieme convesso.

DIM:

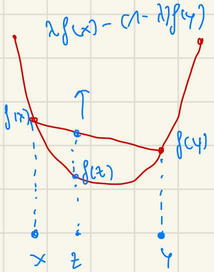
$\forall x, y \in A \cap B$, $\forall \lambda \in [0,1]$ si ha $z = \lambda x + (1-\lambda) y$

=> per la convessità di A $z \in A$

=> per la convessità di B $z \in B$

=> $z \in A \cap B$

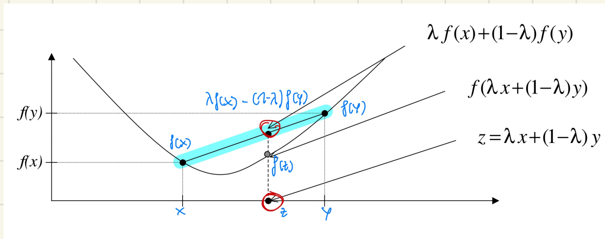
♣



DEF:

* FUNZIONE CONVESSA: sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso e $f: X \to \mathbb{R}$ convessa se $\forall x,y \in X$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ si ha:

$$\underbrace{f(\lambda x+(1-\lambda)y)}_{\substack{\text{qualsiasi punto della}\\ \text{funzione tra}\\ x \text{ e } y}} \le \underbrace{\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)}_{\substack{\text{qualsiasi punto sulla}\\ \text{retta congiungente}\\ \text{i due punti della funz.}}}$$



osservazioni: quando ho max e min locali (= valgono solo in un intorno) posso trovare che per intorni più grandi $\exists$ punti migliori

$\Rightarrow$ se $N(x) \equiv dom(f)$ trovo che x è l'ottimo globale di

DEF:

* OTTIMO LOCALE: $x \in X$ è un ottimo locale se $\exists$ un intorno $N \subseteq X$ tale che: $f(x) \le f(y), \quad \forall y \in N$

DEF

* INTORNO ESATTO: N è un intorno esatto se un ottimo locale rispetto ad N è anche ottimo globale

NB. un intorno esatto genera l'ottimo globale

ESEMPIO:

$$N_\varepsilon(x) := \{ y \in X : \|y-x\| \le \varepsilon \text{ con } \varepsilon > 0 \} \quad \text{con } \varepsilon = 1$$

è un intorno esatto

teorema belliss
x la progr convessa

* **TH FONDAMENTALE**: si consideri un problema $\min\{f(x) : x \in X\}$ con $X \subseteq \mathbb{R}^n$

se sia l'insieme degl variab sia la funzione sono convesse

$\Rightarrow$ l'ottimo locale è anche globale

* in altre parole:

Sia x un punto di ottimo locale, dalla definizione ho:

- $\exists \varepsilon > 0 \quad f(x) \leq f(y) \quad \forall y \in N_\varepsilon(x) = \{ y \in X : \|y - x\| \leq \varepsilon \}$

intorno esatto

Da questa affermazione bisogna dimostrare che $f(x) \leq f(y) \ \forall y \in X$

dimostro $f(x) \leq f(y) \quad \forall y \in X$

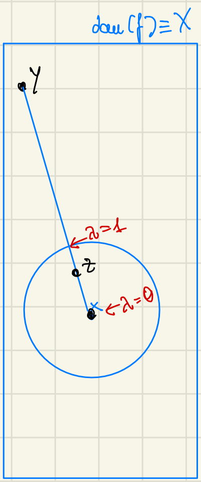
dati f ed X convessi

per ipotesi x è ottimo locale

insieme delle soluz con distanza ε da x

* ott. locale $\Rightarrow f(x) \leq f(y) : y \in N_\varepsilon(x)$

voglio arrivare a $f(x) \leq f(y) : \forall y \in X$



* scelgo un y fuori da $N_\varepsilon(x)$

x e y $\in$ insieme convesso $\Rightarrow$ posso generare il seguente

$z = \lambda x + (1-\lambda) y$

non scelgo $\forall z$, ma $z \neq x$ quindi $\lambda \neq 1$, e 0, molto prossimo a 1 o 0

$\Rightarrow$ di sicuro $z \in N_\varepsilon(x)$

$\Rightarrow$ quindi per costruzione di TUTTI I PUNTI IN $N_\varepsilon(x)$, z ha un valore peggiore di quello di x ① $f(z) \geq f(x)$

ORA PERÒ:

(2) * f è convessa: $f(z) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

* unisco le condiz trovate ed isolo y con $x \neq z$ $\lambda \in (0,1)$

$$\begin{cases} f(z) \ge f(x) \\ f(z) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \end{cases}$$

$$f(y) \ge \frac{f(z) - \lambda f(x)}{(1-\lambda)} \ge \frac{f(x) - \lambda f(x)}{(1-\lambda)} = f(x)$$

$(1-\lambda) \neq 0$ e positivo

$\Rightarrow f(y) \ge f(x)$ ♣

ESERCIZIO ESEMPIO: modelli lineari prog $\Rightarrow$ facili da risolvere graficamente quando in $\mathbb{R}^2$

1 problema di produzione tipo I

ottimizz acquisto materiale $\Rightarrow$ modellizza il problema matematico

variabili:

qnt materiali da acquistare

- $x_1, x_2 \ge 0$

vincoli:

vincoli di prod

qnt che salta fuori

- prod(A) ≥ 1.8 $\Rightarrow$ $0.2x_1 + 0.3x_2 \ge 1.8$
- prod(B) ≥ 1.2 $\Rightarrow$ $0.2x_1 + 0.1x_2 \ge 1.2$
- prod(C) ≥ 2.4 $\Rightarrow$ $0.3x_1 + 0.3x_2 \ge 2.4$

vincoli

costo: $5x_1$ $6x_2$ $\to$ problema minimizza $5x_1 + 6x_2$ e rappresentalo limitatamente al 1° quadrante ($x_1, x_2 \ge 0$)

rappresento rette, mica

- $0.2x_1 + 0.3x_2 = 1.8$
  $2x_1 + 3x_2 = 18$

azzero

$x_2 = \frac{18}{3} - \frac{2x_1}{3}$

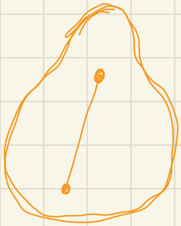
- $2x_1 + x_2 = 12$
- $3x_1 + 3x_2 = 24$

non sta su $(0,0)$ $\Rightarrow$ semipiano opposto

POST LEZIONE 22/02

dimostrazione teorema

enunciato: sia $\min\{f(x) : x \in X\}$ un prob di ottimizzazione
con $X \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso e f convessa.
$\Rightarrow$ ogni punto di ottimo locale è anche globale



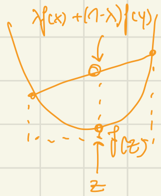
dimostrazione:

dalla def di insieme e funzione convessi

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto : $\forall x,y \in A$ e $\forall \lambda \in [0,1]$
$\forall z = \lambda x + (1-\lambda)y, z \in A$

$X \subseteq \mathbb{R}^n$. $f : X \to \mathbb{R}$ $\forall \lambda \in [0,1]$, $\forall x,y$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$
$$f(z) \leq \dots$$



- immaginiamo di prendere un intorno così costruito
  1. x è un pto di min locale
  2. $\varepsilon > 0$

$$N_\varepsilon(x) = \{ y \in X : \|y - x\| \leq \varepsilon \}$$

$\Rightarrow$ per dimostrare devo verificare che $\forall y \in N_\varepsilon(x)$: $f(x) \leq f(y)$ $\Rightarrow$ così generale che poi possa estendere a dom$(f) \Rightarrow$ globale

- sia $y \in X$ qualsiasi :

$$\begin{cases} z = \lambda x + (1-\lambda) f(y) \\ f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \end{cases}$$

isolo $f(y)$ $\qquad f(z)$

$$f(y) \geq \frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - \lambda f(x)}{(1-\lambda)} \quad \to >0 \text{ con la condiz } \lambda \in [0,1]$$

$$f(z) - \lambda f(x) \geq f(x) - \lambda f(x) \quad \Rightarrow \quad f(y) \geq \frac{f(x) - \lambda f(x)}{(1-\lambda)} = \frac{(1-\lambda)}{(1-\lambda)} f(x)$$

sempre vero perché x è pto di min da HP

quindi $z \in N_\varepsilon(x)$: $f(z) \geq f(x)$ ma $f(y) \geq f(x)$

il punto più forte che verifica la condiz di ottimo è x e rimane quello $\forall z$ nell'intorno locale $\Rightarrow$ non solo! $\forall$ punto locale + punto su segmenti generati con qualsiasi punto di X

$\Rightarrow$ vale su dom(f) GLOBALE

27/02/2023

REGIONE AMMISSIBILE CHE SALTA FUORI TOGLIENDO LE ZONE INDICATE DAI VINCOLI → tutti i punti (infiniti) in questa regione sono soluzioni accettabili

⇒ regione convessa (∩ di insiemi convessi)

⇒ non limitato

PDV GRAFICO:

* VERTICI: punti di intersezione tra i vincoli strutturali del problema

deriva dalla convessità dei dei problemi PL

⇒ un problema di PL ha un numero di vincoli finito (n)

⇒ anche se i punti della regione ammissibile sono ∞ i vertici ∃ in numero finito

⇒ se esiste, l'ottimo è tra i vertici del problema. PERCHÈ?

* Come trovo i vertici?

In generale metto a sistema i vincoli, così ne trovo l'intersezione

⇒ in realtà devo intersecare LA FRONTIERA della regione individuata dai vincoli.

* Gradiente f.obj

La funzione "migliora" nella direzione del suo gradiente

non so che cazzo sia sta roba che ho scritto

Quando il fascio di funz determinato dalla FO va ad intersecare la regione ammissibile in un punto di tangenza ⇒ trovo un vertice

sposto il fascio del vincolo lungo la direzione ad esso ⊥ e concorde al verso di ∇FO

DEF:

* regione amm. LIMITATA: quando si può trovare una norma euclidea per cui si può disegnare una ipersfera che contenga interamente la regione.

FILE: PRINCIPI E FONDAMENTI

* FORMULAZIONE DEI PROBLEMI DI PL

FORMA CANONICA:

$$\min \ c^t \bar{x}$$
$$A\bar{x} \geq \bar{b}$$
$$\bar{x} \geq 0$$

necessaria per applicare gli algoritmi di risoluzione

FORMA STANDARD:

$$\min \ c^t \bar{x}$$
$$A\bar{x} = \bar{b}$$
$$\bar{x} \geq 0$$

con $c, x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

FO:

$\bar{c}^t \cdot \bar{x}$ è un prodotto interno $(1 \dots n) \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ che risulta in uno scalare

$$\min \ c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

VINCOLI:

$$\left.\begin{aligned} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \text{\#m vincoli strutturali}$$

* ogni vincolo ha n coefficienti (legati alle n variabili)
  $\Rightarrow$ matrice A ha m righe (vincoli) x n colonne (variabili)

$x_1, x_2, \dots x_i \dots x_n \geq 0$ #n vincoli non negatività pag 5/20

rango mat A indica il num di vincoli indip. (non ridondanti

RICORDI DA ALGEBRA:

- un sistema lineare ha soluzione quando:

$A\underline{x} = \underline{b}$ $\quad r(A|\underline{b}) = r(A)$ $\quad r(A) = m$

CASI:

① $n = m$

$A\underline{x} = \underline{b}$

$\det A \neq 0$

$\exists$ una sola soluzione

$x = A^{-1} \cdot \underline{b}$

② $n > m$ $\quad$ + var di vincoli $\quad$ ∞^{n-m} soluzioni

$n - m$ = gradi di libertà

$\Rightarrow$ scelgo $n-m$ variabili da fissare per trovare tutti gli altri • quali scelgo?

$$\binom{n}{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

↑

CASO FORMA STANDARD

perché aggiungiamo variabili in modo da avere solo vincoli di disug.

ho n vertici max in un problema

• n-m sono in surplus e le azzero per trovare la soluzione

$\Rightarrow \binom{n}{n-m}$ possibili vertici ~ num finito!

problema con ∞ sol ($\equiv$ punti reg ammiss)

$\Rightarrow$ ho al max un num finito di soluzioni ottime potenziali

* FORMULAZIONI RICONDUCIBILI ALLA STANDARD

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \quad \Rightarrow \quad a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + y_i = b_i$$

$y_i \geq 0$ VARIABILE DI SLACK: misura la differenza tra il 1° ed il 2° membro per un vincolo di disuguaglianza

$\Rightarrow$ la introduco così posso considerare vincoli di uguaglianza e quindi la frontiera del vincolo stesso

- ad ogni vincolo trasformato, il problema cresce dimensionalmente.

mi interessano le frontiere dei vincoli - dette spigoli - perché mi interessa cercare le loro intersezioni: i VERTICI

⇓

* per intersecare due vincoli mi basta porre a zero le var di slack di questi due (metto a sistema con $y_i = 0$)

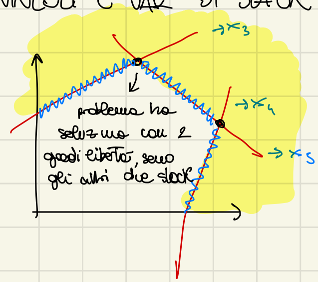
slack azzerata significa che non c'è diff tra 1° e 2° membro

$\Rightarrow$ uguaglianza

nel caso standard $n > m$ scopro che le variabili in soprannumero vengono settate a zero quando sto generando dei vertici

VARIAB NON VINCOLATE IN SEGNO $\quad$ p7/20 non ho capito

* VINCOLI E VAR DI SLACK



1. problema canonico con x_1, x_2

aggiungo $x_{3,4,5}$ per trasformare semipiani in rette

2. problema standard con vincoli uguaglianza e ora $x_{1,2,3,4,5}$

TRASFORMAZIONE VINCOLO:

var di slack

$n \quad (x_1, x_2) \longrightarrow n+m \quad (x_1, x_2, \underbrace{x_3, x_4, x_5}_{\text{var di slack}})$

m vincoli

canonico — standard

posso risolvere ∞^2 sol.

NUM MAX A VERTICI DI UN POLIEDRO CHE IN FORMA STANDARD n VAR ED m VINCOLI

È $\binom{n}{n-m}$ [gradi di libertà]

n-m da fissare a zero

nella risoluzione
* separo A in matrici var
  - (non di base) da fissare N
  - di base B → vettori di variabili da ricavare dal sistema

RECAP

(n-m) var non di base

m vincoli
n variabili

$A\underline{x} = b \to \begin{bmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{bmatrix}$ → scompongo vettore var in due per separare base e non di base ($\underline{x}_B$: m, $\underline{x}_N$: n-m)

$m \times m \leftarrow (B|N)$

$\underline{x}_N = 0$ fissate ($m \times n-m$)

ricavate dal sistema

var eccedenti n-m da fissare

* $B\underline{x}_B + N\underline{x}_N = b$
* $B\underline{x}_B = \underline{b}$

$\underline{x}_B = B^{-1} \cdot \underline{b}$

var ecc a zero trovo questa estrazione del sistema

$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \dots \\ \dots \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

$A\underline{x} = \underline{b} \implies$ se $\det A \neq 0$, $\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$

$x \to \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_B \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$ con $(x \dots x_B)$ vettori della base (m)

$(x_{B+1} \dots x_N)$ vettori extra (n-m)

$A \to (B|N)$ — $\underline{x}_B$ ricavate dal sistema, $\underline{x}_N$ fissate

$\underline{x}_B = B^{-1} \cdot b$

$A\underline{x} = b$

$(B|N)\underline{x} = b$

$\implies B\underline{x}_B + N\underline{x}_N = b$

$(m \times m)(m \times 1) \quad (m \times n-m)(n-m \times 1)$

* SOLUZIONI DI BASE (icho) (n orig + m vincoli)

Le variabili originali di un problema (dalla forma canonica): n−m var

Ora ho aggiunto le var di slack (sono in forma standard): n variabili

forma standard: $\min \underline{c}^T\underline{x}$

$\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$

$\underline{x} \geq 0$

* A è una matrice $m \times n$ con $n > m$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & & & a_{1m+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & a_{mm} & & & a_{mn} \end{array}\right]$$

$$= (\underset{\substack{\downarrow \\ (m \times m)}}{B} \mid \underset{\substack{\downarrow \\ m \times (m-n)}}{N})$$

matrice di base (?) — 4 gradi di libertà

* x è il vettore delle variabili totali (decisionali + slack)

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x_B \\ \hline x_N \end{matrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow 1 \times m \\ \rightarrow 1 \times (n-m) \end{matrix}$$

variabili in base

variabili fuori base ⇒ SURPLUS! sono azzerate

SISTEMA CHE DESCRIVE IL MODELLO:

$$\underline{A}\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow (B, N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \underline{b}$$

$$Bx_B + Nx_N = \underline{b}$$

(definizioni)

ci sono esattamente n var con CCR=0

DEF:

* SOLUZIONI DI BASE: considero il vettore $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix}$ in cui le $(n-m)$ componenti di x_N sono fissate e nulle, è detto soluzione di base se

$$\boxed{x_B = B^{-1} b}$$

e le variabili in x_B sono dette di base

DEF:

* SOL. BASE AMMISSIBILE: una soluzione di base $x = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix}$ si dice ammissibile se $x_B \geq 0$

Def

* SOL. BASE DEGENERE: se ogni componente di x_B è > 0 allora si chiama NON DEGENERE.

Se invece $\exists$ almeno una variabile di base con valore nullo allora la soluzione è DEGENERE

* esempio determinaz sol di base *

osserva bene l'esempio a pag 18/20

* vedi ESE

NB se in un problema trovo che in ogni vertice della regione ammissibile ho esattamente $(n-m)$ variabili nulle

$\Rightarrow$ il sistema dei vincoli ammette una ed una sola soluzione

$\Rightarrow$ soluz ammissibile che rispetta tutti i vincoli

QUESTA PARTE NON SONO SLIDE MA PORTA A VOCE

06|03|2023

ANALISI DELLE SOLUZIONI DI BASE: SIMPLESSO

"interseco i vincoli ricavo i vertici del poliedro ⇒ le soluzioni di base" ← idea di partenza

soluz di base non sono limitate ai soli vertici

1 scrivo il modello in forma standard (min e uguaglianze)

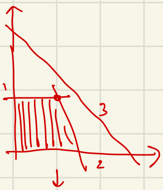
2 Ogni vincolo sarà associato ad una variabile di slack che mi indica se il suo vincolo è soddisfatto in uguaglianza stretta o meno.

⇒ quando $x_i = 0$ (slack) significa che sono sulla frontiera del suo vincolo

⇒ $x_i > 0$: mi trovo sul semipiano ammissibile ⇒ vincolo inutilizzato!

⇒ $x_i < 0$: mi trovo sul semipiano opposto

3 Inizio a cercare le soluzioni di base



$x_1 = x_2 = 0$

$x_3 > 0$ ridondante!

* passo successivo: iterazione del simplesso

Una volta calcolate le soluzioni di base, ho trovato tutti i vertici del poliedro.

⇒ Faccio un'analisi di questi punti trovati:

- analizzo quante variabili nulle appaiono e le confronto con la cardinalità dell'insieme delle variabili fuori base

soluz soluz degenere

⇒ in $\mathbb{R}^2$ sono 2, sono le var corrisp ai vincoli intersecati, sono quelle nulle

- so che giocando con quali variabili vanno a zero e quali sono positive, trovo diverse intersezioni dei vincoli

⇒ spostamento tra vertici!

immagino di essere in $\mathbb{R}^2$ ↓

spostamento tra vertici:

* due variabili passano da positiva (in base) ad azzerata (fuori base) e viceversa

idea del simplesso

*: cardinalità di x_B

→ nel caso di vertice degenere, le var che cambiano possono non modificare il vertice ad uno adiacente ma solo la base

→ sposto tra vertici adiacenti finché ne trovo uno che è migliore di tutti i suoi vicini

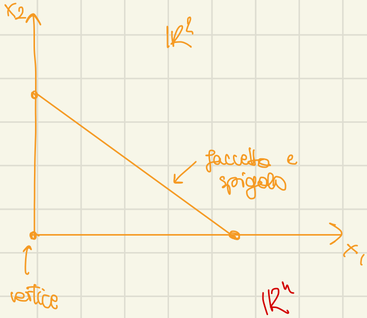
⇒ ottimo locale, nell'intorno dei suoi "vicini" ⇒ dal TH fondamentale, con P convesso per ipotesi

⇓

il vertice è un ottimo globale

CdR delle slack^P → valori variab D

in $\mathbb{R}^2$ questo non vale, la ridondanza non fa crollare



ridondanza dei vincoli è relativa in $\mathbb{R}^n$ alla REGIONE AMMISSIBILE

↓

se tolgo un vincolo ridondante

VERTICE DEGENERE RIMANE

la STRUTTURA/REGIONE "CROLLA" non è più identificata

$\mathbb{R}^n$

LIMITATEZZA $\not\Rightarrow$ RIDONDANZA

$\mathbb{R}^2$

RIDONDANZA $\not\Rightarrow$ LIMITAT.

vertici escono da intersez => pongo n-m variabili di slack a zero

∞^{n-m} soluzioni

*POTENZIALE SOLUZ. OTTIMA: tutti i vertici sono soluzioni di base, e viceversa.
se dal modello riesco a generare i vertici => genero anche le sol. di base!

Dal POV del sistema: se lo risolvo (trovo $\underline{x}$) ottengo i vertici del problema

$(m \times n)(n \times 1) = (m \times 1)$

$Ax = b$

* sono nel caso $n > m$ perché ho introdotto m variabili di slack durante la standardizzazione

$[B|N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b$

"elimino" n-m variabili => fisso i gradi di libertà (surplus)
=> fisso x_N a zero così li elimino dal sistema

se ho n var ne scelgo m alla volta
$\binom{n}{m}$ fisso a $\emptyset$ le var extra => trovo i vertici

$\binom{n}{m} \to B$ $\qquad \binom{n}{n-m} \to N$

sfrutto la scomposizione per trovare le soluz di base con cui cerco i vertici

scelgo queste e faccio B "genero tutte le possibili matrici di base"

CASISTICA SOLUZIONE DI BASE

- B non invertibile => non esiste un VERTICE assoc alla base (non c'è la soluzione)
- B invertibile => calcolo il valore di x_B variabili di base
  $\det B \neq \emptyset$ e quadrata
  - trovo x_B strett positivo
    SOLUZ. DI BASE NON DEGENERE
    $x = (x_B, x_N)$, $x_B > 0$, $x_N = 0$
  - trovo almeno una var di x_B nulla
    SOLUZ. DI BASE DEGENERE
    problematica
    le var a $\emptyset$ devono essere n-m
    se ce n'è anche solo 1+
    => devo capire quale var sta in base o no => a turno tutte
    => un vertice genera tante sol di base

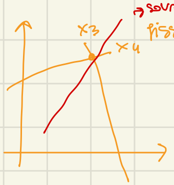
NB. se $\exists$ un elemento di $x_B < 0$ allora la soluzione non è ammissibile

proposizione non generalizzabile a $\mathbb{R}^n$ con $n>2$

* in $\mathbb{R}^2$ se ho vertici degeneri => associati a vincoli ridondanti

esempio:

1 vertice degenere <=> associato a + basi



→ sovrannumero e ne ho tanti quante sono le var a $\emptyset$ fissi
=> ho + vincoli di quanti siano necessari a generare il vertice

tanti modi per settare le var fuori base → tante basi ad ogni vertice cors

trovo 6 vertici di cui 1 genera una matrice con det = 0
=> non invertibile

se imposto $x_N \to \emptyset$ => $Bx_B + \cancel{Nx_N} = b$
var di base a $\emptyset$
non le soluzioni!

$x_B = B^{-1} \cdot b$
le calcolo così
$x = (x_B, x_N)$
considerale! anche se sono nulle

FILE: POLITOPI CONVESSI E TEOREMI

DEF:

vettore $(n \times 1)$ — $(n \times n)$ — scalare $\Rightarrow$ prodotto commuta

* IPERPIANO: $H = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha^t \underline{x} = \alpha_0 \}$

[una retta è un iperpiano generalizzato a $\mathbb{R}^L$]

NB: normalmente un iperpiano separa in due lo spazio in cui esso esiste $\Rightarrow$ identifico due spazi diversi

$\Rightarrow$ i vincoli sono iperpiani che separano lo spazio in una regione ammissibile ed una no

es. retta taglia due semipiani

DEF:

semispazio affine perché $\alpha_0 \neq 0$ $\Rightarrow$ traslazione affine

* SEMI-SPAZIO: $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha^t \underline{x} \geq \alpha_0 \}$ ed $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha^t \underline{x} \leq \alpha_0 \}$

* PUNTO ESTREMO: ($\equiv$ VERTICE) punto che non posso esprimere come combinazione convessa.

$\Rightarrow$ punto $\underline{x}$ di un insieme convesso P per cui non esistono due punti distinti x_1, x_2 tali che $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ $\quad \lambda \in (0,1)$

- semipiano ammissibile è quello che contiene l'origine

DEF:

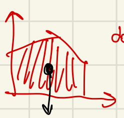
* POLIEDRO: (convesso) è l'intersezione di un numero finito di semispazi ed iperpiani

* POLITOPO: (convesso) un poliedro limitato e non vuoto

$P := \{ x \in \mathbb{R}^n : A \underline{x} = \underline{b} \; ; \; \underline{x} \geq 0 \}$

limitato se: $\exists M > 0 : \|x\| \leq M \quad \forall x \in P$

NB: ogni poliedro ha un numero finito di vertici (punti estremi)



$\|x\| < M$

dato la regione, $\forall$ punto di essa la norma euclidea è $<$ di M numero suff grande

$\Rightarrow$ tutta la regione ammissibile sta in un'ipersfera raggio M (cioè non va all'infinito)

2ª PARTE
06/03

* **TH DI MINKOWSKI-WEYL**

Ogni punto di un $\boxed{\text{politopo}}$ si può ottenere come combinazione convessa dei suoi vertici

perché a differenza del poliedro è convesso

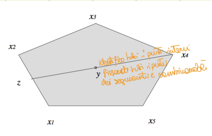
nei poliedri posso fare una combinazione simile ma dovrei stare attento alla direzione d'apertura

DIM

Siano $(x_1, \dots x_k) \in \mathbb{R}^n$ i vertici di $P := \{x \geq 0 : Ax = b\}$

$$y \in P \Rightarrow \lambda_1 \dots \lambda_k \geq 0 \quad \sum_{i}^{k} \lambda_i = 1 \quad \text{tali che}$$

$$\Rightarrow y = \sum_{i}^{k} \lambda_i x_i$$



NB. questo teorema conferma che i vertici sono sufficienti a generare tutta la regione ammissibile

$\Rightarrow$ la base dello spazio è costituita da vertici

* **TH: REG. AMM. È CONVESSA**

L'insieme $P := \{x \geq 0 : Ax = b\}$ è convesso.

insieme convesso:
$\forall x_1, x_2 \in P$ il segmento congiungente sta nell'insieme

$\forall \lambda \in (0,1)$:
$z = \lambda x + (1-\lambda) y \in P$

DIM

* Se P contiene un solo punto il teorema è dimostrato.
* Altrimenti provo che:

$$\forall x, y \in P, \quad \forall \lambda : 0 < \lambda < 1, \quad \lambda x + (1-\lambda) y \in P$$

Indichiamo con A_i la colonna i-esima

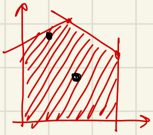
$$x \in P \Rightarrow A_1 x_1 + \dots + A_n x_n = b \qquad \cdot(\lambda)$$

$$y \in P \Rightarrow A_1 y_1 + \dots + A_n y_n = b \qquad \cdot(1-\lambda)$$

$\Rightarrow$ faccio la comb. di questi due:

moltiplico e sommo le due

x e y sono $\in P$
$\Rightarrow$ soddisfano il sistema dei vincoli
$\Rightarrow$ anche la loro comb. z soddisfa il sistema



$$A_1(\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1) + \dots + A_n(\lambda x_n + (1-\lambda) y_n) = b$$

inoltre $\left.\begin{array}{l} x_i \geq 0 \\ y_i \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda x_i + (1-\lambda) y_i \geq 0 \quad \forall i \quad$ con $\lambda \in (0,1)$

garantisce ogni componente di $z \geq 0$ e che soddisfa i vincoli
$\Rightarrow z$ è sol ammiss. del sistema

$\Rightarrow$ perciò $\lambda \underline{x} + (1-\lambda) \underline{y} \in P$ ♣

TH DI EQUIVALENZA (tra vertici e soluzioni)

Un punto $\underline{x} \in P$ è vertice del poliedro non vuoto $P := \{ \underline{x} \geq 0 : A\underline{x} = \underline{b} \}$

$\Leftrightarrow$ $\underline{x}$ è una soluzione di base ammissibile del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$

DIM: 1. $\underline{x}$ è sol. di base ammissibile $\Rightarrow$ $\underline{x}$ è un vertice

2. $\underline{x}$ è un vertice $\Rightarrow$ $\underline{x}$ è sol. di base ammissibile

PUNTO 1

Dimostro per assurdo quindi sia $x^t = [\underbrace{x_1 \dots x_k}_{x_B}, \underbrace{0 - 0}_{x_N}]^t$ una soluzione ammiss. di base con $x_i > 0$ per $i = 1 \dots k$

$\Rightarrow$ SIA x NON UN VERTICE

k=m, soluzione non degenere

k<m soluzione degenere

m → numero vincoli

* Per definiz, i vertici non si possono esprimere come combinazione convessa di qualsiasi altri punti. Vado a cercarli per avere l'assurdo.

$y^t = [y_1 \dots y_k, 0 - 0] \in P$

$z^t = [z_1 \dots z_k, 0 - 0] \in P$

con $y \neq z$ e tali che:

$x = \lambda y + (1-\lambda) z$ per un qualche $\lambda \in]0,1[$

nella costruzione di y e z mantengo a k i termini non nulli così da essere coerente alla costruzione di x.

* Dalle ipotesi costruite sappiamo che:

$$y \in P \Rightarrow Ay=b \Rightarrow A_1 y_1 + \dots + A_k y_k = b$$
$$z \in P \Rightarrow Az=b \Rightarrow A_1 z_1 + \dots + A_k z_k = b$$

* Sottraggo l'equazione di z a quella di y: con $\alpha_i = y_i - z_i$ $\forall i = 1 \dots k$

$$(y_1 - z_1) A_1 + \dots + (y_k - z_k) A_k = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_k A_k = 0$$

dall'ipotesi $y \neq z$

$\Rightarrow$ Esistono allora k scalari $(\alpha_1 \dots \alpha_k)$ non tutti nulli (perché $\exists$ almeno un $y_i \neq z_i$) tali che $\sum_i^k \alpha_i A_i = 0$

$\Rightarrow$ Le colonne $A_1 A_2 \dots A_k$ sono LINEARM. DIPENDENTI e non possono essere parte della stessa base B

$\Rightarrow$ ASSURDO perché x^* era noto come soluzione di base e si era negato l'essere vertice

Quindi ogni soluz di base ammissibile è vertice

PUNTO 2

Suppongo per assurdo che $\underline{x}$ sia un vertice di P, ma non una soluzione di base di $Ax=b$

K qui non ho implicaz sulla cardinalità della base, semplicemente separo componenti positivi e nulli

* Essendo $\underline{x} = [x_1, \dots x_k, 0 - 0]$ con $x_i > 0$ $\forall i = 1 \dots k$ e vertice $\in P \Rightarrow$

$$x \in P \Rightarrow Ax=b \Rightarrow A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_k x_k = b \quad (1)$$

* Se abbiamo imposto $\underline{x}$ NON sol. di base, allora varrà la negaz della sua DEF:

$A_1 A_2 \dots A_k$ sono linearmente dipendenti $\Rightarrow$

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_k A_k = 0 \quad (2) \qquad (\alpha_1 \dots \alpha_k) \neq \underline{0}$$

* Sommo le due equazioni, la (2) moltiplicata per $\varepsilon > 0$:

$$(x_1 + \varepsilon \alpha_1) A_1 + \dots + (x_k + \varepsilon \alpha_k) A_k = b$$

ho generato una sol. valida $\forall k$
$A(x_i + \varepsilon \alpha_i) = b$
↓
due coeff posso generare punto $\in P$

stessa cosa della somma

* Sottraggo allo stesso maniera

$$(x_1 - \varepsilon\alpha_1)A_1 + \dots + (x_k - \varepsilon\alpha_k)A_k = b$$

ora uso questi due punti (≡ soluzioni) per generare il vertice e quindi trovare y

* Vado a definire:

$$y = [\, x_1 - \varepsilon\alpha_1, \dots, x_k - \varepsilon\alpha_k, 0 - 0 \,]^t$$

$$z = [\, x_1 + \varepsilon\alpha_1 \dots x_k + \varepsilon\alpha_k, 0 - 0 \,]^t$$

e per y e z continua a valere: $Ay=b$, $Az=b$ (sono sempre punti)

* Scegliendo un ε sufficientemente piccolo si trova $y, z \geq 0$ e $\in P$ con $y \neq z$

$\Rightarrow$ per costruzione $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$ cioè x può essere espresso come combinazione convessa stretta di due altri punti di P

$\Rightarrow$ ASSURDO perché x era per ipotesi un vertice

Ogni vertice è anche una soluzione di base ammissibile.

$\Rightarrow$ perfetta equivalenza. ♣

---

caso peggiore trovato solo dopo ANNI

i software usano questo lo stesso!

il caso medio è polinomiale

RAGIONAMENTO:

il simplesso mi può far pensare che PL sia difficile (da $O(\binom{n}{m})$) $O(m)$

$\Rightarrow$ mi serve un altro metodo che mi convince PL sia invece O(polinomiale)

caso medio è complesso! anche se è facile

domanda esame:

simplesso al max O(esp) $\Rightarrow$ PL è diff

$\rightarrow$ no, c'è un metodo facile per PL

* TH FONDAMENTALE DELLA PL

Sia dato il problema:

$$\min\ c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con rango$(A) = m$:

1. se esiste una soluzione ammissibile $\Rightarrow$ esiste una soluzione ammissibile di base

   ∃ un punto interno al politopo
   $\Rightarrow$ ∃ un vertice se la soluzione non è vuota

2. se esiste una soluzione ammissibile ottimale $\Rightarrow$ esiste una soluzione ammissibile ottimale di base

   se ammette ottimo $\Rightarrow$ questo sta nelle soluzioni di base
   $\Rightarrow$ per il th eq. questo ottimo è un vertice

come dimostro questa roba

Teorema fondamentale:	+	sol base ≡ vertici Teorema di equivalenza:
le soluzioni di base contengono una soluzione ottimale (se esiste)		**x** è soluzione ammissibile di base se e solo se è punto estremo della regione ammissibile

$\Downarrow$

i punti estremi della regione ammissibile contengono una soluzione ottimale
(se esiste)

conseguenza: non serve analizzare TUTTE le soluzioni, solo quelle di base
combinità, mi pare

* le sol di base esistono in numero finito (anche molto grande, ma finito) e quindi anche il worst case permette di controllare con n passi finiti tutti i vertici

$\downarrow$

CIOÈ COMBINO m COLONNE DI A E NE VERIFICO L'AMMISSIBILITÀ $\rightarrow$ ovviamente non combino alla cieca

PRIMA PARTE DEL SIMPLESSO

* ESE *

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1+5x_2 \\ & x_1 \le 4 \\ & 2x_2 \le 12 \\ & 3x_1+2x_2 \le 18 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

1. FORMA STANDARD

$\rightarrow$

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1-5x_2 \\ & x_1+x_3=0 \qquad x_3 \\ & 2x_2+x_4=0 \qquad x_4 \\ & 3x_1+2x_2+x_5=0 \qquad x_5 \\ & x_{1,2,3,4,5} \ge 0 \end{aligned}$$

$Ax=b$

A: 3 vincoli x 5 variabili

B: 3×3 è sempre quadrata con # dei vincoli

quante mat di base?

$$\binom{5}{3} = \frac{5\cdot \cancel{4}^{2} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{2!}\ \cancel{3!}} = 10$$

sol base banale: $x_1=x_2=0$ (origine assi)

↓ ricavo che le slack azzerano i vincoli

$x_3=4$

$x_4=12$

$x_5=18$

$$\begin{array}{ccc|ccc} x_1 & x_2 & & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$\underbrace{x_1 \; x_2}_{x_N}$ — x_B base — base canonica mat identità

misura distanza tra punto soluz e slack ugagliamo
⇒ se ammissibile è positivo

$x_B = B^{-1}\cdot b$

se $B = I_n \Rightarrow B^{-1} = I_n$ $\quad x_B = I_n \cdot b = b$ allora la soluz è esattamente la mat termini noti

TABELLA

A → tutte le variabili

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	1	0	1	0	0	4
x_4	0	2	0	1	0	12
x_5	3	2	0	0	1	18
	-3	-5	0	0	0	

valore slack per avere questa base

b termini noti

variabili di base associate

ho i costi solo per le var non in base

vettore coeff costi ridotti

metto qui i coeff che ho nella funz obiettivo

x_2 ha costo migliore quindi punto a spostarmi verso $x_2>0$

⇒ ma ha $x_{3,4,5}$ diventino zero per fare posto a x_2

↓

scelgo poi la var che chiede la min variazione di x_2

importanti perché dal vertice (0,0) mi dice in che direzione spostarmi! è il gradiente! mi dice dove la soluz è migliore

"quanto varia f obiettivo se la var fuori base entra in base"

se la var diventa positiva miglioro di!

08 / 03 / 2023 FILE: PL – simplesso → sul file esempio di alg simplex, devo far esercizi

NOTE SUL TABLEAU DEL SIMPLESSO (+ simplex in generale)

* la mat individuata da colonne e righe delle x_i e $\bar{x}_B$ è la matrice identità

(???) ⇒ dal PDV matriciale: per ottenere $\bar{x}_B$, devo premoltiplicare A

* la convenienza (= i CCR) per le variabili x_B in base è nulla
  ⇒ perché sono appunto già in base
  > le x_N hanno un CCR ≠ 0, (immagino prob di min):

  negativo (vantaggioso) — positivo (svantaggioso)

$\boxed{\text{CCR:}}$ sono i contributi per unità che l'entrata in base di una variabile porterebbe alla FO
↓
$\Delta f = \Delta x_i \cdot CCR_i$

* SIMPLESSO, IDEA BASE: seguendo i costi ridotti più promettenti, prima o poi convergo all'ottimo locale → globale

dimostrato da Cauchy

* PIVOTING: azione di scambio delle variabili fuori base ↔ in base

- È la regola che uso per determinare quale x_i esce di base a garantire l'ammissibilità della nuova soluzione di base
  ⇒ garantita dalla regola dei rapporti minimi

- la regola per scegliere la variabile che entra invece garantisce l'ottimalità della nuova soluzione di base
  ⇒ garantita dalla scelta della colonna con CCR promettente (CCR indica la "direzione" di spostamento lungo il vincolo)

* Quando iterando l'operazione di pivoting trovo un vettore CCR completamente $c^t \geq 0$ (caso prob. di minimo)
⇒ ho la CONDIZ. SUFFICIENTE ad affermare di avere una soluzione ottima

l'ottimo che trovo con queste soluzioni di base si chiama OTTIMO DEGENERE

NB. non è necessaria perché se la nego e trovo un c^t con almeno un elemento negativo ricado in una situazione di DEGENERAZIONE CICLANTE

⇒ significa che ∃ almeno una variabile nella base che assume valore zero

* ESISTONO REGOLE DI PIVOTING PIÙ SOFISTICATE? possono evitare la degenerazione?

⇒ METODO DI BLAND

Suppongo di avere uno scenario dove devo iterare il simplesso.

ENTRATA

Secondo il simplesso, scelgo di far entrare la variabile con CCR più promettente. Ma con Bland:

⇒ scelgo di far entrare la variabile con indice minore

USCITA

Quando è lecito scegliere, scelgo

Secondo il simplesso, scelgo di far uscire la variabile con il rapporto $\frac{b_i}{a_{ij}}$ minore (rispetto alla colonna A_j della variabile in entrata.
Con Bland:

⇒ scelgo di far uscire, a parità di rapporto, la variabile con indice minore

internet dice che vedo la colonna della var entrante
→ prendo la prima in base che troverebbe un pivot positivo ⇒ questa uscirà

x_3	x_5
-7	-8

Bland: scegli x_3

Simplex: scegli -8

NB. Bland funziona come anti-ciclo SOLO SE la applico sin dalla prima iterazione del simplesso

→ mi aiuta a scegliere nel caso di = rapporto minimo uguale per più variabili
⇒ da usare dopo simplesso!
evita la DEGENERAZ CICLANTE tra le basi di uno stesso vertice

cosa succede se 2 var hanno stesso rapporto minimo?

	x_4	
x_2	3	6
x_3	2	4

se $x_4 \to x_3$ $\quad x_4 = \frac{4}{2}$ e $x_3 = 0$

se $x_4 \to x_2$ $\quad x_4 = \frac{6}{3}$ e $x_3 = 0$

‖

$x_4 = 2$ in entrambi i casi!

conseguenza rapporto minimo fa sì che alla prossima iterazione, la soluzione sarà degenere (perché avrò 2 cose a zero)

rischio caso soluz ciclante, non è detto che cicli al 100%

13/03/2023

* SIMPLESSO: CASI PARTICOLARI

1. REGIONE AMMISSIBILE NON LIMITATA & F.OBIETT. CHE SI SPOSTA NELLA DIREZ. DI APERTURA

=> SOLUZIONE ILLIMITATA

è facile geometricam, non analiticamente

esempio slide 3/19

gradiente (flusso curve di livello) ↓ è lui a controllare l'∃ di una soluz. illimitata

Quando ho sol. illimitata?

Per avere una soluzione illimitata è necessaria una regione illimitata

=> ma non è sufficiente

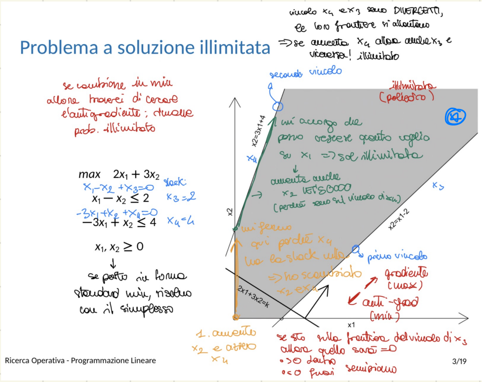
* è necessario che il gradiente trovi la direzione di miglioramento della FO come medesima a quella di apertura della regione

NB. trovo la regione illimitata quando le frontiere di due vincoli divergono ⊗

=> così individuano la direzione di apertura.

↓

Quando ∃ vincoli dove le variabili hanno segno discorde, questo è un indizio



perché significa che durante le operazioni di pivot, questa discordanza andrà a peggiorare gli equilibri numerici

indica appunto che ci sono segni opposti

* nel tableau non posso scambiare qualcosa che ha $\boxed{\text{pivot negativo}}$!

per bilanciare il vincolo le due variabili si fanno aumentare reciproc. senza limiti ⊗

COLONNA full neg: fa crescere tutte le variabili perché le però bilanciare tutte (avendo segno neg)

=> quando trovo colonne (var entranti) con a_{ij} e c_j tutti negativi

allora non esiste nessuna variabile che la bilanci → farà aumentare illimitatamente anche altre variabili

=> non ho limiti e può crescere all'infinito

=> così ho trovato di avere una soluzione illimitata

NB. => CONSIDERIAMO SOL ILLIM. COME AMMISSIBILE

l'ottimo esiste ma non lo raggiungo xk è a ∞

⊗ ES: immagino

		x_2			
x_3	1	-1	1	0	2
x_4	-3	1	0	1	4
	-2	-5	0	0	0

candidato ad entrare

regola rapporti

$\frac{4}{1}$ e $\frac{2}{-1}$ => vince x_3 → e il vincolo ora è $-x_2+x_3=2$

esce x_3 che diventa $x_3=0$

COEFF NEGATIVO aumento la var che entra ma anche quella che esce senza che nessuna delle 2 sia vincolata

2. OTTIMO MULTIPLO

in $\mathbb{R}^2$ posso avere 2 soluzioni ottime
⇒ implica potenziali ∞ altri punti soluz ammiss. non di base ma ottimi

DEF: non ho un solo ottimo che risolve il problema di ottimizzazione
⇒ il valore ottimale è unico, ma lo ottengo con TANTE altre soluzioni e non solo una. Rimane comunque un numero FINITO.

coef. costo ridotto: esprime convenienza nell'inserire la variabile in base.
La FO varia in questo modo:

$$\boxed{\Delta f = c_k \cdot \Delta x_k}$$

trovato col = rapporto minimo

* un'ottimo multiplo corrisponde ad una situazione con $\Delta f = 0$
  ⇒ non perché non mi sono spostato, il che implicherebbe $\Delta x_k = 0$
  ⇒ FO non varia poiché $c_k = 0$

questo è il caso di degenere, che comunque non è mutual. esclusivo con multiplo

ovvero la variazione fornita da una variabile è nulla, non influisce sulla FUNZ. OBIETTIVO.
⇒ posso spostarmi OVUNQUE lungo il vincolo associato a x_k (a patto di non rompere altri vincoli)
e dal TH di MINKOWSKI so che tutti questi punti ottimi, che sono soluzioni ammissibili non di base, si possono ottenere combinando (convess.) altri vertici

trovati i vertici ottimi (2) ho che ce ne sono soluzione di base. come trovo le soluz che generano. $= \lambda \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$

$\Delta x_k = 0$: vertice non cambia, non mi sposto! nel piano e quindi sol degenere

$c_k = 0$: mi muovo nel piano ma F.O non cambia anche se trovo un altro vertice (la var cambia e diventa positiva)

ESE: Date soluzioni ottime con almeno una soluzione non di base (in $\mathbb{R}^2$)
* Ho più punti che trovano l'ottimo ⇒ sono in ottimo multiplo
Ho sicuramente 2 sol di base ottime, le chiamo x e y

$$z = \lambda x + (1-\lambda) y \quad \text{con } \lambda \in (0,1)$$

ottengo z sicuramente valore ottimo

$$f(x) = f(y) \overset{?}{=} f(z)$$

$$\cancel{\lambda f(x)} + f(x) - \cancel{\lambda f(x)}$$

$$f(z) = f(\lambda x + (1-\lambda) y) \underset{\text{siccome}}{\leq} \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) = f(x)$$

PAGINA PER I MIEI RAGIONAMENTI SCHIZOFRENICI

QUAL È IL MAX VALORE CHE POSSO AVERE x_i?

In forma standard:

$$\min -3x_1 - 2x_2$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 14$$

$$x_1 - x_2 + x_5 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

La corrispondente tavola del simplesso risulta:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(1)	x_3	-1	2	1	0	0	4
(2)	x_4	3	2	0	1	0	14
(3)	x_5	1	-1	0	0	1	3
(0)		-3	-2	0	0	0	0

← riga di pivot

candidato

Soluzione di base iniziale: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 4$, $x_4 = 14$, $x_5 = 3$,
Valore funzione obiettivo: 0.
Variabile candidata più promettente: x_1

ESCE: c^+ migliore $\Rightarrow c_1 = -3$

ENTRA: rapporto $\Rightarrow \frac{4}{-1} =$ nulla

$\frac{14}{3} = 4.5\ldots$

$\frac{3}{1} = 3$ $\boxed{\text{ok}}$

Qual è il massimo valore che x_1 può assumere?

1 vincolo non pone limiti

2 vincolo $x_4 \Longrightarrow 0$ $x_1 \Longrightarrow \frac{14}{3}$

3 vincolo $x_5 \Longrightarrow 0$ $x_1 \Longrightarrow 3$

Cardine (pivot): 1

(1) $\Longrightarrow$ (1) + (3)

(2) $\Longrightarrow$ (2) − 3 ∗ (3)

(0) $\Longrightarrow$ (0) + 3 ∗ (3)

al posto di x_4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	1	1	0	1	7
x_4	0	5	0	1	-3	5
x_1	1	-1	0	0	1	3
	0	-5	0	0	3	9

in base   "   "

candidato!

Soluzione di base corrente: $x_2 = x_5 = 0$, $x_3 = 7$, $x_4 = 5$, $x_1 = 3$
Funzione Obiettivo: −9; cardine: 5.

MAX VALORE DI x_i?
i vincoli sono i rapporti minimi
(perché scelti sulle righe = vincoli)

(1) N.A. pivot negativo

(2) l'uscita di x_4 comporterebbe $x_4 = 0$ in $3x_1 + 2x_2 + x_4 = 14$

$\Rightarrow$ il max valore sarebbe (con anche $x_2 = 0$) $x_1 = \frac{14}{3}$

(3) stesso ragionamento, $x_5 = 0$ in $x_1 - x_2 + x_5 = 3$

$\Rightarrow$ il max sarebbe (con anche $x_2 = 0$) $x_i = 3$

Nuova tavola del simplesso:

x_4 e $x_5 \in x_N \Rightarrow$ sono nulle
⇓
sto nella loro intersez. B

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	1	-1/5	8/5	6
x_2	0	1	0	1/5	-3/5	1
x_1	1	0	0	1/5	2/5	4
	0	0	0	1	0	14

tutti i coeff $\geq 0 \Rightarrow$ ho trovato l'ottimo

Soluzione di base corrente: $x_4^* = x_5^* = 0$, $x_3^* = 6$, $x_2^* = 1$, $x_1^* = 4$.
Funzione Obiettivo: -14.

Osservazione: nella tavola finale il coefficiente della variabile x_5 (variabile fuori base) nella funzione obiettivo è 0.

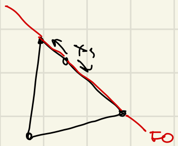
⇓

Operando come se la variabile x_5 avesse coefficiente negativo si ottiene una nuova soluzione (diversa da quella inizialmente ottenuta) ma con lo stesso valore della funzione obiettivo (e quindi ugualmente ottima).

COME RICONOSCERE OTTIMO MULTIPLO DAL TABLEAU?

Questo è un tableau ottimo perché $c^t \geq 0$
con $\{x_1, x_2, x_3\}$ in base (con valore $\neq 0$)
e $\{x_4, x_5\}$ fuori (con valore fisso nullo)

$\Rightarrow \exists$ un CCR di una variabile $\in x_N$ (x_5) che è nullo anziché positivo



$\Rightarrow$ potrei muovermi lungo x_5 (trovare soluzioni nuove e diverse) mantenendo immutata la FO [perché la colonna 5 ha a_{ij} negativo rispetto a x_5]
$\Rightarrow$ come nella illimitata, posso far crescere le variabili mantenendo l'equilibrio!

$\Rightarrow$ OTTIMO MULTIPLO

⇓

però stavolta non è tutta la colonna
quindi il movimento è limitato. (diff. caso illimitato)

non sono degenere perché il $c(-)$ mi permette di muovermi!

+ $c_i = 0$ è non negativo, quindi non faccio nemmeno iterazioni

o negativo?
DEG: $c_i = 0$
uno a_{ij} positivi

BOH NON MI RICORDO

se il c_i^t anziché essere negativo è nullo, posso ricadere nel caso DEGENERE ma senza ciclare

(???)

ok forse ci sono

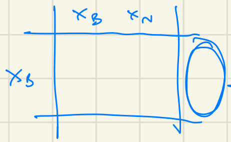
* COME CAPISCO SE UNA SOL. È DEGENERE?

Il vettore soluzione $x^t = [x_B; x_N]$ ha almeno una componente di x_B non positiva ma $x_{Bi}=0$. Significa che la soluzione non fissa solo $(n-m)$ variabili a zero, ma almeno una in più.

3. SOLUZIONE DEGENERE

* I CCR ci permettono di individuare un ottimo multiplo, per il caso di situazione degenere devo osservare i coefficienti della riga

CASO NORMALE:



se i valori della var in base sono $\neq 0$ allora non degenere

se estraggo var con valore nullo => entra var nulla sk non ho un quantitativo da giocarmi => cambia base, ma non vertice

↓

rischio ciclare!

CASO DEGENERE:

Se esiste almeno una variabile in base x_B con $B^{-1}b=0$ (valore assunto) allora mi trovo in presenza di una soluzione degenere

=> perché anche in base o meno non cambia la soluzione trovata

||| punto individuato

=> ∃ più basi per identificare un vertice!

significa che è presente almeno un...

DEF: chiamo un vincolo ridondante se è presente in soprannumero (sono in $\mathbb{R}^n$ e ho un vertice intersezione di $n-1$ vincoli

=> l'n-esimo è di troppo!)

NB. in $\mathbb{R}^2$ togliere vincoli essenziali fa crollare la regione ammissibile invece se ne ho di ridondanti è meglio rimuoverli (semplifico il problema)

- **Soluzione di base degenere:** almeno una variabile in $\mathbf{x}_B$ assume valore nullo.
- **Rischio di degenerazione ciclante:** se il problema ammette soluzioni di base degeneri, è possibile che il metodo del simplesso generi una sequenza di basi ammissibili $B_1, \dots, B_q$, $q > 1$, con $B_1 = B_q$ tutte associate allo stesso vertice. Questo accade perché ad ogni cambio di base (operazione di pivoting) la funzione obiettivo rimane costante.
- **Regola di Bland:** se usassimo un qualsiasi criterio deterministico per la scelta della variabile entrante e della variabile uscente, l'algoritmo genererebbe la stessa sequenza di basi ammissibili indefinitamente. Usando la regola di Bland evitiamo che questo succeda impedendo al simplesso di ciclare.

SOL DEG rischio di ciclare, ma non lo farò se la var in base è a zero

ho la certezza? NO

controesempio:

$x_2=0$ candidata per $x_3=2$

se ho il pivot negativo, la escludo anche se CCR<0

DEGENERE ∃ anche quando $c^T \geq 0$ (potrei pensare ottimo!) ma ho degen anche con $c_i < 0$

se la var che entra e quella che esce assume valore zero

=> FO non cambia

① l'algoritmo ripercorre le → basi associate a questo vertice degenere (rischio ∃ questa var a 0)

② → CCR=0 FO non cambia ma var pone a positiva, quindi trovo effettivamente un'altra base = vertice. SOL. MULTIPLA, ma OTTIMO MUL. solo se ho CCR=0 per x_N all'ottimo

Esempio problema p12/19

* Immagino: ho i sol x di base = $[x_B, x_N]$ con n var { m base; n-m fuori → sono a zero

→ so che q variabili < m di base a 0

=> in queste situaz generale, quante basi trovano il vertice degenere?

$[\underbrace{x_{B_1}, \dots, x_{B_m}}_{q \text{ sono nulle}} ; x_{N_1}, \dots, x_{N_{n-m}}]$

m-q = variab non nulle

$\binom{n-m+q}{q}$ → modi per combinare quelle a zero della base

se coeff opposti => var cercano entrante => quindi non si scambiano

4. SOLUZIONE IMPOSSIBILE

DEF: la regione ammissibile è vuota e i semipiani non si intersecano

∄ regione ammissibile: dopo i vincoli hanno semipiani che non si intersecano

* COMPLESSITÀ ALG. SIMPLESSO?

Dato un generico problema di PL in forma standard, con n variabili ed m vincoli

⇒ WORST CASE SCENARIO:

il simplesso analizza tutte le soluzioni di base ammissibili prima di trovare la ottima

e sono un binomiale $\binom{n}{m}$ soluzioni ⇒ DIFFICOLTÀ ESPONENZIALE

E quindi i problemi di PL dovrebbero essere non facili!

⇒ il simplesso ha una alta efficienza nel caso medio

caso peggiore: il cubo di Klee-Minty

15/03/2023 FILE: SOLUZIONE_INIZIALE

potrebbe essere
- origine ∉ regione
- regione vuota => impossibile

* DETERMINAZIONE DI UNA SOLUZIONE INIZIALE

Tipicamente la soluzione di partenza del simplesso è quella identificata dall'ORIGINE degli assi (tutte le slack a zero). A volte questo punto non appartiene alla regione ammissibile!

=> ES: quando ho un vincolo trasformato (forma standard) che mi ha portato un termine noto ad avere valore negativo

x_i .... $|-b$

$x_i = B^{-1}(-b)$
ma $x_i \geq 0$!
quindi vincolo non soddisfatto

SITUAZIONE TIPICA

	x_B	x_N	
x_B	I	A_N	$B^{-1}b$
	0	CCR	

=> COME TROVO UN PUNTO DA CUI PARTIRE?

⇓

* METODO DUE FASI *

opera con la risoluz. sequenziale di due fasi distinte

IDEA DI FUNZIONAMENTO:

1ª FASE) → A) se ∄ sol. iniz potrebbe ∄ sol problema ovvero impossibile => fine.
B) se invece la regione ≠ ∅ posso determinare una soluz. iniziale, un vertice ammissibile per far partire il simplesso

⇓

B) 2ª FASE) eredita dalla fase 1 il vertice, verifica di trovare l'ottimo (simplesso classico)

NB. La situazione senza soluzione iniziale c'è quando ∃ almeno un termine noto (≡ una componente di b) negativo. CASO VINCOLI ≤

per i vincoli ≥, vale l'opposto

15/03/2023

Non so quale variabile portare in base per avere un vertice iniziale → non posso capire guardando la matrice iniziale

1ª FASE

In questa situazione non abbiamo punto (≡sol) da cui partire né slack da mettere in base per trovarne un altro (?)

* mi accorgo che non ho una soluz anche perché il tableau non contiene la mat Identità

IN BREVE... quello che fa la 1ª fase è capire in quale di questi due casi ricado:

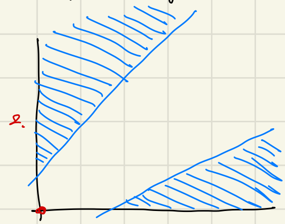
origine non è soluzione, ∄ regione ⇒ 1 o 2

1.

l'origine non è soluzione, ma ∃ un vertice da cui posso partire, allora

⇒ posso stabilire questo nuovo vertice

2.



l'origine non è soluzione e NON ESISTONO vertici alternativi

⇒ problema impossibile

base

TRASFORMAZIONE IN PROBLEMA AUSILIARIO

PROBLEMA CON VINCOLI ≤

canonica

$\min c^t x$

$Ax \leq b$

$x \geq 0$

standard

$\min c^t x$

$\boxed{Ax + s = b}$

$x, s \geq 0$

con:

1. $b \geq 0 \Rightarrow x = 0, s = b$ ammissibile

⇒ continuo con il simplesso

questa parte non è chiarissima

2. $\exists i : b_i < 0 \Rightarrow x = 0, s = b$ non ammissibile

⇒ ∄ sol iniziale per simplex

PROBLEMA CON VINCOLI ≥

canonica

$\min c^t x$

$Ax \geq b$

$x \geq 0$

standard

$\min c^t x$

$\boxed{Ax - s = b}$

$x, s \geq 0$

con:

1. $b \leq 0 \Rightarrow x = 0, s = -b$ ammissibile

⇒ continuo con il simplesso

2. $\exists i : b_i > 0 \Rightarrow x = 0, s = -b$ non ammissibile

⇒ ∄ sol iniziale per simplex

aggiungere le variabili ausiliarie sporca il tableau ⇒ dovrò riportarlo in forma canonica

mi suggeriscono che una ulteriore condizione da imporre è $\boxed{b \geq 0}$

si introduce una y per ogni vincolo $\Rightarrow \# \bar{y} = m$

PROBLEMA CON VINCOLI =: in questo caso non ho da introdurre slacks.
posso dire subito che con $b_i < 0$ non ho soluzione di partenza

SONO GIÀ IN FORMA STANDARD?

al problema $Ax = b$ ho aggiunto delle variabili $y = b$

che fine hanno fatto le slack? quelle che vanno a zero, tratto in base ~~solo~~ le ausiliarie, saranno le uniche $\neq 0$

NB. le variabili y non sono parte del problema originale

$$\begin{cases} Ax = b \\ Ax + y = b \end{cases}$$

non hanno soluzione contemporaneamente, si escludono.

(a meno che $y = 0$...)

* STEP SUCCESSIVO:

Costruiamo la soluzione di partenza mettendo in base le y.

$\Rightarrow$ l'obiettivo è poi minimizzare $\boxed{\sum_i y_i}$, così da avere $y \to 0$

$\Rightarrow$ vorrei delle variabili y piccole, per approssimare il problema ausiliario a quello originale

funzione di ottimo per il prob ausiliario da studiare

sol iniziale ausiliaria: $x = 0$ & $y = b$

ottimo cercato z^*

* SVOLGIMENTO 1ª FASE

Dunque ho costruito un problema ausiliario, e decido di chiedere che le variabili ausiliarie vadano a zero, cioè vengano minimizzate.

- Se questo, risolvendolo normalmente trovo un ottimo ove le $y = 0$

  $\Rightarrow$ il sistema di partenza ha soluzione, e l'ottimo ausiliario trovato sarà il punto di partenza ($\equiv$ vertice iniziale) per applicare la seconda fase

  $y^* = 0 \Rightarrow x^*$ è ammissibile per $A\underline{x} = b$

$y^* = 0$ significa che ho un'approx. fedele in cui ho soluzione

- Se risolvendo l'ausiliario trovo l'ottimo con $y \neq 0$

  $\Rightarrow$ la soluzione non è ammissibile ed il problema originale non ha soluzione

$y^* \neq 0$ non mi permette di dire $Ax + s = b \sim Ax = b$

$y^* \neq 0$? vedi il teorema Ⓐ ↓

NB. dal tableau ottimo del problema ausiliario ricavo z^*

$z^* > 0$: impossibile

$z^* = 0 \Rightarrow y^* = 0$ $\boxed{\text{OK}}$

$\boxed{z^* = 0}$ ammissibilità, come la ottengo

(A) nella tavola finale dell'ottimo ($1°$ FASE) ho tutte le variabili ausiliarie fuori dalla base (per questo sono nulle!)

$\Rightarrow$ la base così identificata avrà certe $x_i \in x_B$ ed è questa la base che utilizzerò come soluzione di partenza per la $2°$ FASE

(nella FO rimetterò le var originali e se necessario riporto il tableau in forma canonica - cioè $c_B^T = 0$)

(B) nella tavola finale dell'ottimo ho alcune ausiliarie in base, con valore nullo $\Rightarrow$ SOLUZIONE DEGENERE

$\Rightarrow$ in questo caso devo iterare la 1^a fase forzando tutte le y_i fuori base

$\Rightarrow$ poi passo alla $2°$ FASE

* TH OTTIMO SOLUZIONE AUSILIARIA

$$y^* \neq 0 \iff Ax = b,\ x > 0 \text{ non ha soluzione}$$

DIM:

- $y^* \neq 0 \Rightarrow \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}$ è imp

sia per assurdo $\tilde{x} \geq 0 : A\tilde{x} = b$

$\Rightarrow \exists$ soluzione di $Ax = b$ per cui $A\tilde{x} - y^* = b$

2^a FASE

Ⓐ costruisco la base iniziale per il simplesso $x_0^+ = (x^*, 0)$ usando i valori ottenuti dal prob. ausiliario nella 1^a fase.

non ho capito bene

$\Rightarrow$ In particolare prendo il tableau ottimo ereditato dalla 1^a fase ELIMINANDO le colonne delle variabili ausiliarie y^* (hanno senso fuori base!) e ripristino l'obiettivo (in forma canonica) (devo sempre tornare ad avere i CCR delle x_B nulli)

y_i ; $\bar{a}_n \cdots \bar{a}_{ij} \cdots 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; | \; 0$

se $a_n \dots a_n = 0$ trovo $a_{ij} < 0$ $\Rightarrow$ posso pivotare UNICO CASO

Ⓑ La soluzione trovata è degenere. Con opportuni scambi di variabili, posso forzare tutte le y_h fuori base, riportandomi al caso Ⓐ
La costrica di pivoting diventa

- se $\exists\, \bar{a}_{ij} > 0$ nella riga di una variabile x_j $(j \leq n)$ allora uso quel a_{ij} come pivot $\Rightarrow$ torno al caso Ⓐ
  (cioè x tra le originali)

- se $\nexists\, \bar{a}_{ij} > 0$ ma $\exists\, \bar{a}_{ij} < 0$ è lecito fare pivot anche se negativo poiché $b_i = 0$ (non vo ad invalidare $x_i \geq 0$ con il segno di $B^{-1}b$)
  $\Rightarrow$ questo non fa variare la funzione obiettivo, ma almeno mi libero di y_h $\Rightarrow$ torno al caso Ⓐ

  $b = 0 \Rightarrow$ $x = B^{-1}b = 0$ non può essere invalidato da un pivot negativo

- se $\nexists\, \bar{a}_{ij} > 0$ e nemmeno $\bar{a}_{ij} < 0$ $\Rightarrow$ l'intera riga $(\bar{a}_{i1}\bar{a}_{i2} \dots \bar{a}_{in})$ è una riga di zeri! Non ho candidati validi (x_j) ad entrare in base
  $\Rightarrow$ sono autorizzato a scartare le colonne $A(y_1) \dots A(y_m)$ delle var. ausiliarie
  $\Rightarrow$ ritrovo un tableau equivalente all'originale ma con una riga nulla
  $\Rightarrow$ la matrice A aveva colonne L. D. $\Rightarrow$ vincolo y_h ridondante e posso eliminarlo $\Rightarrow$ torno al caso Ⓐ

in tutte queste operazioni di pivot ho righe y_h con $b_h = 0$ (appunto, nulle in base) quindi scambiare variabili fuori base (so di essere in vertice degenere) significa portare una var che sarà sempre $= 0$! la FO non cambia

ESEMPIO SPORCO A CUI HO AGGIUNTO GLI SCREEN SHOTS

metodo analitico simplesso?
troverò una sol ottima $\neq 0$

NOTA: Sono sicuro che devo per forza usare due fasi?

le var di base devono avere CCR=0 altrimenti non sono in forma CANONICA
mi sono portato in tableau ok, inizio symplex

1ª Fase $y^* = 0$?

Tableau non in forma canonica:

indice var di base

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	b
y_1	1	-2	-1	0	1	0	1
y_2	-1	1	0	-1	0	1	1
	0	0	0	0	1	1	0

se tutti i CCR ≥ 0 ⇒ dovrebbe andare bene così!

PROB. i CCR dovrebbero essere zero!
NON È IN FORMA CANONICA

Trasformiamo il tableau in forma canonica:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
y_1	1	-2	-1	0	1	0	1
y_2	-1	1	0	-1	0	1	1
	0	1	1	1	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	-2

ho fatto sparire gli 1, ora è ok

Poiché la soluzione corrente è ottima e $z^* = 2 \neq 0 \Longrightarrow$ il problema originario non ha soluzione ammissibile.

ho tutte le CCR ≥ 0 non faccio altre operazioni

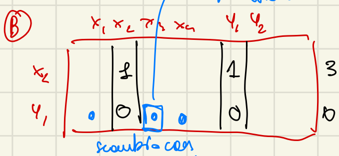
sommo righe e le sottraggo ai CCR

Ricerca Operativa - Programmazione Lineare 11/23

non sono i CCR del problema aus ma ci metto quelli originari

2ª Fase

se $y_1 (?) \geq 3$ allora qui avrò valore > 0 ⇒ classico pivoting



scambio con una di queste → esco ed entra

non posso scambiarle ovviamente, che pivoting faccio con 0 al denom?

faccio iteraz symplex scambiando senza guardare CCR
⇒ coglie bitter
fuori y_1 dalla base
sk var ausiliaria

entra a valore zero se c'è almeno un coeff positivo

1 fase
risolvo simplex
sul prob ausiliario

$y^* > 0$ in base: soluz degenere ↓ le elimino facendo il pivoting

$y^* = 0$: le var y finiscono fuori base ↳ normale simplex per avere l'ottimo del problema originale

candidati

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
x_2		1			0		3
y_1	-1	0	4	0	1		0

scelgo il xk positivo ⇒ se i valori fossero tutti negativi, posso far pivoting sul negat x stalla fuori uno ...

FINE PRIMA FASE

UNICA ECCEZ SIMPLESSO

• scambio x_3 e y_1 andando nella dir x_3

⇒ da qui prendo e tolgo var y_i per continuare il simplex

ho spezzato queste cose nel

ho trovato vertice degenere ma non importa cosa sposto, sarò sempre lì

↓ e se i CCR fossero tutti nulli? non ne posso avere nessuno ma così se tolgo y_1 e y_2 trovo vincolo con riga nulla

⇓

vincolo ridondante xk il rango era m-1

⇓

lo tolgo e continuo

vedi slide 12

infeasible=**false**; — pseudocodice metodo 2 fasi
redundant=**false**;
for each $b_i < 0$ **do**
    moltiplica l'i-esima equazione per -1; → posta forma canonica mi servono $b \geq 0$ prima di aggiungere le surplus
end for
for $i = 1$ **to** m **do**
    aggiungi all'i-esima equazione il termine y_i; → var ausiliarie
end for
call SIMPLESSO con funzione obiettivo $z^a = \sum_{i=1}^{m} y_i$; → FO prob ausil
if z^a* (=valore funzione obiettivo)> 0 **then**
    infeasible=**true**; inammissibile
else
    for each variabile artificiale y_i in base **do**
        if $\exists\, \bar{a}_{ij} \neq 0 | x_j$ variabile problema originario **then**
            esegui un pivoting su a_{ij}; → normale, >0 e <0
        else
            redundant=**true**; $(a_{i1} \ldots a_{in}) = \underline{0}$
            elimina la i-esima riga;
            $m = m - 1$;
        end if
    end for
    inserisci nel tableau la funzione obiettivo originale in forma canonica;
    elimina le colonne delle variabili artificiali;
    call SIMPLESSO;
end if

* METODO DI PENALIZZAZIONE

(non avevo appunti di questa idea)

ah sì perché è per l'orale

Partendo dal prob standard senza sol iniziale ⇒ genero l'ausiliario con

CAMBIO COSÌ

$1^t y \to c^t x + M 1^t y$

$$\begin{aligned} \min\ & c^t x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \min\ & c^t x + M 1^t y \\ & Ax + y = b \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

M suff. elevato e positivo

DIFETTO: big M porta rischio di instabilità numerica

* opero come nel 2 fasi normale, cerco l'ottimo dell'ausiliario
⇒ ho due scenari ottimali possibili

$Ax^* + y^* = b$

$z^* \in \mathbb{R} \to z^* > 0 \Rightarrow y^* \neq 0$
$\searrow z^* = 0 \Rightarrow y^* = 0$
$\boxed{x^* \text{ è ottimo}}$

$z^* \to \infty \to y^* = 0 \Rightarrow x^* \to \infty$
$\searrow y^* \neq 0$

① OTTIMO FINITO
- $y^* = 0$ ho trovato ottimo prob OG (x^*)
- $y^* \neq 0$ prob OG non ha soluzione

② OTTIMO ILLIMITATO
- $y^* = 0$ prob OG ha sol. illimitata
- $y^* \neq 0$ prob OG non ha soluzione

file: determinare soluz iniziale

ultima volta: due fasi

risoluzione due fasi con degenere

⇒ dopo 1ª fase rimane una ausiliaria in base

⇒ forzo la sua uscita

$2x_1 - x_2 + 6x_3 = -2 \quad (\cdot 1)$

← devi avere i termini noti positivi! prima delle var surplus

20/03/2023 FILE: simplesso matriciale

* ANALISI MATRICIALE TABLEAU

(che è anche quello che fa Gurobi)

	x	
x_B	A	b
	c^t	0

TABLEAU INIZIALE

Sia dato un problema in forma standard

$$\min c^t x \qquad Ax = b \qquad x \geq 0$$

dove $A \in Mat(m \times n)$ con $r(A) = m$, $m < n$ → in forma standard contiene ANCHE le slack (derivate dal fatto che ho trasformato i vincoli in uguaglianze)

⇓

* scompongo A ⇒ $A \equiv (B \mid N)$
* scompongo i vettori x^t e c^t ⇒ $x^t \equiv [x_B^t ; x_N^t]$ ⇒ $c^t \equiv [c_B^t ; c_N^t]$

⇓

riformulo:

$$\min \; c_B^t x_B^t + c_N^t x_N^t$$

$$B x_B + N x_N = b$$

$$x_B, x_N \geq 0$$

	x_B	x_N	
x_B	B	N	b
	c_B^t	c_N^t	0

TABLEAU INIZIALE SCOMPOSTO

soluzione di base corrispondente

$$\begin{cases} x^t = (x_B^t, \underline{0}) \\ x_B = B^{-1} \cdot b \end{cases}$$

nel simpl. le var di base alla iterazione zero sono le slack

normalmente $x_N \to 0$ con ricavo le x_B dal sistema

da qui cerco di calcolare i CCR nella tavola

---

se partendo da A costruisco tutte le possibili mat $B(m \times m)$ trovo tutte le possibili basi

⇒ tutti i vertici!

posso usarle a scoprire il valore delle variabili associate alla base facendo

$$B^{-1} b \equiv x_B$$

NB. se ipotizzo x_N non nullo

* la soluzione diventa:

variabili in base esprese in funzione delle x_N

$$Bx_B + Nx_N = b \quad \Rightarrow \quad Bx_B = b - Nx_N$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

* la FO diventerà:

$$c^t_B x_B + c^t_N x_N =$$

$$c^t_B(B^{-1}b \boxed{- B^{-1}Nx_N) + c^t_N x_N} =$$

$$f(x) = c^t_B B^{-1} b + (c^t_N - c^t_B B^{-1} N) x^t_N \quad \text{con } x^t = (x_B, x_N)$$

↳ valore CCR per variabili fuori base

* e la FO varrà:

$$z_0 = c^t_B B^{-1} b \leftarrow \boxed{x_N \to 0}$$

$c^t_B | c^t_N - c^t_B B^{-1}(B|N)$
$\parallel$ ... $\parallel$
c^t

DEF: il vettore "$c^t - c^t_B B^{-1} A$" $= [c^t_B - c^t_B B^{-1} B][c^t_N - c^t_B B^{-1} N]$

$$= [\ 0^t\ ;\ r^t\ ]$$

si dice vettore dei COEFF. DI COSTO RIDOTTO associato alla base B.

"Δ valore/contributo a f.o di una var se la portassi in base"

* CONDIZIONE DI OTTIMALITÀ *

valore dei CCR fuori base

Sia B una base ammissibile. Se $r^t = \boxed{c^t_N - c^t_B B^{-1} N \geq 0^t}$

⇒ soluzione di base ammissibile associata alla base B è ottima passaggi per andare da una sol ad una adiacente

$\Rightarrow (0,0) \to x$ generica

↓

operazioni di pivoting!

E LA TAVOLA?

* la Tavola del simplesso ora avrà un aspetto diverso, ripercorro i passaggi algebrici per scoprire la forma matriciale dei CCR calcolati

procedimento:

1) • trasformo B in una mat I_m

$$\begin{array}{c|c:c|c} & x_B & x_N & \\ \hline x_B & B^{-1}B & B^{-1}N & B^{-1}b \\ \hline & c_B^t & c_N^t & \emptyset \end{array}$$

$\Rightarrow B^{-1} \cdot B = I_m$ premoltiplico A e b

2) • rendo $c_B^t = \underset{(pre)}{0^t}$

$\Rightarrow$ nel simplesso moltiplico la riga della variabile per il suo CCR e poi la sottraggo al resto della matrice + la riga CCR per poterla annullare

$$\begin{array}{c|c:c|c} & x_B & x_N & \\ \hline x_B & B^{-1}B & B^{-1}N & B^{-1}b \\ \hline & c_B^t & c_N^t & \emptyset \end{array}$$

$- \quad c_B^t \cdot (B^{-1}B) = \underline{0}$

• $c_B^t B^{-1} B$

$\Rightarrow c_B^t - c_B^t B^{-1} B = \underline{0}$

$$\begin{array}{c|c:c|c} & x_B & x_N & \\ \hline x_B & B^{-1}B & B^{-1}N & B^{-1}b \\ \hline & 0^t & c_N^t & \emptyset \end{array}$$

$- \quad c_B^t B^{-1} N = c_N^t - c_B^t B^{-1} N$

• $c_B^t B^{-1} N$

$\Rightarrow c_N^t - c_B^t B^{-1} N$

$$\begin{array}{c|c:c|c} & x_B & x_N & \\ \hline x_B & B^{-1}B & B^{-1}N & B^{-1}b \\ \hline & 0^t & c_N^t - c_B^t B^{-1} N & \emptyset \end{array}$$

$- c_B^t B^{-1} b = - c_B^t B^{-1} N$

• $c_B^t B^{-1} b$

$\Rightarrow 0 - c_B^t B^{-1} b$

$$\begin{array}{c|c:c|c} & x_B & x_N & \\ \hline x_B & B^{-1}B & B^{-1}N & B^{-1}B \\ \hline & 0^t & c_N^t - c_B^t B^{-1} N & - c_B^t B^{-1} N \end{array}$$

0^t → CCR variabili in base

$c_N^t - c_B^t B^{-1} N$ → CCR variabili fuori base

$- c_B^t B^{-1} N$ → valore funzione obiettivo in B

✓ riom

MATRICIALE non richiesto in esame, ma lo usa quindi

esempio pratico: c'è nelle slide

calcolo colonna x_1: $x_1 \in X_N$, allora faccio $B^{-1} \cdot N$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ +1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & +1 \end{bmatrix}$$

come calcolo B^{-1}? troppo costoso?

dove avevo le var di slack?

⇒ le metto in base

⇒ ottengo mat identità — solo x le soluz partenza enti

⇒ quando procedi

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

B^{-1} e moltiplichi per A

trovi che ho dentro una mat identità

quando rimoltiplichi dunque quello che avevo in corrispondenza delle slack!

nelle colonne delle slack leggo l'inversa di base

$$B^{-1} \cdot A = N$$

$$B^{-1} \cdot N = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

leggo dal tableau del problema iniziale quali x_i non sono in base

⇒ I DATI INVECE DAL PROBLEMA CORRENTE

* CCR: $c_N^t - c_B^t \cdot B^{-1} N$

leggo i valori dal tableau iniziale

c_B^t vettore riga $(1 \times m)$ coeff. delle var in base

$$c_B^t \cdot (B^{-1} b - B^{-1} N x_N) + c_N^t x_N$$

$$= c_B^t \{B^{-1} b\} - c_B^t B^{-1} N x_N$$

$(1 \times m)(m \times m)(m \times 1) = 1 \times 1$

$(m \times 1)(1 \times m)$

$c_B^t B^{-1} b$ forma matriciale!

abbiamo espresso il problema in funzione delle variabili che scambio.

$$= c_B^t B^{-1} b + (c_N^t - c_B^t B^{-1} \cdot N) \cdot x_N$$

→ non di base

• PRIMA MOLTIPLICO B^{-1}

moltiplico c_B^t e sottraggo sotto

	x_B	x_N	
x_B	$B^{-1} B$	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$
	c_B^t	c_N^t	0 ⊛

$B^{-1} b$ → valori var base

c_B^t → i valori di base devono andare a zero!

⊛ all'inizio c'è zero; poi

$0 \boxed{-} c_B^t B^{-1} b$ = F.O. CON SEGNO CAMBIATO

$$c_B^t - c_B^t B^{-1} B = 0$$

$c_N^t - c_B^t \cdot B^{-1} \cdot N$ variab fuori base

TROVO I CCR

* quesiti di teoria: "file quesiti 1"

15:50 Lun 20 mar ••• 46%

1 di 2

1. Sia dato un problema in forma standard con n variabili e m vincoli ($n > m$). Ipotizzando una soluzione di base che contenga q variabili di base a valore nullo quante sono le basi associate al vertice in esame?
2. Un algoritmo approssimato per un problema di ottimizzazione intera NP-hard fornisce un errore garantito dall'ottimo in tempi non polinomiali, è vero? Spiegare la risposta.
3. Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni riguardanti un problema di minimo è vera o falsa motivando la risposta alla luce della teoria:
   - Se nel tableau del simplesso in corrispondenza di una variabile non di base il coefficiente di costo ridotto è nullo vuol dire che la soluzione corrente è ottima.
   - l'introduzione di un nuovo vincolo nel tableau ottimo di un problema di programmazione lineare richiede sicuramente l'uso del simplesso duale.
4. Il teorema di dualità in forma forte della Programmazione Lineare si applica anche alla Programmazione Lineare Intera. Motivare la risposta.
5. Dato un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI), sia z_{PLI} il valore della soluzione ottima intera e z_{PL} quello del corrispondente problema di Programmazione Lineare continua (PL). Se $z_{LP} \geq z_{PLI}$ cosa posso dire sul problema?
6. Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni riguardanti un problema di minimo è vera o falsa motivando la risposta alla luce della teoria:
   - la variabile duale associata ad un vincolo di minore/uguale assumerà nel problema duale un valore non-negativo.
   - i coefficienti di costo ridotto della soluzione ottima sono tutti non-negativi.
7. Sia data una soluzione di base per un problema di Programmazione Lineare. La condizione $B^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ ne garantisce l'ottimalità?

① m vincoli ⇒ m slack

m−n = var di partenza

quante basi associate? al v degenere

q<m azzerate,

m−n fuori base + q azzerate

→ non totale var

m−n sono a zero ⇒ var di base

$\binom{n-m+q}{q}$ → totali → azzerate da cicloe

② no

③ INIZIO REGISTRAZIONE

~~a. no, significa che il vertice trovato è degenere~~

~~⇒ ho + basi associate ad una soluzione~~

~~posso scambiare variabile senza contributo!~~

⇒ CASO OTTIMO MULTIPLO! cambia variabile cambiando soluz ma la F.O non cambia ⇒ entrambi validi

se non sono all'ottimo, so solo che ∃ +1 vertice con quel certo valore di FO.

non mi da informazioni sull'ottimo

(4)

(5)

(6) è vero che CCR ≥ 0 per ottimo ma potrei avere dei CCR nulli

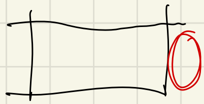
⇒ caso DEGENERE, scambio var con val negativo che appare solo x_k

senza neg

se deg: posso avere CCR negativo anche se sono all'OTTIMO

(7) $B^{-1}b \geq 0$ garantisce ottimalità?

⇒ garantisco l'ammissibilità, che la reg dei rapporti minimi funzioni e mi faccia scambiare variabili senza finire fuori regione ammissibile

⇒ nella fase succ:  saranno positivi, e OK

(11) (V)

(12) colonna tutta neg

⇒ se la scambio, tutte le var crescono all'infinito

• se non esiste un'altra colonna non tutta neg e con CCR<0

⇒ ∄ soluzione

⇒ GARANTISCE SOLO LA DIREZIONE DI APERTURA

(indicata appunto dalla variabile)

sign neg: tra var entrante ed uscente il segno È OPPOSTO

⇒ una cresce l'altra no, si compensano

PROBLEMA MAX o MIN è medesimo, se colonna full neg allora ho regione aperta

TH eq DICE SOLO VERTICE ≡ sol

non parla della sua unicità

non contrario

27/03/2023 - TEORIA CON MANSINI

concetto esistenza prob duali con soluzione medesima FO

* **DUALITÀ** la teoria della dualità si sviluppa dal caso CONTINUO della PL e afferma:
  * $\forall$ problema di PL $\exists$ sempre un suo problema duale, e questo è unico

NB: non esistono due problemi PL con lo stesso duale, a meno che questi coincidano

Tra primale e duale $\exists$ una forte associazione anche se P e D esistono su due insiemi diversi: P ha n variabili e m vincoli, mentre D ha m variabili e n vincoli.

$\Rightarrow$ se $\exists$ problemi duali allora posso trovare soluzioni associate in coppie ovvero:
alla soluzione ottima di P e D trovo il medesimo valore della FO
quindi se sono capace di risolvere uno dei due problemi risolto anche l'altro

problemi in forma canonica

* **FORMA CANONICA**

PRIMALE: $\min c^t x$ $(1\times n)$
$Ax \geq b$
$x \geq 0$

CCR del primale $(n\times 1)$

termini noti del primale $(m\times 1)$

in forma canonica sono due problemi completamente diversi $\Rightarrow$ quando portati in STANDARD sono completamente equivalenti (ottimo coincide!)

DUALE: $\max \lambda^t b$ $(1\times m)$
$\lambda^t A \leq c^t$
$\lambda \geq 0$

hanno la dim. delle variabili nel duale $(m\times 1)$ sono i CCR

vedi ragionamento con i binomiali

hanno la dimensione dei vincoli nel duale $(n\times 1)$ sono i termini noti

* **FORMA STANDARD + CONVERSIONE**

La conversione si basa su "variabile → vincolo" e "vincolo → variabile", si scambiano le dim dei vettori monodimensionali ma alla fine le soluzioni sono lo stesso numero:

P: n variabili
m vincoli

D: m variabili
n vincoli

STANDARDIZZO ↓

P: n+m variabili (slack: m)
m vincoli

D: m+n variabili (slack: n)
n vincoli

#soluz: P: $\binom{n+m}{m}$ D: $\binom{m+n}{n}$

$$\boxed{\frac{(n+m)!}{n!\,m!} = \frac{(m+n)!}{n!\,m!}}$$

* in forma standard P e D identificano gli STESSI VERTICI! questo significa che i due problemi sono complet. equivalenti

stesse soluzioni

attenzione che gli ottimi vanno cercati in uno $x \in \mathbb{R}^n$ nell'altro $\lambda \in \mathbb{R}^m$

RIASSUNTO IDEE:

problema di PL

↓

posso costruire il duale D

→ STANDARDIZZO:

P e D hanno per costruzione lo stesso numero di soluzioni

↓

a due a due ogni sol. P–D identifica lo STESSO VALORE della F.O. anche se su due vertici differenti

↓

solo la SOL. OTTIMA trova sia la stessa F.O. (ottimale) che lo stesso VERTICE per P e D

in forma canonica i problemi sono diversi ma standard sono completam equivalenti perché hanno gli stessi vertici

P: mat coeff A $(m \times n)$
vett termini noti b $(m \times 1)$
vett coeff FO c^t $(n \times 1)$

D: mat coeff A $(m \times n)$
vett termini noti c^t $(n \times 1)$
vett coeff FO b $(m \times 1)$

× REGOLE DI CONVERSIONE P→D

ti sono corrispondenti

PRIMALE (MIN)		DUALE (MAX)
$\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i$	$\longrightarrow$	$\lambda_i \geq 0$
$\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \leq b_i$	$\longrightarrow$	$\lambda_i \leq 0$
$\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i$	$\longrightarrow$	λ_i libera in segno
$x_j \geq 0$	$\longrightarrow$	$\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A}_j \leq c_j$
x_j libera in segno	$\longrightarrow$	$\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A}_j = c_j$

Se P è di min allora le variabili di D seguono il segno dei vincoli.
Le variabili invece dettano un'inversione sui vincoli di D.

NB: se fosse un primale di massimo ⇒ variabili di P mantengono il segno in D
vincoli di P pilotano l'inversione delle variabili di D

esempio:

$$\min \underbrace{10x_1 + 20x_2 + 30x_3}_{c^t}$$

3 variabili
⇓
3 vincoli

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 &\geq 1 \quad \to \lambda_1 \geq 0\\
x_2 + x_3 &\leq 2 \quad \to \lambda_2 \leq 0\\
x_1 - x_3 &= 3 \quad \to \lambda_3 \text{ libero}
\end{aligned}
$$

($b = 1, 2, 3$)

$x_1 \geq 0$ $\quad x_2 \leq 0$ $\quad x_3$ libero
vincolo $1 \leq c_1^t$ $\quad$ vincolo $2 \geq c_2^t$ $\quad$ vincolo $3 = c_3^t$

⇒

$\max \lambda^t b$: $\max \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3$

$$
A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}
$$

$\lambda_i^t A \leq c_i^t$:

$$
\begin{aligned}
2\lambda_1 + \lambda_3 &\geq 10\\
-\lambda_1 + \lambda_2 &\leq 20\\
\lambda_2 - \lambda_3 &= 3
\end{aligned}
$$

($c^t = 10, 20, 3$)

$\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \leq 0$, λ_3 libero

scrivi A
trascrivi b e c^t
poi scrivi la max FO: $\lambda^t b$
$\lambda_i^t A \leq c_i^t$

min → var_x = segno $vinc_x$
max $var_x \neq$ segno $vinc_x$

$c^t \to (1 \times n)$
$c \to (n \times 1)$

$\lambda^T_{(m\times 1)}{}^{(1\times m)^t} \cdot A(m \times n) \Rightarrow (1 \times n)$

traspongo per poter moltiplicare e commutare correttamente

se PRIMALE è di min:
i vincoli mantengono il segno

se PRIMALE è di max:
i vincoli pilotano l'inversione del segno

→ nel passaggio cambiano la FO
→ i vincoli cambiano predicato
→ c^t passa da vett coeff a vett termini noti
→ b da termini noti a coeff FO

TEOREMI x PASSAGGIO
il 1° è dimostrato
e lo saputo
dualità debole
(DIM saputo)
dualità forte
(DIM x ORALE)

x TEOREMI DUALITÀ pg 10/19

Proposizione 1

Il duale del problema duale coincide con il problema primale.

=> l'operazione di dualità rimane nei problemi P e D, non è possibile trovarne di diversi

x DIM: considero P ed il suo duale D. Conosco il passaggio $\min \xrightarrow{D} \max$. Immagino che il D sia un problema di max e prima di calcolarne ancora il duale lo trasformo in min:

se conosco duale min → max ma non max => faccio il passaggio trasformo max → min e calcolo il duale lì.

P di partenza
PRIMALE:

$$\min c^t x \quad Ax \geq b \quad x \geq 0$$

→ D trovato
DUALE:

$$\max \lambda^t b \quad \lambda^t A \geq c^t \quad \lambda \geq 0$$

STEP 1: trasformo => max → min

−D calcolato
−D:

$$\min -\lambda^t b \quad -A^t \lambda \leq -c \quad \lambda \geq 0$$

ribalto trasposte

STEP 2:
• calcolo il duale del duale sapendo che

$(-\lambda) = x$

inverto $-A^t\lambda \to x^t(-A^t)$ la pose traspongo

$c = b^t$

D' duale di −D

$$D': \max x^t(-c) \quad x^t(-A^t) \leq -b^t \quad x \geq 0$$

• ritrasformo il problema ottenuto da max a min ed ottengo P di partenza

$$-D': \min -(x^t(-c))^t \quad -(x^t(-A^t)) \leq -b^t)^t \quad x \geq 0 \to \boxed{\min c^t x \quad Ax \geq b \quad x \geq 0}$$

♣

torno alle var x
con −c termine noto → costi
$-b^t$ costi → termine noto
inverto trasposte
$(-A^t)$ è la mat vincoli

OSSERVAZIONI 13/19
se ho un vincolo di uguaglianza allora posso sostituire con:

$$\min c^t x \quad A\cancel{x=}b \quad x \geq 0$$

concordi, discordi

$$\max \lambda^t b \quad \lambda^t A \leq c^t \quad \lambda\ \boxed{\text{non vincolato}}$$

se $Ax=b$ vale sostituire con $\left[Ax \gtrless b\right]$

DIM ESEG

OSSERVAZIONI slide 13/19

all'ottimo coeff (costi di base, costi di non-base)

$x \geq 0$
inverto segni e trasposizione

$c_N^t - c_B^t B^{-1} N \geq 0$

quando ottengo e come?

$$c^t \begin{cases} c_B^t \\ c_N^t \end{cases}$$

$$c^t - c_B^t B^{-1}(A) \begin{cases} B - c_B^t B^{-1} B & \text{parte in base} = 0 \\ N - c_B^t B^{-1} N & \text{parte non base} \geq 0 \end{cases}$$

	x_B	x_N	
	I_m	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
	$c_B^t - c_B^t B^{-1} B$	$c_N^t - c_B^t B^{-1} N$	0

* OSSERVAZIONE IMPORTANTE:

Considero il problema in forma standard:
E immagino di essere arrivato all'ottimo.

CRITERIO DI OTTIMALITÀ DEL PRIMALE: $\boxed{c^t - (c_B^t B^{-1})A \geq 0}$

$c_B^t B^{-1}$ è incognito = la base ottima. Da dove viene questo criterio?

condiz completa su tutti i vettori CCR

all'ottimo i CCR sono:

$$c^t \begin{cases} c_B^t & -c_B^t B^{-1} B = 0 \\ c_N^t & -c_B^t B^{-1} N \geq 0 \end{cases}$$

nel tableau

CCR dei non-base

PONGO QUESTA CONDIZIONE

$$\overset{0}{\overset{\shortparallel}{c_B^t}} \;|\; c_N^t - \cancel{(c_B^t B^{-1}) B} - c_B^t B^{-1} N \Rightarrow c_N^t - c_B^t B^{-1} N \geq 0$$

perché sono i coeff costo ridotto delle var nbase
(anche se parto a ragionare da tutti i CCR)

=> osservazione:

sostituisco ponendo nella condizione di ottimalità:

$(m\times 1)(m\times n) \leq (n\times 1)$

$$\boxed{c_B^t B^{-1} \equiv \lambda^t}$$

$$c^t - (c_B^t B^{-1})A \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad c^t - \lambda^t A \geq 0$$

$$\boxed{\lambda^t A \leq c^t}$$

TROVO QUEST'ALTRA

ottengo esattamente i vincoli del duale
dunque λ^t risolve le disequazione
=> È AMMISSIBILE

IMPORTANTE

* B è la base ottima del primale
ma λ^t soddisfa i vincoli del duale quindi
* $\lambda^t \equiv c_B^t B^{-1}$ è soluzione ottima del duale

il criterio di ottimalità in P implica l'ammissibilità in D

OTTIMALITÀ

AMMISSIBILITÀ

ottima?
ma abbiamo parlato solo di ammissibilità...

=> dimostro questa corrispondenza

se $\exists$ l'ottimo, la sol ott di P coincide con quella di D

DIMOSTRO CHE GLI OTTIMI COINCIDONO

$\Rightarrow$ posso convincermi che se $c_B^t B^{-1}$ è l'ottimo di P allora lo è anche per D?

all'ottimo c è scomponibile:

$c^t x^* = c_B^t x_B^* + c^t x_N^* \sim 0$

P: min $c^t x$
$Ax \geq b$
$x \geq 0$

D: max $\lambda^t b$
$\lambda^t A \leq c^t$
$\lambda \geq 0$

$*$ i valori delle var x^*_B all'ottimo sono $B^{-1}b$

$c^t x^* = c_B^t(B^{-1}b) + \sim 0$

$*$ so anche che all'ottimo i valori delle FO coincidono quindi

riscrivo il valore delle variabili P e D il loro valore FO all'ottimo

$x^* \equiv \lambda^* \longrightarrow c^t x^* = \lambda^{*t} b$

$\Rightarrow$ scrivo il valore ottimo della FO di P in forma matriciale

$x \to x_B$

$x_B \to B^{-1}b$

$c_B^t(B^{-1}\cdot \cancel{b}) = \lambda^{*t}\cdot \cancel{b} \quad \Rightarrow \quad \lambda^{*t} = c_B^t B^{-1}$

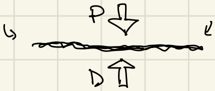
DIMOSTRATO

ho dimostrato $c_B^t B^{-1}$ base ottima di P e soluzione ottima di D

veramente non so da dove io abbia tirato fuori sta dimostrazione

prob di minimo che scende x cerca l'ottimo

P $\downarrow$ D $\uparrow$



all'ottimo coincidono (le FO) si schiacciano a vicenda sulla FRONTIERA DEI DUE MONDI

FO sono le stesse (in valore) anche se var $\lambda \neq$ var x

$*$ TH DUALITÀ - FORMA DEBOLE $\rightarrow$ usa solo condizioni di ammissibilità, non ottimalità

Enunciato

Siano $P = \{\mathbf{x} \geq 0 : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\} \neq \emptyset$ e $D = \{\boldsymbol{\lambda} \geq 0 : \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T\} \neq \emptyset$. Per ogni coppia di punti $\tilde{\mathbf{x}} \in P$ e $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \in D$ si ha che:

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T\mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T\tilde{\mathbf{x}}.$$

$\forall$ coppia di soluz P e D $\Rightarrow$

P limita superiorm. D

D limita inferiorm. P

DIM

Siano dati $\tilde{x} \in P$ e $\tilde{\lambda} \in D$. Vale sempre

1. $A\tilde{x} \geq b \qquad \tilde{x} \geq 0$ (ammiss. primale) FO: $c^t\tilde{x}$

$\Rightarrow$ 2. $\tilde{\lambda} \geq 0 \qquad c^t \geq \tilde{\lambda}^t A$ (ammiss. duale) FO: $\tilde{\lambda}^t b$

Da cui:

$$\tilde{\lambda}^t b \leq \tilde{\lambda}^t A\tilde{x} \leq c^t\tilde{x}$$

$$\Rightarrow \tilde{\lambda}^t b \leq c^t\tilde{x} \qquad \forall \tilde{\lambda}, \tilde{x} \quad ♣$$

Conseguenza: le funz obiettivo si limitano a vicenda

perché la funz D sale $\Rightarrow$ FO del D sta sotto a FO di P, ergo solo all'ottimo coincidono (P e D si limitano FO a vicenda)

* TH DUALITÀ - FORMA FORTE

Enunciato

(1)	se il primale ammette soluzione ottima finita	$\Longrightarrow$ $\tilde{c} \tilde{x} \in \mathbb{R}$	il duale ammette soluzione ottima finita e i valori delle due soluzioni coincidono $c^T x^* = \lambda^{*T} b$
(2)	se il primale è illimitato	$\Longrightarrow$	il duale non ammette soluzione (impossibile)
(3)	se il primale non ammette soluzione (impossibile)	$\Longrightarrow$	il duale è illimitato o impossibile

* RELAZIONE TRA SOLUZIONI PRIMALE-DUALE

1. ottimo finito $\Longleftrightarrow$ ottimo finito

2. illimitato $\Longrightarrow$ impossibile
   impossibile $\Longleftarrow$ illimitato

   - illimitato implica SEMPRE impossibile

3. impossibile $\Longrightarrow$ illimitato o impossibile
   illimitato o impossibile $\Longleftarrow$ impossibile

   - impossibile implica SEMPRE IMPOSSIBILE o ILLIMITATO

PRIMALE \ DUALE	ottimo finito	illimitato	impossibile
ottimo finito	1	NO①	NO
illimitato	NO②	NO*	3
impossibile	NO	3	2

NO: se uno dei due ha soluzione ⇒ ∃ almeno una sol amm ⇒ ∃ almeno una SAB ⇒ ∃ l'ottimo
[th fondam PL]

NO*: non possono essere illimitati entrambi perché piegano in due direzioni diverse e non rispetterebbe
$\tilde{\lambda}^T b \leq c^T \tilde{x}$

NO①: se P ha ottimo finito, questo è un UB per D

NO②: se D ha ottimo finito, questo è LB per P

29/03/2023 da qui ho perso 2 lezioni da recuperare

su Notion ho scritto: ese 1+2 dagli appunti
di cristina

22/03/2023 FILE: complementary slackness

✱ DUALITÀ: COMPLEMENTARY SLACKNESS

RECAP:
- ogni problema (primale) è associato al suo duale.
- i vertici di P e D sono associati tra loro a due a due
  - $\Rightarrow$ i problemi hanno entrambi $\binom{n}{m}$ vertici e quindi sono equivalenti
- l'ottimo di P ha valore medesimo dell'ottimo di D

COND. ORTOGONALITÀ: condizioni molto potenti che permettono dal punto di vista pratico consentono di ricavare la soluzione ottima di D dato quella di P (e viceversa)

$\Rightarrow$ queste cond. sono la partenza per lo sviluppo dei metodi primali/duali

Parto dalle condiz. di ottimalità

PRIMALE (canonica)

$$\min\{c^t x : Ax \geq b, x \geq 0\} \quad x \in \mathbb{R}^n, m \text{ vincoli}$$

DUALE

$$\max\{\lambda^t b : \lambda^t A \leq c^t, \lambda \geq 0\} \quad \lambda \in \mathbb{R}^m, n \text{ vincoli}$$

✱ dati $x^* \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda^{*t} \in \mathbb{R}^m$, questi sono ottimi per P e D SE E SOLO SE

1. $Ax^* \geq b \quad x^* \geq 0$ — ammissibilità P
2. $\lambda^{*t} A \leq c^t \quad \lambda^* \geq 0$ — ammissibilità D
3. $c^t x^* = \lambda^{*t} b$ — FO coincidenti (eguaglianza P e D)

NB. la condizione "$c^t x = \lambda^t b$" è SEMPRE verificata, per tutte le coppie di vertici associate tra P e D

$\Rightarrow$ tuttavia l'ottimo è l'unica soluzione per cui entrambi i vertici risultano anche AMMISSIBILI nei rispettivi problemi

① & ②
Dall'ammissibilità abbiamo il TH DUALITÀ DEBOLE

$$\lambda^{*t} b \leq \lambda^{*t} A x^* \leq c^t x^*$$

③
Mentre dall'ottimalità posso sostituire i "$\leq$" con "$=$"

ho ottenuto due espressioni distinte dalle cond ottim

$$\begin{cases} \lambda^{*t} b = \lambda^{*t} A x^* \\ c^t x^* = \lambda^{*t} A x^* \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda^{*t}(Ax-b) \overset{!}{=} 0 \\ (c \lambda^t A - c^t)\, x^* \overset{!}{=} 0 \end{cases}$$

ortogonalità

ortogonalità

$(1 \times m)\ (1 \times n)$

$\lambda^{*t} \cdot (x_s \in \mathbb{R}^n) = 0$

queste equazioni rappresentano il prodotto interno tra

$(\lambda_s \in \mathbb{R}^m) \cdot x^* = 0$

$(1 \times m)\ \ (1 \times n)$

MA COSA È $AX-B$?

io so che di solito $Ax \geq b$

quindi la loro differenza è il valore delle variabili di slack

$\Rightarrow$ se il prodotto interno (scalare) tra due vettori risulta nullo, allora quei vettori sono ORTOGONALI

(questo vale all'ottimo)

$\lambda^{*t}(Ax^* - b) = 0$

è raccolto con perche nel primale

$x^* \geq 0$ e $Ax^* \geq b$

quindi $Ax^* - b \geq 0$

slack sono variabili positive! $x_s \geq 0$ OK

$(c^t - \lambda^{*t} A)\, x^* = 0$

è raccolto con perche nel duale

$\lambda^{*t} \geq 0$ e $\lambda^{t*} A \leq c^t$

quindi $c^t - \lambda^{*t} A \geq 0$

$\lambda_s \geq 0$ OK

SIGNIFICATO
* ORTOGONALITÀ:

Se mi trovo in un punto della regione dove ∃ una variabile di slack con valore positivo (cioè $\neq 0$)

$(c^t - \lambda^{*t} A) x^* = 0$

$>0 \quad = 0$

impone

$\Rightarrow \quad \lambda^{*t}_i (A x^*_i - b) = 0$

$= 0 \quad > 0$

impone

significa che la corrispettiva variabile duale λ^*_i sarà NULLA, per garantire l'annullamento del prodotto

in realtà è più complicato di un prodotto normale (i valori dei singoli componenti sono particolari) vediamolo

Scrivo per esteso la condizione di ortogonalità sapendo che
- $\lambda^*_i \geq 0$
- $a^t_i x^* - b_i \geq 0$

$\forall i = 1 \dots m$

(1) $\lambda^{*t} \cdot (A x^* - b) = \sum_i^m \lambda^*_i (a^t_i x^* - b_i) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda^*_1 (a^t_1 x^* - b_1) = 0 \\ \dots \\ \lambda^*_m (a^t_m x^* - b_m) = 0 \end{cases}$

riga

m condizioni

n condizioni

Idem per l'altra

colonna

(2) $(c^t - \lambda^{*t} A) x^* = \sum_j^n (c_j - \lambda^{*t} A_j) x^*_j = 0 \Rightarrow \begin{cases} (c_1 - \lambda^* A_1) x^*_1 = 0 \\ \dots \\ (c_n - \lambda^* A_n) x^*_n = 0 \end{cases}$

DEF: queste condizioni sono dette di ORTOGONALITÀ o COMPLEMENTARY SLACKNESS

↓

ho in totale $(n+m)$ condizioni di ortogonalità

$$\lambda^{*t} \cdot (A x^* - b) = \sum_i^m \lambda^*_i (a^t_i x^* - b_i) = 0$$

$\geq 0 \quad \geq 0$ (sopra); $\geq 0 \quad \geq 0$ (sotto)

o la slack, o la variabile duale sarà NECESSARIAMENTE nulla

essendo le sommatorie composte da soli termini positivi o nulli, l'unico modo per ottenere una somma nulla è che TUTTI I TERMINI SIANO ZERO

$\Rightarrow$ pongo tutti gli m termini a Θ (e anche gli altri n)

se $\lambda_i \neq 0$
$\Rightarrow x_s = 0$
e viceversa

Interpretazione:

- la variabile duale λ_i^* corrispondente ad un vincolo primale del tipo $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* > b_i$ deve essere nulla;
- se $x_j > 0$ allora il corrispondente valore di $(c_j - \boldsymbol{\lambda}^{*T}A_j)$ è zero.

che è tutto il ragionamento formulato prima

* TH DI COMPLEMENTARY SLACKNESS

$\mathbf{x}^*$ e $\boldsymbol{\lambda}^*$ sono soluzioni ottimali del primale e del duale se e solo se:

$$(c_j - \boldsymbol{\lambda}^{*T}A_j)x_j^* = 0 \qquad \forall j = 1, \cdots, n$$

$$\lambda_i^*(\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* - b_i) = 0 \qquad \forall i = 1, \cdots, m$$

SE RISOLVO CON IL METODO GRAFICO

Sostituisco la soluzione ottima $y_1^* = 4/5$ e $y_2^* = 3/5$ nei vincoli:

- se il vincolo è soddisfatto come uguaglianza ⇒ variabile di slack=0.
- se il vincolo rimane di disuguaglianza ⇒ la differenza corrisponde al valore della variabile di slack.

$$\begin{array}{rcl}
4/5 + 2 \cdot 3/5 = 2 & \Longrightarrow & y^*_{(2+1)} = 0 \\
4/5 - 2 \cdot 3/5 = -2/5 < 3 & \Longrightarrow & y^*_{(2+2)} = 17/5 \\
2 \cdot 4/5 + 3 \cdot 3/5 = 17/5 < 5 & \Longrightarrow & y^*_{(2+3)} = 8/5 \\
4/5 + 3/5 = 7/5 < 2 & \Longrightarrow & y^*_{(2+4)} = 3/5 \\
3 \cdot 4/5 + 3/5 = 3 & \Longrightarrow & y^*_{(2+5)} = 0
\end{array}$$

E la soluzione di base ottima del primale?

Per ricavarla si usano le condizioni di ortogonalità di complementary slackness.

1.

$$y_i^* \cdot x^*_{(n+i)} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rcl}
y_1^* \cdot x^*_{(5+1)} & = & 0 \quad (y_1^* \neq 0 \quad 4/5) \Longrightarrow x_6^* = 0 \\
y_2^* \cdot x^*_{(5+2)} & = & 0 \quad (y_2^* \neq 0 \quad 3/5) \Longrightarrow x_7^* = 0
\end{array}$$

Poiché le 2 variabili di slack del primale sono nulle ($x_6^* = x_7^* = 0$) allora i vincoli del primale sono soddisfatti come uguaglianze.

2.

$$x_j^* \cdot y^*_{(m+j)} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rcl}
x_1^* \cdot y^*_{(2+1)} & = & 0 \quad (y^*_{(2+1)} = 0) \Longrightarrow x_1^* = ? \\
x_2^* \cdot y^*_{(2+2)} & = & 0 \quad (y^*_{(2+2)} \neq 0 \quad 17/5) \Longrightarrow x_2^* = 0 \\
x_3^* \cdot y^*_{(2+3)} & = & 0 \quad (y^*_{(2+3)} \neq 0 \quad 8/5) \Longrightarrow x_3^* = 0 \\
x_4^* \cdot y^*_{(2+4)} & = & 0 \quad (y^*_{(2+4)} \neq 0 \quad 3/5) \Longrightarrow x_4^* = 0 \\
x_5^* \cdot y^*_{(2+5)} & = & 0 \quad (y^*_{(2+5)} = 0) \Longrightarrow x_5^* = ?
\end{array}$$

altra nota:

P multiplo → D degenere

I valori di x_1^* e x_5^* li ricavo dai vincoli:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + x_5 = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1^* = 1 \\ x_5^* = 1 \end{cases}$$

Soluzione di base ottima del primale:

$x_1^* = 1, x_2^* = 0, x_3^* = 0, x_4^* = 0, x_5^* = 1, x_6^* = 0, x_7^* = 0.$

17/04/2023 (appunti recuperati) FILE: interpretazione duale e prezzi ombra

Partiamo con un esempio vedi slide ...

• INTERPRETAZIONE ECONOMICA

* ottimo del problema

	valore risultato	CCR
x_1: A	60	0.0
x_2: B	40	0.0
	slack	**shadow price**
x_3 (λ_1):	0	2.5
x_4 (λ_2):	60	0
x_5 (λ_3):	0	10

un aumento del b_1 (termine noto del vincolo relativo a x_3) produrrebbe un aumento di 2.5 * unità nella FO

ho delle rimanenze per la risorsa x_4: non avrebbe senso procurarmi più disponibilità! il contributo è nullo

CCR$_i$ di λ_i

contributo x aumento della risorsa vincolata da (x_{n+i}) slack

DEF PREZZI OMBRA:

in termini economici

La soluzione ottima del duale λ^* prende il nome di vettore dei **prezzi ombra**. Ogni sua componente mi dice quanto sono disposto a pagare per avere una unità in più della corrispondente risorsa del primale.

termini di pagamento

perché se ad esempio aumentassi la manodopera mi frutta +10, io idealmente posso spendere fino a 10 per avere questo aumento della risorsa!

dal POV economico, il duale e primale sono due problemi risolti da due agenti diversi ed in competizione, su due mercati differenti

=>

- INTERPRETAZIONE ALGEBRICA

* i CCR del duale (SHADOW PRICES) indicano il contributo in termini di funzione obiettivo, per ogni unità di cui viene aumentata la disponibilità della risorsa vincolata dalla relativa variabile di slack (P)

* se facessi la derivata della FUNZIONE OBIETTIVO (z) primale rispetto un qualsiasi termine noto b_i otterrei il valore della corrispettiva variabile ottima del duale (λ_i)

$$\frac{\partial z}{\partial b_i} = \lambda_i^* \quad \forall i = 1 \dots m$$

* come dimostro che una variazione Δb_i dei termini noti (dei vincoli del PRIMALE) incide a livello della funzione obiettivo?

$$\max \; c^t x$$
$$Ax \le b$$
$$x \ge 0$$

$\downarrow$

* ottimo $z = c^t x$

$$\Rightarrow \frac{\partial c^t x}{\partial b_i} = \lambda_i ?$$

- inizio il calcolo dicendo: all'ottimo $c^t x = \lambda^t b$

$\Rightarrow \lambda^t b_i$ altri non è se non $\sum_i^m b_i \lambda_i$

$$\Rightarrow \frac{\partial \left(\sum_i b_i \lambda_i\right)}{\partial b_i} = \lambda_i$$

* cosa succede quindi a fronte di una variazione Δb

$$z + \Delta z = \underset{\uparrow}{c^t x^*}\ldots + \Delta c^t x^* = c_B^t B^{-1} b + \underbrace{c_B^t B^{-1}}_{= \lambda^t} \Delta b$$

(con $c^t x^* = c_B^t B^{-1} b$)

$$= c_B^t B^{-1}(b + \Delta b) =$$

$$= \underbrace{c_B^t B^{-1} b}_{\text{FO ATTUALE}} + \underbrace{\lambda^{*t} \Delta b}_{\text{OTTIMO DUALE} \cdot \text{VARIAZ. } \Delta b}$$

es. se $\Delta b = \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow z + \Delta z = c_B^t B^{-1} b + \lambda^{*t} \Delta b$

$$= z + \lambda_1^* \Delta b_1$$

Soluzione ottima: 2600.0

Prodotto	Valore	Costo Ridotto
A	60.0	0.0
B	40.0	0.0

Stadio	Slack	Prezzo Ombra
assemblaggio	0.0	2.5
finitura	60.0	0.0
controllo	0.0	10.0

[I valori dei prezzi ombra rimangono tali fintanto che la soluzione ottima non varia.]

↓

quindi aumentare b_1 e b_3 non è vantaggioso all'infinito!

∃ una certa soglia

traslare vincolo => aumentare o ridurre una risorsa disp

POV GEOMETRICO: modificare il termine noto di un vincolo significa traslarlo (in gradiente o antigradiente), ma FO rimane fermo! fino a un certo punto

=> inevitabilmente ci sarà un momento in cui il vertice ottimo cambia! mi convinco che b influenza lo z^* perché $c^T x = \lambda^T b$

stesso ragionamento si può fare con il duale

* effettivo guadagno rappresentato dai prezzi d'ombra è limitato ad un intervallo limitato $(b-\Delta b, b+\Delta b)$ *

cambia vertice

⇓

cambiano i prezzi ombra ed il loro intervallo di validità

19/04/2023

* ANALISI DI SENSITIVITÀ

REMINDER:

concetto di prezzi ombra ≡ soluz ottima del problema duale, misurano il contributo dato alla FO a fronte di Δb variazione dei termini noti

⇒ quanto posso far variare b senza che il contributo dei λ^* non cambi?

⇒ di sicuro finchè che non cambia la soluzione di base

(perché $c^T x = \lambda^{*T} b = c_B^T B^{-1} \cdot b$)

quindi finché rimango sullo stesso VERTICE

i parametri che potrebbero variare sono c^T e b

(A pure ma non lo trattiamo)

* ANALIZZIAMO VARIAZIONI DEI PARAMETRI b CHE MANTENGANO INALTERATA LA SOLUZIONE DI BASE OTTIMALE *

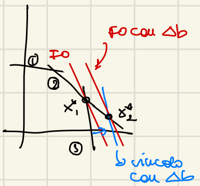
↓

STABILITÀ, ROBUSTEZZA RISPETTO ALLE PERTURBAZIONI DEI DATI

intervalli più grandi ⇒ significa soluzione più robusta

Partiamo con un problema di PL già risolto.

NB. FO rimane inalterata non in termini di variabili, ma in termini di variabili x_B ed x_N (≡ quali vincoli tracciano l'intersezione ottimale)



entrambi sono trovati da ② ∩ ③

Definisco, dato un problema, le condizioni necessarie e sufficienti perché B rimanga la base ottima:

$$b \to b + \Delta b \qquad c_B^T \to c_B^T + \Delta c_B^T \qquad c_N^T \to c_N^T + \Delta c_N^T$$

NOTA: varia sempre un solo b_i alla volta

interesse di calcolo di questi intervalli:

- a volte i parametri dipendono dal tempo o altro esterno ⇒ uso stime di valori che sono corrette in intervalli di valori
- se i parametri non variano potrei comunque cercare entro quali limiti può essere sensato aumentare la (es:) cap produttiva, capire quanto al max mi conviene spendere per potenziare la produz ⇒

Per il teorema sulle condizioni di ottimalità

x^* è sol base ottima se $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tale che:

1. da $Ax \geq b$

1. $x_B^* = B^{-1}b \geq 0$ (x^* è amm. per il primale)

2. da $\lambda^t A \leq c^t$

2. $r^t := c^t - c_B^t B^{-1} A \geq 0$ (λ^* è amm. per il duale)

CCR per x_N

3. $\lambda^{*t} = c_B^t B^{-1}$ (ortogonalità)

posso ricondurre l'ortogonalità alla amm. del duale

=> riconduco l'analisi di sensitività allo studio delle variazioni dei dati iniziali per cui (1) e (2) rimangono verificate

$*$ VARIAZIONE DEI TERMINI NOTI ($b+\Delta b$)

Sia $\min c^t x$ dove b è il vettore termini noti e Δb è la sua variazione che cerchiamo

$Ax \geq b$

$x \geq 0$

=> condizioni per l'ottimalità di B diventano

1. $B^{-1}(b+\Delta b) \geq 0$ ($x^* \geq 0$)
2. $c^t - c_B^t B^{-1} A \geq 0$ (invariata)

=> quando vario un termine noto, la base rimane ottima se e solo se

$$B^{-1} b \geq -B^{-1}\Delta b$$

m disuguaglianze

m incognite $\Delta b_i \quad i=1 \ldots m$

$\Downarrow$

$P \subseteq \mathbb{R}^m$ con vettori Δb per cui B non cambia

NB. variazioni di b influenzano $\Rightarrow$ coordinate di x^*_B

$\downarrow$

valore ottimo $f(x^*) = z^*$

$$c^t_B B^{-1} b \rightarrow \underbrace{c^t_B B^{-1}}_{\lambda^*} (b + \Delta b)$$

$$\Delta z := (c^t_B B^{-1}) \Delta b =$$
$$= \lambda^{*t} \Delta b =$$
$$= \sum_{i}^{m} \lambda^*_i \Delta b_i$$

$\lambda^*_i \downarrow$ prezzi ombra

* le informazioni che cerco per l'analisi di sensitività sono:

dal tableau ottimale	x_B	x_N	B	B^{-1}	$B^{-1}b$
	c^t_B	c^t_N	$c^t_B B^{-1}$		

dal tableau iniziale

$c^t_B B^{-1} \downarrow$ prezzi ombra λ^* ccr (slack) x

$\Rightarrow$ calcolo con: $B^{-1} \Delta b \geq -\underline{B^{-1} b}$

$\downarrow$ var di base nella sol ottima

INIZIO:

$c^t_N - c^t_B B^{-1} N \geq 0$

$-\lambda^{*t} \geq 0$

$$\begin{cases} B^{-1} \Delta b_i \geq -B^{-1} b_i \\ \dots \\ B^{-1} \Delta b_m \geq - \end{cases}$$

calcolo Δb_1 ponendo tutti $\Delta b_i = 0$

NB. $\Delta b = \emptyset$ è una soluzione ammissibile

* VARIAZIONE DEI COSTI DELLE VAR. FUORI BASE

Sia $\min \; c^t x$
$Ax \geq b$
$x \geq 0$

con Δc_N^t il vettore variazione di c_N^t
e definisco:
$\bar{r}^t :=$ CCR prima Δc_N^t
$\tilde{r}^t :=$ CCR post Δc_N^t

$\Rightarrow$ condizioni di ottimalità per B diventano:

1. $B^{-1} b \geq 0$ (invariato)

2. $\tilde{r}^t = [0^t ; (c_N^t + \Delta c_N^t) - c_B^t B^{-1} N] \geq 0^t$ (CCR fuori base)

$\Rightarrow$ quando vario un CCR di x_N, la base rimane ottima se e solo se

$$\tilde{r}_N^t = c_N^t - c_B^t B^{-1} N + \Delta c_N^t = \bar{r}_N^t + \Delta c_N^t \geq 0$$

$$\Rightarrow \Delta c_N^t \geq -\bar{r}_N^t$$

ottengo n-m disuguaglianze, indipendenti
$\Delta c_j \geq -\bar{r}_j$
per ogni variabile $j \in \mathcal{I}_N$

NB_ $\bar{r}_j \geq 0$ è il massimo decremento del costo c_j per cui la base B rimane ottima

$\Rightarrow$ oltre $\bar{r}_j$ otterrei $\tilde{r}_j < 0$ quindi B non sarebbe più ottima ($\exists$ variabili convenienti da pivotare)
unica eccezione: soluz degenere

24/04/2023 FILE: simplesso duale

DEF: chiamo **ALGORITMO DUALE** un qualsiasi algoritmo che iteri a partire da una soluzione ammissibile per il Duale puntando alla condizione di ammissibilità del Primale ($\equiv$ che è l'ottimalità di D)

$*$ SITUAZIONE IN CUI SI USA:

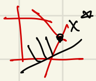
Ho già risolto un problema Primale, ho determinato x^* e ci vengono imposti dei nuovi vincoli $\alpha^T x \leq \alpha_0$

Prima cosa porto in forma standard e aggiungo la slack:

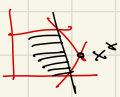
$$a^t x + x_{n+1} = \alpha_0$$

Possono succedere delle cose

x^* rimane ammissibile?



Se $\boxed{\text{Sì}}$ allora x^* rimane anche ottimo. Perché soddisfa tutti i vincoli precedenti ottimalmente + quello nuovo.
(E se portano ad una soluzione di sol ottima multipla?) me ne accorgerei da $x_{n+1} = 0$



Se $\boxed{\text{no}}$ la variabile $x_{n+1} < 0$ => quindi mi accorgo che la soluzione precedente viola il nuovo vincolo.
Devo ri-ottimizzare.
Secondo la teoria della dualità, il vertice corrispettivo di x^* nel Duale sarà ammissibile e quindi posso passare ad iterare il simplesso da lì. (fino all'ammissibilità (e ottimalità) di P)

x^* rimane ottimo?

Se $\boxed{\text{SI}}$, ho già finito.

Se $\boxed{\text{NO}}$, ricomincio a iterare il simplesso primale.

$\boxed{\text{NB}}$

Simplesso primale vs. Simplesso duale

Simplesso primale:

all'ottimo P

1. Inizia con una base B **ammissibile per il primale**: $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
2. Operazioni di pivoting che mantengono l'ammissibilità per il problema primale.
3. Termine: base B ammissibile anche per il duale.
   $\mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T B^{-1} A \geq \mathbf{0}$ (coefficienti di costo ridotto ≥ 0).
   all'ottimo P

Simplesso duale:

dall'ottimo vecchio di P

1. Inizia con una base B **ammissibile per il duale** $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T B^{-1}$ tale che: $\boldsymbol{\lambda}^T A \leq \mathbf{c}^T$.
2. Le operazioni di pivoting mantengono l'ammissibilità per il problema duale (D-ammissibilità).
3. Termine: base B ammissibile anche per il primale. $B^{-1}b \geq 0$ all'ottimo di D

se P di min, il simp duale fa aumentare la FO

Osservazione: nel simplesso duale scelgo il pivot in modo da
→ ottenere l'amiss. primale
→ mantenere l'amiss. duale

tecniche di modellizz A | 03/05/2023

PLI

* STRATEGIE MODELLIZZAZIONE PLMI

Nella PL una buona formulazione prevede poche variabili e vincoli. La complessità è comunque m ed n, per questo buona può essere la formulazione.

Nella PLI una buona formulazione corrisponde ad un rilassato stringente ed è CRUCIALE perché potrebbe ridurre la difficoltà del problema ~~ed il tempo.~~

caso più semplice di PLI

SCELTA BINARIA

Il loro impiego più importante è modellizzare (codificare) la scelta tra due alternative.
Ad esempio ipotizzo un insieme di item con un certo valore e peso: solitamente questi problemi hanno vincoli di ricerca di un sottoinsieme con un valore max e che rispetti un peso limite

* PROBLEMI DI KNAPSACK (NP-hard)

Idea: zaino con una capienza massima e un riempito di oggetti

insieme di oggetti

$N = \{1 \dots n\}$ item — v_i valore, p_i peso

$x_j \in \{0,1\} \ \forall j \in N$

capienza zaino: c ← unica risorsa limite

obiettivo

cerco sottoinsieme ottimale $S \subseteq N$ che rispetti la capienza e massimizzi il valore degli oggetti

il modello di questo tipo di problema sarà:

FO: $\max \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot x_j$

VINCOLO: $\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot x_j \le c$

soluzione in uscita: vettore di 0 e 1

$x = (0, 1 \dots 0)_n$ per la selezione di n oggetti

Knapsack:
- proprietà combinatorie
- sottoprob. in grandi di ottimizzazione discreta

es: budgeting, caricamento mezzi cutting stock, aste combinatorie

Quante combinaz possibili?

2^n → n item, 2 scelta binaria

foglie all'albero delle combinazioni

⇒ la numerosità esplode velocem.

esempio: le aste

- ho n offerte tipo "offro x € per tot oggetti"
- ho un max di oggetti : 20 bottiglie
- devo max il profitto

$$\max \sum_j v_j x_j$$

$$\sum_j p_j x_j \leq 20$$

$$\forall p_j : p_j \leq 20$$

serve anche $\sum_j p_j > C$
altrimenti scelgo tutte le offerte

soluzione "buona" per i tempi che impiega

- SOLUZIONE EURISTICA (NON-OTTIMA)
  scelgo il rapporto prezzo/unità migliore

- SOLUZIONE OTTIMA
  cerco tutte le 2^n soluzioni e confronto
  ⇒ DISPENDIOSA

OSSERV: lavoro con quantità intere

- IDEA: scelgo un ordinamento per gli item tra cui scegliere e lo impongo a priori
  ⇒ inizio ad inserire secondo l'ordine e mi fermo una volta che arrivo a capacità massima (se ho oggetti che non ci stanno skippo)
  ⇒ SOLUZIONI GREEDY, non ottimali (algoritmi miopi)

$O(n \cdot \log n)$

hanno un worst case terribile

CRITERI DI ORDINAMENTO:

Si possono costruire esempi ad-hoc per dimostrare che la soluz euristica DIVERGE da quella ottimale.

Elenco i criteri e dimostro:

A. valore: $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_n$

Assumo l'istanza $c = 100$ con $n = 101$ item

$v_1 = 10$ $\quad v_2 = 9 \dots v_n = 9$

$p_1 = 100$ $\quad p_2 = 1 \dots p_n = 1$

- EURISTICA: inserisco l'item 1 con valore 10 ma che riempie completamente
- OTTIMA: prendo i 100 item con peso unitario $\Rightarrow$ valore totale sarà 900

errore algoritmo A

$\frac{z_A}{z^*} = \frac{10}{900} = \frac{1}{9}$

errore % $\to \infty$ con $c \to \infty$

* però una differenza tra 10 e 100 non è drammatica...

facciò tendere $c \to \infty$ così ci stanno più item unitari

$\Rightarrow$ valore sol ottima $\to \infty$ DIVERGE sempre più da 10

B. costo: $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$

ESERCIZIO: CASO PEGGIORE

istanza opposta: $c = 100$

$v_1 = 1 \dots v_k = 1$ $\quad \boxed{v_{k+1} = 100}$

$p_1 = 1$ $\quad p_k = 1$ $\quad p_{k+1} = 10$

- EURISTICA: prendo 100 oggetti dal peso unitario

$z_B = 1 \cdot 100 = 100$ $\quad \frac{c}{p_i}$

- OTTIMA: seleziono 10 oggetti con valore 100

$z^* = 10 \cdot 100 = 1000$ $\quad \frac{c}{p_i}$

$\frac{z_B}{z^*} = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$

~~con $c \to \infty$~~

~~oppure~~ $v_{k+1} \to \infty$

l'errore esplode

C. rapporto valore/peso: $\frac{v_1}{p_1} \geq \frac{v_2}{p_2} \geq \dots \geq \frac{v_n}{p_n}$

Assumo un'istanza: n oggetti e capacità $C = kn$ con $k > 0 \in \mathbb{Z}$

- 1 oggetto: $p_{max} = C$ $\quad v_{max} = C - 1$ $\rightarrow \frac{v_{max}}{p_{max}} < 1$
- $n-1$ oggetti: $p_j = 1$ $\quad v_j = 1$ $\rightarrow \frac{v_j}{p_j} = 1$

- EURISTICA: seleziona $n-1$ oggetti con valore e peso unitario

$$z_c = (n-1) \cdot 1 = n-1$$

- OTTIMA: seleziona un solo oggetto

$$z^* = \underset{V-1}{\underset{\|}{v_{max}}} = C - 1 = kn - 1$$

STIMA DELL'ERRORE:

$z^* = kn - 1$

$z_c = n - 1$

$$\frac{z^*}{z_c} = \frac{kn-1}{n-1} = \frac{k(n-1)+k-1}{n-1} = k + \frac{k-1}{n-1} > k$$

$\Rightarrow$ con $k \rightarrow \infty$ $\quad z^*$ è infinitamente più grande di z_c

OSSERVAZIONE: se prendo come soluzione il max tra la soluzione trovata dall'alg. greedy C ed il profitto dell'item a valore max quindi:

$\max\{z_c, v_{max}\}$ ottengo un algoritmo H tale che

garantisce un errore minimo $\quad \frac{z_H}{z^*} \geq \frac{1}{2}$

$$z_{greedy} = \max\{z_c, p_{max}\}$$

* COME FUNZIONA GUROBI CON KNAPSACK?

Essendo un problema di PLI devo fare il passaggio PLI → PL e passare da var binarie $\in \{0;1\}$ => var continue $\in [0;1]$

applico il rilassamento continuo
↓
questo fa un calcolo a formula chiusa, mi fornisce un upper bound

- avendo n variabili pongo n vincoli: $0 \leqslant x \leqslant 1$
- più il vincolo dello zaino: $\sum_j p_j x_j \leqslant c$

1. gurobi ordina secondo l'algoritmo C: $\frac{v_j}{p_j} \geqslant \frac{v_{j+1}}{p_{j+1}}$

2. analizzo in ordine decrescente e seleziono: partendo dal rapporto migliore, inserisce oggetti finché incontra l'ultimo item S che non ci sta, è l'item critico

$1 \ldots\ldots S \ldots\ldots n$

$x_j = 1 \quad \forall j = 1 \ldots s-1$ $\qquad$ $x_j = 0 \quad \forall j = s+1 \ldots n$

3. la soluzione ottima prende una parte frazionaria di S critico per riempire

ottimo del rilass. continuo

$$x_s = \left(c - \sum_{1}^{s-1} p_j \right)$$

soluzione a numeri tutti interi fino ad S-1

p?
controlla che cazzo ho scritto

NB. se S riempie perfettamente lo zaino senza bisogno di parti frazionarie => il rilass. continuo è già la sol. OTTIMA INTERA.

SELEZIONE DA UN INSIEME

Dato un insieme di variabili binarie x_j associate ognuna ad un item j di un insieme T di dimensione finita, posso imporre:

$\sum_{j\in T} x_j \geq 1$ "scelgo almeno un item"

$\sum_{j\in T} x_j = 1$ "scelgo esattam. un item"

$\sum_{j\in T} x_j \leq 1$ "scelgo al massimo un item"

PROBLEMA DI SET COVERING (NP)

Esempio applicativo: minimizzare le stazioni da aprire per garantire la copertura del territorio

Dati:

$T = \{t_1, t_2 \dots t_n\}$ territorio diviso in regioni t_i

$F = \{F_1, F_2 \dots F_n : F_j \subseteq T\}$ stazioni

$F_j \subseteq T$ = stazione j vista come INSIEME di regioni

$\Rightarrow$ cerco $S \subseteq \{\text{impianti}\}$, una collezione di sottoinsiemi di regione

SOLUZIONE: S è $\bigcup_{j\in S} F_j = T$ (copertura totale)

∃ regioni che possono essere coperte da + stazioni, importante: ALMENO UNO!!

* COSTRUISCO UN MODELLO:

righe → regioni

colonne → impianti

matrice:

$$\begin{array}{c|cccc} & F_1 & \dots & & F_n \\ \hline t_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & & & \\ t_n & 1 & & & \end{array}$$

$a_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ "F_i copre o no t_j?"

variabili decisionali:

x_i, $i = 1 \dots n$ $\begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ attivazione dell'impianto j

FO? il set covering vuole una copertura ALMENO TOTALE

$$\min\ c^t x = \sum_i c_{ij} x_j \quad \text{con } x_j \in \{0,1\},\ j \in N$$

"pesi" degli impianti

vincoli

- tutti quanti le regioni: $Ax \geq 1$ vettore

$\Rightarrow$ ma cosa rappresenta il prodotto Ax?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & \dots & 0 \\ F_i & & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

prendendo un vincolo alla volta trovo gli impianti necessari ad aprire ogni singola regione

$\sum_i x_k$ tale che x_k sono tutti gli impianti per una certa regione

$\sum_i x_k \geq 1$

così sono sicuro di coprire tutto

SET COVERING: MATRICIALE

$$\min\ 1^t x$$

$$Ax \geq 1$$

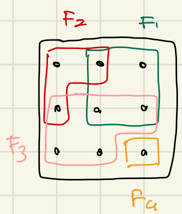
$$x \in \{0,1\}^n$$

$\Rightarrow$ il rilassamento continuo calcola un lower bound mentre possiamo considerare upper bound la prima soluzione ammissibile:

→ apro tutti gli impianti

soluzione banale, prob NP easy

$$\bigcup_{j \in N} F_j = T$$

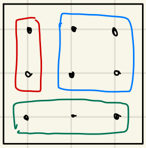


← esempio di soluz ammissibile

relax → lower bound

sol. iniziale → UP una difficile!

* SET PARTITIONING "non puoi sovrapporre gli impianti"



es. selezione ammissibile

$\min \ 1^t \underline{x}$

$A\underline{x} = 1$ → ogni regione ha esattamente una stazione

$x \in \{0,1\}$

* NB: $\cup F_j = T$ ma con $F_j \cap F_i = \emptyset$ ← ∀ coppia di staz = insieme di regioni, non si devono intersecare

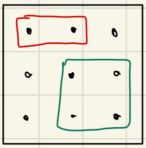
$(A\underline{x} = 1)$

questa condizione forte rende il problema difficile

relax → upper bound

sol iniziale → LB una è facile

* SET PACKING "al massimo copro una volta sola"



selezione ammissibile

$\max \ 1^t x$

$Ax \leq 1$

$x \in \{0,1\}$

* NB: non impongo vincoli sulle unioni ma solo $F_j \cap F_i = \emptyset$ $(Ax \leq 1)$

⇒ condizione banalmente soddisfatta (prendo una sola stazione)

È un problema facile

DECISIONI DIPENDENTI

Questo concetto è rappresentabile dalle scelte binarie:

"la decisione A (variab x) può essere presa ($x=1$) solo se la decisione B (variab y) è stata presa ($y=1$)"

Scenario: x_i decide se aprire l'impianto produttivo i $\quad x_i \in \{0,1\}$

→ subordino questa scelta a "esistenza di una strada che porta all'impianto" rappresentata da $y \in \{0,1\}$

$x=1$ — $y=1$
$x=0$ — $y=1$ o 0

$$\Rightarrow \quad \boxed{x \leq y}$$

* Una variabile $x \geq 0$ può assumere valori strettamente positivi solo se una determinata decisione (variab y) è stata presa ($y=1$)

$$\Rightarrow \quad \boxed{x \leq My}$$

impegno che l'impianto produca $\iff$ $y=1$ è aperto

ma la prod x non è binaria
⇒ mi appoggio a un valore molto grande M

- $y=0$ (decisione non presa) impianto chiuso
  $x \leq 0 \Rightarrow x=0$ variab x può essere solo 0, non produce
- $y=1$ (decisione presa) impianto aperto
  $x \leq M \Rightarrow x$ libera limitata superiormente

M ad esempio sarà la

NB se non produco ($x=0$) anche y sarà forzata a zero

con M troppo grande, rischio l'instabilità numerica

* invece per forzare $y=0$ quando $x=0$

es: soluz ottima prevede di non produrre $\bar{e}_i$, quindi impianto chiuso

$\Rightarrow$ è un compito della F.O.

$$\min \sum_i K y_i$$

- se nel vincolo appare $x=1$ $\Rightarrow$ $y=1$ forzato dal vincolo
- se nel vincolo appare $x=0$ $\Rightarrow$ y è libero (indifferente) ma sappiamo bene che se non produco, non apro l'impianto

$\Rightarrow$ la F.O. porta $y=0$

* come vengono espressi i vincoli strutturali?

$$x_t \le M_t \delta_t$$

semplice, la prod non supera l'upper bound (richiesto)

$x_t = 0 \rightarrow \delta_t = 0$ (dalla FO)

$x_t \neq 0 \rightarrow \delta_t = 1$

$\delta_t = 1 \rightarrow x_t \le M_t$

M_t non deve essere un numero elevato scelto tanto per (vedi ragionamento instabilità numerica CRITERIO C knapsack)

colpa del simplex e delle sue matrici ← (se hanno dim numeri diversi, saltano fuori determinanti ed inverse molto approssimati)

$$\Rightarrow \quad M_t = \sum_{t}^{T} r_s$$

copro la domanda da adesso ($t=1$) fino alla fine del periodo produttivo (T)

di solito x PLANT LOCATION:

M_t = capacità magazzino

il vincolo di bilanciamento scorte è espresso

$$y_t = y_{t-1} + x_r - r_t \qquad \forall t$$

$$\vdots$$

$$y_1 = \underset{\neq 0}{y_0} + \underbrace{x_1 - r_1}_{\text{qut di prodotto venduta nel periodo } t}$$

NB. È NECESSARIA UNA GIACENZA A $T=0$ ALTRIMENTI NON POSSO PRODURRE A $t=1$

collego i costi setup con le giacenze tramite le quantità x_i

---

Modello dynamic lot-size (Wagner-Whitin)

$$v = \min \sum_{t=1}^{T} (f\delta_t + c_t x_t + h y_t)$$

min costi

soggetto a

$$y_t = y_{t-1} + x_t - r_t \quad t = 1, \ldots, T,$$

vincolo bilancio scorte

$$x_t \le M_t \delta_t \quad t = 1, \ldots, T,$$

vincolo apertura impianti prod

$$x_t, y_t \ge 0 \quad t = 1, \ldots, T,$$

$$\delta_t \in \{0, 1\} \quad t = 1, \ldots, T.$$

NB:

* senza vincolo SET-UP: problema PL (formula Wagner-Whitin)
* con vincolo SET-UP: PLI, problema complesso

FINE: tecniche modellizzazione B

* VINCOLI DISGIUNTIVI: CASO CON DUE VINCOLI

IP: sia $\underline{x}$ un vettore di variabili decisionali non negative.
Siano:

$$a^t \underline{x} \geq b \quad (1)$$
$$c^t \underline{x} \geq d \quad (2)$$

con a e c a componenti non negative

TH: solo uno dei due vincoli è $\underline{\underline{\text{attivo}}}$ (≡ influisce sulla sol ottimale)

ATTIVO ≡ soddisfatto da sol trovata   NON ATTIVO ≡ sempre soddisfatto (RIDONDANTE)

* moltiplico per una variabile decisionale binaria!

$$a^t \underline{x} \geq yb$$
$$c^t \underline{x} \geq \boxed{(1-y)} d$$

↳ complementare di y

$y \in \{0, 1\}$

- funzionamento:

$\boxed{y=0}$

$a^t \underline{x} \geq 0$ ① sempre verificato $\forall x \, (\geq 0)$

$c^t \underline{x} \geq d$ ② vincolo ATTIVO grava sulla modellizzazione

NB imporre a^t e $c^t \geq 0$ è ESSENZIALE poiché la var binaria funzioni ad attivare/disattivare i vincoli a turno

se ∃ almeno un elemento < 0 salta tutto perché $a^t \underline{x} \geq 0$ non sarebbe soddisfatto $\forall \underline{x} \geq 0$
⇒ influenza la soluzione ottimale

× VINCOLI DISGIUNTI : GENERALIZZAZIONE

COEFF NON NEGATIVI : Siano dati m vincoli $a_i^T x \geq b_i$ dove $a_i \geq 0$

=> richiedo che siano soddisfatti esattamente k vincoli :

$$a_i^T \mathbf{x} \geq b_i y_i, \qquad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = k,$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, m.$$

COEFF QUALSIASI : Siano dati m vincoli $a_i^T x \geq b_i$ dove le componenti di a_i sono libere di diventare negative:

ci permette di non perdere soluzioni

$$a_i^T \mathbf{x} \geq b_i - M_i(1 - y_i), \qquad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = k,$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, m.$$

- $y_i = 1$ => vincolo ATTIVO, quindi solo $a_i^T x \geq b_i$
- $y_i = 0$ => il vincolo diventa $a_i^T x \geq b_i - M_i$ che per un ragionevole $M_i \gg 0$ sarà sempre verificato => ridondante

* PROBLEMA DI SEQUENCING (a macchina singola)

Suppongo di avere una macchina che deve svolgere più job in sequenza senza la possibilità di svolgerne più di uno in contemporanea.

$x_j + a_j \leq d_j$
ogni job va finito prima della scadenza

$x_j \geq 0$
ogni job inizia dopo l'istante zero (o ae)

$x_j + a_j \leq x_i$
la precedenza

$x_j + a_j \leq t$
nessun job finisce oltre l'orizzonte T_{up}

* ed il non-parallelismo? $x_j + a_j \leq x_i$ oppure $x_i + a_i \leq x_j \Rightarrow$

$$x_i + a_i \leq x_j + M y_{ij}$$
$$x_j + a_j \leq x_i + M(1 - y_{ij})$$

$$y_{ij} \in \{0,1\}$$

- $y_{ij} = 1 \Rightarrow$ $x_i + a_i \leq x_j + \underline{M}$ SUPERFLUO
  $x_j + a_j \leq x_i$ i segue j
- $y_{ij} = 0 \Rightarrow$ $x_i + a_i \leq x_j$ j segue i
  $x_j + a_j \leq x_i + \underline{M}$ SUPERFLUO

TRUCCO (ESE): • trasformo tutti i vincoli $\leq$ in vincoli $\geq$
• porto le variabili a SX e costanti a DX
$\Rightarrow$ scopro se sono disgiunte $a, c \geq 0$ o a, c liberi

FORMULAZIONE FINALE:

$$\min t$$

$$x_j + a_j \leq d_j \qquad j = 1, \ldots, n$$ ← rispetto scadenza

impongo t fine di tutto →
$$x_j + a_j \leq t \qquad j = 1, \ldots, n$$

$[x_i + a_i \leq x_j] \rightarrow$ se ci sono vincoli di precedenza

$$My_{ij} + (x_j - x_i) \geq a_i \quad \forall i \neq j$$
$$M(1 - y_{ij}) + (x_i - x_j) \geq a_j \quad \forall i \neq j$$
] non parallelismo

$$x_j \geq 0 \quad \forall j$$
$$y_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \neq j$$

* VARIABILI CON DOMINIO DISCRETO NUMERABILE

SOS1: SPECIAL ORDER SET TYPE 1

Una variabile x assume solo valori da un insieme $C \subseteq \mathbb{R}$ di cardinalità finita

$A = \{a_1 .. a_2 ... a_m\}$ variab: valore → 1:1 binaria

$$x = \sum_{j=1}^{m} a_j y_j$$ variab continua

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = 1$$ impongo di SCEGLIERE dallo spazio di valori solo 1

$$y_j \in \{0,1\} \quad \forall j$$

credo...

* FUNZIONI LINEARI A TRATTI

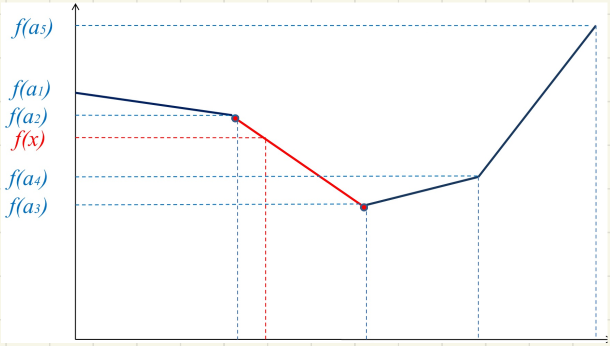
" l'idea è avere le var x che possano assumere un valore all'interno di diversi intervalli "

SOS2: SPECIAL ORDER SET TYPE 2

Modellizzare una spezzata le cui coordinate si possono scrivere $(a_i, f(a_i))$

Al massimo 2 variabili binarie di un insieme dato possono essere selezionate e queste devono essere consecutive

OK COSA VUOL DIRE 14/05
OK HO CAPITO ✓ 15/05



* L'idea è sempre "generare" il valore della variabile continua x
dovrò selezionare un a_i (intervallo $\overline{a_i a_{j+1}}$) che individua un
$f(a_i) \in [f(a_i)\ f(a_{i+1})] \equiv x$ valore generato

si parla di generare valori all'interno di intervalli di cui ne conosco gli estremi
⇒ comb. convessa!

FUNZ. LINEARI A TRATTI:
non è né concava né convessa (globalmente)
ma lo sono i suoi tratti presi singolarmente.

FORMULAZIONE: solitamente in questi problemi vengono forniti i punti di passaggio [gli $f(a_i)$ dove la forma cambia definizione]

$\Rightarrow$ osservo che con n punti trovo n-1 intervalli $\Rightarrow$ solo un intervallo alla volta è attivo $\Rightarrow$ n-1 variabili binarie

y_i indica l'unico intervallo a cui a_i appartiene

$y=1$ $\Rightarrow$ λ_0 e λ_1 attivi $\Rightarrow$ intervallo 1 selezionato

• λ_i sono variabili decisionali ~~(riconosciamo gli a_i)~~ e rappresentano gli estremi degli intervalli $\Rightarrow$ un intervallo ha 2 estremi

$\Rightarrow$ y_i deve vincolare i valori di λ_i e $\lambda_{i+1} \in [0,1]$, che saranno i coefficienti della combinazione convessa per trovare x

esprimo questa logica con:

• se $y_1=0 \Rightarrow \lambda_1 \leq 1$ (oltre che $\lambda_1 \geq 0$ implicito)

ma allora il legame diventa

$$\boxed{\lambda_i \leq y_i}$$

per il primo e l'ultimo

se $y_1=0 \Rightarrow \lambda_1 \leq 0$ ma dal modello $\forall \lambda_i \geq 0$ $\Rightarrow \lambda_1=0$ $\boxed{OK}$

• però λ_2 è l'estremo DX di y_1 e SX di y_2, come ne gestisco l'attivazione?

$\Rightarrow \quad \lambda_2 \leq y_1+y_2 \leq 1$

$y_i\ y_j\ \forall i \neq j$ sono mutualmente esclusive

questa somma varrà al max 1 in ogni caso

$y_1=0 \quad y_2=1$

$\Rightarrow \lambda_2 \leq y_2 = 1$ ATTIVO (2)

$y_1=1 \quad y_2=0$

$\Rightarrow \lambda_2 \leq y_1 = 1$ ATTIVO (1)

per tutti gli altri

$$\boxed{\lambda_i \leq y_{i-1}+y_i \leq 1}$$

VERSIONE I

STO SCEGLIENDO UN VALORE $f(a_i)$! NON GENERO!

$$f(x) = \sum_i^n \lambda_i f(a_i) \quad \text{con } \sum \lambda_i = 1$$

y_i fa scattare i λ_i che generano un certo intervallo

$\lambda_1 \leq y_1$ (primo), $\quad \lambda_i \leq y_{i-1}+y_i \quad \forall i=2 \ldots n, \quad \lambda_n \leq y_{n-1}$ (ultimo) $\quad$ con $\sum_i^{n-1} y_i = 1$

$\lambda_i \geq 0 \quad i=1 \ldots n$

$y_i \in \{0,1\} \quad i=1 \ldots n-1$

NB: questa versione non contiene il MECCANISMO CHIAVE del SOS di 2° tipo

intervallo n-1 regolato da a_{n-1} e a_n

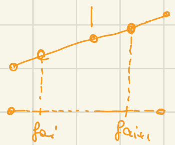
$a_{n-1} \rightarrow y_{n-2}; y_{n-1}$

$a_n \rightarrow y_{n-1}$

VERSIONE FINALE

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(x)=\sum_{i}^{n}\lambda_i f(a_i) \quad \text{con} \quad \sum_i \lambda_i = 1 \\ \lambda_i \leq y_i \quad \forall i = 1 \dots n \\ \sum_{i}^{n} y_i \leq 2 \\ y_i + y_j \leq 1 \quad \forall i = 1 \dots n-2,\ j = i+2 \dots n \\ \qquad y_i \in \{0,1\} \quad i = 1 \dots n \end{array}}$$

$f(x) = \lambda_i f a_i + \lambda_{i+1} f a_{i+1}$



→ mi permette di scegliere y_k consecutive (estremi quindi dello stesso intervallo)

⇒ impone che se y_k non sono consecutivi, non possono essere attivi assieme (≤ 1)

osservazione: ciò che serve per mettere in piedi questo modello è

- un set di variabili binarie
- vincolo per imporre la selezione di al max 2 variabili
- vincolo per selezionare solo variabili binarie consecutive

10/05/2023

PREPROCESSING

Sono tutte quelle tecniche che vengono applicate prima dell'ottimizzazione, l'insieme di operazioni che possono essere compiute per migliorare una data formulazione matematica.

BOUND STRINGENTI

Si applica quando in un problema PLI appare un vincolo nella forma: $x_j \leq M y_j$

worst case: per instabilità numerica trovo valori completamente sbagliati

=> se sono in grado di fissare M in maniera intelligente, posso avere una convergenza all'ottimo più veloce!

esempio:

MODELLO 1

$M = 100$

MODELLO 2

in seguito ad un analisi interna scopro che x_j hanno come UB 30

=> $M = 30$

* essendo nella PLI, per risolvere i modelli si agisce così:
  - si calcola il rilassamento continuo
  - si cerca l'ottimo

=> cerco la soluzione ottimale stringendo sulle coordinate il più possibile

=> se il rilassamento è molto vicino al PLI allora convergo molto più velocemente

è qui che cambia tutto! nei termini di PLI può non fare la differenza, ma nel continuo sì!

* continuo coi due modelli:

FO: $\min \sum_j f \cdot y_j$

①

$x_j \leq 100 y_j$

$y_j \geq \frac{x_j}{100}$

②

$x_j \leq 30 y_j$

$y_j \geq \frac{x_j}{30}$

con $0 \leq y_j \leq 1$

* ipotesi ad-hoc: all'ottimo $x_j = 30$

problema di min + con $y \geq$ (qnt frazion) allora il min valore di y è proprio quella quantità!

↓

scrivo $y_j = \frac{\text{ottimo}}{M}$

①

$y_j^{RL} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

il relax continuo è frazionario

⇓

serviranno ulteriori iterazioni per stringerci attorno all'ottimo

②

$y_j^{RL} = \frac{30}{30} = 1$

valore intero relax
⇒ ottimo globale

* COME SCOPRO QUESTO UB A PRIORI?

Ad esempio un UB può essere la capacità impianto, la domanda del mercato
⇒ se non ho queste informazioni diventa un problema EURISTICO di stima OPPURE posso crearmi un altro modello:

individuo la variabile di cui devo stimare il valore max e la sostituisco nella FUNZIONE OBIETTIVO

⇒ la soluz ottima mi fornirà così l'UB (rilassamento)

↓

così sono sicuro di ottenere un UB in tempi polinomiali caso problema min

FIXING VARIABILI

Sfrutto delle tecniche di probing: stabilisce a priori il valore ottimo di alcune variabili

Siano:

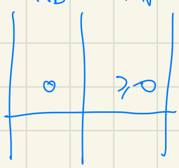
- z_{PL} valore ottimo calcolato dal rilassamento continuo (PLI minimo)
- z_H valore di una soluz ammissibile qualsiasi del PLI
- $GAP = z_{PL} - z_H$
- $x_j^{PL} = 0$ valore assunto dalla variabile x_j nella sol. ottima del rilassam. continuo e c_j il suo CCR

CONDIZIONE:

$c_j > GAP \Rightarrow x_j^* = 0$ nella sol ottima (variabile sarà fuori base) e quindi può essere eliminata dal problema

non ho capito questa cosa

dall'ottimo torno indietro => fo peggiora



CCR ≥ 0

• sono all'ottimo con una $x_j \in X_N$

forzo il simplesso a inserire $x_j \neq 0$

=> fo peggiora di val(x_j) · CCR_j

ex: $x_j = 1$
fo + = 7 · 1
↑
peggiora
con $CCR_j = 7$

cosa significa questa cosa
↓
variabili vengono arrotondate?

* prendo un CCR ed immagino di forzare in una sol ottima con var va a positivo → so nel relax è possib. che molte var passino da 0 a positivo

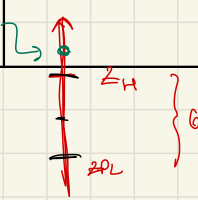
• in base porto x_j : $CCR_j > GAP$ (UB e LB)

=> ottengo un relax spesso (forzato) dove ogni var è libera tranne quella che nel diventare pos è schizzata fuori

=> ottengo un rilassamento sopra z_H che sarà superiore alle altre

z'_{PLI}

? z^*_{PLI}



rilassato continuo

tutte le var con CCR ≥ GAP nel rilassato non vanno toccate sennò trovo solo sol peggiori di z_H (UB di euristica)
↓
poiché banale

• se $CCR_j > GAP$ finisco sopra z_H e non ho senso spostare le var x_j dallo zero che assumono all'inizio → le scarto e non le tocco durante la risoluzione

DISUGUAGLIANZE LOGICHE

Bonato sa semplificare insiemi di vincoli osservando il comportamento del problema.

=> l'idea è trovare una riformulazione che renda almeno un vincolo ridondante

V1: $3x_2 + 2x_3 \geq 2$

senza perdere soluzioni intere posso affermare che:

$x_2 + x_3 \geq 1$

V2: $2x_1 - 2x_2 + 6x_3 \leq 5$

* trasformo tutti i coefficienti in positivi (con var binarie uso i complementi)

$2x_1 - 2(1 - x_2') + 6x_3 \leq 5$

=> $2x_1 + 2x_2' + 6x_3 \leq 5 + 2$

NB: $x_2' = 1 \wedge x_3 = 1$ non soddisfa il vincolo!

$x_2' + x_3 \leq 1$ limito ad avere al max 1 attivo

$1 - x_2 + x_3 \leq 1$ => $x_3 \leq x_2$

ma $x_2 + x_3 \geq 1$ da V1 => [risulta essere ridondante una volta fissato x_2]

=> x_2 non può essere 0 perchè allora anche x_3 sarebbe 0 ma questo viola il primo vincolo

=> $\boxed{x_2 = 1}$

QUI ALCUNI ES CHE FACCIO SU UN ALTRO FILE

15/05/2023 teoremi + es. Trasporto

FILE: TUM FILE: piani di Taglio

TOTALE UNIMODULARITÀ

Si consideri il seguente problema di PLI in forma standard:

$$z_{PLI} := \min c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0 \text{ intero} \qquad \text{con } A, b \text{ interi}$$

* condizioni per cui una generica soluzione x^* ha componenti frazionarie?

Sia B la base associata di x^*:

$$x^* = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{sol sistema} \\ \rightarrow \text{componenti } x \; x_N \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ x^* ha componenti frazionarie solo se anche $B^{-1}b$ non è intero

* osservazione:

Questo lo vediamo dal calcolo della matrice inversa

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & & a_{mn} \end{bmatrix}^T$$

dove $a_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij})$ ed M_{ij} è la sottomatrice da B eliminando la riga i e la colonna j

$\Rightarrow$ B è intero $\Rightarrow$ a_{ij} $\forall ij$ interi $\Rightarrow$ B^{-1} intera se $\det(B) = \pm 1$

CONDIZ. SUFFICIENTE ma non necessaria per l'interezza di $B^{-1}b$

PERCHÉ?

OK questo è vero ed è comodo. ma quando non è vero? non mi da info sull'interezza, può esserlo comunque

Dato una matrice A contenente una base B con $\det(B) \neq 1$ esiste sempre un problema di PL del tipo $\{\min c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ forma standard con c e b opportuni la cui soluzione ottima coincide con un vertice fraz.

questo non lo ho capito $\rightarrow$

B e b possono essere non interi ma può dividerli OK e moltiplicarli dando INTERI $\Rightarrow$ è così, quindi COND. NON NECESSARIA

$\frac{+B_c}{|B|}$

SUMMARY:

- $B^{-1}b$ non intero $\Rightarrow$ x^* non intero
- B^{-1} intera se $\det(B) = \pm 1$
- B^{-1} intera $\Rightarrow$ $B^{-1}b$ intera

  $\not\Leftarrow$

th nello scritto

× DEF: UNIMODULARITÀ

Una matrice intera A di dimensione $m \times n$ con $m \leq n$ si dice unimodulare se per ogni sua sottomatrice quadrata $m \times m$ B vale:

$$\det(B) \in \{\pm 1, 0\}$$

= ovvero le sottomat invertibili hanno det ± 1 e le altre $m \times m$ quadrate hanno det nullo

P è regione di un problema a vincoli con =

• TEOREMA 1:

Sia A unimodulare e b intero.

Allora il poliedro continuo $P = \{\underline{x} \geq 0 : A\underline{x} = \underline{b}\}$ ha solo vertici interi.

DIM:

• Sia x^* un qualunque vertice di P

$\Rightarrow$ $\exists$ una base B di A tale che $x^* = (B^{-1} \cdot b \,;\, 0)$

• B è una sottomatrice quadrata di A di ordine m e non singolare

perché è base con componenti canoniche

$\Rightarrow$ $\det(B) = 1$

$\Rightarrow$ interezza di B^{-1}

$\Rightarrow$ interezza di $B^{-1} \cdot b$ $\quad \forall b$ intero (da ipotesi)

♣

con i vincoli di disug. A' è diverso per la presenza di s quindi il ragionamento diventa

* MAT UNIMODULARE CASO FORMA CANONICA → porta alla TUM

PLI in forma: $\{\min\ c^T x : Ax \geq b,\ x \geq 0\}$

$\Downarrow$ trasformazione

$\{\min\ c^T x : \boxed{Ax - Is = b},\ x \geq 0,\ s \geq 0\}$

nessuna in Q
↑
$k=0 \Rightarrow 0$ da A, k da I

$k=m \Rightarrow k$ da A, 0 da I
↓
tutte in Q

con s variabili di surplus. Nuova mat dei vincoli $A' := [A, -I]$

* In generale ogni sottomatrice $m \times m$ di A' si può ottenere selezionando k colonne da A e $m-k$ da $-I$ $(0 \leq k \leq m)$

costruisco:

$$B = \begin{array}{cc} & A \\ \left[\begin{array}{c|c} -I'_{m-k} & F \\ \hline 0 & Q \end{array}\right] & \end{array} \quad Q: k \times k$$

colonne da $-I$ — colonne da A

$I' :=$ mat identità ordine $m-k$

$\Rightarrow$ la matrice B è quindi una triangolare superiore

$\Rightarrow$ il suo determinante si calcola come: $\det(B) = \pm \det(Q)$

riduzione della difficoltà del problema di calcolo

xk $\det(-I')$ è sempre ± 1
↓
moltiplico a $\det Q$

A' è unimodulare $\iff \det(Q) \in \{\pm 1; 0\}$ con Q ogni sottomatrice quadrata Q di A di qualunque ordine.

↓ deriva dal fatto che le k colonne selezionabili da A nella costruzione di B sono arbitrarie

* DEF: TOTALE UNIMODULARITÀ

Una matrice intera A di dimensione $m \times n$ si dice totalmente unimodulare se $\det(Q) \in \{\pm 1; 0\}$ per ogni sottomatrice quadrata Q, di qualunque ordine.

$\Rightarrow$ essendo una dimensione valida anche $k=1$ è richiesto che tutti gli elementi di A siano $\in \{\pm 1; 0\}$

da portare all'orale

* TEOREMA 2:

2 ipotesi

Sia A una matrice totalmente unimodulare e b intero.

$\Rightarrow$ il poliedro $P := \{ x \geq 0 : Ax \geq b \}$ ha solo vertici interi.

DIM:

valore delle surplus all'ottimo

prob canonico $\rightarrow$

• Sia x^* un vertice qualunque del poliedro P e $s^* := Ax^* - b$

prob standard $\rightarrow$

Dimostriamo che (x^*, s^*) è vertice di $P' := \{ (x,s) \geq 0 : Ax - s = b \}$

cerco l'assurdo

$\Rightarrow$ altrimenti se così non fosse:

$\exists$ due punti $(x^1 s^1)$ $(x^2 s^2)$ distinti $\in P'$ tali che:

$$(x^*, s^*) = \lambda (x^1 s^1) + (1-\lambda)(x^2 s^2) \quad \text{con} \quad 0 < \lambda < 1$$

tutti i punti di P permettono di individuare punti in P' ok GRZ

• Inoltre:

$s^1 = Ax^1 - b \geq 0$

$s^2 = Ax^2 - b \geq 0$

$P := \{ x \geq 0 : Ax \geq b \}$
$Ax - b \geq 0$

$\Rightarrow$ x^1 e x^2 appartengono a P

ma che questo vale $\Rightarrow$ 4

perché un vertice non è combinazione di altri punti

• Inoltre: $(x^1 s^1) \neq (x^2 s^2)$ $\Rightarrow$ $x^* = \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2$ non potrebbe essere un vertice di P.

da ipotesi assurda $\quad x^1 \neq x^2$

Ora sono certo che $(x^* s^*)$ sia un vertice valido. (di P').

A' coeff vincoli per P'

$\Rightarrow$ poiché A è TUM, $A' := [A, -I]$ è unimodulare

$\Rightarrow$ per il teorema 1 $(x^* s^*)$ è intero e quindi anche x^*

A' unimod + b intero

* OSSERVAZIONE: ora conosco i criteri e teoremi per definire l'unimodularità ed i suoi legami con l'interezza dei vertici

$\Rightarrow$ come verifico una matrice A come TUM? $\nearrow$ enumero tutte le sottomatrici / $\searrow$ scopro condizioni semplici

CONDIZIONI PER L'UNIMODULARITÀ TOTALE

se parlo di elementi $\Rightarrow$ ordine $=1$ $\Rightarrow$ TUM

I

banale, dalla def di TUM

C. Necessaria: $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ per ogni elemento ($\equiv$ sottomat) di A stessa.

II

C. Sufficiente:

condiz necessaria è implicita (è un ipotesi)

* TEOREMA 3

Sia A una matrice con $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$. A è TUM se valgono:

1. ogni colonna di A NON HA PIÙ DI DUE ELEMENTI NULLI

partizione := "classifico" le righe in due insiemi

2. $\exists$ una partizione (I_1, I_2) delle RIGHE di A tale che ogni colonna con esattamente due elementi $\neq 0$ abbia questi su due ~~colonne~~ righe appartenenti a INSIEMI I_1 e I_2 DIVERSI se e solo se sono CONCORDI in segno

III

PROPOSIZIONE 1:

La matrice A è TUM se e solo se:

- A^t è TUM
- A' ottenuta da A permutando e/o cambiando segno ad alcune colonne e/o righe è anch'essa TUM
- le matrici:

$$\left[\begin{array}{c|c} \pm 1 & \\ 0 & A \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right] \quad e \quad \left[\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{array}\right] \quad \text{sono TUM}$$

NB: l'ultimo punto nella proposizione mi da alcune regole importanti:

Se esiste una colonna che contiene $\begin{cases} \text{solo UN } a_{ij} = \pm 1 & \text{un elem. non nullo} \\ a_{ij} = 0 \quad \forall ij & \text{tutta nulla} \end{cases}$

$\Rightarrow$ questa colonna può essere scartata perché non inficia sulla condizione di TUM

* nell'eliminare colonne (righe) potrei implicare l'eliminazione di righe (colonne) perché gli ho portato via un valore / l'unico valore non nullo (effetto cascata)

è un problema di flusso, e quelli avranno un impostaz simile in termini di TUM

PROBLEMA DEL TRASPORTO: un caso di mat A unimod e vertici interi

$$\min \sum_i^m \sum_j^n c_{ij} x_{ij} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} &\sum_j^n x_{ij} \le s_i && \text{(offerta)} \\ &\sum_i^m x_{ij} \ge d_j && \text{(domanda)} \\ &\text{e} \quad 0 \le x_{ij} \le q_{ij} \end{aligned}$$

Cambio i segni ai vincoli e trasformo in canonica $\{\min c^T x : Ax \ge b, x \ge 0\}$

$\Rightarrow$ esce una matriciona allucinante

offerta

	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{ij}	$x_{i,j+1}$	$\cdots$	$x_{m,n-1}$	$x_{m,n}$		$\mathbf{b}=$
1	-1	-1	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0		$-s_1$
$\vdots$	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0		$\vdots$
i	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	-1	-1	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$		$-s_i$
$\vdots$	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0		$\vdots$
m	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	-1	-1		$-s_m$
1	1	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0		d_1
2	0	1	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0		d_2
$\vdots$	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0		$\vdots$
j	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	1	0	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$		d_j
$j+1$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	0	1	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$		d_{j+1}
$\vdots$	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0		$\vdots$
$n-1$	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	1	0		d_{n-1}
n	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	1		d_n
$(1,1)$	-1	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0		$-q_{1,1}$
$\vdots$	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0		$\vdots$
(i,j)	0	0	$\cdots$	-1	0	$\cdots$	0	0		$-q_{i,j}$
$\vdots$	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0		$\vdots$
(m,n)	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	-1		$-q_{m,n}$

qui non ho solo un elemento $\ne 0$ mi pare domanda

Ausiliari

ultime $m \times n$ righe: hanno solo 1 valore $\ne 0$

no forse NON HO CAPITO

OSSERVAZIONI:
- ogni colonna ha 3 elem $\ne$ da $\emptyset$
- tutti gli a_{ij} sono $\{-1, 0, 1\}$

QUINDI:
$\Rightarrow$ dimostro TUM così.
- elimino le ultime $m \times n$ righe P1
- partizione delle righe:
  $I_1 = \{1 \dots m, m+1 \dots m+n\}$
  $I_2 = \emptyset$

TH 3

* PIANI DI TAGLIO   nuovo FILE: CuttingPlanes

CLASSIFICAZIONE ALGORITMI

- Alg. ESATTI:
  1. trovano l'ottimo globale ma hanno tempi potenzialm. esponenziali

- Alg. APROSSIMATI:
  1. non si garantisce l'ottimo, ma una ~~soluz ammissibile~~ ottimo locale in tempi polinomiali
     => è una soluzione "buona", rispetto al worst case
  2. il valore della soluzione ha un bound garantito dall'ottimo

si accontenta ma c'è un certificato di bontà (stima % errore)

- Alg. EURISTICI:
  1. soluzione non ottima e non garantisce la bontà
     => punto a buone performance in tempi brevi

ottimo locale più o meno buono

ALGORITMI ESATTI DI PLI => funzionano così:
1. calcola il rilassato
2. itera simplex a x^*
3. trova il vertice
   - se fraz continua
   - se intero si ferma

↓

PIANI DI TAGLIO

considero:

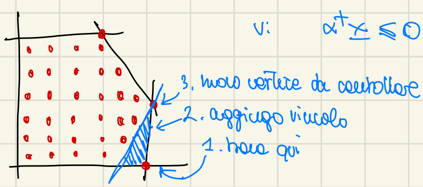
$$\min c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

sia $P := \{x \geq 0 : Ax = b\}$ il poliedro convesso (limitato e non vuoto) associato al rilassamento continuo di PLI

CASO IN CUI TROVO UN VERTICE FRAZIONARIO
=> INTRODUCO UN PIANO DI TAGLIO

Aggiungo al problema un vincolo nuovo che esclude la sol OTTIMALE appena trovata ed un'area a questo vertice vicina. (un'area di soluzioni frazionarie $\tilde{x}$!)

v: $\alpha^T \underline{x} \leq 0$



NB il vincolo non deve far perdere soluzioni intere!! deve solo stringere la soluzione ammissibile

* osservazione: i PIANI DI TAGLIO non cercano il convex hull...
ritagliano la regione più stretta possibile attorno alla soluzione ottima del rilassato, almeno finché x^* non è intero

| PROBLEMA DI SEPARAZIONE DI x^* DA X |

* l'introduzione di questo vincolo è praticamente la ricerca di un vincolo soddisfatto da tutti i punti $\in X$ tranne x^* selezionato
=> un problema di ricerca della non ammissibilità (roba da dualità)

* DEF: PIANO DI TAGLIO

Dato $x^* \in P$ si dice piano di taglio una disuguaglianza $\alpha^T \underline{x} \leq \alpha_0$ tale che

1. $\alpha^T \underline{x} \leq \alpha_0 \quad \forall x \in X := P \cap \mathbb{Z}^n$
2. $\alpha^T x^* > \alpha_0$ inammissibilità → escludo l'ottimo frazionario

questo def non da altre info su x^*
=> noi sappiamo che è la solut ottima del rilassato

OSSERVAZIONE: sarà necessario introdurre un numero esponenziale di tagli ($\equiv$ vincoli) prima di convergere! (TROPPI!)

CLASSIFICAZIONE TAGLI

- tagli general purpose: derivano da considerazioni logico-matematiche generiche (tipo arrotondamenti, troncamenti, implicazioni etc...)

studiamo solo due di questi
- zero half cuts
- gomory cuts

- tagli specifici: derivano dall'analisi poliedro della specifica istanza di un modello

NB. è ruolo dell'esperto saper introdurre tagli efficienti: né gurobi né gli algoritmi conoscono il significato semantico dei modelli e le loro parti

* TAGLI ZERO-HALF

Tecnica poco efficiente, si basa sul TRONCAMENTO.
Si cerca di ricondursi ad avere una disuguaglianza così:

- a SX variabili intere e coefficienti interi
- a DX qualsiasi valore frazionario

$\Rightarrow$ posso arrotondare il membro di DX per difetto (TAGLIO PER TRONCAMENTO)

NB. di solito questi termini noti frazionari non sono trovati così a caso nei problemi di PLI $\Rightarrow$ li introduciamo noi tramite somme di vincoli, divisione per un fattore comune ... combinaz lineari di vincoli pre-esistenti.

* TAGLIO DI GOMORY

Idea: generare un taglio (vincolo) utilizzando le informazioni associate alla base B della soluzione di base ottima x^* del relax continuo corrente

Generazione: se x^* è frazionaria (o ha almeno una componente non intera)
$\Rightarrow$ si genera il vincolo aggiuntivo

SITUAZIONE INIZIALE: tableau ottimo (ho già $\overset{\text{non intero}}{\uparrow}$ x^* del rilassato)

tableau di x^*

$x_H \in \underline{x}_B$

	x_B	x_N	
x_B			$B^{-1}b$
x_H	$0 \dots 1 \dots 0$	$\bar{a}_{tj}$	$\bar{b}_t$
	c^t		

Esiste almeno un valore x^*_h non frazionario nella base: considero la sua variabile relativa, x_h

Nella base, x_H avrà componenti tutte tranne una $=1$ in corrispondenza della colonna di sé stesso
le componenti relative le variabili fuori base sono $\bar{a}_{tj}$

Φ: insieme delle variabili fuori base

Riscrivo la riga di x_H:

$$x_h + \sum_{j \in \Phi} \bar{a}_{tj} x_j = \bar{b}_t \equiv x^*_h$$

le variabili sono intere — frazionario

eq valida per punti di P (poliedro del rilassato)

NB. chiamo "t" la RIGA GENERATRICE DEL TAGLIO

SUMMARY:

$$\alpha^T \underline{x} \leq \alpha_0$$

interi — intero — frazionari

lo sostituisco con

$$\alpha^T \underline{x} \leq \lfloor \alpha_0 \rfloor$$

$b_t \in \mathbb{R}$

(troncamento)

* procedimento secondo Gomory:

SX interi — DX frazionari

Formula un vincolo: $x_h + \sum_{j\in\Phi} \bar a_{tj} x_j \leq \bar b_t$ (1)

So che posso scrivere: $x_h + \sum_{\Phi} \lfloor \bar a_{tj} \rfloor \cdot x_j \leq b_t$ => quindi vero anche troncando $\bar b_t$

Forma intera: $x_h + \sum \lfloor \bar a_{tj} \rfloor \cdot x_j \leq \lfloor \bar b_t \rfloor$ (2)

NON HO CAPITO

Per costruzione questo vincolo è violato da x^*, ma valido $\forall$ altro elemento di X.

Poiché $x^*_j = 0 \ \forall j \in \Phi$ e $\bar b_t = x^*_h$ frazionario: $x_h + \sum_{\Phi} \lfloor \bar a_{tj} \rfloor x_j \big|_{x=x^*} = x^*_h = \bar b_t > \lfloor \bar b_t \rfloor$

Ma la forma frazionaria? Scrivo (1) − (2)

$$\sum_{j\in\Phi} \left(\bar a_{tj} - \lfloor \bar a_{tj} \rfloor\right) \geq \bar b_t - \lfloor \bar b_t \rfloor$$

trasformandolo in un $\geq$ vado a tagliare (??)

$$\sum_{j\in\Phi} \varphi(\bar a_{tj}) x_j \geq \varphi(\bar b_t)$$

con $r \in \mathbb{R}$ e $\varphi(r) := r - \lfloor r \rfloor \geq 0$ parte frazionaria

non credo di aver capito

surplus aggiunto per la STANDARD

Forma STANDARD: $-\sum_{j\in\Phi} \underbrace{\varphi(\bar a_{tj})}_{\text{scarto fraz } \bar a_t} x_j + s = -\underbrace{\varphi(\bar b_t)}_{\text{scarto fraz di } \bar b_t}$ $\quad s \geq 0$

↓

* il vincolo del taglio di Gomory in forma standard può essere aggiunto al tableau corrente (ottimo rilassato x^*) tramite l'orlatura

=> mantiene l'ammissibilità duale richiesta per poter applicare il simplex duale

$\boxed{\text{NB}}$ gomory implica l'utilizzo del duale perché devono esistere elementi $\bar a^t_{ij}$ negativi o nulli

(dalla th della dualità questo indica l'ammissibilità del duale => ma D non amm. sarebbe P non ammissibile => quindi condizione necessaria!)

↳ sufficiente? (BOH)

Trasformiamo il taglio di Gomory in forma standard:

$$-\sum_{j\in\Phi} \varphi(\bar a_{tj}) x_j + s = -\varphi(\bar b_t), \ s \geq 0$$

Questo vincolo può essere facilmente aggiunto al tableau corrente (operazione di **orlatura**) mantenendo l'ammissibilità duale richiesta per l'applicazione del simplesso duale. "termine noto negativo" dimostro come?

*RISULTATO DA GOMORY

È dimostrabile che il Taglio di Gomory termina per n° iterazioni finite e ricade in uno di questi casi:

I nessun termine noto è frazionario ⇒ la soluz ottima del rilassato è la soluz ottima del PLI

che vuol dire riga positiva?

II ∃ un termine noto frazionario ma la sua riga nel tableau mostra SOLO ELEMENTI POSITIVI O NULLI

⇒ dalla th duale il problema duale è illimitato → primale impossibile

⇒ PLI di partenza non ha soluzione

II.I Altro caso di impossibilità: l'ultimo taglio di Gomory ha svuotato la regione ammissibile

PROBLEMATICHE DI GOMORY

1. serve n° esponenziale di tagli
2. tailing off, sempre meno efficace ⊕ VEDI PAGINA DOPO
3. possibile instabilità numerica
4. non garantisce sol ottima ⇒ in caso la ho solo alla fine

casi impossibili scritti qua sopra II.x

PLI → rilasso → PL

↓ duale illimitato → $\boxed{\text{Primale impossibile}}$

22/05/2023

PROBLEMATICA NUMERO 2 : TALING OFF

Il taglio di Gomory è "PROFONDO", oltre all'ottimo continuo attualmente selezionato, elimina una regione frazionaria limitrofa CONSISTENTE

=> questo è MOLTO EFFICACE all'inizio, dopo un po' i calcoli si fanno sempre più "fini", finché i Tagli non iniziano ad eliminare solo degli ε di regione ammissibile continua

=> rappresenta l'inefficienza del metodo

INFATTI IL CUTTING PLANES NON È IL PIÙ USATO PER CONVERGERE (vedi Branch & Cut)

RIPRENDIAMO E TERMINIAMO IL TAGLIO DI GOMORY...

- Alg ESATTI:
  1. trovano l'ottimo globale ma hanno Tempi potenzialm. esponenziali

=> questo abbiamo detto nell'introdurre i piani di taglio (applicati agli alg. esatti)

riprendo il discorso...

⊠ RISOLUZIONE ESATTA DI UN PROBLEMA DI PLI

1. Risolvo il rilassamento (problema PL ricavato dal PLI rimuovendo i vincoli di interezza)

2. se la z^*_{PL} soluzione del rilassato è GIÀ INTERA → ho finito

caso nostro

se la z^*_{PL} invece è frazionaria ovvero $\exists$ almeno una variabile in base x_B che assume valore frazionario

=> 3. Scelgo una riga ($\equiv$ var di base) generatrice del taglio

NB. per avere maggiore probabilità di convergenza
=> scelgo la variabile con parte frazionaria ($\varphi(x_i)$) maggiore tra tutte ($\equiv$ taglio "di più")

NB. il simplesso duale è alla base di tutti i metodi esatti

22/05/2023 riprendo il taglio di Gomory

QUESTA È LA ROBA CHE NON MI È MOLTO CHIARA

taglio di Gomory

risoluzione esatta di un problema di PLI

1. risolvi il rilassamento (rimuovo vincoli di interezza)
   ↳ se sol intera ⇒ ho finito
   ↳ se sol frazionaria ⇒ ∃ una (almeno) var $\in X_B$ con valore frazionario
2. scelgo una riga (una var di base) per generare il taglio

probabilità maggiore convergenza:

scelgo la var con parte frazionaria maggiore

$x_1 = 1,2$ 0.5 V

$x_2 = ,15$ 0.20

prendo la riga di x_1

→ prendo variab in base e arrotondo la generica riga e la arrotondo per difetto

$$\underset{1}{x_h} + \sum_{\Phi}' \underbrace{\bar a_{tj} x_j}_{\text{var } N} = \bar b_t \quad (= x^*_h)$$

unica var con coeff 1

B

modellizzazioni:

$$x_h + \sum' \lfloor a_{tj} \rfloor x_j \le \bar b_t$$

$$x_h + \sum' \lfloor a_{tj} \rfloor x_j \le \lfloor b_t \rfloor$$

trovo tutti i coeff interi
↓
FORMA INTERA DEL TAGLIO DI GOMORY

COSA VUOL DIRE AH

NEL CASO IN CUI TROVI UNA RIGA CON $\bar b_t$ FRAZ MA TUTTI I COEFFICIENTI INTERI

⇒ USO LA FORMA INTERA DEL TAGLIO DI GOMORY x cosa se io volessi la forma frazionaria COSA VUOL DIRE

$$=$$

$$x_h + \sum a_{tj} x_j \circ b_t$$ potremo

$$-$$ avendo tolto al primo qualcosa di più piccolo

$$x_h + \sum \lfloor a_{tj} \rfloor x_j \leq \lfloor b_t \rfloor$$ modell. intero

$$\Rightarrow \sum_j (\bar{a}_{tj} - \lfloor \bar{a}_{tj} \rfloor) x_j \circ b_t - \lfloor b_t \rfloor$$ cambia il predicato

$$\geq$$

$\lfloor 1.7 \rfloor$

$\parallel$

1

tolgo a SX una parte più piccola e a DX una più grande quindi cambia il predicato

* PERCHÉ FORMA FRAZ E NON INTERA? dopo

FILE: Piani di taglio

Gomory ci da $\sum_j \varphi(\bar{a}_{tj}) x_j \geq \varphi(\bar{b}_t)$

⇒ la porto in forma standard

e creo il tableau

↓

così elimino la soluz appena trovata

vedi pag 12

vedi file ↑

---

finito gomory . . . ✓

OK FRA

vediamo parte sulla PLI . . . branch & bound sempre 22/05... qui sopra ci trascriverò l'esercizio di Gomory

Il metodo di Gomory è "superato"... ha comunque diverse controindicazioni. Il B&B è il principale piano di taglio usato dai solver, è sempre un algoritmo esatto quindi prima o poi se converge all'ottimo, è globale. Anche questo ha complessità esponenziale

schema di enumerazione completa MA non è un metodo pero perché faccio valutaz. in modo da non dover esplorare ⇑ tutta la regione

* BRANCH & BOUND

DEF generale

spezzo il prob OG in problemi + piccoli e ne risolvo il rilass.

È un algoritmo esatto, una metodologia di $\boxed{\text{enumerazione}}$ $\boxed{\text{implicita}}$ basata sul principio DIVIDE ET IMPERA

ho la garanzia che esistono max num finito di vertici... (esponenz. finito!)

enumero con intelligenza, non li conto davvero tutti non analizzo tutte le soluzioni... ottimizzo questa ricerca!

⇒ ricondurre la risoluzione di un problema di PLI alla risoluzione di sottoproblemi di PLI ma più semplici

IDEA DI BASE: si calcola l'ottimo, se ∃ variabili frazionarie si generano due problemi usando due vincoli del tipo
$$x_i \le \lfloor x_i^* \rfloor$$
$$x_i \ge \lceil x_i^* \rceil$$

NB. l'insieme delle soluzioni intere non cambia, è sempre quello. si riduce solo la regione ammiss frazionaria

⇒ le soluz intere finiscono PARTIZIONATE, tra i due problemi "figli"

osservazione: richiede tempi esponenziali perché genera un num exp di sottoproblemi

BRANCHING: partiziono in sottoproblemi

BOUNDING: soluz dei sottoprobl rilassati permettono di PRUNARE altri problemi

* In generale... si ha

$$\boxed{PLI} \quad \min c^t x \quad Ax = b \quad x \geq 0 \text{ intere} \quad \Rightarrow \quad \boxed{RILASS.} \quad \min c^t x \quad x \in P: \quad P = \{x \geq 0 \; Ax \geq b\} \quad x \in \mathbb{R}$$

- siano $x^{(0)}$ e $z^{(0)} = c^t x^{(0)}$ la soluzione ottima del rilassato continuo P
  - → $x^{(0)} \in \mathbb{Z}$ FINE
  - → altrimenti $\exists i: x_i \in \mathbb{R} \Rightarrow$ da PLI_0 → PLI_1, PLI_2 sfruttando delle...

OPERAZIONI DI BRANCHING

Ad ogni soluzione ottima non intera, seleziono una variabile frazionaria x_i per generare due sottoproblemi:

$$x_i \leq \lfloor x^*_{i\,PL} \rfloor$$

$$x_i \geq \lceil x^*_{i\,PL} \rceil$$

$$z^*_{PLI} = \min\{c^t x : x \in S^{(0)}\} = \min\{z^{(1)}, z^{(2)}\}$$ con $z^{(i)} = \min\{c^t x : x \in S^{(i)}\}$ $i = 1,2$

* le soluzioni intere sono:

$$X^{(0)} = \{x \in \mathbb{Z}^n : Ax = b ; x \geq 0\}$$

figlio ① → $X^{(1)} = \{x \in \mathbb{Z}^n : Ax = b; \; x \geq 0, \; x_i \leq \lfloor x_i^{(0)} \rfloor \}$

figlio ② → $X^{(2)} = \{x \in \mathbb{Z}^n : Ax = b; \; x \geq 0, \; x_i \geq \lceil x_i^{(0)} \rceil \}$

valgono sempre i seguenti

$X^{(0)} = X^{(1)} \cup X^{(2)}$ — metodo corretto → "non perde soluz intere"

$X^{(1)} \cap X^{(2)} = \emptyset$ — metodo efficace → "partiziona in maniera vantaggiosa"

RISPOSTA A "quando smetto di branchare?"

CRITERI DI FATHOMING

Voglio evitare di esplorare tutti i figli quando è possibile.
Qui alcuni criteri di decisione:

1. rilassamento continuo è impossibile

I vincoli iniziali $Ax=b$, $x \geq 0$ sono incompatibili con i vincoli di branching relativi al percorso per arrivare al nodo corrente.

=> se spezzo e do origine a una regione vuota mi fermo

=> come fa a succedere? i vincoli hanno semipiani opposti quindi intersez nulla => nodo chiuso

2. rilassamento continuo da una soluzione intera

Ho già trovato l'ottimo! Senza apposto

=> se spezzoni ancora, non troverei nulla di migliore

3. regola di bounding

Termino la suddivisione in sottoproblemi sfruttando info da altre parti dell'albero

=> risolvendo il rilassamento continuo, scopro che è peggiore della miglior soluz intera che ho già trovato

▶ CRITERI DI BOUNDING

Suppongo di aver trovato x^e soluz AMMISSIBILE intera: $c^T x^e \geq z^*_{PLI}$

Considero un nodo k qualsiasi:

$$z_k = \min\{c^T x : x \in P_k\}$$
$$\leq$$
$$\min\{c^T x : x \in X_k\}$$

soluz intere per nodo k

$X_k = P_k \cap \mathbb{Z}^n$

soluz $\mathbb{R}$ per nodo k (rilass continuo) — punti interi del problema

=> $\boxed{z_k \geq c^T x^e}$ allora è inutile proseguire il branching da questo nodo k trovato

---

in P_2 ho il rilass che mi da $z^* \in \mathbb{Z}$ $z^* = 71 \equiv z^*_{PL}$ Lower Bound x tutto l'albero

=> la segno e continuo ad analizzare altri nodi

in P_3 il rilassam mi da $w^* \notin \mathbb{Z}$ $w^* = 83.5$

=> il sotto albero che genero ha come sol di partenza 83.5 PEGGIORE di 71

e questo essendo la prima soluz è un LOWER BOUND 71

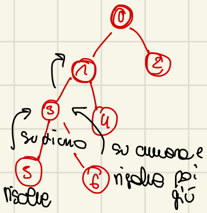
mi metto ad analizzare il 71 piuttosto

la soluz del relax continuo del padre è un lower bound per i figli

VEDI ESEMPIO NEL FILE: BranchandBound

STRATEGIE DI ESPLORAZIONE: CRITERI DI BACKTRACKING

se branching risolve TUTTO il sottoalbero di un nodo prima di passare al fratello



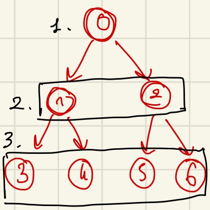
1. **Tecnica Depth First (ricerca in profondità)** → backtracking per somm problemi

   Dato un nodo padre si considera immediatamente il primo dei suoi due figli, finché una delle condizioni di fathoming non costringe l'algoritmo a risalire di livello.

   sfrutta la ricorsività dei rilassati P_1? come genero da $P_0 \to x^*_{(0)}$ => genero vincolo
   => quindi sfrutterò il tableau ottimo già ed elimino un vincolo < torna

   Vantaggi: arriva velocemente a soluzioni ammissibili; pochi nodi aperti in memoria; implementazione più semplice perché sfrutta la ricorsività del linguaggio;

   Svantaggi: in caso di scelta errata si ritorna indietro solo dopo aver attraversato tutto il sotto-albero sbagliato.



2. **Tecnica Breadth First (ricerca in ampiezza)**

   Si espande interamente ogni livello dell'albero. Si risolvono **tutti** i nodi di un livello e solo successivamente si passa al livello successivo, considerando i figli dei nodi appena elaborati.

   chiude i livelli prima non scende in profondità

   Vantaggi: visita l'albero in maniera bilanciata;

   Svantaggi: molti nodi aperti in memoria; difficile aggiornamento della soluzione imperante (ottimo corrente).

3. **Tecnica Best-Bound (ricerca sulla limitazione)**
Si sceglie il nodo non ancora elaborato con maggior potenziale (più promettente) guardando il valore del rilassamento continuo (problema di minimo). Due possibili varianti:

AMMISSIBILITÀ

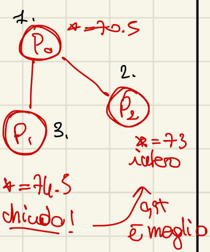
- **Best-Bound Feasibility** (*promettente* = valore maggiore del rilassamento continuo) scelgo un intero ammiss segno il sottoprobl con ottimo >

OTTIMALITÀ

- **Best-Bound Optimality** (*promettente* = valore minore del rilassamento continuo) se voglio prima la sol ottima, e volte segno la minore

Vantaggi: vengono analizzati mediamente meno nodi; aggiornamento della soluzione imperante veloce.

Svantaggi: molti nodi aperti in memoria (soprattutto optimality).



OSSERVAZIONE: ho in mano un ottimo intero > del rilass ottimo di un nodo ricavato in un modo qualsiasi

⇒ a logica potrei fermarmi

ma se continuo posso trovare ~~multipli~~ ottimi multipli chiudendo i nodi

(ex. una soluz per la produz di un prodotto coinvolge linee vecchie, ma lo stesso lo posso ricavare usando delle linee nuove)

ogni padre è LOWER BOUND per i problemi figli

STRATEGIE DI ACCELERAZIONE (prob di min)

Il bounding è tanto più efficace quanto più sono buone le soluzioni ammissibili (UPPER BOUND) trovate DURANTE la RICERCA, e quanto è più STRINGENTE il rilassamento continuo (LOWER BOUND) nei nodi. Quindi:

1. inizializzo BAB con una soluz euristica: così ho una soluzione intera con cui fare bounding fin da subito
2. applicare procedimenti euristici durante l'esplorazione dell'albero con una certa frequenza
3. ricorrere a una formulaz stringente del PLI: con un rilassato migliore posso chiudere prima il problema

così è più stringente il LOWER BOUND

OSSERVAZIONI SUL METODO:

SCEGLIE VAR:
peggiore: a caso
greedy: parte fraz maggiore
migliore: parte fraz vicino a 1/2
che cazzo vor dì

- Si possono combinare tra loro più tecniche di esplorazione dell'albero oppure implementarne di più complesse (backtracking);
- è spesso importante decidere su quale variabile fare branching, nel caso ce ne sia più di una frazionaria (random, quella a parte frazionaria maggiore, quella a parte frazionaria più prossima a 1/2, etc.);
- si possono utilizzare rilassamenti diversi da quello continuo (esempio: rilassamento Lagrangiano);
- nel caso di problemi puramente binari, il branching degenera nel fixing di una variabile a 0 o a 1 (eliminandola di fatto dal sottoproblema);

  un figlio ottiene 0 e uno 1 così ho fissato la x_i a un val intero
- ~~si possono utilizzare tecniche di branching più complesse (vincoli di branching che coinvolgono più di una variabile, strong branching).~~

  solo informativo

vabbeh da qua poi c'è l'esempio de l'esercizio (scritto sul quadernetto)

29/05/2023 FILE: 10 grafi

* TEORIA DEI GRAFI

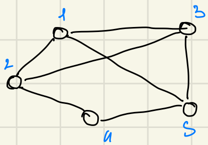
• Un po' di definizioni

VERTICI ADIACENTI: legati da un lato

caso particolare

Definizione: grafo non orientato

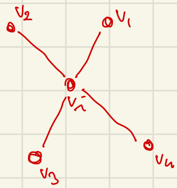
Un *grafo non orientato* (o indiretto) è una coppia $G = (V, E)$ in cui V è un insieme finito di *n vertici* $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ ed $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ è un insieme finito di *m lati o spigoli*, dove ogni lato $e_k = (v_i, v_j)$ è formato da una coppia non ordinata di vertici distinti v_i, v_j detti estremi del lato.



• Indichiamo Γ l'insieme dei vertici adiacenti (star) ad un vertice dato. totalità dei vicini

$\Gamma(v_1) = \{v_2 ; v_3\}$

• I lati adiacenti sono quelli che condividono un vertice ad esempio (v_1, v_2) (v_1, v_3)



GRADO

Definizione: grado di un vertice

Il numero di lati incidenti in un vertice v viene detto *grado* del vertice e si indica con $\deg(v) = |\Gamma(v)|$.

cardinalità dell'insieme dei vertici adiacenti a v_i è il numero di lati che in v_i incidono

COMPLETO

Definizione: grafo completo

Un grafo si dice *completo* se contiene tutti i possibili lati cioè se tutte le coppie di vertici sono adiacenti $E = \{(v_i, v_j) : v_i, v_j \in V, v_i \leq v_j\}$.

• ∃ tutti i lati possibili. generabili

• è completamente magliato

OSSERVAZIONE: qual è il legame lati - vertici?

sia n il numero dei vertici e sia G un grafo COMPLETO

∃ allora $\binom{n}{2}$ lati (ovvero combinazioni di vincoli a due a due) (senza ordine!)

• ∀ grafo possiamo andare a definire...

CAMMINI

CAMMINO E CICLO

Definizione: cammino

Dato un grafo indiretto $G = (V, E)$, si dice *cammino* tra i vertici v_1 (inizio) e v_{k+1} (fine) una sequenza $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\} \subseteq E$ di lati tali che ciascuno è adiacente al successivo ossia $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_2, v_3), \cdots,$ $e_k = (v_k, v_{k+1})$.
Un cammino è detto **ciclo** se $v_1 = v_{k+1}$.

inizia dove termina

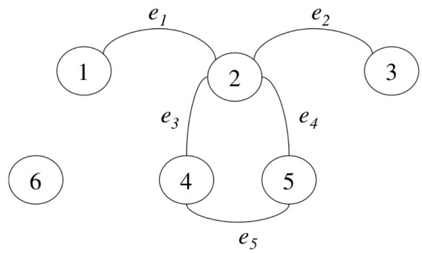


Figura: Grafo non connesso: esempio di cammino.

semplice: passo una volta per lato

elementare: passo una volta per vertice

Definizione: cammino semplice e cammino elementare

Un cammino si dice **semplice** se non usa lo stesso lato più di una volta, mentre è **elementare** se non usa mai due volte uno stesso vertice.

VERTICI E GRAFI CONNESSI

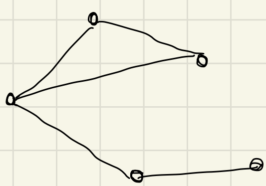
Definizione: vertici connessi

Due vertici v_i e v_j si dicono *connessi* se esiste almeno un cammino che li collega.

Definizione: grafo connesso

Un grafo si dice *connesso* se ogni coppia di vertici è connessa.

un grafo non è connesso se ∃ almeno un vertice non raggiungibile dagli altri



grafo connesso non completo

SOTTOGRAFO E ALBERO DI SUPPORTO

Definizione: sottografo

Un grafo $G' = (V', E')$ è detto *sottografo* di $G = (V, E)$ se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Un sottografo G' è detto *grafo parziale* di $G = (V, E)$ se $V' = V$.

SOTTOGRAFO parte dei vertici e lati

SOTTOGRAFO PARZIALE: tutti i vertici e parte di lati

non orientato → il cammino minimo invece sì

Definizione: albero di supporto

Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$ si dice *albero di supporto* (o albero ricoprente) per G il grafo parziale $G'(V, E')$ connesso e privo di cicli.

NB. i problemi di ricerca dell'albero di supporto a costo minimo sono FACILI

trovo un albero di supporto se, dato un grafo connesso, rimuovo un lato (e privo di cicli)

* QUANTI ALBERI DI SUPPORTO ESISTONO?

sia G con n vertici (V) e m lati (E). Un AdS contiene tutto V e non E, è connesso e privo di cicli.

⇒ In quanti modi posso avere un grafo connesso e privo di cicli? (senza usare tutti i lati)

∃ 2 tipi di problemi per la TH dei grafi:

- albero di supporto (non orientato)
- cammino minimo (orientato)

usati nei problemi di accoppiamento e assegnazione di mansioni
↓
se ho +2 sottoins. allora anche prob del trasporto

Definizione: grafo bipartito

Un grafo si dice *bipartito* se esiste una partizione dell'insieme dei suoi vertici V in due sottoinsiemi disgiunti V_1 e V_2 tale che ogni lato del grafo abbia un estremo in V_1 e l'altro in V_2.

OSSERVAZ: i grafi bipartiti sono privi di cicli dispari e se un grafo contiene cicli dispari, non è bipartito

* PROPRIETÀ ELEMENTARI DEI GRAFI

$\boxed{\text{TH 1}}$

Teorema 1

Dato un grafo $G = (V, E)$ con m lati si ha che

$$\sum_{v \in V} \underbrace{deg(v)}_{\text{grado dei vertici}} = 2\overbrace{m}^{\text{num lati}}$$

la somma di tutti i gradi è uguale a $2 \cdot m$

Corollario

In ogni grafo il numero di vertici di grado dispari è pari.

DIM SEMPLICE ED IMMEDIATA:

posso riscrivere $\sum_v deg(v) = 2m$

OSSERVAZ: chiamo V_p vertici grado pari, V_d vertici grado dispari $\Rightarrow \sum_{V_p} deg(v) + \sum_{V_d} deg(v) = 2m$

$\Rightarrow$ $2m$ è numero pari, ma la sommatoria dei gradi dei vertici con grado pari è SICURAMENTE pari

$\Rightarrow$ per forza allora la sommatoria dei gradi dispari dovrà essere anch'essa un numero pari

vertice su cui insistono 5 lati:

$\Rightarrow$ il numero di questi è pari esempio: raccolta rifiuti con camion

* PROBLEMI HAMILTONIANI

Definizione: cammini e cicli hamiltoniani

Un cammino, o un ciclo, si dice **hamiltoniano** se visita tutti i vertici del grafo una e una sola volta. Un grafo che contenga almeno un ciclo hamiltoniano è detto **grafo hamiltoniano**.

proprietà hamiltoniana : il ciclo o cammino visita TUTTI i vertici UNA E UNA SOLA volta.

↓

grafo vuole un ciclo hamiltoniano!

esistono di solito delle condiz. semplici per verificare la proprietà di un grafo

⇒ non vale per i grafi in cui cerco cicli hamiltoniani

caso grafo con + di 3 vertici

Grafi hamiltoniani

Non sono note condizioni "semplici" per verificare se un dato grafo $G = (V, E)$ con $|V| \geq 3$ sia hamiltoniano oppure no. Banalmente:

necessaria

1. condizione necessaria (ma non sufficiente): G deve essere connesso, con vertici tutti di grado ≥ 2;

sufficiente

2. condizione sufficiente (ma non necessaria): ogni vertice del grafo ha grado maggiore o uguale a $|V|/2$ (Teorema di Dirac).

NB. un grafo completamente connesso è di sicuro hamiltoniano

CONDIZIONE SOLO SUFFICIENTE

EXTRA: TH DI DIRAC È CONOSCIUTO ANCHE COME IL TH DI ORE

Un grafo è hamiltoniano se comunque io prendo due vertici v_i, v_j non adiacenti [$(v_i, v_j) \notin E$] vale che:

$$\underbrace{deg(v_i)}_{\geq \frac{n}{2}} + \underbrace{deg(v_j)}_{\geq \frac{n}{2}} \geq n$$

$n \to |V|$

⇒ il grado di ciascun vertice deve essere almeno uguale a $\frac{n}{2}$

dirac è il caso particolare infatti dice che ogni vertice deve avere grado $\geq \frac{|V|}{2}$, ma valendo per entrambi

v_i e v_j ho $\geq \frac{|V|}{2} + \frac{|V|}{2} = |V|$

⇒ ritrovo ORE

VARIANTE SUI LATI

ex: raccolta rifiuti porta a porta
↓
ogni conc. non è più un vertice come i concetti dei prob hamiltoniani
⇒ ho le cose sulle vie che considero lati da percorrere

ciclo a costo minimo euleriano è FACILE

* PROBLEMI EULERIANI

cammino: sequenza di lati adiacenti
ciclo: cammino chiuso

Definizione: cammini e cicli euleriani

Un cammino, o un ciclo, si dice **euleriano** se attraversa tutti i lati del grafo una e una sola volta. Un grafo che contenga almeno un ciclo euleriano è detto **grafo euleriano**.

ma questo problema è facile e computazione. diverso da quello hamiltoniano

Grafi euleriani

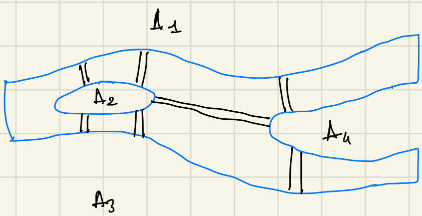
Eulero ha individuato la condizione necessaria e sufficiente affinché un grafo non orientato sia euleriano:

Teorema di Eulero (grafi indiretti): Un grafo indiretto $G = (V, E)$ è euleriano se e solo se è connesso con vertici tutti di grado pari.

↳ condizione necessaria e sufficiente per i grafi non orientati

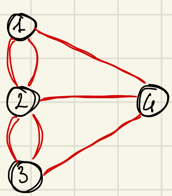
* uno stesso problema modellizzato in due modi diversi può essere risolto in maniera diversa (raccolta spazzatura - Euleriano vs Hamiltoniano)

DILEMMA DEI PONTI DI KÖNIGSBERG



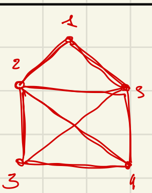
Ci sono 7 ponti in totale.

* È possibile per chi abita in una A_i qualsiasi, attraversare tutti i ponti una ed una sola volta e poi tornare a casa?
Eulero: no, non è un grafo euleriano



∃ vertici con grado dispari ⇒ TUTTI 4 vertici con grado dispari

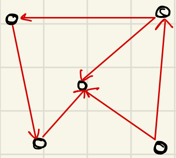
↑ multigrafo: ∃ per due stessi vertici più di un lato



→ va in contrasto al TH di eulero?
$\Gamma(v_1 v_2 v_5) = $ pari
$\Gamma(v_3, v_4) = $ dispari → 2 vertici con grado dispari (sempre in num pari)

⇒ NON È EULERIANO!

in realtà non ho seguito un ciclo euleriano, non sono rientrato nello stesso nodo
⇓
∃ solo UN CAMMINO EULERIANO
devo partire da un vertice con grado dispari, anche il nodo finale dovrà avere grado dispari
(∃ un cammino euleriano ∀ coppia a grado disp)



GRAFO ORIENTATO

Definizione: grafo orientato

Un *grafo orientato* (diretto) è una coppia $G = (V, A)$ in cui $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ è un insieme finito di n nodi ed A è un insieme finito di m archi, dove ogni arco (v_i, v_j) è una coppia ordinata di nodi.

Definizione: nodi raggiungibili

Un nodo v_j è **raggiungibile** dal nodo v_i se esiste almeno un cammino (orientato) da v_i a v_j.

non si parla più di connessione ma raggiungibilità

Definizione: grafo connesso

Un grafo orientato G si dice **connesso** se il grafo ottenuto ignorando il verso di percorrenza degli archi è connesso.

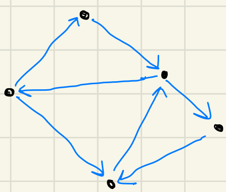
Definizione: gradi di un nodo

Ogni nodo v del grafo ha:

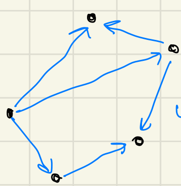
- un insieme di nodi successori (**forward star** $\Gamma^+(v)$) e un **grado uscente** ($deg^+(v) = |\Gamma^+(v)|$) che rappresenta il numero di **archi uscenti** da v;
- un insieme di nodi predecessori (**backward star** $\Gamma^-(v)$) un **grado entrante** ($deg^-(v) = |\Gamma^-(v)|$) che rappresenta il numero di archi **entranti** in v.
- $deg(v) = deg^-(v) + deg^+(v)$.

Definizione: grafo fortemente connesso

Un grafo orientato G si dice **fortemente connesso** se comunque presa una coppia di nodi esiste un cammino orientato che li collega (ogni nodo è raggiungibile da qualsiasi altro nodo del grafo).



fort connesso



non fort connesso

* RAPPRESENTAZIONE DI GRAFI MEDIANTE MATRICI

$|E|$

$$D = |V| \begin{bmatrix} 1 \dots 0 \dots 1 \; 0 \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$d_{ij} = \exists$ un vertice i su cui incide il lato j

MATRICE INCIDENZA VERTICI-LATI (GRAFO INDIRETTO)

Definizione: matrice di incidenza per un grafo non orientato

La *matrice di incidenza vertici-lati* D di un grafo non orientato $G = (V, E)$ è la matrice $|V| \times |E|$ con elementi

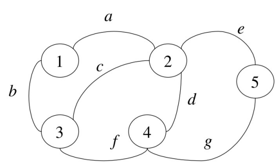
$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il } j\text{— esimo lato è incidente nel vertice } i, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

m colonne (lati)
×
n righe (nodi)

NB. Ogni riga ha tanti 1 quanto il suo grado

NB. Ogni colonna (lato) avrà due elementi "1", essendo gli estremi del lato i

ESEMPIO:



lati - i

nodi - i

	a	b	c	d	e	f	g	
1	1	1	0	0	0	0	0	= 2
2	1	0	1	1	1	0	0	= 4
3	0	1	1	0	0	1	0	= 3
4	0	0	0	1	0	1	1	= 3
5	0	0	0	0	1	0	1	= 2

$\Rightarrow \sum_i d_i = 10 = 2 \cdot 5 = 2m$ V

$\sum_i \deg(v_i) = 2m = \sum_i d_i$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Il grafo in figura è bipartito? Un grafo è bipartito se e solo se non contiene cicli dispari. Poiché il grafo contiene il ciclo dispari $\{a, c, b\}$ non è bipartito.

- Qual è il determinante della matrice di incidenza associata a questi tre lati? = det nullo
- La matrice di incidenza vertici-lati è $\boxed{\text{TUM}}$ se e solo se il grafo è bipartito.

=

- grafo bipartito <=> matrice TUM

↓

∃ partizione vertici (questa è rotta dalla presenza di cicli dispari) => ∃ partizione di righe (tutti elementi non nulli sono concordi quindi le righe vanno in insiemi diversi)

GRAFO BIPARTITO È CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE

MATRICE INCIDENZA NODI ARCHI (grafo orientato)

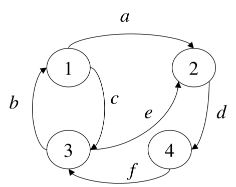
a differenza del grafo non orientato, ho sempre le colonne con 2 elementi $\neq 0$, ma stavolta sono discordi

Definizione: matrice di incidenza per un grafo orientato

La *matrice di incidenza nodi-archi* D per un grafo orientato $G = (V, A)$ è la matrice $|V| \times |A|$ con elementi

$$d_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{se il } j-\text{esimo arco è uscente dal vertice } i, \\ -1 & \text{se il } j-\text{esimo arco è entrante nel vertice } i, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ESEMPIO



	a	b	c	d	e	f
1	1	-1	1	0	0	0
2	-1	0	0	1	-1	0
3	0	1	-1	0	1	-1
4	0	0	0	-1	0	1

NB. le matrici di incidenza nodi-archi sono TUM

$\Rightarrow$ grazie alle colonne con 2 elementi non nulli e discordi con la partizione di righe esiste e la cond. sufficiente è banalmente confermata

$\Rightarrow$ il problema è facile

sia le righe che le colonne sono i vertici

MATRICI DI ADIACENZA

Sono quadrate. m=n, sia per grafo orientato che indiretto.

Definizione: matrice di adiacenza

La **matrice di adiacenza** Q per un grafo non orientato G=(V,E) o orientato G=(V,A) è la matrice $|V| \times |V|$ con elementi

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in E \text{ (oppure } A\text{)}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

NB. nel caso di mat di adiacenza per grafi non orientati ho matrici SIMMETRICHE (è ovvio, se $\exists a_{ij} = 1$ allora anche $a_{ji} = 1$)

* nei grafi orientati questa costruzione non è banale, di solito non è simmetrica.

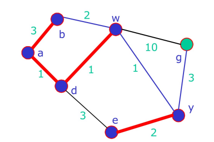
GRAFI PESATI: si parte da una matrice di adiacenza

$$\begin{cases} 1 \rightarrow \text{"peso" dell'arco} \\ 0 \rightarrow \infty \quad \text{non c'è la connessione} \end{cases}$$

connesso
privo di cicli
⇓ sufficiente
albero

05/06/2023 FILE: minimum_spanning_tree

* CONCETTI SUGLI ALBERI



Foresta con due alberi

1. Un albero in un grafo $G=(V,E)$ è un sottografo connesso di G contenente k vertici e $k-1$ lati
2. Un albero è detto di supporto o massimale se $k=n$ ovvero se è un grafo parziale contenente tutti i vertici di G.
3. In ogni albero ogni nodo avente grado 1 è detto foglia
4. Un grafo le cui componenti connesse sono alberi è detto foresta (= grafo aciclico formato dall'unione di alberi disgiunti)

PROPRIETÀ ALBERI

Teorema

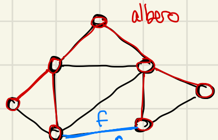
Valgono le seguenti proprietà:

DEF ALBERO:

1. un grafo è un albero se e solo se è connesso e privo di cicli;
2. ogni albero contenente più di un vertice contiene almeno una foglia;
3. in un albero ogni coppia distinta di vertici è connessa da uno e un solo cammino;

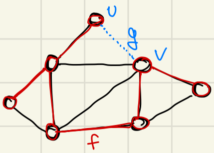
DEF CICLO FONDAMENTALE:

4. se ad un albero si aggiunge un lato il grafo risultante contiene uno e un solo ciclo detto *ciclo fondamentale*.



se aggiungo "f" all'albero trovo un ciclo
⇒ il suo ciclo fondamentale

TH DELLO SCAMBIO:



▶ se tengo il lato con cui ho trovato il ciclo fondamentale e ne scarto un altro non collegato ad una foglia, trovo un altro albero

* per il MST ∃ una doppia modellizzazione... prima il contesto comune

questo tipo di modellizzazione si usa per i problemi di reti

▶ **MST**: problema dell'albero a costo minimo

Sia $G=(V,E)$ un grafo non orientato, con $|V|=n$ ed $|E|=m$
Ogni lato $e \in E$ è associato ad un costo c_e.

⇒ il problema MST trova l'albero ricoprente $G_T=(V,T)$ ossia un grafo connesso e privo di cicli contenente tutti i nodi del grafo, avente costo minimo.

notazione:

$$E(S)=\{e=(i,j) \mid i \in S, j \in S\}$$
$$\delta(S)=\{e=(i,j) \mid i \in S, j \in V \setminus S\}$$

* **MST (1)**

Caratteristiche: → 1. grafo aciclico
↘ 2. grafo contenente n-1 lati

$$(MST1) \quad \min \sum_{e \in E} c_e x_e$$
$$\sum_{e \in E} x_e = n-1$$
$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S|-1 \quad \forall S \subset V : S \neq \emptyset \quad (2)$$
$$x_e \geq 0 \text{ intero}, e \in E$$

OSSERVAZIONE: i vincoli (2) sono i subtour-elimination e sono in numero esponenziale

* MST (2)

Caratteristiche: → 1. grafo connesso
↘ 2. grafo contenente n-1 lati

$$(MST2) \quad \min \sum_{e\in E} c_e x_e$$

$$\sum_{e\in E} x_e = n-1$$

$$\sum_{e\in\delta(S)} x_e \geq 1 \quad \forall S \subset V : S \neq \emptyset \quad (S)$$

$$x_e \geq 0 \text{ intero}, e \in E$$

OSSERVAZIONE: i vincoli (S) sono i connectivity constraints e sono in numero esponenziale

OSSERVAZIONI:

- le variabili x_e hanno significato <=> hanno dominio binario {0,1}
  Ma comunque MST1, MST2 li definisce intero
  Perché? Boh forse è perché è un rilassamento
- MST ha tempi polinomiali => FACILE

ALGORITMO DI KRUSKAL

- algoritmo greedy, usa scelte con criterio locale e non le riconsidera dopo
- algoritmo esatto, complessità $O(m \cdot \log n)$ con strutture dati UNION FIND

Algoritmo di Kruskal:

$T := \emptyset$
ordina E per costi non decrescenti in una lista ordinata L;
repeat
  individua il primo lato e (a costo minimo) appartenente a L
  $L := L \setminus \{e\}$
  if $T \cup \{e\}$ non ha cicli **then**
    $T := T \cup \{e\}$
  end if
until $|T| = n-1$

prova tutti i lati
butta via quelli che generano cicli
si ferma quando ne ho selezionati (n-1)

KRUSKAL INVECE EVITA I CICLI

usa il concetto di connettività

ALGORITMO DI PRIM

"Parte da un vertice e costruisce una componente"

Alternativa a Kruskal basata sul concetto di selezione del lato a costo minimo appartenente ad un insieme δ(S) (tutti i lati che collegano un insieme di vertici dati, al resto del mondo) detto taglio dove S è un sottoinsieme di nodi inizialmente a cardinalità 1 che cresce di ogni passo fino all'inserimento di n-1 lati.

31/05/2023

• ESERCITAZIONE 4 : fine

• ESERCITAZ 5

5/06/2023

vetrina ezz mancini

Kruskal e Prim sono esercizi facili

minzo: algoritmo di Prim

FCE: commesso viaggiatore

poi FCO: shortest path facciamo solo parte A e la parte B è per l'orale

---

CONCLUSIONE VEDIAMO UN TE

come si risolve? descrizione (con definizioni)

gennaio 2022,

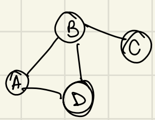
→ introduci il TSP → ciclo hamiltoniano con costo minimo ⇒ grafo hamiltoniano

100% ha soluzione!

→ dai esempio di grafo non orientato, connesso con almeno 4 lati 4 vertici e senza soluzione

vedo la COND. NECESSARIA

→ ogni nodo ha grado ≥ 2



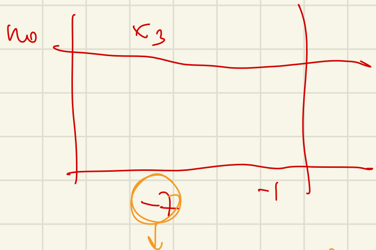
sium!

legame fra termini (archi) noti e soluzione degenere

Vero o Falso:

1. amiss nuova sol base dopo pivot, garantita da:

→ entrata in base da CCR minore



(ottimalità)

migliora di -7 (unità) la FO

STABILISCO

CCR migliore ⇒ PIÙ PROMETTENTE → DIREZIONE SIMPLEX

l'ammissibilità è data dalla uscente ⇒ rapporti minimi

↓

dà il valore che ammetterei in base

↓

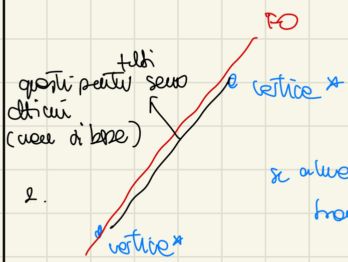
la variab con rapporto non minore manda alcune var a valore NEGATIVO

↓

esco dalla reg. ammissibile

bland non bypassa ammissibilità

2.



se almeno 2...

trovo un segmento

3. due fasi: prob impossibile?

dopo prima fase val artif rimangono in base con valore $\neq 0$

condiz degenere ma non riguarda l'impossibilità

questo riguarda x la seconda base

4. P^* relax

Q^* duale → se impossibile quindi P^* impossibile

dalla PL, Q^* impossib $\Rightarrow$ P^* illim o impossibile

$\Rightarrow$ devi fare la considera

DUALITÀ FORTE:

P^* imp $\Rightarrow$ Q^* imp

P^* illim $\Rightarrow$ Q^* imp o illim

minuto 1:00:00