測度論について

測度論：

　集合が与えられたとき、その部分集合の大きさを「どのように測るか」という理論

記号の約束

- 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$、有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$、実数全体の集合を $\mathbb{R}$、複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ とする。
- **[Def]** を定義、**[Thm]** を定理、**[Prf]** を証明、**[N.B.]** を注意点とする。

はじめに（モチベーション）

各種応用分野において**ヒルベルト空間**が数学的バックグランドとして自然に現れる

- 情報学
  - 信号処理：
    - フーリエ解析
  - 機械学習：（再生核ヒルベルト空間が背景）
    - ガウス過程
    - ニューラルネットワークの積分表現理論
- 物理学
  - 量子力学

ヒルベルト空間とは？

一言で言うと、

- 内積が定義されているベクトル空間であって、
  「内積から誘導されるノルム」から誘導される距離に関して完備な空間

ヒルベルト空間の中でも（最も）重要な対象は L^2 空間
L^2 空間とは？：

- 二乗して「ルベーグ積分」可能な関数の集合

ルベーグ積分とは？

高校で習う積分はリーマン積分

ルベーグ積分は

- リーマン積分の拡張
    - リーマン積分では対応できない奇妙奇天烈な関数も積分することが可能
- 極限をとる操作と相性がよい

ルベーグ積分を理解するためには？

測度論の知識が必要になります

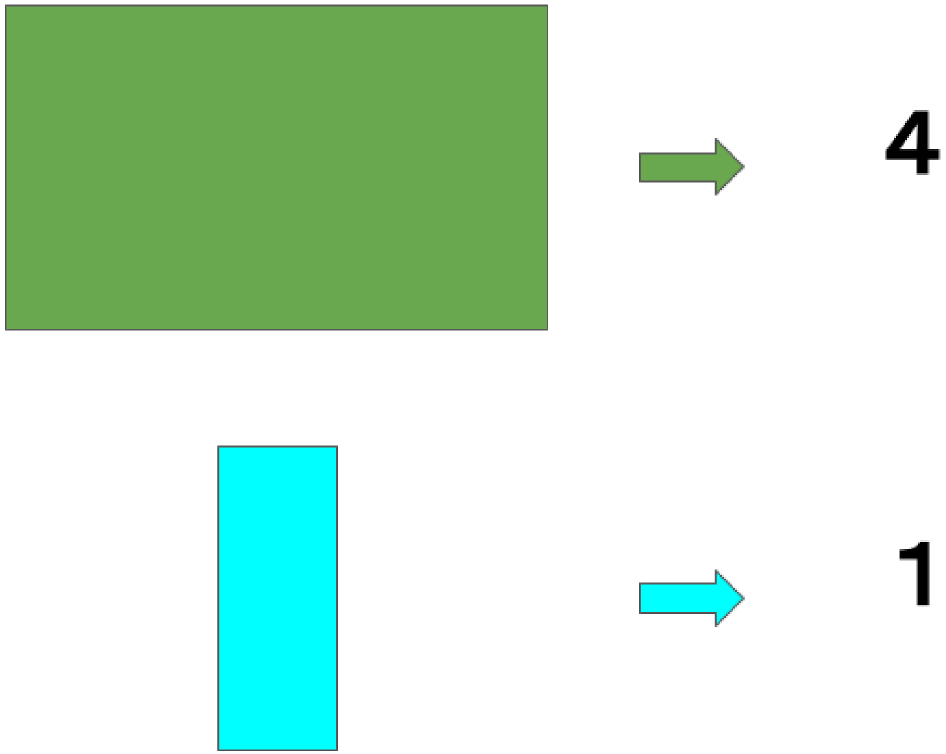
すなわち

- 各種応用分野 のための ヒルベルト空間
- ヒルベルト空間 の中でも最も重要なのが L^2 空間
- L^2 空間 のための ルベーグ積分
- ルベーグ積分 のための 測度論

というわけで本スライドでは、測度論を概説します。

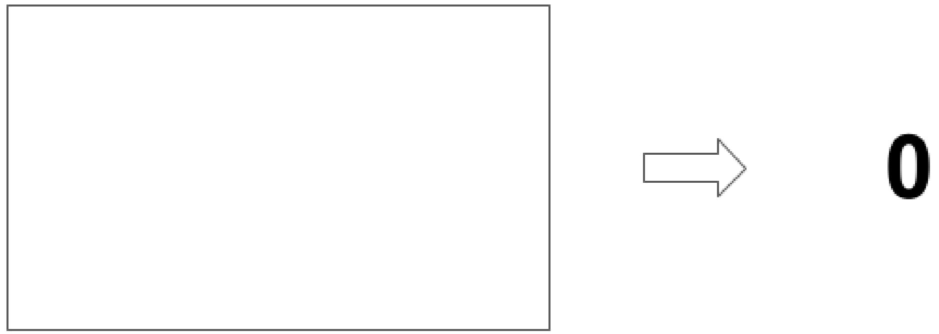
測度論のイントロダクション

集合に、その様子を要約するような「いい感じの値」を割り当てたい
割り当てのルールを考えてみる



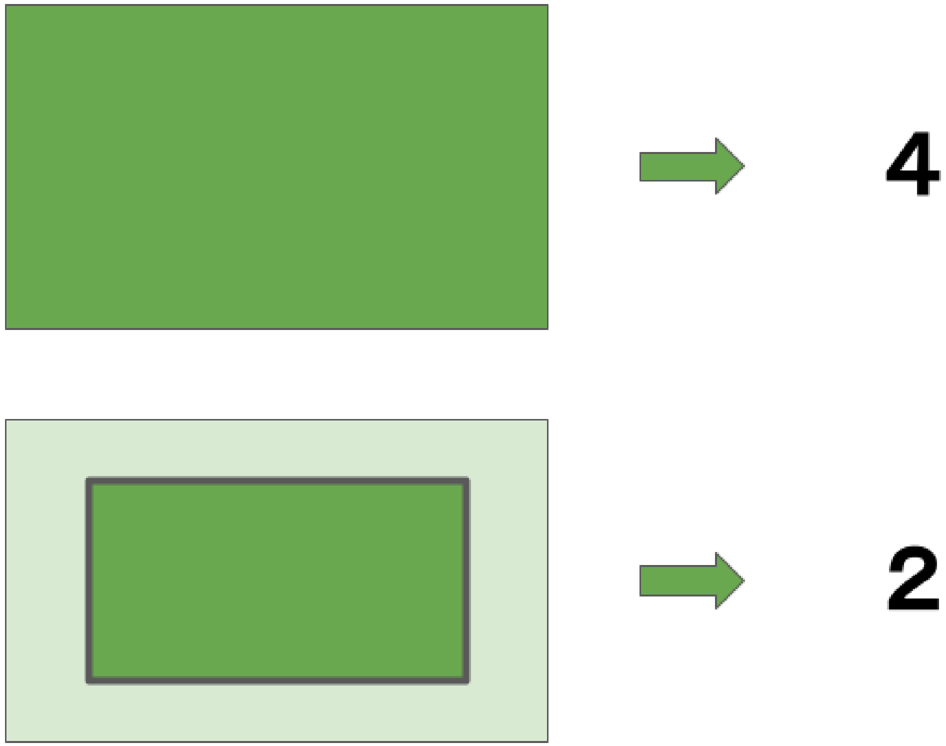
測度論のイントロダクション

とりあえず、空集合∅は0になってほしい



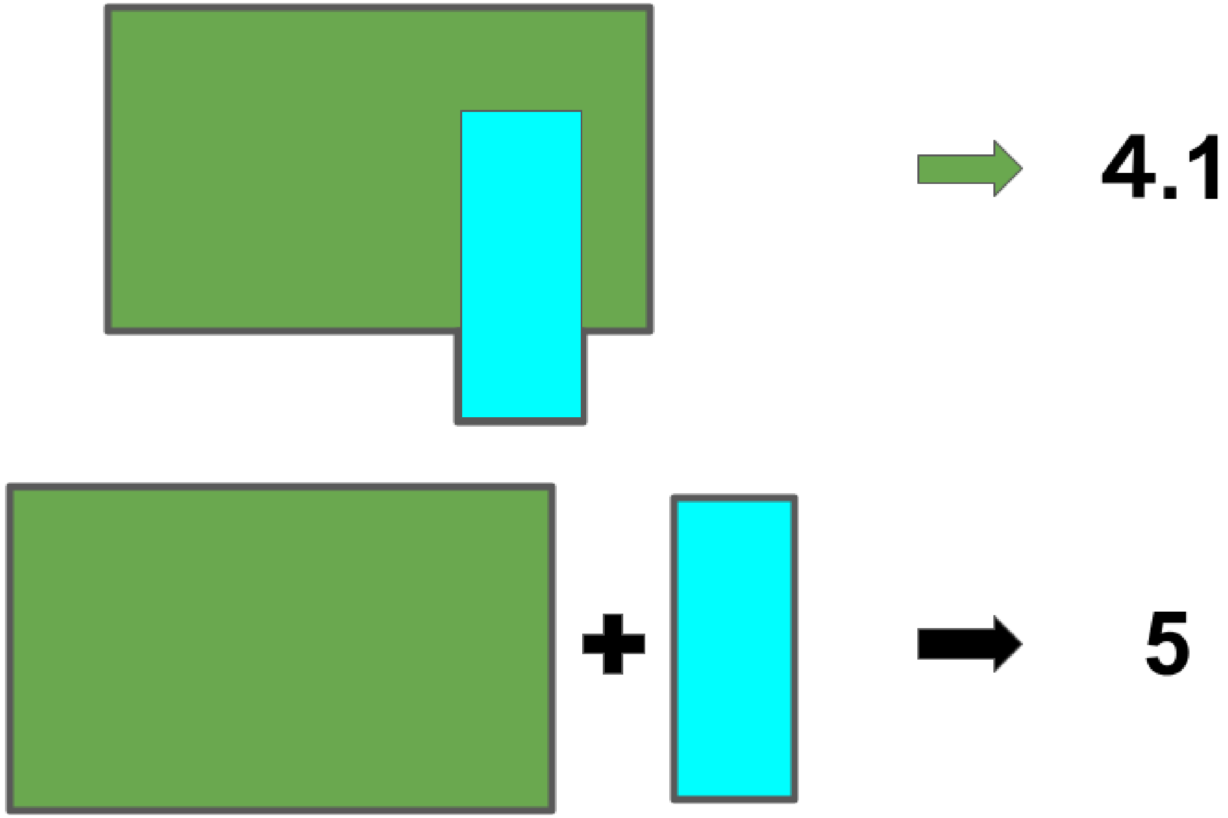
測度論のイントロダクション

部分は全体よりも値が小さくなってほしい



測度論のイントロダクション

和集合の値は、それぞれの値を足したものよりも小さくなってほしい



外測度

ルールをまとめてみる。
X の部分集合を無限個とりだしてもいいようにルールを取り決めておく。

[Def]
X を一般の集合、$\mathcal{P}(X)$ を X の部分集合全体からなる集合族とする。
写像 $\nu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ は次の性質をもつとする。

1. $\nu(\emptyset) = 0$
2. $E \subset F$ ならば $\nu(E) \leq \nu(F)$
3. X の集合列 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ に対して

$$\nu\left(\sum_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)$$

ν を**外測度**と名付ける。

外測度

「いい感じのルール」になったかな？
k 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^k$ 上でうまく動くか試してみる。

ここからユークリッド空間を対象に考える

ユークリッド空間の半開区間

$\mathbb{R}^k$ の半開区間 I を以下で定義する。

$$\begin{aligned} I &= [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_k, b_k) \\ &= \{(x_1, x_2, \cdots, x_k) | a_1 \leq x_1 < b_1, a_2 \leq x_2 < b_2, \cdots, a_k \leq x_k < b_k\} \end{aligned}$$

I の k 次元体積 $|I|$ を次で定義する。

$$|I| = (b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2) \times \cdots \times (b_k - a_k)$$

ルベーグ外測度

$\mathbb{R}^k$ の部分集合 S が与えられたとき、S を可算個の半開区間でおおう被覆を考える。

$$S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

この被覆をいろいろにとったときの下限として、

$$\nu(S) = \inf \sum |I_n|$$

とおく。ν を S の**ルベーグ外測度**とする。

Q. ルベーグ外測度を使って、 $\mathbb{R}^k$ のすべての部分集合を測ることはできるか？

A. できません

よって、 $\mathbb{R}^k$ の部分集合全体の集合を対象にするのではなく**適切に**制限した集合族を「測る」対象にする

ルベーグ可測集合

次の条件を満たす $\mathbb{R}^k$ の部分集合 E をルベーグ可測集合という。

$\mathbb{R}^k$ の任意の部分集合 A に対して、

$$\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A - E)$$

が成り立つ。

外測度をつかって「測る」ことができない集合

ルベーグ非可測集合

[Thm]
ツェルメロの公理を仮定すると、$\mathbb{R}$ にはルベーグ非可測集合が存在する。

[prf]
Appendixに記載

測度論は

「集合をいい感じに測る方法」を使って、
「集合をいい感じに測る方法が適用できるやつら」だけ集めて、
その中で成り立つ性質を調べる。

上記の手続きはユークリッド空間に**限らない** ← より抽象的な数学へ
ここから「一般の集合」の世界に戻る

可測集合

[Def]
ν を X 上の外測度とする。 X の任意の部分集合 A に対し

$$\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A - E) \tag{1}$$

が成立するとき、「 X の部分集合 E が ν 可測集合（または、単に可測集合）である」という。
式 (1) をカラテオドリの条件という。

可測集合

ν 可測集合はどんなやつらなのか？

[Thm] カラテオドリの定理
ν を外測度とする。X の ν 可測集合の全体を $\mathcal{M}$ とおく。
このとき、次が成立する。

1. $\mathcal{M}$ は σ-集合体である。
2. $E \in \mathcal{M}$ に対して $\mu(E) = \nu(E)$ で μ を定義すれば、μ は $\mathcal{M}$ 上の完備な測度である。

σ-集合体

[Def] σ-集合体

集合 X の（空でない）部分集合族 $\mathcal{S}$ が σ-集合体であるとは、
次の性質を満たすときを言う。

1. $E \in \mathcal{S}$ ならば $E^c \in \mathcal{S}$
2. 集合列 $\{E\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}$ に対し $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{S}$

上記の性質から次の性質を持つことが言える。
（3.は1.と2.から、4.は1.と3.から示される。5.は1.と4.から自明。）

3. 集合列 $\{E\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}$ に対し $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{S}$
4. $E, F \in \mathcal{S}$ ならば $E - F \in \mathcal{S}$
5. $\varnothing \in \mathcal{S}, \quad X \in \mathcal{S}$

σ-集合体

[N.B.]

σ-集合体は数学者でない我々が考えつくような集合だいたい入っている
とても広い集合のクラス

σ-集合体は別名が多い

- 完全加法族・可算加法族・σ-加法族・σ-集合代数
- 加法族とだけ言う場合も（$\leftarrow$ これはさすがにまぎらわしいと思う）

測度

外測度を可測集合上に制限したものを**測度** $\mu = \nu|\mathcal{M}$ という。

測度は以下の性質を持つ。

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. $E_j \in \mathcal{M}(j = 1, 2, \dots)$ かつ $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{M}$ かつ $E_i \cap E_j = \varnothing (i \neq j)$ ならば、

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$$

測度空間

集合 X、可測集合 $\mathcal{M}$、測度 μのセット：$(X, \mathcal{M}, \mu)$を測度空間という。

Appendix

「外測度」へ至る道の出発点の取り直し

k 次元ユークリッド空間のような稠密な部分集合が存在する空間では、稠密な部分集合上で外測度を定義したのち、その外測度を空間全体に適用できる外測度に拡張することができる。

「外測度」へ至る道の出発点の取り直し

- $\mathcal{E}$ を、$\mathcal{E} \ni \emptyset, \mathcal{E} \ni X$ の条件を満たす「一般の集合 X 」の集合族とする。
- $\mathcal{E}$ 上に写像 $\rho : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ が与えられており、$\rho(\emptyset) = 0$ とする。
- X の任意の部分集合 E に対し、S_E を可算個の $\mathcal{E}$ の元 $A_k (k = 1, 2, \cdots)$ で、$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset E$ なるものの集まりとし、$\mathcal{S}(E)$ をS_E の全体とする。

ここで、 X の任意の部分集合 E に対し、 $\nu(E)$ を

$$\nu(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \rho(A_k) | S_E = \{A_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{S}(E) \right\}$$

で定義する。右辺の下限は $S_E = \{A_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{S}(E)$ すべてについてとる。
ν は外測度である。
(証明は省く。ちなみに、外測度の定義3の条件が成り立つのを示すには、 $E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$ となるような集合列 E_j を考え、 E_j をぎりぎり覆う A_k を考えたらよい。)

ツェルメロの公理

X を集合、$\{E_\alpha | \alpha \in A\}$ を A を添え字の集合とする X の部分集合の族とし、
$E_\alpha \neq \emptyset$ かつ $E_\alpha \cap E_\beta = \emptyset (\alpha \neq \beta)$ とする。

このとき、各 E_α から一つずつ元 $x_\alpha \in E_\alpha$ をとって $E = \{x_\alpha | \alpha \in A\}$ という X の部分集合が構成できる。

ルベーグ非可測集合の存在

[Prf]

実数 x に対して、 $E_x = \{x + r | r \in \mathbb{Q}\}$ とおく。ここで $A = \{0\} \cup \{\mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$ とおき、集合族 $X = \{E_x | x \in A\}$ を考える。

$x, y \in A, x \neq y$ のとき $E_x \cap E_y = \varnothing$ より、ツェルメロの公理から E を各 E_x から一つずつ元を選びそれを集めた集合とする。

E の２つの点の差は無理数だから $\{x - y | x \in E, y \in E\}$ は区間を含まない。

一方、 E がルベーグ可測集合かつ $\nu(E) > 0$ ならば、正数 ϵで$\{x - y | x \in E, y \in E\} \supset (-\epsilon, \epsilon)$ が存在する。

よって、 E はルベーグ非可測集合かまたは $\nu(E) = 0$ である。

ここで、 $\mathbb{R} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (E + r)$ だから、 $\nu(E) = 0$ と仮定すると $\nu(E + r) = 0$ 。一方、 $r, s \in \mathbb{Q}, r \neq s$ のとき $(E + r) \cap (E + s) = \varnothing$ より $\infty = \nu(\mathbb{R}) = \sum_{r \in \mathbb{Q}} \nu(E + r) = 0$ となり矛盾する。

したがって、 E はルベーグ非可測集合である。

カラテオドリの定理の証明

[Prf]

ν を外測度、 集合 X の ν 可測集合の全体を $\mathcal{M}$ とおく。
6段階に分けて示していく。

(1) $E \in \mathcal{M}$ ならば $E^c \in \mathcal{M}$ である。

カラテオドリの条件より、X の任意の部分集合 A に対して

$$\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A - E)$$

ここで、

$$A - E = A \cap E^c, \quad A \cap E = A \cap (E^c)^c = A - E^c$$

より

$$\nu(A) = \nu(A \cap E^c) + \nu(A - (E^c))$$

よって、 E^c も ν 可測集合。

カラテオドリの定理の証明

[Prf]

(2) $E, F \in \mathcal{M}$ ならば $E \cup F \in \mathcal{M}$

X の任意の部分集合 A に対し

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \nu(A \cap E) + \nu(A - E) \\ &= \nu((A \cap E) \cap F) + \nu((A \cap E) - F) + \nu((A - E) \cap F) + \nu((A - E) - F) \\ &= \nu(A \cap (E \cap F)) + \nu(A \cap (E \cap F^c)) + \nu(A \cap (E^c \cap F)) + \nu(A \cap (E^c \cap F^c))\end{aligned}$$

ここで、

$$A \cap (E \cup F) = (A \cap (E \cap F)) \cup (A \cap (E \cap F^c)) \cup (A \cap (E^c \cap F))$$

なので、

$$\nu(A \cap (E \cup F)) \leq \nu(A \cap (E \cap F)) + \nu(A \cap (E \cap F^c)) + \nu(A \cap E^c \cap F)$$

カラテオドリの定理の証明

[Prf]

(2) つづき

一方、

$$A \cap (E^c \cap F^c) = A - (E \cup F)$$

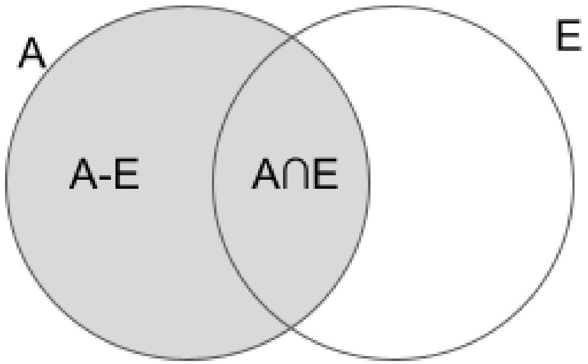
なので、

$$\nu(A \cap (E \cup F)) + \nu(A - (E \cup F)) \leq \nu(A)$$

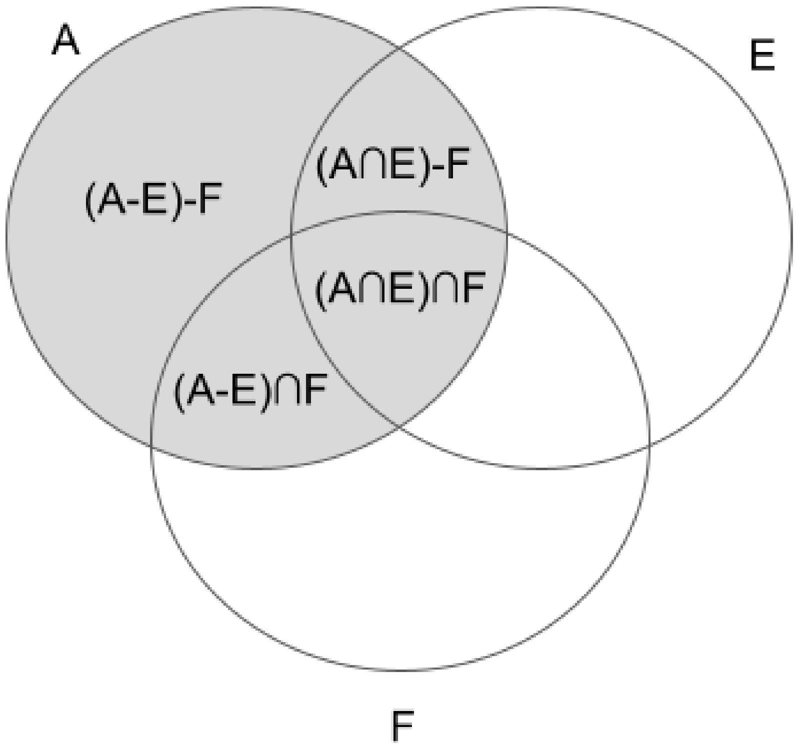
よって、 $E \cup F \in \mathcal{M}$ 。

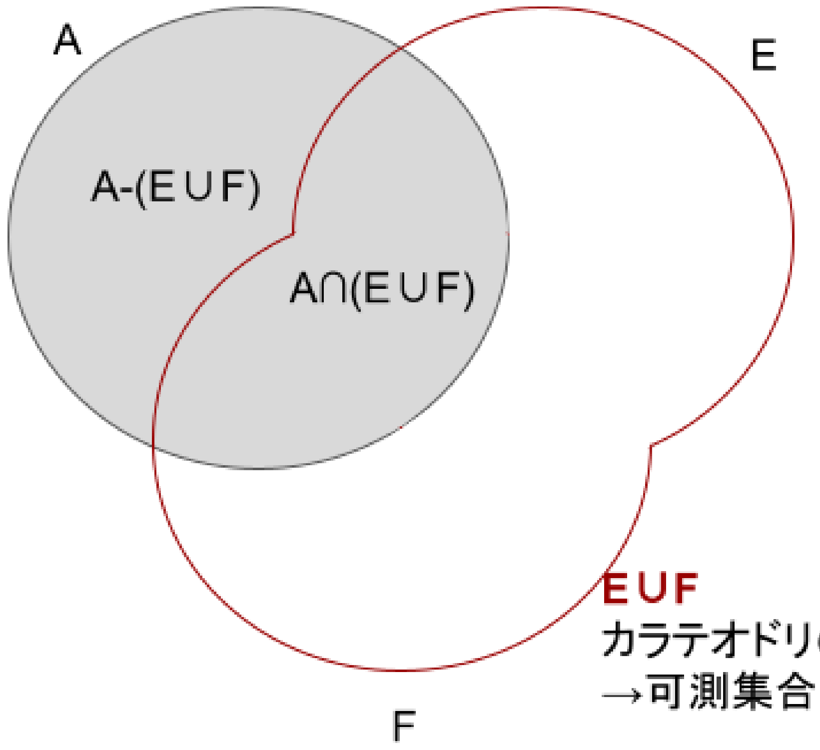
(1)、(2) より $\mathcal{M}$ は有限加法族であることがわかる。

カラテオドリの定理の証明 (2) の図



A　: Xの任意の部分集合
E, F: 可測集合





E∪F
カラテオドリの条件を満たす
→可測集合

カラテオドリの定理の証明

[Prf]

(3)

$\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ を互いに交わらない $\mathcal{M}$ の集合列とする。
$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ とおくと、

$$\nu(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A \cap E_j) + \nu(A - E) \tag{3.1}$$

が成り立つ。

カラテオドリの定理の証明

[Prf]

(3)

$G_n = \cup_{j=1}^{n} E_j$ とおくと $\mathcal{M}$ は有限加法族なので $G_n \in \mathcal{M}$ 。
$E_j \cap E_n = \emptyset \ (j \neq n)$ より $G_n \cap E_n = E_n, \ G_n - E_n = G_{n-1}$ に注意すれば、
$E_n \in \mathcal{M}$ なのでカラテオドリの条件より

$\nu(A \cap G_n) = \nu((A \cap G_n) \cap E_n) + \nu((A \cap G_n) - E_n) = \nu(A \cap E_n) + \nu(A \cap G_{n-1})$

これを繰り返すと

$$\nu(A \cap G_n) = \sum_{j=1}^{n} \nu(A \cap E_j)$$

を得る。

カラテオドリの定理の証明

[Prf]

(3)

一方、$G_n \in \mathcal{M}$ より

$$\nu(A) = \nu(A \cap G_n) + \nu(A - G_n)$$

である。ここで、$G_n \subset E$ より $A - G_n \supset A - E$ なので
$\nu(A - G_n) \geq \nu(A - E)$ 以上より、

$$\nu(A) \geq \sum_{j=1}^{n} \nu(A \cap E_j) + \nu(A - E)$$

を得た。$n \to \infty$ として式 (3.1) を得る。

カラテオドリの定理の証明

[Prf]

(4) $E_j \in \mathcal{M}\ (j = 1, 2, \cdots)$ に対し $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ とおくと $E \in \mathcal{M}$ である。

$F_1 = E_1,\ F_j = E_j - (E_1 \cup \cdots \cup E_{j-1})\ (j \geq 2)$ とおくと (2) より
$\mathcal{M}$ は有限加法族なので $F_j \in \mathcal{M}\ (j = 1, 2, \cdots)$ 。

また、$F_j \cap F_k = \varnothing\ (j \neq k)$ かつ $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$ である。
よって、 (3) より

$$\nu(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A \cap F_j) + \nu(A - E)$$

カラテオドリの定理の証明

[Prf]

(4) つづき

一方、 $A \cap E = A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A \cap F_j)$ と外測度の定義より

$$\nu(A \cap E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A \cap F_j)$$

以上の議論より $\nu(A) \geq \nu(A \cap E) + \nu(A - E)$ 。したがって、 $E \in \mathcal{M}$ である。
$\mathcal{M}$ が完全加法族であることが示せた。

カラテオドリの定理の証明

[Prf]

(5) $E \in \mathcal{M}$ に対して $\mu(E) = \nu(E)$ で μ を定義すると、 μ は $\mathcal{M}$ 上の測度となる。

まず、 $\mu(\emptyset) = \nu(\emptyset)$
次に、 $E_j \in \mathcal{M}\ (j = 1, 2, \cdots)$ が互いに素であるとする。 $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ とおく。
(4) より $E \in \mathcal{M}$ である。
式 (3.1) において $A = E$ とおくと、 $E \cap E_j = E_j$であるので

$$\nu(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E \cap E_j) + \nu(E - E) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)$$

カラテオドリの定理の証明

[Prf]

(5) つづき

一方、外測度の定義より $\nu(E) = \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E)$ なので、以上より

$$\nu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)$$

が示せた。

μ の定義から $\mu(E) = \nu(E),\ \mu(E_j) = \nu(E_j)$ なので、 $\mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$ 。
したがって、 μ は $\mathcal{M}$ 上の測度である。

カラテオドリの定理の証明

[Prf]

(6) $(X, \mathcal{M}, \mu)$ は完備な測度空間

$E \in \mathcal{M}$ を $\mu(E) = 0$ とする。F を $F \subset E$ なる X の部分集合とすれば、

$\nu(F) \leq \nu(E) = \mu(E) = 0$ より $\nu(F) = 0$ である。したがって $F \in \mathcal{M}$ なので

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ は完備である。

[N.B.]

完備測度空間とは、

「任意の零集合の部分集合が可測であるような測度空間」のこと。