CIRCUITI

20/02/23

$i(t,x) = I_0 \sin(\omega(t - \frac{x}{c}))$

$\Delta t = \frac{\ell}{c}$

si propaga alla velocità della luce

considero $\ell$ dimensione del circuito

=> mi interessano gli ordini di grandezza, niente quantitativo

## CIRCUITI A PARAMETRI CONCENTRATI

i fenomeni della propagazione sono trascurabili
=> dimensioni circuiti <<< lunghezza d'onda
$\Delta t <<< T$

la corrente è una funzione del tempo e dello spazio
=> se $\Delta t$ è trascurabile allora le sinusoidi che descrivono la corrente in diversi punti del circuito possono essere approssimate e considerate uguali

dimostrazione: scrivere $\Delta t << T$ non esprime bene la condizione → uso qualcos'altro

$t = \frac{\text{spazio}}{\text{velocità}}$ quindi $\Delta t << T$ → $\frac{\ell}{c} << T$ (metri)

$T = \frac{1}{f}$ hertz introduco $\lambda = \frac{c}{f}$ [m] la lung onda

che definisce il "periodo spaziale" dell'onda

$\frac{\ell}{c} << \frac{1}{f}$ → $\frac{\ell}{\cancel{c}} << \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{\cancel{c}}$ => $\ell << \lambda$

questa approssimazione cade se
- circuito molto grande
- $\lambda$ molto piccolo, $f$ molto grande

esempio
[DC] ↓
tensioni e correnti costanti
=> sinusoide con freq nulla
$f = 0$ $\lambda \to \infty$
↳ CASO STATICO

PROPRIETÀ A PARAM CONCENTRATI
- interconnessioni
  - conduttori ideali → scorre corrente costante nello spazio, fili equipotenziali
- scambi energetici solo dentro i componenti
- componenti sono SCATOLE ed interagisco solo coi suoi terminali (black box) → le descrivo con relazioni caratteristiche

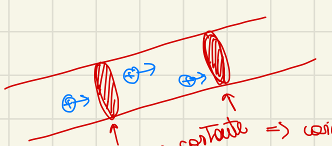
+ CONSEGUENZA
conta solo la topologia del circuito, il resto non influenza il suo funzionamento

COS'È LA CORRENTE: vedi libretto di centurelli

un flusso di cariche q (positive e negative, per convenzione +) in un'unità di tempo
- costante lungo i conduttori ideali (nello spazio)

$i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$ qnt di carica che fluisce in una sezione del filo al momento

$i(t) = \frac{dq}{dt}$ $\Delta q = \int_0^{\Delta t} i(t)dt$



sezione costante => cariche che scorrono sono quelle
=> la corrente è costante lungo il conduttore

i<0: la corrente scorre nel verso opposto al riferim.

VERSO CORRENTE:

é importante scegliere un verso di riferimento UNICO per il circuito

=> se risultano da calcoli correnti negative: ho solo usato un riferimento diverso, non sbagliato

## TENSIONE

DEF: variazione di energia W per unità di carica q

non dipende dal percorso seguito ed i conduttori ideali sono equipotenziali

cond ideale ha la stessa corrente in ogni punto e la tensione non cade => stessa portata e stessa energia

$$V_{ab} = \frac{\Delta W}{q} = \frac{W(a) - W(b)}{q} = V(a) - V(b)$$

polarità

a • +
b • − $V_{ab}$

coppia di segni COMPLETAMENTE arbitraria

=> se poi $V>0$ polarità coincide al riferimento scelto

$V<0$ non coincide

DC: corrente continua => costante ad un valore

AC: corrente alternata => grafico sinusoidale

concetto che non useremo mai

DEF RAMO: rappresenta un bipolo e si estende banalmente ai multipoli

DEF NODO: punto con 2+ componenti (o rami) connessi

sequenza di nodi: seq che inizia e termina con lo stesso nodo e incontra gli altri una sola volta

tripolo = 2 bipoli

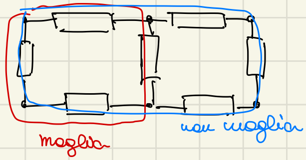
un n polo equivale a n−1 bipolo

CIRCUITO CONNESSO: esiste almeno un cammino nel circuito stesso che connette qualunque coppia di nodi (componenti collegati direttamente tra terminali)

CIRCUITO PLANARE: se può essere disegnato su un piano senza intersezioni tra fili e che questo non sia un nodo. posso sempre ridisegnarli fino a vedere bene la planarità

**MAGLIA:** dato un circuito planare, è un qualunque percorso (seq) chiuso nel circuito (di nodi) che non contiene componenti interni

- proprietà: un circuito planare e connesso con n nodi e composto da b bipoli ha $m = b - n + 1$ maglie
- le maglie andrebbero cercate solo dopo aver disegnato il circuito in formato planare intelligente




**TENSIONI DI NODO:** un set di valori (di tensione)

di solito non indico il riferimento

- scelgo un nodo di riferimento ⇒ come se decidessi che questo nodo ha potenziale 0
- la tensione su OGNI RAMO è espressa come diff $V_{ab} = V_a - V_b$

nel circuito disegno ⊖ sul riferimento e ⊕ negli altri nodi

⇒ LKT applicato a seq a-b-RIF-a ← le tens. di nodo sono importanti perché mi permettono di scrivere 0 usando LKT

**LEGGI DI KIRCHHOFF:**

**1 CORRENTI** deriva dalla conservazione della carica

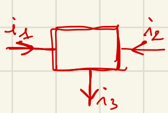
$\sum_k i_k(t) = 0$ somma correnti IN/OUT ad una superficie chiusa è nulla

⇒ RIFORMULAZIONE: vale anche per i nodi

- conseguenze:

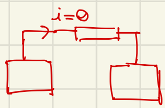
la corrente IN e OUT da un bipolo non cambia


un N polo ha N-1 correnti indip




$i_3 = i_1 + i_2$

un monopolo non ha senso




$i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$

$Q = I \cdot T$

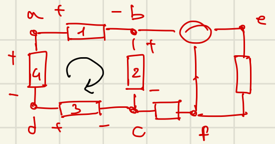
× **TENSIONI** deriva dal fatto che il campo elettrostatico è conservativo

NON SIAMO IN CASO STATICO ma siamo a PARAM. CONCENTRATI ∼ FREQ NULLA ∼ STATICO

$\sum_k V_k(t) = 0$ una carica che si muove lungo un percorso chiuso ha una variazione di energia nulla

⇒ RIFORMULAZIONE: la somma delle $V_k$ in una seq chiusa di nodi è nulla

esempio.



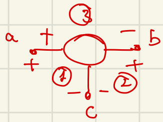

$V_1+V_2-V_3-V_4=0$

$V_1+V_2=V_3+V_4$

il verso di percorrenza è totalmente arbitrario

• conseguenze:

un N polo ha N-1 tensioni indipendenti




c-a-b-c: $-V_1+V_3+V_2=0$

b-a-c-b: $-V_3+V_1-V_2=0$

a-b-c-a: $V_3+V_2-V_1=0$

concetto

**TENSIONE DI NODO**

Si sceglie un nodo di riferimento, arbitrario. È implicito, non lo indico

Calcolando la tensione in ogni altro nodo rispetto a quello di riferimento, trovo la TENSIONE DI NODO.

* la tensione su ogni ramo può essere espressa come differenza tra le tensioni di nodo relative ai nodi cui è connesso
  ⇒ applico LKT alle sequenze chiuse

27/02/2023 CONCETTO DI EQ INDIPENDENTI

**LEGGE DI KIRCHHOFF CORRENTI**: dal principio di conservazione della carica $\sum_k i_k(t) = 0$

"la somma algebrica delle correnti che entrano/escono in una superficie chiusa è nulla. la somma algebrica delle correnti che entrano/escono in un nodo è nulla."

- Conseguenze:
  - la corrente entrante in un bipolo è uguale a quella uscente.
  - N-polo è caratterizzato da N-1 correnti indipendenti.

il monopolo non ha senso

**LEGGE DI KIRCHHOFF TENSIONI**: dalla proprietà conservativa del campo elettrostatico $\sum_k v_k(t)=0$

"Una carica che si muove lungo un percorso chiuso presenta una variazione di energia nulla (HP: parametri concentrati)

la somma algebrica delle tensioni (var. energia per unit. carica) lungo una sequenza chiusa di nodi è nulla".

possiamo scrivere LK per ogni sp. chiusa ma in realtà ci interessano solo quelle che contengono almeno un nodo.

- Conseguenze:
  - un N-polo è caratterizzato da N-1 tensioni indipendenti

- posso sezionare il circuito come sottocircuito connesso di un altro

$\Rightarrow$ rimane valida la legge di conservaz. della carica

sempre possibile

- **EQ. INDIPENDENTI (LKC) ENUNCIATO + DIMOSTRAZIONE**

Applicando la LKC a tutti i nodi di un circuito connesso, tranne uno, si genera un insieme di equazioni linearmente indipendenti

"un polo è caratterizzato da N-1 correnti"

Dim:

ipotesi assurda $k \leq n-1 \Rightarrow k$ eq sono dipendenti cioè $\exists$ almeno un $k_i$ coeff $\neq 0 \times CL = 0$

- sappiamo circuito connesso $\Rightarrow$ separo $k$ nodi e $(n+1, n)$ nodi in due insiemi
  - $\Rightarrow \exists$ un ramo che li connette quindi la corrente di questo sta in 1 sola eq nelle $k$ eq dipendenti
  - $\Rightarrow$ il suo coeff è per forza 0
- posso ripetere questo ragionamento fino a $k=n-1$ aggiungendo 1 eq al risultato precedente $\Rightarrow$ l'ipotesi rimane assurda
- presi $n$ nodi crolla: sono certam. dip $\Rightarrow$ ho tutto insieme, le correnti appaiono in un eq con il $\oplus$ e in una con il $\ominus \Rightarrow$ trovo sempre CL per DIPENDENZA

essendo connesso trovo tutte le i nelle eq

con m maglie n nodi
⇒ $m = b - n + 1$ equazioni

## LKT INDIPENDENTI

Applicando la LKT a tutte le maglie di un circuito planare si genera un insieme di equazioni LI

• Posso farlo ad ogni singola maglia sì, ma non è utile

sempre!

Dim: si appoggia sempre sul fatto che ∃ una tensione che compare in una sola maglia

Reitero $k \leq n-1$ maglie LI e trovo che a $k = n$ saranno LDip

$m = b - n + 1$

× situaz generica: se scrivo la LKT di una maglia, sarà combinaz lineare delle sottomaglie che la compongono

✱ ∀ bipolo ∃ una EQUAZIONE CARATTERISTICA che lega le variabili circuitali e mi viene data. (dispendioso in calcoli xò)

## ✱ POTENZA

Un bipolo può ASSORBIRE o GENERARE in base al verso della corrente rispetto alla polarità dell'elemento.

variazione di energia per unità di carica

⇒ una carica $\Delta q > 0$ attraversa un generico bipolo da a a b in $\Delta t$.
la variazione di energia indotta è: $\Delta w = v \cdot \Delta q$

POTENZA ASSORBITA (GENERATA) da un bipolo

l'energia persa dalla carica è assorbita dal bipolo

$$P_a = \frac{dw}{dt} \rightarrow P_a = \lim_{\Delta t} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \lim_{\Delta t} \frac{\Delta q \cdot v}{\Delta t} = v \cdot i$$

tensione ai capi del bipolo

corrente che scorre nel bipolo

$P_a = +v \cdot i$ $\qquad P_g = -v \cdot i$

↓

"utilizzatori"

corrente entra nel ⊕

SISTEMA DI RIFERIMENTO: scelgo una polarità di riferimento se $P_a = +vi$ con corrente che entra nel ⊕ ⇒ ASSOCIATO

POTENZA ISTANTANEA: in generale la potenza assorbita è funzione del tempo $P_a(t) = v(t) \cdot i(t)$

in termini di energia: $w(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \cdot i(t) dt$

× se la potenza assorb è costante ⇒ $\Delta w = P_a \cdot \Delta t$

* un n-polo equivale l'unione di $n-1$ bipoli

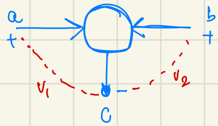
$$P_a = \sum_{k=1}^{N-1} v_k i_k$$

una comb. lineare

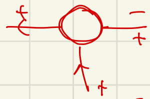
ESTENDO RIF. ASS AI TRIPOLI

CASO GENERALE POTENZA:

scelta semplice (ed intelligente)



ho 2 ten/cor indipendenti ⇒ potevo anche



così però faccio fatica a scrivere la potenza assorbita

tripolo = unione bipoli ⇒ somma prodotti $v \cdot i$

$$P_a = \frac{\Delta W}{\Delta t} = v_1 \frac{\Delta q_1}{\Delta t} + v_2 \frac{\Delta q_2}{\Delta t} = v_1 i_1 + v_2 i_2 \quad \text{(RIF ASS)}$$

le cariche $i_1$ e $i_2$ si sommano e finiscono in $i_3$

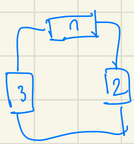
qua vedo il concetto di unione 2 bipoli

- $\Delta q_3 = \Delta q_1 + \Delta q_2$

$\Delta W = v_1 \Delta q_1 + v_2 \Delta q_2$ ⇒ divido per $\Delta t$ $\quad P_a = v_1 \frac{\Delta q_1}{\Delta t} + v_2 \frac{\Delta q_2}{\Delta t} = v_1 i_1 + v_2 i_2$

$P_g = -v_1 i_1 - v_2 i_2$

ESEMPIO CONSERVAZIONE DELLA POTENZA



$P_{a1} + P_{a2} + P_{a3} = 0$

$P_{g1} + P_{g2} + P_{g3} = 0$

p assorbita da n-k componenti

$P_{a1} + P_{a2} = -P_{a3} = P_{g3}$

p generata dagli altri k componenti

non è vero che devo calcolare $P_a$ per chi assorbe e $P_g$ per chi genera

⇒ si può fare, ma i segni di $P_a$, $P_g$ fanno rispettare tutto anche senza questa discrezione

⇒ calcolo seguendo un solo riferimento comodo poi tutto si sistema nel vedere i segni dopo

DA SAPERE

# DIMOSTRAZIONE CONSERV. POTENZA: caso generale

$\sum_k P_k(t) = 0$

posso rappresentare un n-polo con l'unione di altri (n-1) poli.

Enunciato: la somma algebrica delle potenze "assorbite" da TUTTI i componenti di un circuito è nulla in ogni istante
"generate"

=> proprietà che deriva da Kirchhoff

IPOTESI: circuito a parametri concentrati → valgono solo LKC, LKT
riferimento coordinato

(considero solo bipoli
se estendere è banale)

BIPOLO CONNESSO: $P_k = V_a i_k$

NON-CONNESSO: $P_k = (V_a - V_b) \cdot i_k$

per calcolare $P_k$ dipende dai nodi cui il bipolo è connesso

- faccio ponere i bipoli e cerco la mia equazione

=> si sommano le potenze e si raccoglie in base al nodo cui ci si riferisce

LKC: $\sum p_k = V_a \sum i_k + V_b \sum i_k + \dots + V_N \sum i_N = 0$
nodo A, nodo B, nodo N

nodo A:

$P_A = V_a i_1 + V_a i_2 + \dots V_a i_N$
$= V_a \cdot \sum_k i_k$

è una somma di combinazioni lineari?

$V_a \cdot (LKC_a)$ → ma è nullo!

è difficile trovare questa scrittura
$V_b \cdot (LKC_b)$ tutti i termini valgono 0

esercizio 1:48:00 giù di lì

- di solito la conservaz della pot si usa per verificare un certo risultato di un circuito
=> è inutile usare Kirchoff e poi dopo questo, perché ne deriva
CONSERV è necessaria ma non sufficiente

conserv potenza è un sottocaso del th di tellegen

## TEOREMA DI TELLEGEN

è qualcosa in più della conservazione della potenza

+In un circuito generico vale la conservazione della potenza $\sum v_k i_k = 0$
+le leggi di Kirchhoff forniscono info solo relative le interconnessioni nel circuito e non la topologia.

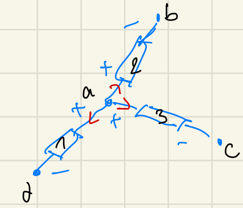
Consideriamo due circuiti A e B con identica topologia, li intendo come scatole nere, non ho informazioni sui componenti o altro.

=> tensioni e correnti di A e B rispettano le stesse LKC ed LKT:

$$\sum v_k^{(A)} \cdot i_k^{(B)} = \sum v_k^{(B)} \cdot i_k^{(A)} = 0$$

Conclusione: tellegen è proprietà topologica derivante dal concetto di circuito ≡ interconnessione di scatole.

MINI ESEMPIO PER L'ULTIMO PASSAGGIO




scelgo $i$ per avere rif. assoc

$P_1 = V_{ad} \cdot i_1$

$P_2 = V_{ab} \cdot i_2$

$P_3 = V_{ac} \cdot i_3$

se scrivo LKC come somma di potenze

$\Rightarrow \sum p = p_1 + p_2 + p_3 =$

$= (V_a - V_d) \cdot i_1 + (V_a - V_b)\, i_2 + (V_a - V_c)\, i_3$

raccolgo per le tensioni di ogni nodo

$V_a\,(i_1 + i_2 + i_3)$ raccogliendo per tensione di nodo trovo il LKC del nodo interessato

correnti del nodo A

$|||$

$LKC_a : i_1 + i_2 + i_3 = 0$ sono tutte uscenti.

28/02/2023

diodo reale ha una caratt. dissimmetrica

uno per conti qualit. va bene il modello ideale

**DIODO**: bipolo resistivo non lineare e non bilaterale.

diodo reale

ideale — corto circ. on — circuito aperto off

Quando è aperto/scollegato/non attivo, il diodo è nella condizione seguente (i=0, circuito aperto, v<0)

Quando è collegato/attivo allora: è in conduzione (v=0, corto circuito, i>0)

A C
\+ −

Due casi possibili di collegamento di un diodo in un circuito.
Se si dovesse invertire ⇒ cambia il circuito
⇒ cambia la soluzione
(non invertire i terminali)!

caso

meno corrente
una inverso tensione

T>0 i=0

T=0 i>0

## CONNESSIONI IN SERIE

legge di ohm; $V = R \cdot I$

La topologia in serie impone che tutti i componenti vengano attraversati dalla stessa corrente.

Per un generico circuito a maglia singola vale: $\boxed{i = \frac{\sum_k V_k}{\sum_k R_k}}$ → generatori indipendenti, → resistenze

### *PARTITORE DI TENSIONE (= batteria)

sottocaso delle conn. in serie

caso part. di singola maglia un generatore e due resistori

LKT + ohm

$i = \frac{V_g}{R_1 + R_2}$

**PARTITORE**: la tensione si distribuisce su $R_1$ $R_2$ in modo proporzionale al valore delle due

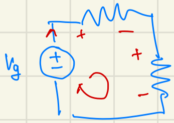
la tensione si distribuisce sui componenti della serie: l'idea è che sul terminale ⊕ ci sia un certo potenziale, la tensione cala un po' su tutti i componenti che attraversa ⇒ arriva a ⊖ con un certo valore ⇒ non importa come, ma basta che la differenza sia quella imposta.

da ohm: $V_1 = V_g \frac{R_1}{R_1+R_2} = R_1 \cdot i$   $V_2 \equiv$

se $V_1 > V_2$ ⇒ $i > 0$ ⇒ $V_1$ genera e $V_2$ assorbe

se $V_2 > V_1$ ⇒ $i < 0$ ⇒ $V_2$ genera e $V_1$ assorbe

$V_1$ $V_2$




LKT: $-V_g + V_{R_1} + V_{R_2} = 0$

$-V_g + R_2 i + R_2 i = 0$

$i = V_g / (R_1 + R_2)$

Scelgo così e poi considero come le effettive xk ho 1 solo generatore

$-V_g + V_{R_1} + V_{R_2} = 0$

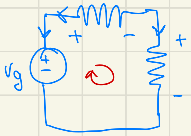
$-V_g + R_1 i + R_2 i = 0$

$i = \dfrac{V_g}{R_1 + R_2}$

$V_{R_2} = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} V_g$

CASO VERSO PIÙ PEGGIORE: tutto sparato a caso (tranne polarità di $R_2$)

$V_{R_1}$ anti-amoc




LKT: $-V_g + V_{R_1} + V_{R_2} = 0$

$-V_g + (-R_1) i_{R_1} + (R_2) i_{R_2} = 0$

$-V_g + R_1 i_{R_2} + R_2 i_{R_2} = 0$

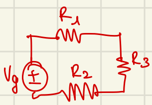
$i_{R_2} = \dfrac{V_g}{R_1 + R_2}$

cerco $i_{R_2}$, elimino $i_{R_1}$:

$i_{R_1} + i_{R_2} = 0$

$i_{R_1} = -i_{R_2}$

CASO PART 3 RES:




$V_{R_3} = V_g \cdot \dfrac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

* se semplifico il circuito fino ad avere una maglia semplice con solo resistenze in serie => posso calcolare la caduta di tensione su ogni resistenza così $V_{R_i} = V \cdot \dfrac{R_i}{\sum R_k}$ con $K=3$

$$\frac{\frac{1}{G_2}}{\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}} = \frac{\frac{1}{G_2}}{\frac{G_2 + G_1}{G_2 \cdot G_1}} = \frac{1}{\cancel{G_2}} \frac{\cancel{G_2} G_1}{G_2 + G_1}$$

* se sto lavorando con le conduttanze trovo che l'espressione vale:

$$V_{R_2} = V_g \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \dots = V_g \cdot \frac{\text{conduttanza}_2}{\sum G \text{ resistori che non ci interessano}}$$

con 2 resistori mi basta fare $V_g \cdot \dfrac{G_1}{G_1 + G_2} = V_g \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$

- se ho due gen non possono assorbire entrambi
- se in parallelo non generano entrambi
  - ↳ vedo $V>0$ e $I_1$ ho ↓ che esce dal + => genera

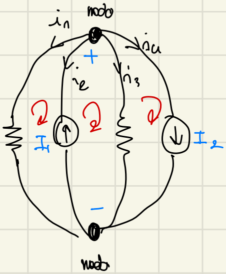
$I_1 > I_2 \Rightarrow V>0$ $I_1$ gen $I_2$ assorbe

connetto a coppie i terminali dei bipoli
↓
il parallelo "spezza" la corrente in più flussi

# CONNESSIONI IN PARALLELO

la topologia impone che ai due nodi terminali dei componenti, la tensione sia la medesima.
Per un generico circuito con due nodi

ESEMPIO:




*** PARTITORE DI CORRENTE**

$$V = \frac{\sum_k I_k}{\sum_k G_k}$$

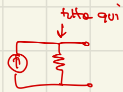
$\sum_k I_k$ → generatori indipendenti I

$\sum_k G_k$ → conduttanze

questa espressione viene dall'applicazione delle LKC e la legge di Ohm

$$i_1 = i_g \frac{G_1}{G_1+G_2} \qquad i_2 = i_G \frac{G_2}{G_1+G_2}$$

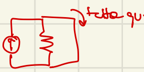
* La corrente si ripartisce nei resistori in modo proporzionale ai valori delle conduttanze

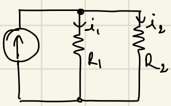



*** CASI LIMITE:**

$R_2 \to \infty$ $\quad G_2 = 0 \to i_2 = 0$ $\quad$ CIRCUITO APERTO, non fluisce corrente

$R_2 = 0$ $\quad G_2 \to \infty \to i_1 = 0$ $\quad$ CORTOCIRCUITO, che batte tutte le res in parallelo perché la corrente tende ad andare dove c'è meno resistenza



due bipoli equivalenti sono indistinguibili e non cambiano le variabili circuitali

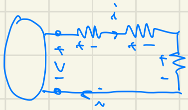
# BIPOLI EQUIVALENTI

Concetto di equivalenza: due bipoli si dicono equivalenti se sono descritti dalla stessa relazione caratteristica.

- Se considero due circuiti dove il secondo ha un bipolo sostituito da uno equivalente i due circuiti hanno uguale soluzione

esempio potente: considero un pezzo di circuito come un bipolo e calcolo la relazione caratteristica
=> scopro che $V = K \cdot i$ allora so che è equivalente ad un resistore con $R \equiv K$

## CASO: RESISTORI IN SERIE



in questo ordine

Applico LKT + legge di Ohm + LKC:

$i_1 = i_2 = i_3 = i$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \rightarrow = R_1 i_1 + R_2 i_2 + R_3 i_3 \rightarrow = i(R_1 + R_2 + R_3)$$

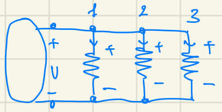
=> Tre resistori in serie sono equivalenti ad un unico $R_{eq}$ così:

$$R_{eq} = \sum_i R_K \rightarrow V = R_{eq} \cdot i$$

con i corrente della maglia considerata

## CASO: RESISTORI IN PARALLELO

parallelo spezza le correnti ↑↓ serie spezza le tensioni



Applico LKC + legge di Ohm + LKT:

$V_1 = V_2 = V_3 \equiv V$

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \rightarrow = G_1 V_1 + G_2 V_2 + G_3 V_3 \rightarrow = V(G_1 + G_2 + G_3)$$

=> Con n resistori in parallelo calcolo $G_{eq}$:

$$G_{eq} = \sum_i G_K \qquad \frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_K} \qquad i = G_{eq} V = \frac{1}{R_{eq}} V$$

CASO DUE RESISTORI:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

e $R_{eq} = \frac{R}{2}$ se $R_1 = R_2$

## RESISTENZA EQUIVALENTE: caso generale, bipolo di resistori

Considero un bipolo resistivo composto da resistori connessi in qualsiasi modo.
Se trovando la relazione caratteristica di un generico di bipolo mi accorgo che l'equazione è analoga alla legge di Ohm allora $V = R_{eq} i$ $R_{eq}$ è la resistenza equivalente e posso tranquillamente SOSTITUIRE quel bipolo di soli resistori con un resistore unico dal valore $R_{eq}$

× lo stesso vale se oltre a resistori ci sono anche generatori controllati
=> in questo caso $R_{eq}$ può essere negativa (il bipolo genera corrente)

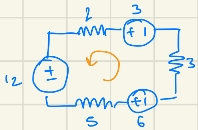
la corrente che scorre è la stessa! (serie + 1 maglia)

* Caso generale: bipolo di resistori → Vedi teorema di thevenin, norton

## CASO GEN. TENSIONE IN SERIE:

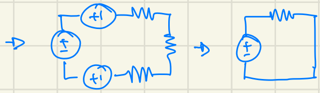
La serie di n gen indipendenti di tensione (o batterie) è equivalente ad un generatore con tensione pari alla SOMMA ALGEBRICA delle tensioni.

Per calcolare la tensione equival. applico LKT: $\boxed{V_{eq} = \sum V_k}$



$V_{eq} = 6-3+12 = 15V$

$R_{eq} = 2+3+5 = 10\Omega$



* GEN TENSIONE IN PARALLELO:

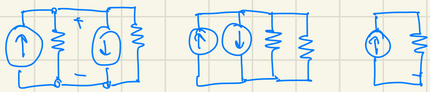
Se hanno lo stesso segnale ⇒ sono equivalenti ad uno solo con lo stesso segnale

È impossibile calcolare la corrente dei singoli generatori. Perché non ho eq a descriverlo

## CASO GEN. CORRENTE IN PARALLELO:

La serie di n gen indipendenti di corrente è equivalente ad un generatore con corrente pari alla SOMMA ALGEBRICA delle correnti.

Per calcolare la corrente equivalente applico LKC: $\boxed{i_{eq} = \sum i_k}$



RICORDA: è importante assegnare polarità precise prima di usare LKC

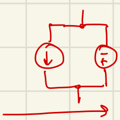
* GEN CORRENTE IN SERIE:

Se hanno lo stesso segnale ⇒ sono equivalenti ad uno solo con lo stesso segnale

Anche qui le singole tensioni sono indeterminate xk non ho eq sui singoli valori Vi.

## * COMBINAZIONE DI GEN DI TENSIONE E CORRENTE *

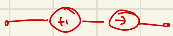
Parallelo tensione-corrente: equivalente a GEN TENSIONE
- tensione fissata, la corrente è imposta dal circuito LKC.



$i = i_s + i_{V_s}$ ↓ non è fissata, ∄ eq nella batteria

$V = V_s$

Serie tensione-corrente: equivalente a GEN CORRENTE
- corrente fissata, la tensione è imposta dal circuito LKT.



$i = i_s$

$V = V_s + V_{i_s}$

$V_{i_s}$ sconosciuta quindi V imposta dal circuito

CONNESSIONI INETTE/CIRCUITI IRRISOLVIBILI:

- gen tensione in parallelo con tensioni diverse
- gen corrente in serie con segnale imposto diverso

⇒ il modello è patologico!

qui il gen ideale non è più rappresentativo del gen reale

## GENERATORE IDEALE

Questa roba l'ho scritta su Notion.

06/03 ESERCITAZIONE (vedi file ESE)

nei bipoli ho una sola eq caratteristica algebrica perché il legame i-v è istantaneo

07/03

# MULTIPOLI RESISTIVI

Componenti a N terminali => ho N-1 tensioni (e correnti) indipendenti e quindi relazioni caratteristiche. La N-esima è data da LKT (LKC) applicata ai suoi N terminali

N-esima eq rappresenta i vincoli imposti dalle leggi di Kirchhoff

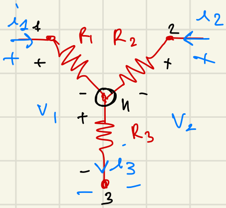
CASO N=3:

TRIPOLO → scatola nera
→ composizione di componenti (due bipoli)

scomponibile in N-1 N-1poli ←

## STELLA DI RESISTORI (Y)

Stella d'accordo con le LKT




tripolo resistivo

$i_3 = i_1 + i_2$

Tripolo resistivo con un nodo comune a tre resistori detto CENTRO.

Ottengo le eq caratteristiche applicando le $\boxed{LKT}$ + legge di $\boxed{Ohm}$

$$v_1 = R_1 i_1 + R_3 (i_1 + i_2)$$

$i_3 = i_1 + i_2$ da LKC a CENTRO

$$v_2 = R_2 i_2 + R_3 (i_1 + i_2)$$

non ha senso quando ho solo scalari tipo con questi tripoli però poi torna utile

FORMA MATRICIALE = (bidimensionale)

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1+R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2+R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

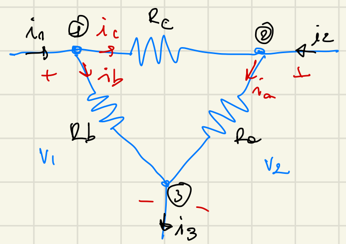
$v = Ri$

$G = R^{-1}$

$i = Gv$

triangolo va d'accordo con LKC

# * TRIANGOLO DI RESISTORI ($\Delta$)




Applico LKC a 2 soli nodi, di solito 1 e 2 così ottengo le relazioni caratteristiche

Scrivendo LKC e tento "sporco" le equazioni con $i_c$ e $i_b$ che non mi interessano
$\Rightarrow$ le sostituisco sfruttando $i_b = G_b V_1$

$$i_1 = G_b V_1 + G_c(V_1 - V_2)$$

$$i_2 = G_a V_2 + G_c(V_2 - V_1)$$

↳ questi da LKT

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_c + G_b & -G_c \\ G_c & G_c - G_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

prima si applica LKC a 1 e 2 e poi per sbarazzarsi delle variabili in più, ohm con le conduttanze

n poli: matrice caratteristica è $(n-1)\times(n-1)$

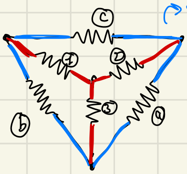
# TRASFORMAZIONE STE-TRI

Due multipoli (n-poli) sono equivalenti se le loro matrici R (o G) coincidono.
$\Rightarrow$ posso sostituire Y e $\Delta$ equivalenti tra loro.

* Calcolando R o G per i due multipoli, mi basta imporre l'uguaglianza dei coefficienti delle matrici termine-termine.

| Y -> Δ | Δ -> Y |
|---|---|
| $G_a = \dfrac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$ | $R_1 = \dfrac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}$ |
| $G_b = \dfrac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$ | $R_2 = \dfrac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c}$ |
| $G_c = \dfrac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}$ | $R_3 = \dfrac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$ |

# METODO PER ISPEZIONE VISIVA




→ triangolo (usa R)

→ stella (usa G)

$G_b = \frac{G_1 G_3}{\sum G_i}$

$G_c = \frac{G_2 G_3}{\sum_i G_i}$

## Y → Δ

- A Δ piacciono conduttanze, calcolo $G_a, G_b, G_c$ (parto da $G_i$ stella)

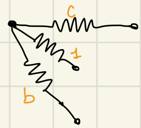
$G_a = \frac{G_2 G_3}{\sum G_i}$


prodotto res stella consecutivi a res che sto calcolando / $\sum_i$ conduttanze stella

## Δ → Y

- A Y piacciono invece le resistenze, calcolo $R_1, R_2 R_3$ (parto da $R_i$ triangolo)

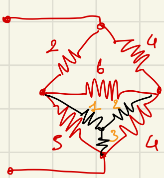
$R_1 = \frac{R_b R_c}{\sum R_i}$




vale lo stesso trucco, considerando i resistori del triangolo collegati allo stesso nodo

CASO PARTICOLARE: se tutte le Res sono uguali vale $R_Y = \frac{R_\Delta}{3}$

ESEMPIO calcolo trasformazione:

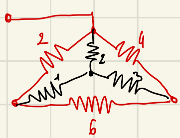



Δ → Y:

$R_1 = \frac{30}{15} = 2$

$R_2 = \frac{24}{15} = \frac{8}{5}$

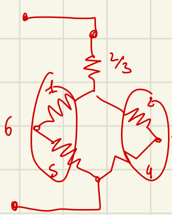
$R_3 = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$




$R_1 = \frac{12}{12} = 1$

$R_2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

$R_3 = \frac{24}{12} = 2$




$= 3$

Req → $\frac{9}{3} + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$

$\boxed{OK}$

# GENERATORI CONTROLLATI

SOTTOCASO particolare: doppi bipoli

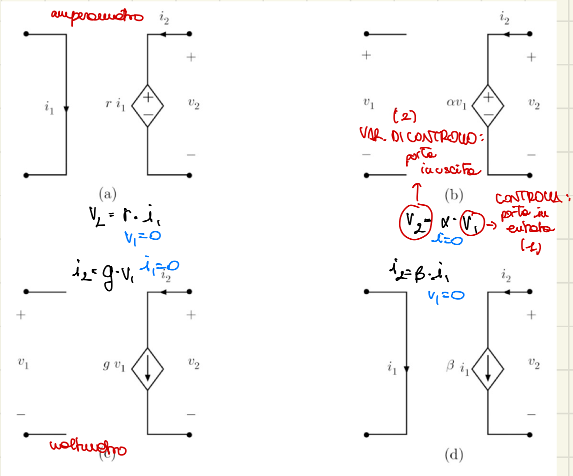
1 equazione detta la legge del generatore

l'altra è banale

Sono un tipo di multipolo resistivo e sono dei quadripoli.
Fissano una certa grandezza in base ad una certa variabile

* Solitamente i quadripoli: $N=4$ quindi $N-1$ eq caratteristiche
Ma i doppi bipoli sono $2\cdot(N-1)$ con $N=2$ per cui invece di 3, avrò 2 equazioni.

sono componenti attivi possono erogare potenza (non è necessario, ma possono)




Regolano il valore di una grandezza circuitale in base ad una legge che dipende da una corrente o tensione che verrà letta dal sensore

*PROPRIETÀ:

variabile di controllo
- controllo in tensione → legge i due terminali ⊕ e ⊖ aperti
- controllo in corrente → legge il cortocircuito

↓

parametri di controllo
legano la variabile di controllo con la grandezza controllata

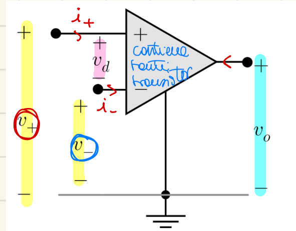
NB: i generatori INDIPENDENTI sono termini forzanti noti a priori
quelli CONTROLLATI esprimono l'accoppiamento fra grandezze → il valore è noto solo una volta che lo collego ad un circuito

uso come cazzo funziona

## MULTIPOLI RESISTIVI: alcuni tripoli

### *AMPLIFICATORE OPERAZIONALE

È un quadripolo $\Rightarrow N-1=3$ equazioni caratteristiche necessarie




$v_+ - v_- = 0$

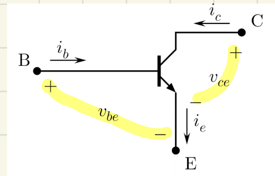
$i_+ = 0$

$i_- = 0$

$v_d = 0$

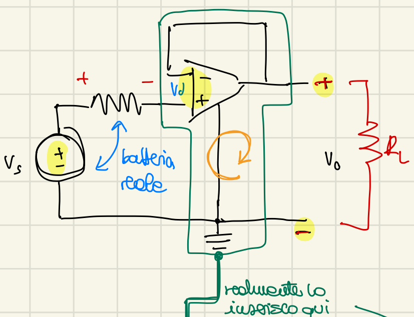
### *TRANSISTOR BIPOLARE

Tripolo riducibile ad un doppio bipolo.
Si usano solo 2 eq. caratteristiche NON LINEARI




2 tensioni indipendenti

ESEMPIO DI AMPLIFICATORE OPERAZIONALE:




calcolo $V_o$:

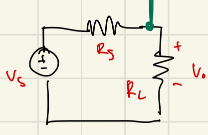
$V_0 - V_s + V_d = 0$

$V_d = 0$ per definizione

$V_o = V_s$

$V_o = V_s$

disinnesco l'effetto della resistenza interna!




$V_0 = V_s \cdot \frac{R_L}{R_L + R_s}$

senza l'inseritore finisco ad avere un partitore di tensione

# DOPPI BIPOLI RESISTIVI

Tutti doppi bipoli sono quadripoli ($N=4$) per cui usiamo 3 equazioni per un vincolo imposto da LKC ed LKT.

**DEF**: se ho quattro terminali che posso partizionare in due insiemi da due, tali che le due coppie si comportano come due bipoli

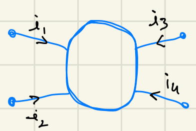
⇒ è un DOPPIO BIPOLO

Queste coppie di terminali sono dette PORTE

↓

condizione di porta: la corrente entrante in un terminale della porta è uguale a quella uscente

quadripolo

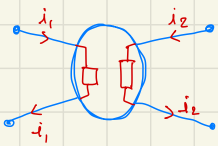



in qualsiasi circuito io lo metta, vale la condizione:

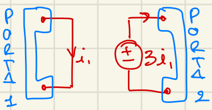
$i_1 = -i_3$

$i_2 = -i_4$

doppio bipolo




POTENZA: $P_a = V_1 i_1 + V_2 i_2$




INTRINSECO: doppio bipolo che nasce come tale, black box. Esempio: gen controllato
Qui la connessione di porta è sempre verificata

se cerco di violare la cond. porta → non è più un circuito ↓ viola LKT

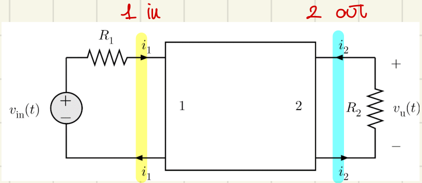
ESTRINSECO: componenti che connetto e e verificano la condiz. di porta

se collego a DX gen e a SX un carico trovo che la corrente uscente è uguale a quella entrante

NB. un quadripolo chiuso su due bipoli si comporta sempre come un doppio bipolo estrinseco (dimostro con la LKC)

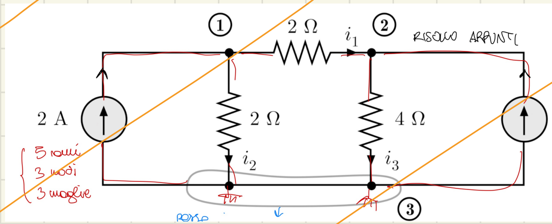
si usa es: trasformat del segnale

1 in    2 out



inizio formulaz 1:

LKC:
$$\begin{cases} i_1 + i_2 - 2 = 0 \\ -i_1 + i_3 - 3 = 0 \end{cases}$$
↓
2 eq
3 incognite




formulaz 2 tensioni:

$i_1 = \frac{V_{12}}{2}$ uso le tensioni di nodo anziché nodo $V_{12} = V_1 - V_2$

per arrivare qui abbiamo usato LKC
eq costit correnti
leggi di ohm resist
LKT

nodo ①: $i_1 + i_2 - 2 = 0$
$$\frac{V_1 - V_2}{2} + \frac{V_1}{2} - 2 = 0$$

nodo ②: $-i_1 + i_3 - 3 = 0$
$$-\frac{V_1 - V_2}{2} + \frac{V_2}{4} - 3 = 0$$

qui ho ottenuto 2 eq, 2 variabili
sistema 2x2 a variabili note $V_1$ e $V_2$

step 3: riordino le equazioni e scrivo la matrice

$V_1 - \frac{V_2}{2} = 2$    $-\frac{V_1}{2} + \frac{3}{4}V_2 = 3$    incognite: tensioni di nodo

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

USO CRAMER:
$$\det(A) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$V_2 = \frac{V_1 - 2}{2} = 3V \qquad V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1/2 & 3 \end{vmatrix}}{1/2} = \frac{3+1}{1/2} = 8V$$

torno a LKC e ohm:
$$i_1 = \frac{V_1 - V_2}{2} = \frac{5}{2} A$$

Analisi nodale: circuiti con comuni

proprietà indip LKC sulle varie parti, con $n_1$ nodi, $n_2$ nodi, $n_n$ nodi ($n$ parti)

caso 2 PARTI:

LKCI $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n_1 + n_2 - 2$    totale nodi indipendenti con 2 di riferimento
↓
li unisco con un filo
⇒ collasserò in un unico filo    $n_1 + n_2 - 1$ nodi
corto circuito fittizio
⇓
posso usare l'analisi nodale

13/03/2023

# METODI DI ANALISI DEI CIRCUITI RESISTIVI

scrivo n-1 LKC, b-n+1 LKT, b relazioni caratteristiche

sistema 2b×2b

* FORMULAZIONE: come si arriva all'analisi nodale?

Per ora conosciamo LKT ed LKC con cui possiamo scrivere tutte le equazioni per descrivere le grandezze circuitali ⇒ un circuito ad un BRUTEFORCE inefficiente e allora?

- posso SFRUTTARE PROPRIETÀ DEI CIRCUITI — Thevenin, sovrapposizione, sostituzione
- usare ANALISI NODALE
- o ANALISI DELLE MAGLIE

sono sistematici!

# ANALISI NODALE

NODO: terminale

* Algoritmo base → LKC + rel caratteristiche + LKT → mi permette di scrivere subito un sistema che sostituisce tensioni alle correnti

1. * Considero solo circuiti con RESISTORI e SORGENTI INDIP di CORRENTE. $\boxed{\text{LIMITE}}$
   * Scrivo tutte le LKC lin. indip (n-1 con n nodi)
     ⇒ comodo scegliere il verso positivo come correnti uscenti
   * Disegno la messa a Terra per il nodo di riferimento
2. * Considero le TENSIONI DI NODO ⇒ scrivo le correnti in funzione delle tensioni di nodo usando OHM $\frac{V}{R} = i$
   → dovranno essere le variabili principali del problema
3. * Riordino il termine secondo le variabili $V_i$ ⇒ posso scrivere il sistema in forma matriciale $Ax = b$

mi permette di ridurre di molto la dimensione del problema

posso risolvere usando Cramer

$$[\,A\,]\cdot\begin{bmatrix} V_i \\ \vdots \end{bmatrix} = [\,b\,]$$

Riassunto:

> scelgo un nodo di riferimento

> scrivo le LKC per tutti tranne Rif

> esprimo le correnti nei resist. con le Tensioni di nodo

connesso a rif (a) — non connesso

$i_k = \frac{V_a}{R_k}$ — $i_k = \frac{V_a - V_i}{R_k} = G_k(V_{ai})$

> il sistema ha forma $G\,V = i_s$

$A\,x = b$

$i_{s_i}$ ⇒ somma algebrica delle $i$ dei gen a nodo $i$ + se entra, − se esce

$G_{ii}$ somma conduttanze connesse nodo $i$

$G$ → $G_{ij}$ opposto somma conduttanze res connesse tra $i$ e $j$

in corrente o tensione è uguale

Con u - Cicca

* Algoritmo modificato

* Considero anche GENERATORI CONTROLLATI

* Scrivo le LKC come nel metodo base, per n-1 eq. indip

* Passo di nuovo alle tensioni di nodo come variabili finché posso, ma alcune equazioni mi rimangono

=> dovrò aggiungere delle equazioni dai gen di tensione

"corrente in un gen di tensione è una var che non mi interessa"

=> x le tensione è fissata e non esiste una relaz tra corrente e tensione

=> al limite ricavo tramite Kirchhoff

Riassunto:

> Scelgo il riferimento arbitrario

> Scrivo legge ad ogni nodo tranne rif.

> esprimo correnti dei RES con le tensioni di nodo => correnti dei generatori di tensione sono incognite extra

> Scrivere relazioni caratteristiche dei gen di tensione in funz delle tensioni di nodo

\+

uguale per generatori controllati

generatori aggiungono equazioni extra con var incognite in + ←

=> non 100% + conveniente

per ovviare c'è →

* Algoritmo modificato semplificato

SUPER-NODO: superficie che racchiude un generatore di tensione NON CONNESSO AL RIFERIMENTO ed i suoi nodi ai terminali

Cosa guadagno? Elimino una LKC + generatore di tensione

- se è collegato al RIF non scrivo la LKC del nodo
- se non è connesso scrivo la LKC del supernodo

Riassunto:

> scegli nodo di RIFERIMENTO arbitrario

> scrivo le LKC ai super-nodi e nodi non di un supernodo, escludendo il riferimento e quelli connessi al RIF tramite un generatore di tensione

> esprimo correnti in funzione delle tensioni di nodo

> scrivo le relazioni caratteristiche dei gen tensioni (funz delle tensioni di nodo)

# ANALISI DELLE MAGLIE

Metodo sistematico valido solo per maglie di circuiti planari

Correnti di maglia: correnti fittizie che associo ad ogni maglia, direzione arbitraria
Dalle correnti di maglia trovo quelle di ramo.

- se ramo ∈ (1 maglia)
  ⇒ CORRENTE uguale a quella di maglia
  (segno dipende dal riferimento)
- se ramo ∈ (2 maglie)
  ⇒ $i_k = i_A - i_B$ CORRENTE pari alla differenza tra le due correnti di maglia

## Algoritmo base

1. - Considero circuiti con soli RESISTORI e GENERATORI IND. TENSIONE
   - Scrivo le LKT lin. indip, scrivo le tensioni con un riferimento (verso orario?)
2. - Considero le CORRENTI DI MAGLIA e scrivo le tensioni in loro funzione
   ⇒ ora ho eq e var compatibili in numero per risolvere
3. - Scrivo le LKT evidenziando le CORRENTI DI MAGLIA
   ⇒ sistema in forma matriciale $Ax = b$
   ⇒ le CORRENTI DI M. mi permettono di calcolare tutte le tensioni e correnti

Riassunto

- individuo maglie e correnti di maglia
- LKT maglie
- esprimo correnti in funzione delle correnti delle maglie

sistema

$R i = V_s$ variabili sostituite dentro

$R$: resistenze di maglia; $i$: incognite

## Algoritmo modificato

Introduco i GEN. CONTROLLATI di TENSIONE
⇒ scrivo le LKT di tutte le maglie + eq. relazione introdotta dal generatore

## modificato + semplificato

SUPER-MAGLIA: maglia che ottengo unendo due maglie ed eliminando il gen di corrente comune tra queste

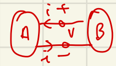
- si elimina una LKT ∀ generatore di corrente:
  - ∈ 1 sola maglia non scrivo la sua LKT (maglia)
  - ∈ 2 maglie scrivo la LKT della super-maglia

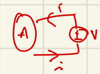
Riassunto (mod semplif)

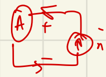
- Trovo le maglie e le loro CORRENTI
- scrivo LKT per super-maglie e maglie escludendo m dove ci sta un generatore di corrente esclusivo (cioè che sta in una sola maglia)
- esprimo le tensioni usando le correnti di maglia
- aggiungo le eq delle relaz. caratt. dei gen di corrente usando le correnti di maglia

20/03/2023

altri metodi di risoluzione dei circuiti che però non sono sistematici




Hp: posso separare il circuito in due porzioni collegati da soli conduttori ideali

# PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE

Ipotesi: considero un circuito e lo divido in due parti A e B

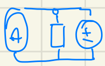
=> A e B sono accoppiate <u>solo</u> da conduttori <u>ideali</u>

Sono interessato a studiare solo A.

• Sostituisco B con un generatore di tensione (corrente) con segnale v (i) => semplifico il circuito da studiare/risolvere

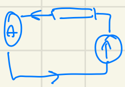
=> tutte le variabili circuitali rimangono invariate

CASI NOTEVOLI:




• B è un gen di <u>tensione</u> in <u>parallelo</u> ad un qualsiasi bipolo

=> ignoro i bipoli // a un gen indip di tensione




• B è un gen di <u>corrente</u> in <u>serie</u> ad un qualsiasi bipolo

=> ignoro i bipoli in serie a un gen indip corrente

# SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

Valida solo per CIRCUITI RESISTIVI <u>LINEARI</u> => circuiti resistivi che contengono solo elementi con relazioni caratteristiche lineari ($y=Kx$) e gen indip.

rette per l'origine

componenti lineari: resistori, gen controllati, operazionali + gen indip che non sono propriamente lineari, ma al più affini

Causa: i generatori indipendenti sono le forzanti (i soli)

Effetto: le variabili circuitali sono $\neq 0$

* relazione: posso descrivere ogni circuito con un sistema lineare sfruttando l'analisi nodale o delle maglie

tutte le var circuitali sono proporzionali al segnale V o i del generatore

=> non perdo linearità

se tarice: $i = K \cdot V_g$ → IR indip

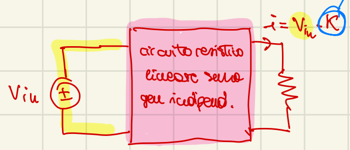
## * PROPRIETÀ FONDAM CIRCUITI LINEARI

1. • Considero un solo generatore indipendente
   ⇒ ogni variabile circuitale è proporzionale al segnale del generatore

2. ⇒ tutte le var circuitali hanno lo stesso andamento temporale rispetto al segnale del generatore

3. • In assenza di generatori indipendenti, le grandezze sono tutte nulle

costante caratteristica del circuito




non mi serve risolvere il circuito, so che $i = V_{in} \cdot K$; se cambio il generatore so che K non è stabilito dal gen
⇒ ricerco e conosco $V_{in}$ e calcolo

⇒ generalizzo le cause (generatori)

### PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE:

Considero un circuito con due ingressi (non però generatori)

Posso costruire la matrice e fare analisi nodale / delle maglie e risolvere, poi sostituisco e agisco come scritto.

che cazzo è sta cosa

ogni variabile circuitale si può scrivere:

somma alg effetti

$$x = \sum_k H_k V_{sk} + \sum_k R_k i_{sk}$$

Enunciato: In un circuito resistivo lineare ogni variabile è data dalla somma degli effetti dovuti ai singoli generatori indipendenti.

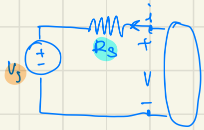
⇒ Interpretazione: posso accendere un generatore alla volta, calcolare la soluzione e sommarla a quelle per gli altri

NB. non toccare i generatori controllati!!!

# TRASFORMAZIONE DEI GENERATORI

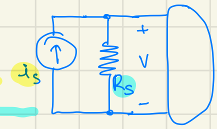
per quale motivo dovrei?
- per semplificare il circuito
- per permettermi di applicare altri metodi

* TENSIONE → CORRENTE



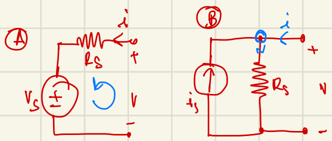
è equivalente a →
se vale la relazione

$V_S = R_S \cdot I_S$



uno è un caso particolare di Thevenin-Norton!

DIMOSTRAZIONE:



- Considero i due bipoli - quello da sostituire ed il sostituente e cerco di dimostrare la loro equivalenza

⇒ li descrivo scrivendo la RELAZ CARATTERISTICA di ognuno

attenzione ai versi di riferimento scelti!

per il GEN. TENSIONE, LKT: $v = R_S i + V_S$

da eguagliare!

per il GEN. CORRENTE, LKC: $i + i_s = \frac{v}{R_S}$ ⇒ $v = R_S i + R_S i_S$

coincidono per definizione

* quando queste due equazioni sono uguali? (cond. equivalenza)

$R_S \equiv R_S$ $\quad V_S = R_S i_S \quad$ (o $i_S = G_S V_S$)

condiz. data dalla costruzione di A, B

♣

NON USEREMO MAI QUESTA COSA

* Ogni metodo sistematico predilige un tipo di generatore → trasformare è utile

CASO GENERALE:

→ Generatore Tensione SENZA resistore serie
Generatore corrente SENZA resistore parallelo

? devo "inserire" un resistore opportunamente per poter sostituire

troviamo un modo + generale del generatore con -/\/\/- serie o //
↓
in qualche modo mi riconduco a ciò che conosco

FORMALIZZO

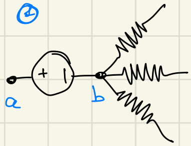
CASO GEN TENSIONE:

Dato un generatore di tensione in serie con n resistori.

⇒ esso può essere spostato in serie ad ognuno di questi.

clono il generatore per gli n resistori

①

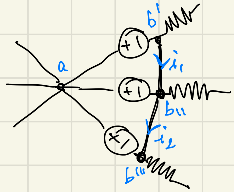



DIM non rigorosa:

sfrutto il viceversa

Questa cosa funziona per la proprietà "TANTI GEN TENSIONE IN PARALLELO CON SEGNALE UGUALE SONO EQUIVALENTI AD UN SOLO GENERATORE CON STESSO SEGNALE"

②

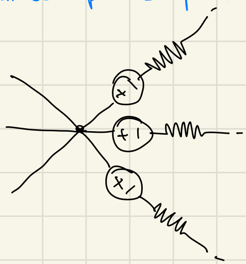



Se poi scrivessi una LKC ai nodi $b', b'', b'''$: troverei che ovviamente la corrente dei gen di tensione è indeterminata, ma soprattutto trovo $i_1$ e $i_2$ libere arbitrariamente

scelta più comoda

⇒ il modo più semplice è $i_1 = i_2 = 0$ che è EQUIVALENTE AD UN CIRCUITO APERTO

③



← forma finale fichissima.

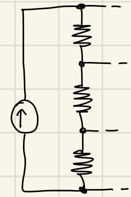
duale della pagina precedente

**FORMALIZZO CASO GEN CORRENTE:**

Dato un generatore di corrente in parallelo ad n resistori

⇒ esso può essere spostato in parallelo ad ognuno di questi

clono il generatore per gli n resistori



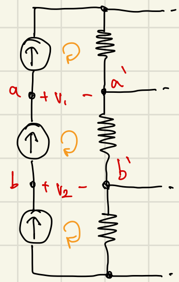
① 

DIM non rigorosa:

sfrutto il viceversa

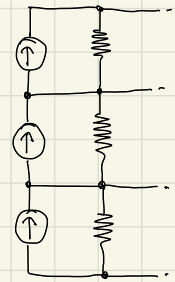
Questo cosa funziona per la proprietà "TANTI GEN CORRENTE IN SERIE CON SEGNALE UGUALE SONO EQUIVALENTI AD UN SOLO GENERATORE CON STESSO SEGNALE"

②




Se scrivo le LKT delle maglie fittizie scopro che $v_1$ e $v_2$ non sono fissate perché non esistono equazioni sulla tensione per i generatori di corrente

③ forma finale



⇒ se non sono fissati, sono una scelta arbitraria. La più comoda è $v_1 = v_2 = 0$

E quindi corrisponde ad un cortocircuito

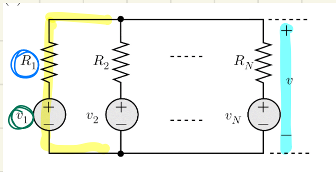
CASO PARTICOLARE: trasformazione generatori

## FORMULA DI MILLMAN

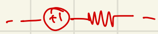
Considero un circuito con due nodi ed N bipoli in parallelo.

=> Ogni bipolo è un generatore di tensione in serie con un resistore

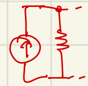
=> Trasformo i generatori TEN in corrente



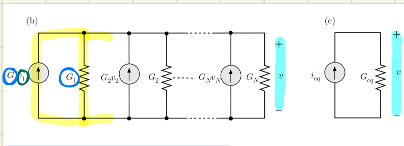

→ ogni ramo



diventa una coppia di rami



↓ regola trasformazione generatori (vista base)




$$i_{eq} = \sum_{k=1}^{N} G_k v_k$$

$$G_{eq} = \sum_{k=1}^{N} G_k$$

* A questo punto il circuito è costituito da tanti gen corrente e resistori in parallelo

1. Conduttanza equivalente è la somma delle singole
2. Corrente erogata equivalente è la somma delle singole

i generatori sono anche tutti concordi
=> solo questo caso! fai attenzione

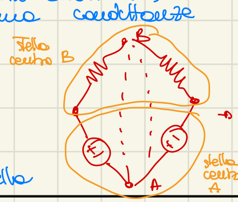
=> la formula di Millman mi permette di calcolare la tensione v ai capi del parallelo

$G_{eq} \cdot i_{eq} = V$ con il + se la freccia entra dal + della tensione

$$V = \frac{\sum_1 G_k v_k}{\sum_1 G_k}$$

somma pesata (delle conduttanze) tensioni dei generatori divisa per somma conduttanze

UTILITÀ:
- stella resistori (centro a)
- stella generatori (centro b)
- fornisce la tensione dei centri stella




mi permette di ridisegnarlo e calcolare $V_{ab}$

questa configurazione è importante perché serve nello studio dei circuiti trifase

MILLMAN noi lo sostituiamo usando => ANALISI NODALE

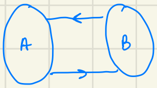
# THEVENIN-NORTON

si usano per semplificare + capire circuiti circuiti

caso generale trasformaz = sostituzione

*** TEOREMA DI THEVENIN: INTRO**

Ipotizzo sui singoli componenti e non l'intero circuito.



IPOTESI SU A (1)

* A è un BIPOLO RESISTIVO

↓

DEF: bipolo costituito da elementi lineari tempo invarianti e sorgenti ideali

sorgenti ideali sono né lineari né non lineari ↓ sono AFFINI

(NON) IPOTESI SU B

* B è un BIPOLO ARBITRARIO qualsiasi, può contenere roba non-lineare e dinamica

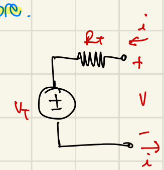
IPOTESI (2): A e B possono essere accoppiati solo attraverso i due terminali (e con conduttori ideali, no roba interposta)

## ENUNCIATO:

Un bipolo resistivo composto da elementi lineari e tempo invarianti e da sorgenti ideali è equivalente ad un generatore di tensione in serie ad un resistore.

* Tensione $V_T$ del generatore è quella a vuoto

* Resistenza $R_T$ è la equivalente del bipolo con i generatori indipendenti tutti spenti



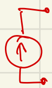
$R_T = 0$

NOTA BENE: l'equivalente di Thevenin non esiste se A non ammette la condizione a vuoto ≡ condiz esistente

↓

significato: se prendo A e chiudo la porta su un circuito aperto ⇒ viola la LK (C/T)! altrimenti esiste sempre

es.



: A qual è Thevenin?

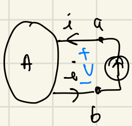
la porta aperta dice $i = 0$ ma il gen dice $i \neq 0$

## DIMOSTRAZIONE:

Assumo di conoscere la corrente $i$ che scorre nella connessione A-B

⇒ per principio di sostituzione metto al posto di B una sorgente di corrente (con la $i$ conosciuta)

* Ora il circuito è lineare ⇒ PRINCIPIO SOVRAPPOSIZIONE, calcolo caratt. di A



$$V = \alpha_1 + \sum_1 H_k V_{sk} + \boxed{\sum_1 K_k i_{sk}}$$

siccome conosco già $i$ dalla connessione la sotto fuori dalla sommatoria

$V_{sk}$ ed $i_{sk}$ sono le sorgenti ideali interne

THEVENIN garantisce l'equivalenza tra A ed il bipolo equivalente (stessa eq caratteristica)

↓

non influenzo le variabili circuitali e lo semplifico così studio meglio B

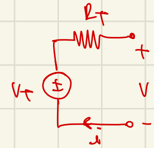
→ THEVENIN GENERALIZZA IL CONCETTO DI EQUIVALENZA

* Questo calcolo della tensione tra i terminali di connessione, calcolata con la sovrapposizione degli effetti è la relazione caratteristica di A

=> che è uguale a quella della sua sorgente di Thevenin

=> sono equivalenti per definizione $v = R_T i + V_T$

↓ la trovo facendo LKT di

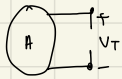



$v = \alpha i + \boxed{\sum_1 H_k V_{sk} + \sum_1 K_k i_{sk}}$ è la generica eq caratteristica del bipolo A $\Longleftrightarrow$ equivalenti quando sono identiche

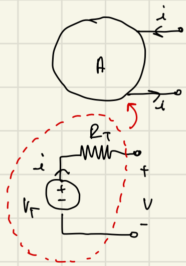
$\alpha = R_T \qquad V_T = \boxed{\sum_1(1) + \sum_1(2)}$

## INTERPRETAZIONE DEI PARAMETRI:

* $V_T$ è la tensione a vuoto: $v = V_T$ se $i = 0$




* $R_T$ è la resistenza equivalente del bipolo a riposo;
  - spengo tutte le sorgenti ideali => $V_T = 0$ e $v = R_T \cdot i$
  - A diventa equivalente ad un resistore con valore $R_T$




sovrapposiz

bipolo A $\quad v = \alpha i + \sum'_1 H_k V_{sk} + \sum'_1 K_k i_{sk}$

Thevenin $\quad v = R_T \cdot i + V_T \quad$ da LKT duale a thevenin

## *TEOREMA DI NORTON

Un bipolo resistivo composto da elementi lineari e tempo invarianti e da sorgenti ideali è equivalente ad un generatore di corrente in parallelo ad un resistore

$R_T \equiv R_N$

la strategia di calcolo → corrente $i_N$ è la corrente di cortocircuito
↘ resistenza $R_N$ è la resistenza equivalente del bipolo con i generatori indipendenti spenti

prima cortocircuito e cerco la corrente
poi spengo e faccio Req

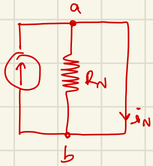
NB: l'equivalente di Norton non esiste se il bipolo non ammette la condizione in corto $G_N = 0$

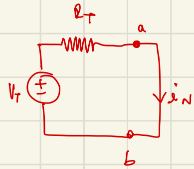
DIMOSTRAZIONE (banale a detta sua ma mannaggia a te)

appico thevenin
↓
trasformo
↓
dimostro/trovo anche NORTON

Dalla trasformazione dei generatori osservo THEVENIN equivalente a NORTON

se è valida: $R_N = R_T$ ↓ sempre $\quad V_T = R_T \cdot i_N$




$i_N = \frac{V_T}{R_T}$

1. calcolo thevenin
2. applico norton → trovo $R_T = R_N$
3. cortocircuito → trovo $i_{cc} = i_N = \frac{V_T}{R_T}$

⇒ dimostrato

$V_T = R_T i_N$ condiz x trasformazione dei generatori

## CALCOLO DELLA RES. EQUIVALENTE
## METODO DEL GENERATORE ARBITRARIO

Questo è un altro modo per calcolare la resistenza equivalente

CALCOLO:
- spengo tutti i gen. indipendenti
- collego bipolo a gen. corrente (tensione) che impone una corrente $i_0$ (tensione $V_0$) e si calcola $V_x$ ($i_x$)

⇒ il bipolo a riposo equivale a un resistore quindi

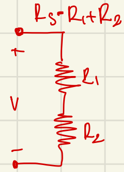
generatori indipendenti spenti

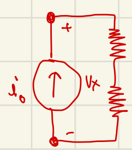
$$R_T = \frac{V_x}{i_0} = \frac{V_0}{i_x}$$

QUESTO METODO HA SENSO QUANDO IL BIPOLO È COMPLICATO, E VOGLIO SFRUTTARE UN METODO SISTEMATICO (collegando bipolo + Req posso applicare analisi nodale/maglie)

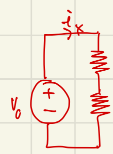
NOTA BENISSIMO:

il calcolo dei seguenti va effettuato con MOLTA attenzione a polarità e verso di riferimento




$R_T = \frac{V_x}{i_0} = R_1 + R_2$




$\frac{V_0}{i_x} = R_1 + R_2$

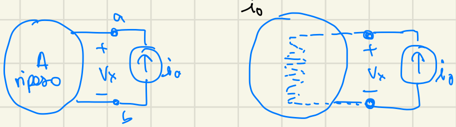
uno dei due esiste sempre per forza!!

condizione:

più facile — da definizione

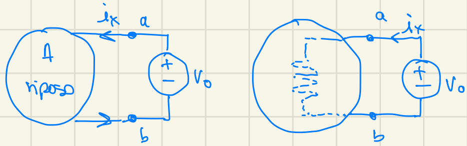
thevenin

$R_T = \frac{v_x}{i_0}$




$R_T = 0$ — condizione in corto violata → chiudo il circuito su un corto


norton

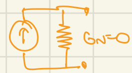



$R_T = \frac{V_0}{i_x}$

$G_N = 0$

$R \to \infty$

condizione a vuoto non ammessa → "chiudo" il circuito su un aperto

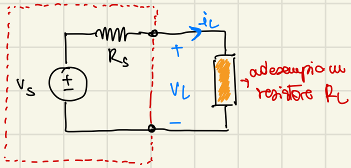



Non ho capito un cazzo di niente nullaaa è per circuiti resistivi

# * MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA *

⇒ Applicazione diretta di Thevenin

Considero di prendere un generatore reale di tensione che sia CHIUSO su un carico




- questo è lo schema del generatore reale a cui posso arrivare con Thevenin: identifico un carico che chiamo $R_L$, se il resto del circuito soddisfa HP THEVENIN ho finito ⇒ gen con resistenza e carico

non è un caso specifico, ma molto generale

OBIETTIVO: ho un generatore dato; voglio sapere qual è il carico che mi permette di massimizzare la potenza sul carico stesso?

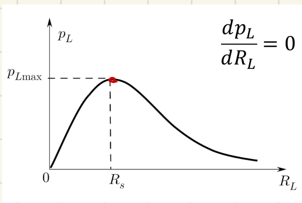
(questo schema è un partitore di tensione!)

⇒ valgono le grandezze così calcolate:

$$\boxed{V_L = V_s \frac{R_L}{R_L+R_s} \qquad i_L = \frac{V_s}{R_L+R_s}}$$

$$\boxed{P_L = V_L i_L = \frac{R_L V_s^2}{(R_s+R_L)^2}}$$

* fissato il generatore ed $R_s$, da qui trovo la potenza max variando $R_L$




condiz punto staz

$$\frac{dP_L}{dR_L} = 0 \rightarrow R_L = R_s$$

$$\Rightarrow P_{L\,max} = \frac{V_s^2}{4R_s}$$

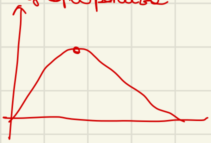
$$P_L = \frac{V_s^2 R_L}{(R_L+R_s)^2} \Rightarrow V_s \frac{1}{\frac{(R_L+R_s)^2}{R_L}}$$

il max di $P_L$ è il min di questo denominatore

$$\frac{R_L^2+R_s^2+2R_LR_s}{R_L} = R_L + \frac{R_s^2}{R_L} + 2R_s = f(R_L)$$

$$\frac{df}{dR_L} = 0 \qquad 1 - \frac{R_s^2}{R_L^2} + 0 = 0 \qquad \Rightarrow R_L = R_s$$

grafico potenza



# TEOREMA DEL MAX TRASFERIMENTO DI POTENZA

Enunciato: un generatore reale di tensione $V_s$ con resistenza interna $R_s$ fornisce la massima potenza ad un carico $R_L$ quando $R_L = R_s$

Questo comportamento si chiama adattamento di resistenza

Potenza massima detta POTENZA DISPONIBILE

DIMOSTRAZIONE: cerco il punto stazionario di derivata nulla

$$P_L = V_s^2 \cdot \frac{R_L}{(R_L+R_S)^2} = V_s^2 \cdot \frac{1}{\boxed{\frac{(R_L+R_S)^2}{R_L}}}$$

→ cerco il minimo solo di questo denominatore

↓ devo cercare il max?

$$\Rightarrow \frac{R_L^2+R_S^2+2R_LR_S}{R_L} = R_L + \frac{R_S^2}{R_L} + 2R_S \equiv f(R_L)$$

* impongo $\frac{df(R_L)}{dR_L} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{R_S^2}{R_L^2} = 0 \Rightarrow R_L = R_S$ ♣

$V_s$ genera, e $R_S$ ed $R_L$ assorbono → come si suddivide la potenza assorbita? → rendimento

DEF: il rendimento è la percentuale della potenza generata che finisce sul carico

in condizione di adattamento ho il 50% ma è molto poco.

output: potenza sul carico

$$\eta = \frac{P_L}{P_L+P_S} = \frac{R_L}{R_L+R_S}$$

input: potenza erogata dal gen

$P_L = R_L i^2$

$P_S = R_S i^2$

↑ serie!

28/03/2023 - ultima lezione pre-parziale

## BIPOLI NON-LINEARI

### * RESISTORE NL

Procedimento analitico: (sfrutto Thevenin)

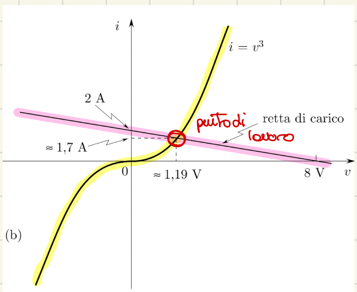
1. stacco il componente non-lineare
2. calcolo $R_T$ a riposo e $V_T$ ai capi del bipolo
3. riattacco il non-lineare all'equivalente di Thevenin
   → cui scrivo l'eq caratteristica con una LKT
4. sostituisco nell'eq il vincolo dato dal bipolo NL e risolvo matematicamente

"TEORIA" FATTA SUI NON LINEARI

### * INTERPRETAZIONE GRAFICA

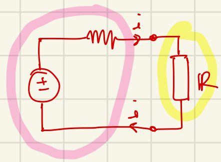
Sorgente (equivalente) di Thevenin è rappresentata dalla sua retta di carico (eq lineare caratteristica che abbiamo ricavato) SOVRAPPOSTA alla caratteristica del resistore non-lineare.

$-8+4i+v=0$




INTERSEZIONE: punto di lavoro

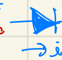
può non essere unico



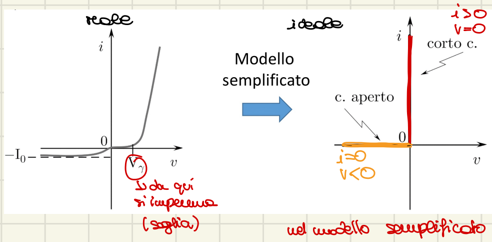

* in regime lineare il punto di lavoro è necessariamente unico
  (due rette con + di una intersez sono coincidenti e quindi significa che non ho abbastanza equazioni per descrivere il circuito ⇒ ∃ variabile indeterminata)

## * DIODO

elemento NL più semplice

anodo  catodo







la versione ideale può essere sostituita con un aperto o cortocircuito in base a quale regione devo studiare

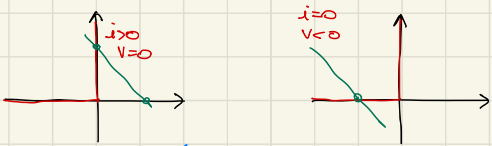
nel modello semplificato
- $-I_0 \sim 0$
- $V_\gamma \sim 0$
- con pendenza $\infty$

eq caratteristica:

$$i = I_0\left(e^{v/v_0} - 1\right)$$

Per la risoluzione analitica faccio delle ipotesi, verifico lo stato del diodo e poi

- via grafica: il diodo ha sempre quel grafico, poi in base alla caratteristica del resto del circuito trovo il punto di lavoro



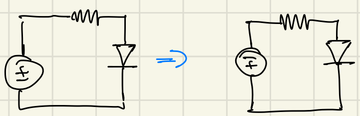


DIODO ON: $E = V + Ri$, $V = 0$

$i = \frac{E}{R}$

DIODO OFF: $-E = V + Ri$, $i = 0$

x cambio segno del gen. tensione? o inverto i terminali



$V = -E$
$i = 0$
$V_R = 0$
DIODO OFF

- se $V > 0$ OUT = IN
- se $V < 0$ OUT = 0

OSSERVAZIONE: questo è un comportamento radicalmente diverso rispetto ai circuiti lineari, dove le variabili sono sempre $K \cdot V$ (o $K \cdot i$) proporzionali al segnale.
se cambiassi segno a v cambierebbe anche la variabile (uscita)

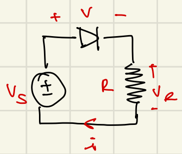
⇒ nei diodi invece si annulla l'output

si usa negli alimentatori e caricabatteria

A COSA SERVE IL DIODO?

*RADDRIZZATORE A UNA SEMIONDA

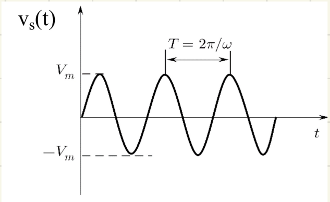
Uso il circuito giocattolo.

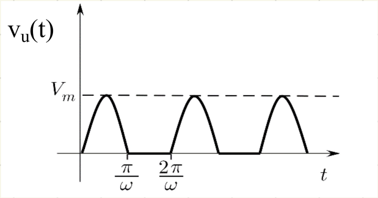



Se l'ingresso è sinusoidale permanente cioè: $v_s(t) = V_m \sin(\omega t)$

L'uscita $V_R$ può essere determinata senza troppi conti sfruttando le proprietà del diodo.

- $V_u = V_s$ se $V_s > 0$
  $V_u = 0$ se $V_s < 0$ $\Rightarrow$ l'uscita ha valor medio diverso da zero ed è il primo passo per la conversione AC-DC



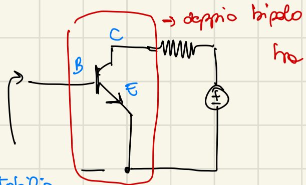




*CIRCUITI CON TRANSISTOR (amplificatore per piccoli segnali)

a titolo puramente descrittivo

consideriamo il transistor nella nostra trattazione? → con i gen controllati

TRIPOLO. ma se metto emettitore comune (collegato ingresso ed a uscita) diventa un doppio bipolo




tra C ed E trovo K·V con K molto grande

BIAS TRANSISTOR
dei componenti lo stabiliscono dicendo qual è il suo punto di lavoro

- APPLICO THEVENIN AL RESTO DEL CIRCUITO

BJT elemento resistivo non-lineare

## * CONCETTO: PICCOLO SEGNALE

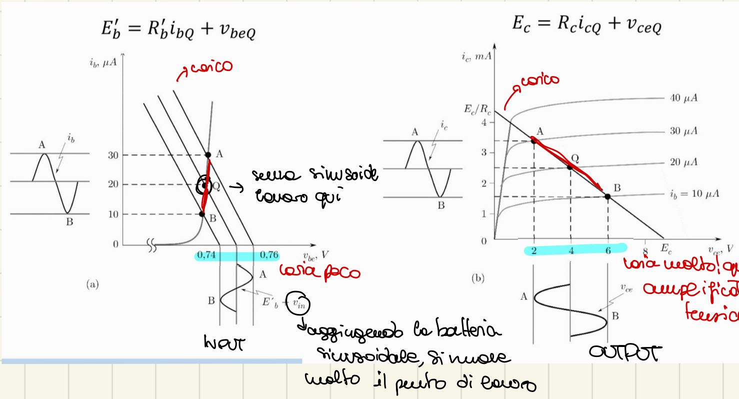
$|V_{in}| << |E_b|$ => posso linearizzare le caratteristiche perché mi muoverò poco attorno alle curve fortemente non-lineari che caratterizzano il transistor.

↓ modello segnale da amplificare

↳ ampiezza batterie che polarizzano un transistor

quindi se il segnale è piccolino:

- sinusoide IN → sinusoide OUT
- => posso usare la sovrapp. degli effetti — posso separare < problema polarizz. / problema amplificazione




piccolo ingresso => grande variazione corrente

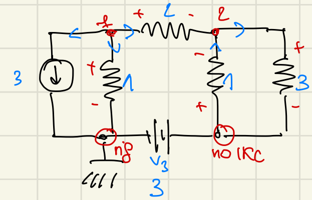
1. scrivo eq transistor + sovrappongo le rette di carico

=> se Q varia poco posso considerare il circuito lineare e studiarlo come tale

=> esiste anche un equivalente al BJT quadripolo fatto come circuito 100% lineare

* ricomincio dopo la pausa

ANALISI NODALE (semplificata)




LKC$_1$: $+3+\frac{V_1}{1}+\frac{V_1-V_2}{2}=0$

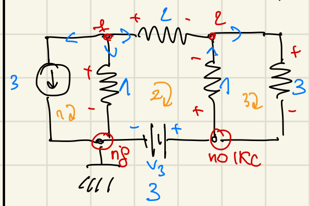
LKC$_2$: $\frac{V_2-V_3}{3}-\frac{V_3-V_2}{1}-\frac{V_1-V_2}{2}=0$

$V_3 = 3V$

$\Downarrow$

$i_1 = \frac{V_2-V_3}{3}$ $\qquad i_3 = \frac{V_3-V_2}{1}$

ANALISI DELLE MAGLIE (semplificata) scrittura diretta, con trucco




LKT 2: $+3+1\cdot(J_2-J_1)+2J_2+1(J_2-J_3)=0$

LKT 3: $+3\cdot J_3+1(J_3-J_2)=0$

$J_1=-3$

↳ $J_2, J_3$ calcolo con cramer

↳ scrivo le tensioni già sostituite con variabili per le correnti

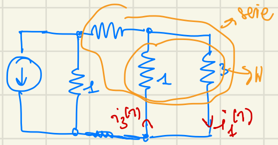
$i_1 = J_3$

$i_3 = J_3 - J_2$

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

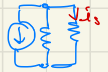
posso usare l'analisi nodale? sì anche

1. sicuramente spengo i generatori




2. scrivo le sostituzioni

3. una volta trovato $i_{3_1}$ sostituisco nel circuito OG




$i_3 = -3 \cdot \frac{1}{1+\frac{11}{4}}$