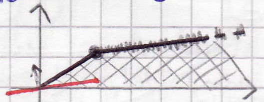
RICERCA OPERATIVA - domande varie

- Il mio problema ammette un ottimo multiplo, ma con un solo vertice ottimo.

VERO



← OTTIMO MULTIPLO CON UN SOLO VERTICE

- Perché viene usata la forma standard nei problemi di programmazione lineare?
  - perché in questo modo ho i requisiti necessari per approcciare il sistema al simplesso.

- Una soluzione di base $\binom{x_B}{0}$ contenendo uno zero è sicuramente degenere.

FALSO - affinché la soluzione sia degenere, dev'essere "0" una componente di x_B; $x_N = 0$ per costruzione.

- Se io so che ci sarà una soluzione degenere è necessario che io applichi Bland?
  - NON è necessario; basta avere un numero negativo in una colonna per evitare una degenerazione ciclante infatti: pivot negativo ⇒ no ciclo.

- Siamo di fronte ad una soluzione ottima in un problema di minimo:
  1) Non esistono variabili con coeff. di costo ridotto maggiore di zero
  2) Il valore nullo assunto da una variabile è condizione sufficiente per affermare che essa è fuori base.
  3) Il valore non nullo assunto da una variabile è condizione sufficiente per affermare che essa è in base.
  4) La variabile duale associata ad un vincolo attivo (sulla frontiera) è necessariamente $\neq 0$
  5) Il fatto che la variabile duale associata ad un vincolo del primale assuma valore $\neq 0$ è condizione sufficiente per affermare che esiste slack o surplus diversa da zero relativamente a quello stesso vincolo.

- ① FALSO i coefficienti di costo ridotto all'ottimo sono ≥ 0 però potrebbero anche essere < 0 ⇒ soluzione degenere.
- ② FALSO posso avere variabili di base a valore zero → soluz. degenere.
- ③ VERO le variabili in base sono le uniche che possono assumere valore $\neq 0$
- ④ FALSO un vincolo è attivo se la sua slack è nulla; la condizione di ortogonalità è verificata, ma la variabile potrebbe essere anche nulla.
- ⑤ FALSO in base a complementary slackness, se la duale è diversa da zero, slack o surplus relativa a quello stesso vincolo dovrà essere per forza zero (ortogonalità)

- Siamo di fronte ad una soluzione ottima in un problema di minimo:
  1) Il coefficiente di costo ridotto di una variabile in base è necessariamente nullo
  2) Il coefficiente di costo ridotto di una variabile fuori base è necessariamente diverso da zero
  3) La variabile duale associata ad un vincolo di minore/uguale assumerà nel problema duale un valore non positivo
  4) La variabile duale associata ad un vincolo non attivo è necessariamente nulla.
  5) Se il problema risultasse inammissibile, il problema corrispondente sarebbe superiormente limitato

- ① VERO nel simplesso le variabili in base danno origine alla matrice identità con coeff. di costo ridotto uguali a zero.
- ② FALSO tale variabile potrebbe anche essere pari a zero → ottimo multiplo.
- ③ VERO infatti per le regole di passaggio dal primale al duale, un vincolo di minore-uguale influenza la variabile duale associata preservando il segno di minore =.
- ④ VERO vincolo non attivo ⇒ slack $\neq 0$ ⇒ la corrispettiva variabile duale dev'essere pari a zero per complementary slackness.
- ⑤ FALSO Per il teorema della dualità in forma forte il problema corrispondente potrebbe essere illimitato o inammissibile.

- Il metodo di Dantzig fornisce un lower bound mentre una soluzione euristica fornisce un upper bound

FALSO - è esattamente il contrario: il problema dello zaino fornisce un UPPER BOUND mentre l'euristica fornisce un lower bound

- È possibile che un albero a costo minimo abbia ottimo multiplo??
  - sì, se ho n lati che hanno lo stesso costo e posso selezionare $n > 1$ lati con lo stesso costo

- Sia z^H il valore della soluzione fornita da un algoritmo polinomiale per un problema di programmazione lineare intera di massimo di tipo NP-HARD. Se $z^H \leq (1+\varepsilon) z^*$ allora l'algoritmo è ε-approssimato

FALSO - l'algoritmo (in un problema di massimo) è ε-approssimato se $z^H \geq (1-\varepsilon) z^*$

- Sia dato un problema di programmazione lineare in forma standard con matrice dei vincoli A $(m \times n)$ avente rango pieno:
  1) Se la soluzione ottima del primale è degenere allora quella del duale non può esserlo.
  2) Se la matrice A ha rango pieno allora nessuna soluzione di base sarà degenere.

- ① $\boxed{\text{FALSO}}$ se il primale è degenere allora il duale ha un ottimo multiplo ma questo non toglie che possa essere degenere
- ② $\boxed{\text{FALSO}}$ siamo nella situazione più generale ⇒ può esserci tranquillamente una soluzione di base degenere, non dipende dal rango pieno ma dai termini noti.

■ Sia dato un problema di programmazione lineare in forma standard con matrice dei vincoli A avente rango pieno, il numero di vertici (ammissibili e non) del problema primale è sempre uguale a quello dei vertici (ammissibili e non) del problema duale.

$\boxed{\text{VERO}}$ infatti:

$$\underset{\substack{\text{PRIMALE}\\(\text{standard})}}{\binom{n+m}{m}} = \underset{\substack{\text{DUALE}\\(\text{standard})}}{\binom{m+n}{n}} \qquad \frac{(n+m)!}{n!\,m!} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$

■ Se ho una soluzione di base costituita da m variabili di base di cui q a zero, quante basi ho associate a questa soluzione? es. $[1\,3\,2\,0\,0 \mid 0\,0]$

$$\binom{(n-m)+q}{q} \text{ basi}$$

■ È possibile che le variabili di costo ridotto delle variabili in base non siano zero.

$\boxed{\text{FALSO}}$ - per costruzione le variabili di costo ridotto delle variabili in base devono essere zero $[0^T, r^T]$.

■ Che relazione esiste tra soluzioni di base e matrici TUM?
- una soluzione di base può essere scritta in questo modo → $\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} = x_B$; se poniamo l'ipotesi che b sia intero e che tutti gli a_{ij} siano 0, 1, -1 ⇒ potrò avere soluzioni intere se e solo se il determinante della matrice B è 0, 1, -1.

■ È vero che in un problema di PL in forma standard possiamo assumere senza perdita di generalità che la matrice dei vincoli abbia le righe linearmente indipendenti?

$\boxed{\text{FALSO}}$ - avere la forma standard non è condizione sufficiente per poter escludere che due righe siano linearmente indipendenti (potrebbero esserci due vincoli, uno il multiplo dell'altro).

■ La regola del metodo del simplesso per la scelta della variabile entrante è usata perchè essa conduce alla migliore soluzione di base adiacente.

$\boxed{\text{VERO}}$ - ~~non passo necessariamente tra adiacenti: il simplesso passa ad una nuova soluzione di base migliore della precedente, geometricamente passa ad un vertice migliore del precedente ed adiacente ad esso (vertice adiacente - soluzione nuova migliore)~~

■ Se il problema ha soluzioni ottime multiple, allora deve avere regione ammissibile limitata.

$\boxed{\text{FALSO}}$ - non necessariamente, potrebbe anche avere regione ammissibile illimitata, al fine che vi sia un ottimo multiplo basta che la f.o. sia parallela a uno dei vincoli che definiscono la regione ammissibile.

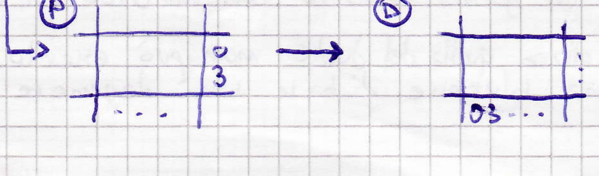
■ I problemi di PL sono generalmente più semplici da risolvere rispetto ai problemi di PLI.

$\boxed{\text{VERO}}$ - i problemi di PL sono problemi risolvibili in tempi polinomiali (FACILI) mentre quelli di PLI sono problemi non risolvibili in tempi polinomiali ma in tempi esponenziali (DIFFICILI); la determinazione di una soluzione ottima a valori infiniti è più facile della determinazione di una soluzione ottima a valori finiti (discreti); un insieme di punti non è un insieme convesso per definizione.

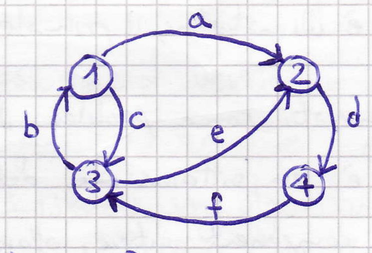
■ Sia data una matrice con elementi tutti uguali a 1, -1 oppure 0. Fornire un esempio che dimostri la sola necessità della condizione ai fini della totale unimodularità della matrice stessa
- $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ per ogni elemento di A →

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

■ Si supponga che un problema primale abbia come soluzione ottima una soluzione di base degenere. Che cosa implica questa condizione per il problema duale?? Perchè? È vero anche il contrario?
- un problema primale con soluzione di base degenere ha un duale con ottimo multiplo in quanto si scambiano i valori assunti dalle variabili di base con i coeff. di costo ridotto ed è vero il viceversa in quanto lo scambio è reversibile (da duale a primale)



■ La matrice di incidenza nodi-archi di un grafo orientato è TUM.
$\boxed{\text{VERO}}$



		a	b	c	d	e	f
I_1	1	1	-1	1	0	0	0
I_1	2	-1	0	0	1	-1	0
I_1	3	0	1	-1	0	1	-1
I_1	4	0	0	0	-1	0	1

* $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$
* ogni colonna ha due elementi $\neq 0$
* sulle colonne → elementi sempre discordi, stessa partizione

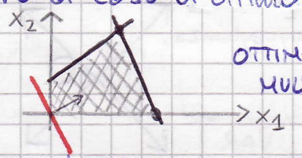
} è TUM

■ Se il problema primale ha funzione obiettivo illimitata, allora il valore ottimo della funzione obiettivo per il problema duale deve essere zero.
$\boxed{\text{FALSO}}$ – il valore della funzione obiettivo (per la dualità in forma forte) non è zero: non esistono soluzioni ammissibili per il duale (in quanto il primale è illimitato).

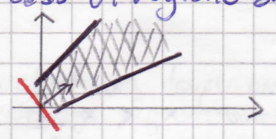
■ Ad ogni iterazione il metodo del simplesso identifica simultaneamente un vertice per il problema primale e un vertice per il problema duale tale che i valori per le rispettive funzioni obiettivo siano identici
$\boxed{\text{VERO}}$ – il simplesso identifica un vertice per il primale che ha una determinata z^* alla quale è associato un vertice del duale ⇒ i vertici di primale e duale sono "associati"; ad ogni iterazione si trova un vertice per il primale ed uno del duale con funzione obiettivo coincidenti. *

■ Se una soluzione ammissibile per un problema di Programmazione Lineare è ottima ma non è un vertice, allora esistono infinite soluzioni ottime.
$\boxed{\text{VERO}}$ – basti pensare al caso di ottimo multiplo oppure al caso di regione ammissibile illimitata

infinite soluzioni ⇐



OTTIMO MULTIPLO



REGIONE ILLIMITATA

■ Quando un problema di PL ha un vincolo di uguaglianza, in tale vincolo viene introdotta una variabile artificiale in modo da iniziare il metodo del simplesso con una soluzione di base iniziale semplice per il modello originario.
$\boxed{\text{VERO}}$ – nel metodo delle due fasi introduco le variabili artificiali per avere nel tableau la matrice identità e in particolare una soluzione di base iniziale da cui partire.

■ La regione ammissibile per il rilassamento continuo è un sottoinsieme della regione ammissibile del problema di Programmazione Lineare Intera.
$\boxed{\text{FALSO}}$ – è esattamente il contrario in quanto un problema di PLI è un sottoinsieme di un problema di PL infatti: $z_{PL} = \min\{c^T x : x \in P\} \leq \min\{c^T x : x \in X\} = z_{PLI}$;
z_{PL} fornisce un lower bound per z_{PLI}.

■ Se in una iterazione del metodo del simplesso non esiste alcuna variabile di base uscente, allora il problema non ha soluzioni ammissibili.
$\boxed{\text{FALSO}}$ – se ho coeff. di costo ridotto negativo potrei avere i suoi pivot negativi o nulli ⇒ mi fermo! ma la mia soluzione è un ottimo illimitato ← soluzione ammissibile.

■ Per un problema di Programmazione Lineare in forma standard e il relativo problema duale, la somma del numero di vincoli funzionali e il numero di variabili è la stessa per entrambi i problemi
$\boxed{\text{VERO}}$ – infatti se nel primale ho n vincoli e m variabili, nel duale ho n variabili e m vincoli.

■ Se una soluzione non intera è ammissibile per il rilassamento continuo di un problema di PLI allora la soluzione intera più vicina (ottenuta approssimando ogni variabile all'intero più vicino) è una soluzione ammissibile per il problema di PLI.
$\boxed{\text{FALSO}}$ – non è detto che la soluzione intera più vicina al rilassamento continuo sia ammissibile per un problema di PLI → negli algoritmi naif si procede in questo modo, ma nella PLI la scelta di una buona formulazione è cruciale alla determinazione della soluzione.

■ Discutere le condizioni necessarie per cui una matrice sia TUM
- condizione necessaria affinché una matrice sia TUM è che $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ per ogni elemento della matrice (← condizione non suff.)

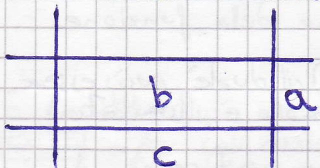
- Se il problema duale ha F.O. illimitata, allora il valore ottimo della F.O. per il primale deve essere zero
  $\boxed{\text{FALSO}}$ per la dualità in forma forte se il duale è illimitato, il primale è non ammissibile.

- I problemi di Cammino Minimo possono essere formulati come problemi di Programmazione Lineare.
  $\boxed{\text{VERO}}$ - i problemi di cammino ~~minimo~~ sono TUM che è un sottoinsieme della PL.

- Se una soluzione ottima per il rilassamento lineare ha componenti intere, allora il valor ottimo della funzione obiettivo è lo stesso per entrambi
  $\boxed{\text{VERO}}$ - infatti se $x^*_{PL} \in X$ è intera $\Rightarrow z_{PL} = c^T x^*_{PL} = z_{PLI}$

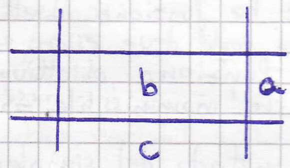
RICERCA OPERATIVA - formulario

METODO DEL SIMPLESSO



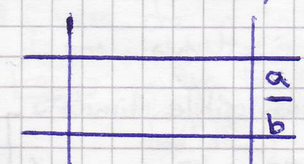
* prendo il c più negativo (più piccolo) V. ENTRANTE
* prendo il rapporto minimo a/b V. USCENTE
* pivot NON negativo

SIMPLESSO DUALE



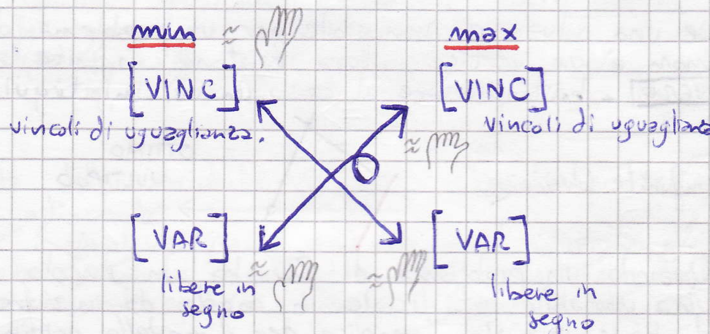
* prendo la a negativa V. USCENTE
* prendo il rapporto minimo $|c/b|$ V. ENTRANTE
* pivot ~~può essere~~ deve negativo

TAGLIO DI GOMORY



* se tutti i b sono uguali prendo la variabile a indice i minimo $x_i < x_{i+1}$
* se i b sono diversi scelgo quello con parte frazionaria (di a/b) maggiore.

DUALITÀ



VARIAZIONE DEI TERMINI NOTI

$$B^{-1}\Delta b \geq -B^{-1} b$$

con
* B valori iniziali delle variabili che all'ottimo sono in base.
* $B^{-1} b$ valori delle variabili di base all'ottimo

VARIAZIONE DEI COEFFICIENTI DELLE VARIABILI IN BASE

$$\Delta c_B^T B^{-1} N \leq r_N^T$$

con
* $B^{-1} N$ valori nel tableau ottimo delle variabili NON in base
* r_N^T coeff. costo ridotto delle variabili non in base

DUALITÀ IN FORMA FORTE

primale		duale
illimitato	$\longrightarrow$	non ammissibile
non ammissibile	$\longleftarrow$	illimitato
ill./non amm.	$\longleftarrow$	non ammissibile
non ammissibile	$\longrightarrow$	ill./non ammissibile
ottimo	$\longleftrightarrow$	ottimo

x_B	I	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$
	0^T	$c_N^T - c_B^T B^{-1} N$	$-c_B^T B^{-1} b$

TABLEAU IN FORMA CANONICA

RICERCA OPERATIVA – quesiti ①

1) Le basi associate al vertice in esame sono $\binom{n-m+q}{q}$ con $(n-m+q)$ le possibili variabili poste a zero e q variabili di base poste a zero.

2) $\boxed{\text{FALSO}}$ Essendo un algoritmo approssimato per un problema di PLI, fornisce un errore garantito dall'ottimo in tempi polinomiali.

3a) $\boxed{\text{FALSO}}$ In corrispondenza di una variabile non di base, se il suo coefficiente di costo ridotto è pari a zero siamo di fronte ad un ottimo multiplo.

3b) $\boxed{\text{FALSO}}$ Il simplesso duale viene applicato quando la soluzione corrente è duale ammissibile, ma non ammissibile per il primale; questo non toglie che per esempio io possa applicare il simplesso duale dopo l'introduzione di un vincolo (come quando, per esempio, inserisco l'equazione del taglio nel tableau)

4) $\boxed{\text{FALSO}}$ Se il primale ammette ottimo finito, allora anche il duale ammette ottimo finito e i due valori sono coincidenti. tale teorema ha come ipotesi la convessità che in PLI si perde: un insieme di punti, per definizione, non è un insieme convesso.

5) Posso dire che è un problema di massimo e che z_{PL} fornisce un Upper Bound per z_{PLI}.

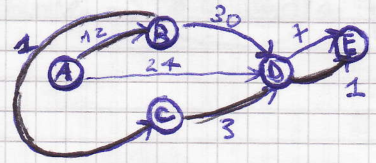
6a) $\boxed{\text{FALSO}}$ La variabile duale associata ad un vincolo di minore/uguale preserva il segno e quindi sarà anch'essa minore/uguale.

6b) $\boxed{\text{VERO}}$ I coefficienti di costo ridotto all'ottimo sono tutti ≥ 0.

7) $\boxed{\text{FALSO}}$ $B^{-1}b \geq 0$ è la condizione di ammissibilità dei termini noti; la condizione di ottimalità è: $C_N^T - C_B^T B^{-1} N \geq 0$

8) $\boxed{\text{VERO}}$ Set covering $\min 1^T x \quad Ax \geq 1 \quad x \in \{0,1\}$; ogni regione è coperta almeno da un impianto; perché il problema sia facile A dev'essere TUM, e i vincoli di disuguaglianza; diventa NP-HARD se i vincoli sono di uguaglianza (SET PARTIONING).

9) $\boxed{\text{FALSO}}$ Il cammino a costo minimo potrebbe deve necessariamente contenere il numero minimo di archi ma il numero necessario affinché il percorso sia meno costoso → esempio



10) $\boxed{\text{FALSO}}$ Avranno coordinate intere tutti i vertici, non solo quello ottimo.

11) È una condizione necessaria in quanto tutte le variabili fuori base assumono valore zero, ma non è sufficiente → soluzione degenere per esempio.

12) **FALSO** Una colonna negativa indica una direzione di apertura, la regione ammissibile è aperta, quindi sia che il problema sia di max, sia che il problema sia di min la soluzione è illimitata.

13) **FALSO** La condizione per controllare l'ottimalità dei termini noti è
$B^{-1}\cdot\Delta b \geq -B^{-1}\cdot b \rightarrow B^{-1}\cdot\Delta b + B^{-1}\cdot b \geq 0 \rightarrow B^{-1}(\Delta b + b) \geq 0$

14) **FALSO** Così facendo correrei il rischio che l'intero più vicino non sia ammissibile o peggio che l'intero più vicino sia molto lontano dall'ottimo del rilassato $\Rightarrow$ mi allontano dalla soluzione intera reale.

15a) **VERO** È possibile trovarsi in una situazione del genere perché è una soluzione degenere $\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	2	1	-1	6
x_1	1	-1	0	1	0
	0	-7	0	5	0

15b) **FALSO** Per complementary slackness, se la slack di un vincolo ha valore $\neq 0$ allora la corrispondente variabile duale dev'essere zero $X_i \cdot Y_{(i+m)} = 0$

15c) **FALSO** Per complementary slackness, se la slack di un vincolo è nulla, allora la corrispondente variabile duale potrebbe assumere qualsiasi valore finito

16) **FALSO** Se $B^{-1}\cdot b = 0$ non è detto che la funzione obiettivo sia zero, può assumere qualsiasi valore

17) **FALSO** Nel caso di una soluzione degenere possono avere più basi associate.