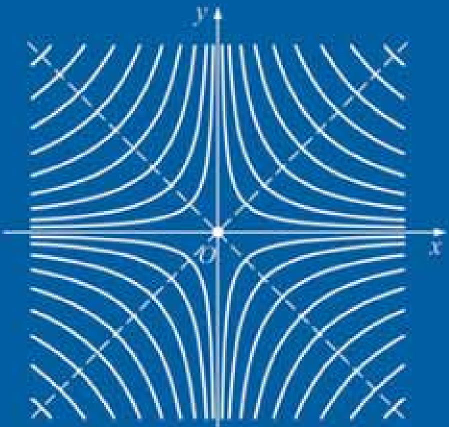
Г. П. Размыслович А.В. Филипцов
В.М. Ширяев

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА

Практикум



Для студентов учреждений
высшего образования

Г.П. Размыслович А.В. Филипцов
В.М. Ширяев

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА

Практикум

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия
для студентов учреждений высшего образования по специальностям
«Прикладная математика», «Информатика», «Актуарная математика»
и направлениям специальностей
«Экономическая кибернетика», «Компьютерная безопасность»,
«Прикладная информатика»

Минск
«Вышэйшая школа»
2018

УДК [512+514](075.8)
ББК 22.1я73
Р17

Р е ц е н з е н т ы: кафедра алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук, доцент *В.М. Селькин*); заведующий кафедрой высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет» доктор физико-математических наук, профессор *М.П. Дымков*

ISBN 978-985-06-2823-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Роль геометрии и алгебры в системе высшего математического образования весьма значительна. Дисциплина «Геометрия и алгебра» имеет большое самостоятельное теоретическое и прикладное значение, без нее также невозможно построить другие математические курсы. Кроме того, в связи с переходом на четырехлетнее образование (бакалавриат) роль общеобразовательных курсов еще больше возрастает. Поэтому овладение студентом материалом, изучаемым в рамках дисциплины «Геометрия и алгебра», является необходимым условием для успешной учебы и последующей деятельности после окончания учебного заведения. Однако в процессе учебы полное овладение теорией этого курса проблематично без его применения при решении практических задач различной сложности. В силу этого трудно преувеличить значение практикума по данной дисциплине, особенно если он полностью отражает программу курса.

Исходя из многолетнего опыта преподавания этой дисциплины на факультете прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета был подготовлен и в 1999 г. издан в издательстве «Университетское» сборник задач по геометрии и алгебре (авторы Г.П. Размыслович, М.М. Феденя, В.М. Ширяев), теоретическую основу которого составило учебное пособие «Геометрия и алгебра», написанное тем же авторским коллективом и изданное в 1987 г. Со времени выхода указанного учебного пособия прошло достаточно много времени, чтобы ощутить полезность этого издания для обеспечения учебного процесса. Однако в процессе работы с ним были выявлены и некоторые недостатки: отсутствие указаний к задачам, требующим доказательства, неточности некоторых ответов. В связи с этим авторским коллективом, который является разработчиком всех типовых программ по дисциплинам «Геометрия и алгебра», «Алгебра и теория чисел», «Аналитическая геометрия» для специальностей «Прикладная математика», «Информатика», «Актуарная математика», «Экономическая кибернетика», «Компьютерная безопасность», «Прикладная информатика», разработано новое учебное пособие, в котором не только устранены указанные выше недостатки, но и включены много новых примеров и глава по теории чисел. Кроме самих заданий и ответов к ним практикум содержит краткое изложение используемого теоретического материала, примеры решений типовых задач, а также указания практически для всех задач, требующих доказательства. Предметный указатель значительно упрощает использование данного пособия в учебных целях.

Авторы выражают глубокую признательность рецензентам — доктору физико-математических наук, профессору М.П. Дымкову, доктору физико-математических наук, профессору В.М. Селькину и в его лице всем сотрудникам кафедры алгебры и геометрии УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» – за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания и советы, позволившие улучшить пособие, а также сотрудникам кафедры высшей математики Белорусского государственного университета, чье внимание к работе способствовало улучшению этого издания.

Все отзывы и пожелания просим направлять по адресу: УП «Издательство “Вышэйшая школа”», пр. Победителей, 11, 220004, Минск.

Авторы

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$\exists$ – квантор существования
$\forall$ – квантор общности
$\rceil$ – отрицание
$\wedge$ – конъюнкция
$\vee$ – дизъюнкция
$\in$ – принадлежность
$\subset$ – включение множеств
$\cup$ – объединение множеств
$\cap$ – пересечение множеств
$\setminus$ – разность множеств
$\parallel$ – параллельность
$\nparallel$ – непараллельность
$\perp$ – ортогональность, перпендикулярность
$\uparrow\uparrow$ – сонаправленность
$\uparrow\downarrow$ – противоположная направленность
$|\cdot|$ – модуль числа
$\det A$ – определитель матрицы
ДПСК – декартова прямоугольная система координат
НОД – наибольший общий делитель
НОК – наименьшее общее кратное
$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел
$\mathbb{N}_0$ – $\mathbb{N}\cup\{0\}$
$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел
$\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел
$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел
$\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел
$\mathbb{Q}^{\#}$ – $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$
$\mathbb{R}^{\#}$ – $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\mathbb{C}^{\#}$ – $\mathbb{C}\setminus\{0\}$
$\mathrm{id}\, X$ – тождественное преобразование
$\mathrm{Card}\, X$ – мощность множества X
$|\boldsymbol{a}|$ – длина вектора $\boldsymbol{a}$
$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{a}}$ – орт ветора $\boldsymbol{a}$
$\boldsymbol{r}_M$ – радиус-вектор точки M
$\mathrm{Arg}\, z$ – аргумент комплексного числа z
$X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ – декартово произведение множеств
$f^{-1}(y)$ – полный прообраз элемента y при (частичном) отображении f
$f|_{X_1}$ – ограничение (частичного) отображения на подмножество
$f\circ g$ – суперпозиция (композиция) отображений f и g
$H\leqslant G$ – H является подгруппой группы G

Глава 1
МЕТОД КООРДИНАТ

Будем использовать следующие обозначения: $\rho(A,B)$ – расстояние между точками A и B пространства; $[A,B]$ – отрезок, заключенный между точками A и B; $\overline{AB}$ – направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B; $\overline{AB} \uparrow\uparrow \Delta$ – направленный отрезок AB, одинаково направленный с осью Δ; AB – величина направленного отрезка $\overline{AB}$, расположенного на оси Δ; по определению $AB = \rho(A,B)$, если $\overline{AB} \uparrow\uparrow \Delta$, иначе $AB = -\rho(A,B)$.

Декартова система координат на прямой Δ определяется направлением на этой прямой (положительное направление координатной оси) и фиксированной точкой $O \in \Delta$. С ее помощью каждой точке A ставится в соответствие координата $x_A = OA$. Для любых точек $A, B \in \Delta$ имеют место равенства:

$$AB = x_B - x_A, \quad \rho(A,B) = |x_B - x_A|.$$

Пусть $A,B,C \in \Delta$, $A \neq B$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Точка C делит направленный отрезок $\overline{AB}$ в отношении λ, если $AC = \lambda CB$. В этом случае координаты точек A,B,C связаны соотношением

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}. \tag{1.1}$$

В частности, если точка C делит отрезок $\overline{AB}$ пополам (тогда $\lambda = 1$), то

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

Декартова прямоугольная система координат (ДПСК) *на плоскости* задается как пара взаимно перпендикулярных осей на этой плоскости (первая из них – ось абсцисс Ox, вторая – ось ординат Oy, их пересечение – точка O – начало координат). С помощью ДПСК каждой точке A плоскости ставится в соответствие пара чисел (координаты точки A) $(x_A, y_A) = (OA_x, OA_y)$, где A_x, A_y – ортогональные проекции точки A на соответствующие координатные оси Ox и Oy. Расстояние между точками $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ на плоскости определяется по формуле

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Если точка C делит отрезок $\overline{AB}$ в отношении λ, то

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, \quad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}.$$

При $\lambda = 1$ получаем координаты середины отрезка $\overline{AB}$:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}. \tag{1.2}$$

Декартову прямоугольную систему координат в пространстве образуют три взаимно перпендикулярные оси с общей точкой (ось абсцисс Ox, ось ординат Oy, ось аппликат Oz, общая точка O – начало координат). С помощью ДПСК каждой точке пространства ставится в соответствие тройка $(x_A, y_A, z_A) = (OA_x, OA_y, OA_z)$ ее координат (здесь, как и в случае плоскости, A_x, A_y, A_z – ортогональные проекции точки A на соответствующие координатные оси Ox, Oy, Oz).

Координаты x_C, y_C, z_C точки $C \neq B$, делящей отрезок $\overline{AB}$ в отношении $\lambda = \frac{AC}{CB}$, определяются по формулам:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, \; y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}, \; z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}.$$

Если $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ – произвольные точки пространства, то расстояние между ними можно найти по формуле

$$\rho(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

Пример 1. Определить координату точки C, если $x_A = 4$, $x_B = -1$, $\lambda = \frac{AC}{CB} = -2$. Найти AC.

Р е ш е н и е. По формуле (1.1) имеем:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{4 - 2(-1)}{1-2} = -6,$$

$$AC = x_C - x_A = -6 - 4 = -10.$$

Следовательно, $C(-6)$, $AC = -10$.

Пример 2. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(3,-3)$, $B(-1,1)$, $C(1,6)$. Найти координаты четвертой вершины D.

Р е ш е н и е. Зная, что диагонали параллелограмма в точке пересечения E делятся пополам, находим координаты точки E по формулам (1.2):

$$x_E = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3+1}{2} = 2, \quad y_E = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-3+6}{2} = \frac{3}{2}.$$

Аналогично

$$x_E = \frac{x_B + x_D}{2}, \quad y_E = \frac{y_B + y_D}{2},$$

откуда $x_D = 2x_E - x_B = 5$, $y_D = 2y_E - y_B = 2$. Значит, $D(5, 2)$.

Пример 3. Определить, лежат ли на одной прямой точки $A(1, -5, 3)$, $B(5, -1, 7)$, $C(6, 0, 8)$.

Решение. Вычислим расстояния:

$$\rho(A, B) = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = 4\sqrt{3}, \quad \rho(A, C) = 5\sqrt{3}, \quad \rho(B, C) = \sqrt{3}.$$

Поскольку $\rho(A, C) = \rho(A, B) + \rho(B, C)$, то точки A, B, C лежат на одной прямой. Это можно установить и следующим образом. Если точки A, B, C лежат на одной прямой, то значения λ, найденные по формулам:

$$\lambda = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C}, \quad \lambda = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C}, \quad \lambda = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_C}$$

и дающие отношение, в котором точка C делит отрезок $\overline{AB}$, должны быть равными. В нашем случае имеем:

$$\lambda = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{6-1}{5-6} = -5, \quad \lambda = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C} = \frac{0+5}{-1-0} = -5, \quad \lambda = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_C} = \frac{8-3}{7-8} = -5.$$

Следовательно, точки A, B, C лежат на одной прямой.

Полярная система координат на плоскости определяется заданием точки O, называемой *полюсом*, и луча $[OA)$, исходящего из этой точки и называемого *полярной осью*. Для того чтобы определить положение точки M в полярной системе координат, из полюса O проводят луч $[OM)$. Тогда точке M соответствует пара действительных чисел (r, φ), где $r = |\overline{OM}|$; φ – величина угла, на который надо повернуть луч $[OA)$, чтобы совместить его с лучом $[OM)$. Отметим, что поворот против хода часовой стрелки считается положительным, а по ходу – отрицательным. Величины r и φ называются *полярными координатами точки* M, r *– полярным радиусом*, φ *– полярным углом*. Если точка M имеет координаты r и φ, пишут: $M(r, \varphi)$.

Если на плоскости заданы полярная система координат и ДПСК, причем полюс полярной системы совмещен с началом координат ДПСК, а полярная ось совпадает с положительной полуосью Ox, то зависимость между полярными (r, φ) и декартовыми (x, y) координатами одной и той же точки плоскости выражается формулами:

$$x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi \Leftrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}, \; \cos\varphi = x / \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\sin\varphi = y / \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Пример 4. Найти полярные координаты точки M, если в соответствующей ДПСК она имеет координаты $x=-1$, $y=\sqrt{3}$.

Решение. Учитывая формулы связи декартовых и полярных координат, имеем:

$$\rho=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2, \quad \operatorname{ctg}\varphi=-1/\sqrt{3}.$$

Поскольку точка M лежит во второй четверти, то $\varphi=2\pi/3$. Следовательно, $M(2,\ 2\pi/3)$.

Пример 5. Построить линию, если в полярной системе координат ее уравнение $\rho=4\sin 2\varphi$.

Решение. По условию $\sin 2\varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi\in[0,\pi/2]\cup[\pi,3\pi/2]$. Кроме того, для $\varphi=\pi+\alpha$ значение ρ такое же, как и для $\varphi=\alpha$. Следовательно, линия симметрична относительно полюса, поэтому, построив ее часть в I координатной четверти, остальную часть достроим по симметрии относительно точки O (рис. 1.1). Для построения можно использовать следующую таблицу:

φ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
2φ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π
$\rho=4\sin 2\varphi$	0	$1/2$	$2\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{3}$	0

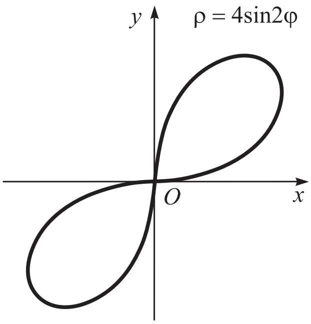


Рис. 1.1

1.1. Построить на координатной прямой точки $A(-2{,}5)$, $B(1/3)$, $C(-\sqrt{2})$, $D(\sqrt{3})$, $E(\sqrt{19})$, $F(-2/5)$, $G(\sqrt{5}-2)$.

1.2. Установить, какая из двух точек (A или B) лежит правее на координатной прямой:

1) $A(x)\vee B(-x)$; 2) $A(x)\vee B(x^2)$;

3) $A(x)\vee B(3x)$; 4) $A(x)\vee B(x+5)$.

1.3. Построить на координатной прямой точки, координаты которых удовлетворяют уравнениям:

1) $|x|=5$; 2) $|x+1|=2$; 3) $|4-2x|=1$;

4) $|x-5|=x-5$; 5) $|x-4|=4-x$; 6) $\sqrt{(x-3)^2}=3-x$.

1.4. Изобразить на координатной прямой точки, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

1) $2-9x\leqslant 0$; 2) $1<x\leqslant 4$; 3) $1<|x|\leqslant 4$;

4) $|x|\leqslant 4$; 5) $|x|\geqslant 6$; 6) $|x+2|>1$;

7) $|1-x|\leqslant 2$; 8) $(4-x)(x+2)>0$; 9) $\dfrac{1-2x}{x-2}<1$;

10) $x^2+x+1\geqslant 0$; 11) $x^2+2x-3\leqslant 0$; 12) $\sqrt{4-x}>-1$;

13) $\sqrt{x-1}<1$.

1.5. Определить величину AB и длину $|\overline{AB}|$ направленного отрезка, заданного точками:

1) $A(0)$, $B(3)$; 2) $A(3)$, $B(1)$; 3) $A(-2)$, $B(1)$;

4) $A(-5)$, $B(-6)$; 5) $A(-4)$, $B(-3)$.

1.6. Найти на координатной прямой точки B и C, находящиеся от точки $A(2)$ на расстоянии, равном 4.

1.7. Вычислить координату точки B, если известны:

1) $A(2)$, $AB=4$; 2) $A(3)$, $|\overline{AB}|=4$; 3) $A(-3)$, $AB=-2$;

4) $A(-2)$, $BA=-3$; 5) $A(-1)$, $|\overline{AB}|=2$; 6) $A(0)$, $|\overline{AB}|=8$.

1.8. Найти координату точки, симметричной точке $A(4)$ относительно:

1) начала координат; 2) точки $B(-3)$.

1.9. Даны три точки: $A(-1)$, $B(5)$, $C(3)$. Определить отношение, в котором каждая из этих точек делит отрезок между двумя другими.

1.10. Определить отношение $\lambda=\dfrac{AC}{CB}$, в котором точка C делит отрезок $\overline{AB}$, если:

1) $A(-3), B(3), C(6)$; 2) $A(2), B(1), C(2)$;

3) $A(5), B(-2), C(-5)$; 4) $A(1), B(13), C(5)$.

1.11. Пусть $\dfrac{AC}{CB}=\lambda$. Найти: $\dfrac{AB}{BC}, \dfrac{BC}{CA}, \dfrac{BA}{AC}, \dfrac{CB}{BA}, \dfrac{CA}{AB}$.

1.12. Определить координату середины отрезка, ограниченного точками:

1) $A(5)$, $B(-1)$; 2) $A(-5)$, $B(-3)$.

1.13. Определить координату точки M, если известны:

1) $A(7), B(3), \lambda=\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{1}{2}$; 2) $A(-3)$, $B(1)$, $\lambda=\dfrac{BM}{MA}=3$;

3) $A(-2)$, $B(-3)$, $\lambda=\dfrac{BM}{MA}=-2$.

1.14. Отрезок, ограниченный точками $A(-2)$ и $B(19)$, разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.

1.15. Выяснить, какие множества точек на плоскости определяются соотношениями:

1) $x=|y|$; 2) $x=-|y|$; 3) $|x|=|y|$;

4) $|x|+|y|=1$; 5) $|x|+x=|y|+y$; 6) $\dfrac{x}{|x|}=\dfrac{|y|}{y}$;

7) $y=[x]$; 8) $[x]=[y]$; 9) $x-[x]=y-[y]$;

10) $y=2^{\log_2 x}$; 11) $y=\dfrac{|\sin x|}{\sin x}$; 12) $\begin{cases} y<4-x^2, \\ y\geqslant |x|; \end{cases}$

13) $\begin{cases} y^2\geqslant 4, \\ |x|<2; \end{cases}$ 14) $y^2<9$; 15) $\begin{cases} x^2\geqslant 1, \\ y^2\geqslant 1; \end{cases}$

16) $\begin{cases} y=-x^2, \\ 1<y<3; \end{cases}$ 17) $\begin{cases} y=x, \\ \sin \pi x>0; \end{cases}$ 18) $\begin{cases} y\geqslant \dfrac{1}{x}, \\ \dfrac{1}{|x-y|}>0, \\ x>0; \end{cases}$

19) $\sin(x+y)=0$.

1.16. Определить, в каких четвертях может быть расположена точка $M(x,y)$, если:

1) $x-y=0$; 2) $x+y=0$; 3) $x+y>0$;

4) $x-y>0$; 5) $xy>0$; 6) $xy<0$.

1.17. Дана точка $M(2, 3)$. Найти точку, симметричную точке M относительно:

1) точки $O(0,0)$; 2) оси абсцисс; 3) оси ординат;

4) прямой $y=x$; 5) биссектрисы второго координатного угла.

1.18. Найти расстояние между точками A и B, если:

1) $A(5,4)$, $B(8,8)$; 2) $A(0,0)$, $B(-3, -4)$.

1.19. На оси абсцисс найти точку, равноудаленную от начала координат и от точки $B(9, -3)$.

1.20. На координатных осях найти точки, удаленные от точки $M(6, -4)$ на расстояние 10.

1.21. Доказать, что треугольник с вершинами $A(-4, 3)$, $B(5, -5)$, $C(4, 7)$ равнобедренный.

1.22. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(3, -3)$, $B(-1,1)$, $C(1,6)$. Найти координаты четвертой вершины D.

1.23. Дана окружность радиусом $r = 5$ с центром в точке $C(6,\ 7)$. Из точки $A(7,\ 14)$ к этой окружности проведены касательные. Найти расстояния от точки A до точек касания.

1.24. Найти центр круга, описанного около треугольника ABC с вершинами $A(2,\ 2)$, $B(-5,\ 1)$, $C(3,\ -5)$.

1.25. Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки:

1) $A(0, 5), B(2, 1), C(-1, 7)$; 2) $A(0, 2), B(-1, 5), C(3, 4)$.

1.26. Найти длины медиан треугольника, зная координаты его вершин: $A(3, -2)$, $B(5, 2)$, $C(-1, 4)$.

1.27. Даны середины сторон треугольника: $M_1(3, -2)$, $M_2(1, 6)$, $M_3(-4, 2)$. Найти его вершины.

1.28. Даны точки $A(-4, 2)$, $B(8, -7)$. Найти точки C и D, делящие отрезок $\overline{AB}$ на три равные части.

1.29. Даны три вершины параллелограмма: $A(3, -5)$, $B(5, -3)$, $C(-1, 3)$. Определить координаты четвертой вершины D, противоположной точке B.

1.30. Прямая проходит через точки $A(7, -3)$ и $B(23, -6)$. Найти точку пересечения этой прямой с осью абсцисс.

1.31. Даны три точки: $A(1, -1)$, $B(3, 3)$, $C(4, 5)$, лежащие на одной прямой. Определить отношение λ, в котором каждая из них делит отрезок, ограниченный двумя другими точками.

1.32. Доказать, что треугольник с вершинами $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(5, -1)$ прямоугольный.

1.33. Найти координаты точки M, которая делит отрезок $\overline{M_1M_2}$, ограниченный точками $M_1(2, 3)$, $M_2(-5, 1)$, в отношении:

1) $\lambda = -4$; 2) $\lambda = 2$.

1.34. Найти координаты середины отрезка $\overline{AB}$, если $A(2, 1)$, $B(4, 3)$.

1.35. Найти координаты проекций точки $A(2, 4, -5)$:

1) на координатные плоскости;

2) на координатные оси.

1.36. Дана точка $A(-1, 3, -5)$. Найти координаты точек, симметричных точке A относительно:

1) каждой из координатных плоскостей;

2) каждой из координатных осей;

3) начала координат.

1.37. В каких октантах могут быть расположены точки, координаты которых удовлетворяют одному из следующих условий:

1) $x - z = 0$; 2) $xy = 0$; 3) $xy > 0$; 4) $xz < 0$; 5) $xyz > 0$.

1.38. Определить расстояние от точки $A(-3, 12, 4)$:

1) до начала координат; 2) до координатных осей.

1.39. Доказать, что треугольник ABC с вершинами $A(0, 1, 3)$, $B(1, -1, 5)$, $C(2, 3, 4)$ является равнобедренным и прямоугольным.

1.40. В треугольнике ABC с вершинами $A(2,1,3)$, $B(4,3,4)$, $C(8,0,4)$ найти:

1) длины сторон; 2) площадь; 3) длины высот.

1.41. На оси Oz найти точку, равноудаленную от точек $A(-4,1,7)$, $B(3,5,-2)$.

1.42. На координатной плоскости Oyz найти точку, одинаково удаленную от трех данных точек: $A(3,1,2)$, $B(4,-2,-2)$, $C(0,5,1)$.

1.43. Лежат ли на одной прямой точки:

1) $A(2,1,1)$, $B(5,10,15)$, $C(8,19,29)$;

2) $A(1,1,3)$, $B(1,5,7)$, $C(1,8,11)$?

1.44. Даны вершины треугольника: $A(2,1,3)$, $B(4,3,3)$, $C(6,3,5)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A.

1.45. Отрезок, ограниченный точками $A(-2,5,13)$ и $B(6,17,-7)$, разделен точками C, D, E на четыре равные части. Найти координаты точек C, D, E.

1.46. Найти точку, делящую отрезок $\overline{M_1M_2}$, концы которого $M_1(-3,2,4)$ и $M_2(6,0,1)$, в отношении $\lambda = 2$.

1.47. Найти отношение, в котором каждая из координатных плоскостей делит отрезок $\overline{M_1M_2}$, если $M_1(2,-1,7)$, $M_2(4,5,-2)$.

1.48. На прямой, проходящей через точки $M_1(1,2,4)$ и $M_2(-1,4,3)$, найти точку, лежащую в координатной плоскости Oxz.

1.49. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$ с множеством вершин $\{A,B,C,D\}$: $A(3,-4,7)$, $B(-5,3,-2)$ и $C(1,2,-3)$. Найти его четвертую вершину D, противоположную точке B.

1.50. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: $A(3,-1,2)$, $B(1,2,-4)$ и $C(-1,1,2)$. Найти его четвертую вершину D.

1.51. Построить точки, полярные координаты которых имеют следующие значения: $M_1(2,\pi/6)$, $M_2(\sqrt{3},-\pi/4)$, $M_3(3,\pi)$, $M_4(3/5,-3\pi/4)$.

1.52. Найти полярные координаты точек, симметричных относительно полярной оси точкам $M_1(5,2\pi/3)$, $M_2(3,-\pi/2)$, $M_3(6,1)$, заданным в полярной системе координат.

1.53. Найти полярные координаты точек, симметричных относительно полюса точкам $M_1(10,-\pi/2)$, $M_2(5,5\pi/6)$, $M_3(3,-\pi/3)$.

1.54. Найти полярные координаты точек $A(0,15)$, $B(-9,0)$, $C(-2\sin(\pi/9), 2\cos(\pi/9))$, $D(\sqrt{3},1)$, заданных своими координатами в соответствующей ДПСК.

1.55. В полярной системе координат даны точки $M_1(10,\pi/2)$, $M_2(2,-\pi/2)$, $M_3(5,\pi)$, $M_4(2,\pi/4)$, $M_5(12,-\pi/6)$. Определить декартовы координаты этих точек.

1.56. В полярной системе координат даны точки $A(12,4\pi/9)$, $B(12,-2\pi/9)$. Вычислить полярные координаты середины отрезка $\overline{AB}$.

1.57. В полярной системе координат даны точки $M_1(\rho_1, \varphi_1)$, $M_2(\rho_2, \varphi_2)$. Найти расстояние d между ними.

1.58. Известны полярные координаты точек $A(5, \pi/4)$, $B(8, -\pi/12)$. Найти $|\overline{AB}|$.

1.59. Вычислить площадь треугольника, если заданы полярные координаты его вершин: $A(9, \pi/10)$, $B(12, 4\pi/15)$, $C(10, 3\pi/5)$.

1.60. Найти площадь треугольника, одна из вершин которого совпадает с полюсом, а две другие находятся в точках $A(\rho_1, \varphi_1)$, $A(\rho_2, \varphi_2)$.

1.61. Построить множества точек, полярные координаты которых удовлетворяют уравнениям:

1) $\rho = 3$; 2) $\varphi = \pi/4$; 3) $\rho = 3\cos\varphi$; 4) $\rho = 3\varphi$;
5) $\rho = \varphi/\pi$; 6) $\rho = -\pi/\varphi$; 7) $\rho = 2^{\varphi}$.

1.62. Найти полярные уравнения линий, если известны их уравнения в ДПСК:

1) $x^2 + y^2 = 2x$; 2) $x - 2 = 0$; 3) $x^2 + y^2 = 9$;
4) $(x^2 + y^2)^{3/2} = x + y$; 5) $x - y = 0$.

1.63. Найти уравнения линий в соответствующей ДПСК, если они заданы в полярных координатах:

1) $\rho = \cos\varphi + \sin\varphi$; 2) $\rho^2 - 2\rho\cos\varphi = 4$; 3) $\rho = 3\sin\varphi$;
4) $\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi = 2$; 5) $\rho\cos\varphi = 1$; 6) $\rho = 2\cos\varphi$.

Глава 2
ВЕКТОРЫ

Пусть A, B, C, D – произвольные точки пространства. Множество всех направленных отрезков $\overline{CD}$ таких, что $\overline{CD} \upuparrows \overline{AB}$, $|\overline{CD}| = |\overline{AB}|$, назовем *вектором* и обозначим $\overrightarrow{AB}$. Векторы обозначаются также $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$. *Длиной* $|\boldsymbol{a}|$ *вектора* $\boldsymbol{a}$ назовем длину направленного отрезка, представляющего этот вектор.

Два вектора называются *коллинеарными*, если представляющие их направленные отрезки лежат на параллельных прямых. Три вектора называются *компланарными*, если представляющие их направленные отрезки лежат на параллельных плоскостях.

Вектор, длина которого равна единице, называется *ортом*. Орт вектора $\boldsymbol{a} \neq 0$ обозначается $\boldsymbol{e_a}$ и определяется соотношением $\boldsymbol{e_a} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{e_a} \upuparrows \boldsymbol{a}$.

Пусть даны вектор $\boldsymbol{a}$ и точка A пространства. Тогда существует единственная точка B такая, что направленный отрезок $\overline{AB}$ представляет вектор $\overrightarrow{AB}$, т.е. $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$. Операция $(A, \boldsymbol{a}) \mapsto B$ называется *откладыванием вектора* $\boldsymbol{a}$ *от точки* A.

Пусть A, B, C – точки пространства и $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BC}$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ называется *суммой векторов* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и обозначается $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. *Произведением* $\alpha\boldsymbol{a}$ *действительного числа* α *и вектора* $\boldsymbol{a}$ называется вектор $\boldsymbol{b}$, для которого:

1) $|\boldsymbol{b}| = |\alpha||\boldsymbol{a}|$;

2) $\boldsymbol{b} \upuparrows \boldsymbol{a}$, если $\alpha \geq 0$; $\boldsymbol{b} \uparrow\downarrow \boldsymbol{a}$, если $\alpha < 0$.

Если $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r)$ – произвольная система (конечная последовательность) векторов, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ – произвольная система чисел, то вектор $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_r\boldsymbol{a}_r = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i\boldsymbol{a}_i$ называется *линейной комбинацией системы векторов* $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r)$.

Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор на этой прямой, *базисом на плоскости* – упорядоченная пара $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ двух неколлинеарных векторов этой плоскости, *базисом в пространстве* – упорядоченная тройка $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ некомпланарных векторов.

Если вектор представлен как линейная комбинация некоторых векторов, то говорят, что он разложен по этим векторам. Если $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ – базис в пространстве и вектор $\boldsymbol{a}$ разложен по базису, т.е. представлен в виде $\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \alpha_3\boldsymbol{a}_3$, то числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ называются *координатами вектора* $\boldsymbol{a}$ *в базисе* $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Аналогично определяются *координаты вектора на плоскости и прямой*.

Выберем в пространстве произвольную точку O – начало координат и базис $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Система $(O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ называется *репером в пространстве*.

Радиусом-вектором $\boldsymbol{r}_M$ *точки* M называется вектор $\overrightarrow{OM}$: $\boldsymbol{r}_M = \overrightarrow{OM}$. *Декартовыми координатами точки* M *в системе координат, определяемой репером* $(O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, называют координаты x_1, x_2, x_3 ее радиуса-вектора $\boldsymbol{r}_M$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ и пишут: $M(x_1, x_2, x_3)$.

Если $M(x_1, x_2, x_3)$, $M_1(y_1, y_2, y_3)$, то $\overrightarrow{M_1M} = (x_1 - y_1)\boldsymbol{e}_1 + (x_2 - y_2)\boldsymbol{e}_2 + (x_3 - y_3)\boldsymbol{e}_3$.

Пример 1. Из точки O отложены векторы $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$. Найти какой-либо вектор, идущий по биссектрисе угла между векторами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

Решение. Найдем орты $\boldsymbol{e}_a$, $\boldsymbol{e}_b$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$: $\boldsymbol{e}_a = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$, $\boldsymbol{e}_b = \dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ и на них как на сторонах построим ромб (рис. 2.1). Тогда, поскольку диагонали ромба делят его углы пополам, вектор $\boldsymbol{c} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} + \dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ лежит на биссектрисе угла AOB.

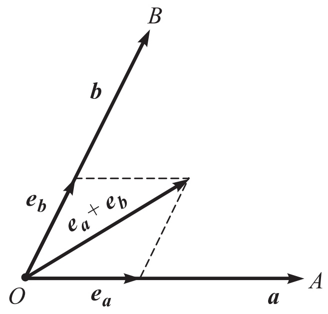


Рис. 2.1

Пример 2. Даны векторы $\boldsymbol{a}(3, -1)$, $\boldsymbol{b}(1, -2)$, $\boldsymbol{c}(-1, 7)$. Найти разложение вектора $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ по базису $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Решение. Найдем координаты вектора $\boldsymbol{p}$: $\boldsymbol{p}(3+1-1, -1-2+7)$. Следовательно, $\boldsymbol{p}(3, 4)$. Если α, β – коэффициенты разложения вектора $\boldsymbol{p}$ по базису $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, то $\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$. Тогда имеем: $3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} = (3\alpha + \beta)\boldsymbol{i} + (-\alpha - 2\beta)\boldsymbol{j}$. Отсюда

$$\begin{cases} 3 = 3\alpha + \beta, \\ 4 = -\alpha - 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 2,\ \beta = -3.$$

Следовательно, $\boldsymbol{p} = 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$.

Пример 3. Определить координаты вектора $\boldsymbol{b}$, если известно, что $\boldsymbol{b} \uparrow\downarrow \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} = 5\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 2\sqrt{2}\boldsymbol{k}$, $|\boldsymbol{b}| = 5$.

Р е ш е н и е. Найдем $\boldsymbol{e}_a = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{1}{7}(5\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 2\sqrt{2}\boldsymbol{k})$. Так как $\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{e}_a = -\boldsymbol{e}_b$, т.е. $\boldsymbol{e}_b = -\dfrac{1}{7}(5\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 2\sqrt{2}\boldsymbol{k})$. Но $|\boldsymbol{b}| = 5$, следовательно, $\boldsymbol{b} = 5\boldsymbol{e}_b = -\dfrac{25}{7}\boldsymbol{i} + \dfrac{20}{7}\boldsymbol{j} - \dfrac{10\sqrt{2}}{7}\boldsymbol{k}$.

Скалярным произведением $\boldsymbol{ab}$ *векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}). \tag{2.1}$$

С в о й с т в а с к а л я р н о г о п р о и з в е д е н и я. Для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и числа $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняются следующие свойства:

1) $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{ab} = 0$;
2) $\boldsymbol{aa} = \boldsymbol{a}^2 = |\,\boldsymbol{a}\,|^2$;
3) $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$;
4) $(\alpha\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{ab}) = \boldsymbol{a}(\alpha\boldsymbol{b})$;
5) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}$.

Для величины ортогональной проекции вектора $\boldsymbol{b}$ на ненулевой вектор $\boldsymbol{a}$ справедливо соотношение $\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

Из формулы (2.1) следует, что

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\,\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\,\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}.$$

Пусть $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ – базис пространства, состоящий из взаимно перпендикулярных ортов, в котором заданы координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$: $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$. Тогда

$$\boldsymbol{ab} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{aa}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}. \tag{2.2}$$

Необходимое и достаточное условие ортогональности двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Для вычисления косинуса угла между векторами и величины проекции вектора $\boldsymbol{b}$ на вектор $\boldsymbol{a}$ по координатам этих векторов используют следующие формулы:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

$$\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}, \quad \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}.$$

Если α, β, γ – углы, которые составляет вектор $\boldsymbol{a}$ с координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно, то $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора* $\boldsymbol{a}$. Если $\boldsymbol{a}(x, y, z)$, то

$$x = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha,\ \ y = |\boldsymbol{a}|\cos\beta,\ \ z = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma. \tag{2.3}$$

Из формул (2.2), (2.3) имеем: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Орт вектора

$$\boldsymbol{e}_a = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = (\cos\alpha)\boldsymbol{i} + (\cos\beta)\boldsymbol{j} + (\cos\gamma)\boldsymbol{k},$$

т.е. направляющие косинусы вектора являются координатами орта вектора $\boldsymbol{a}$.

Пример 4. Даны векторы $\boldsymbol{a}(4,-2,-4)$, $\boldsymbol{b}(6,-3,2)$. Найти $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$.

Р е ш е н и е. Имеем: $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}) = 2\boldsymbol{a}^2 + 4\boldsymbol{ab} - 3\boldsymbol{ba} - 6\boldsymbol{b}^2 = 2|\boldsymbol{a}|^2 + \boldsymbol{ab} - 6|\boldsymbol{b}|^2 =$ $= 2(16+4+16) + (4\cdot 6 + 2\cdot 3 - 4\cdot 2) - 6(36+9+4) = -200.$

Пример 5. Даны вершины треугольника ABC: $A(-1,-2,4)$, $B(-4,-2,0)$, $C(3,-2,1)$. Определить величину его внутреннего угла при вершине B.

Р е ш е н и е. Угол, равный внутреннему углу B треугольника ABC, образован векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$. Найдем координаты этих векторов: $\overrightarrow{BA}(3,0,4)$, $\overrightarrow{BC}(7,0,1)$. Следовательно, $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{7^2+1^2} = 5\sqrt{2}$. Используя формулу (2.3), получаем:

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{3\cdot 7 + 4\cdot 1}{5\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда $\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}} = \pi/4$.

Пример 6. Даны три вектора: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$. Найти $\text{пр}_{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}$.

Р е ш е н и е. Имеем: $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ и $\text{пр}_{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a} = \dfrac{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|}$. Отсюда

$$\text{пр}_{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a} = \frac{1\cdot 2 + 3\cdot 3 + 4\cdot 6}{\sqrt{4+9+36}} = 5.$$

Векторным произведением $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ *векторов* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ называется вектор, который:

1) имеет длину, равную $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$;
2) ортогонален каждому из векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$;
3) такой, что тройка векторов $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}])$ правая.

С в о й с т в а   в е к т о р н о г о   п р о и з в е д е н и я. Для любых векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ и числа α имеют место следующие соотношения:

1) $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \Leftrightarrow [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{0}$;

2) если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны, то длина вектора $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ равна площади S параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, отложенных от общего начала – точки O;

3) $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$;

4) $[\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \alpha[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{b}] = \alpha[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

5) $[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$.

Если в правой ДПСК известны координаты векторов $\boldsymbol{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{b}(x_2, y_2, z_2)$, то

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}. \qquad (2.4)$$

Двойным векторным произведением векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ называется вектор $[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]]$.

Пример 7. Преобразовать выражение $[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}] + [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]$.

Решение. Используя свойства векторного произведения, имеем: $[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}] = [\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}] + [\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}] = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{j}$, $[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}] = [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}] + [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}] = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{i}$. Следовательно, $[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}] + [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}] = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{i}$.

Пример 8. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} + 2\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{p} - 3\boldsymbol{q}$, если $|\boldsymbol{p}| = 5$, $|\boldsymbol{q}| = 8$, $(\widehat{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}}) = \pi/6$.

Решение. Известно, что $S_\Delta = \frac{1}{2}|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]|$. Тогда $S_\Delta = \frac{1}{2}|[\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}-3\boldsymbol{q}]| = \frac{1}{2}|[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}] + 2[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}] - 3[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}] - 6[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}]| = \frac{1}{2}|5[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]| = \frac{1}{2} \cdot 5|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\sin(\widehat{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 50$.

Пример 9. Найти координаты вектора $[2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}]$, если $\boldsymbol{a}(3, -1, -2)$, $\boldsymbol{b}(1, 2, -1)$.

Решение. Имеем: $[2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}] = 2[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + 3[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}] = 2[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. По формуле (2.4) получаем:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}.$$

Тогда $[2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}] = 10\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 14\boldsymbol{k}$.

Смешанным произведением трех векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ называется число $\boldsymbol{abc} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\boldsymbol{c}$.

Если V – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ как на ребрах, то

$$\boldsymbol{abc} = \begin{cases} V, & \text{если тройка } (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \text{ правая;} \\ -V, & \text{если тройка } (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \text{ левая;} \\ 0, & \text{если векторы } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \text{ компланарны;} \end{cases}$$

С в о й с т в а   с м е ш а н н о г о   п р о и з в е д е н и я. Для любых векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ и чисел α, β имеют место следующие соотношения:

1) $\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$;

2) $\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{bca} = \boldsymbol{cab} = -\boldsymbol{bac} = -\boldsymbol{cba} = -\boldsymbol{acb}$;

3) $(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b})\boldsymbol{cd} = \alpha(\boldsymbol{acd}) + \beta(\boldsymbol{bcd})$, $\quad \boldsymbol{a}(\alpha\boldsymbol{b} + \beta\boldsymbol{c})\boldsymbol{d} = \alpha(\boldsymbol{abd}) + \beta(\boldsymbol{acd})$, $\boldsymbol{ab}(\alpha\boldsymbol{c} + \beta\boldsymbol{d}) = \alpha(\boldsymbol{abc}) + \beta(\boldsymbol{abd})$.

Далее, если $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ – соответствующие тройки координат векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ в некоторой правой ДПСК в пространстве, то

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \beta_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \gamma_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.5)$$

Пример 10. Выразить смешанное произведение $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$ через $\boldsymbol{abc}$.

Р е ш е н и е. Используя свойства смешанного произведения, имеем

$$(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{baa} - \boldsymbol{caa} + \boldsymbol{bba} - \boldsymbol{cba} + 2\boldsymbol{bca} - 2\boldsymbol{cca}.$$

Произведения $\boldsymbol{baa}, \boldsymbol{caa}, \boldsymbol{bba}, \boldsymbol{cca}$ равны нулю. Тогда с учетом свойств смешанного произведения, делая круговую перестановку сомножителей, получаем:

$$(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{cba} + 2\boldsymbol{bca} = -\boldsymbol{bac} + 2\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{abc} + 2\boldsymbol{abc} = 3\boldsymbol{abc}.$$

Пример 11. Указать, какой тройкой (правой или левой) является тройка векторов $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{k}$.

Р е ш е н и е. Вычислим смешанное произведение векторов $\boldsymbol{abc}$:

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно, тройка $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ правая.

Пример 12. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$, $D(4, 1, 3)$.

Р е ш е н и е. Объем V тетраэдра, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$, равен $1/6$ объема параллелепипеда, построенного на этих же векторах, т.е.

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}\right|.$$

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{AB}(3, 6, 3)$, $\overrightarrow{AC}(1, 3, -2)$, $\overrightarrow{AD}(2, 2, 2)$. Тогда с учетом формулы (2.5)

$$V = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\left|3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right| = 3.$$

Рассмотрим формулы связи координат точки в двух ДПСК на плоскости, заданных реперами $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ и $(O'; \boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}')$. Первую из ДПСК назовем старой, вторую – новой. Пусть новая ДПСК получена из старой параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{OO'}(a, b)$. Тогда координаты точки $M(x, y)$ в старой ДПСК связаны с координатами точки $M(x', y')$ в новой ДПСК формулами:

$$\begin{aligned} x &= x' + a, \\ y &= y' + b \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} x' &= x - a, \\ y' &= y - b. \end{aligned}$$

Пусть теперь новая ДПСК получена из старой поворотом вокруг точки O на угол φ, т.е. $O = O'$, $\widehat{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}'} = \varphi$, $\widehat{\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}'} = \varphi$. Тогда:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \\ y &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\varphi + y \sin\varphi, \\ y' &= -x \sin\varphi + y \cos\varphi. \end{aligned}$$

В общем случае от старой ДПСК можно перейти к новой (все ДПСК – правые), последовательно применяя преобразования параллельного сдвига на вектор $\overrightarrow{OO'}(a, b)$ и поворот вокруг точки O на угол φ. В этом случае

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi + a, \\ y &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi + b, \\ x' &= (x - a)\cos\varphi + (y - b)\sin\varphi, \\ y' &= -(x - a)\sin\varphi + (y - b)\cos\varphi. \end{aligned}$$

2.1. По данным векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ построить вектор $\frac{1}{2}\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}$.

2.2. Как должны быть связаны векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, чтобы выполнялись соотношения:

1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$; 2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;
3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}|$; 4) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| > |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;
5) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$; 6) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}|$?

2.3. Даны векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Являются ли коллинеарными векторы $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} - 2\sqrt{5}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{q} = -\sqrt{5}\boldsymbol{a} + 10\boldsymbol{b}$?

2.4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD угла A. Найти разложение вектора $\overrightarrow{AD}$ по векторам $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}$.

2.5. Из точки O отложены векторы $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$. Найти какой-либо вектор $\overrightarrow{OM}$, идущий по биссектрисе угла AOB.

2.6. Определить начало вектора $\boldsymbol{a}(3,1,2)$, если его конец совпадает с точкой $B(0,1,-1)$.

2.7. Даны точки $A(2,5,3)$, $B(-1,5,8)$. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$.

2.8. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ взаимно перпендикулярны, причем $|\boldsymbol{a}|=4$, $|\boldsymbol{b}|=3$. Найти $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

2.9. Даны векторы $\boldsymbol{a}(2,4)$, $\boldsymbol{b}(-3,1)$, $\boldsymbol{c}(5,-2)$. Разложить вектор $\boldsymbol{c}$ по базису $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

2.10. Разложить вектор $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ по трем некомпланарным векторам: $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$.

2.11. Доказать, что сумма векторов, соединяющих центр равностороннего треугольника с его вершинами, равна нулю.

2.12. Дан четырехугольник $ABCD$. Найти такую точку M, что $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\mathbf{0}$.

2.13. Пусть AD, BE, CF – медианы треугольника ABC. Доказать, что $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$.

2.14. Найти орт вектора $\boldsymbol{a}(1,-2,2)$.

2.15. Вычислить направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{a}(2/3,\ 1/3,\ -2/3)$.

2.16. Даны векторы $\boldsymbol{a}(2,1,3)$, $\boldsymbol{b}(-2,3,4)$. Найти векторы $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $3\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

2.17. Найти длины суммы и разности векторов $\boldsymbol{a}(3,\ 1,\ 1)$ и $\boldsymbol{b}(1,\ 3,\ 1)$.

2.18. Являются ли точки $A(3,-1,2)$, $B(1,2,-1)$, $C(-1,1,-3)$, $D(3,-5,3)$ вершинами трапеции?

2.19. Известно разложение векторов $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ по трем некомпланарным векторам $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$. Показать, что векторы $\boldsymbol{e}_1=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$ компланарны, и указать линейную зависимость между ними.

2.20. Найти разложение вектора $\boldsymbol{c}$ по векторам $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a}(-4,2)$, $\boldsymbol{b}(3,5)$, $\boldsymbol{c}(1,-7)$.

2.21. В ромбе $ABCD$ в качестве базисных взяты векторы $\boldsymbol{e}_1=\overrightarrow{AC}$, $\boldsymbol{e}_2=\overrightarrow{BD}$. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ в этом базисе.

2.22. Даны векторы $\boldsymbol{a}(2,3)$, $\boldsymbol{b}(-3,-5)$, $\boldsymbol{c}(1,-3)$. Определить, при каких значениях β коллинеарны векторы $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}-\beta\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$.

2.23. При каких значениях α и β векторы $\boldsymbol{a}(\alpha,2,4)$ и $\boldsymbol{b}(1,\beta,-5)$ коллинеарны?

2.24. Разложить вектор $\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}$ по базису $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$, где $\boldsymbol{e}_1=-3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{k}-3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

2.25. Два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ приложены к одной точке. Определить координаты вектора $\boldsymbol{c}$, направленного по биссектрисе угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, при условии, что:

1) $\boldsymbol{a}(7,-4,-4)$, $\boldsymbol{b}(-2,-1,2)$, $|\boldsymbol{c}|=5\sqrt{6}$;

2) $\boldsymbol{a}(2,7,-1)$, $\boldsymbol{b}(1,-2,1)$, $|\boldsymbol{c}|=2\sqrt{30}$.

2.26. Найти вектор $\boldsymbol{x}$, образующий с ортом $\boldsymbol{j}$ угол 60°, с ортом $\boldsymbol{k}$ – угол 120°, если $|\boldsymbol{x}|=5\sqrt{2}$.

2.27. Вычислить $\boldsymbol{ab}$, если:

1) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi/6$; 2) $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=5$, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=135^\circ$;

3) $|\boldsymbol{a}|=8$, $|\boldsymbol{b}|=5$, $\boldsymbol{a}\upuparrows\boldsymbol{b}$; 4) $|\boldsymbol{a}|=4$, $|\boldsymbol{b}|=3$, $\boldsymbol{a}\uparrow\downarrow\boldsymbol{b}$.

2.28. Пусть $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=5$ и $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi/3$. Вычислить:

1) $\boldsymbol{ab}$; 2) $\boldsymbol{a}^2$; 3) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$;

4) $(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2$; 5) $(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})$.

2.29. Доказать, что векторы $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc})-\boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac})$ и $\boldsymbol{c}$ ортогональны.

2.30. Дан равносторонний треугольник ABC, у которого длины сторон равны единице. Вычислить $\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ca}$, если $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$.

2.31. Какой угол образуют единичные векторы $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$, если известно, что векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}=5\boldsymbol{m}-4\boldsymbol{n}$ ортогональны?

2.32. Вычислить скалярное произведение векторов $\boldsymbol{ab}$, если $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{p}-2\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}+4\boldsymbol{q}$, где $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы.

2.33. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ взаимно перпендикулярны, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}})=(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}})=\pi/3$. Вычислить $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2$, если $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=5$, $|\boldsymbol{c}|=8$.

2.34. Найти длину вектора $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}$, где $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ – орты; $(\widehat{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}})=$ $=\pi/4$.

2.35. Вычислить скалярное произведение векторов $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$, если известно, что $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=2\pi/3$.

2.36. Пусть $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=5$, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=2\pi/3$. Найти, при каком значении β векторы $\boldsymbol{c}=\beta\boldsymbol{a}+17\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ взаимно ортогональны.

2.37. Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}$, если $|\boldsymbol{m}|=2\sqrt{2}$, $|\boldsymbol{n}|=3$, $(\widehat{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}})=\pi/4$.

2.38. Дано: $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=1$, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi/3$. Найти косинус угла между векторами:

1) $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$; 2) $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$; 3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

2.39. Найти угол между векторами $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3$, если $|\boldsymbol{e}_1| = 1, |\boldsymbol{e}_2| = 2, |\boldsymbol{e}_3| = 3, (\widehat{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2}) = (\widehat{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3}) = \pi/3, (\widehat{\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3}) = \pi/2$.

2.40. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE, CF. Вычислить $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF}$.

2.41. Вычислить $\boldsymbol{a}^2 + 3\boldsymbol{ab} - 2\boldsymbol{bc} + 4$, если $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{m} - \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{m} + 2\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{m} - 3\boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{m}^2 = 4$, $\boldsymbol{n}^2 = 1$, $(\widehat{\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}}) = \pi/2$.

2.42. Вычислить скалярное произведение векторов:

1) $\boldsymbol{a}(5,1), \boldsymbol{b}(-3,5)$;
2) $\boldsymbol{a}(1/2, -1/3), \boldsymbol{b}(6,9)$;
3) $\boldsymbol{a}(2,5,3)$, $\boldsymbol{b}(-1,0,1)$;
4) $\boldsymbol{a}\left(2\sin\dfrac{\pi}{6}, 2, \cos\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\boldsymbol{b}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}, -1, 2\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

2.43. Найти углы между векторами:

1) $\boldsymbol{a}(8,6)$, $\boldsymbol{b}(2,14)$; 2) $\boldsymbol{a}(2,3)$, $\boldsymbol{b}(6,-4)$;
3) $\boldsymbol{a}(0,-1,1), \boldsymbol{b}(1,0,1)$; 4) $\boldsymbol{a}(2,0,0)$, $\boldsymbol{b}(\cos 2^\circ, \sin 2^\circ, 0)$;
5) $\boldsymbol{a}(\cos 15^\circ, 1, \sin 15^\circ), \boldsymbol{b}(-\sin 15^\circ, 3, \cos 15^\circ)$.

2.44. Найти такое значение α, при котором векторы $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = \alpha\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ ортогональны.

2.45. Даны векторы $\boldsymbol{a}(3,-2)$, $\boldsymbol{b}(5,1)$, $\boldsymbol{c}(0,2)$. Найти:

1) $2\boldsymbol{a}^2 - 3\boldsymbol{ab} + 4\boldsymbol{b}^2 - 2\boldsymbol{ac} - \boldsymbol{c}^2$; 2) $3(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{cb})\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}^2\boldsymbol{b}$.

2.46. Даны векторы $\boldsymbol{a}(3,1,2)$, $\boldsymbol{b}(2,0,4)$, $\boldsymbol{c}(1,2,1)$. Вычислить:

1) $\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{bc})$; 2) $\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^2\boldsymbol{c} + \boldsymbol{c}^2\boldsymbol{a}$;
3) $2\boldsymbol{c}(\boldsymbol{c} + 3\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a})$;
4) $2\boldsymbol{a}^2 + 3\boldsymbol{b}^2 - 4\boldsymbol{c}^2$;
5) $3\boldsymbol{ab} - (2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$;
6) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 - (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})^2$.

2.47. Даны векторы $\boldsymbol{a}(7,-4)$ и $\boldsymbol{b}(-8,6)$. Найти $\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

2.48. Даны точки $A(3,-1)$, $B(9,7)$, $C(1,6)$. Найти $\text{пр}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{CB}$ и $\textbf{пр}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{CB}$.

2.49. Найти $\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$ и $\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a} = -4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

2.50. Даны три вектора: $\boldsymbol{a}(3,-6,-1)$, $\boldsymbol{b}(1,4,-5)$, $\boldsymbol{c}(6,-8,24)$. Найти:

1) $\text{пр}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$; 2) $\text{пр}_{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$.

2.51. Даны три вектора: $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{c} = 4\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$. Найти $\text{пр}_{\boldsymbol{c}}(3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b})$.

2.52. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(1,2,1)$, $B(2,4,3)$, $C(0,6,2)$, $D(-1,4,0)$ является квадратом.

2.53. Даны вершины треугольника $A(2,1,\sqrt{2})$, $B(1,0,0)$, $C(1+\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{6})$. Найти его углы.

2.54. Вычислить внутренние углы треугольника с вершинами $A(1,2,1)$, $B(3,-1,7)$, $C(7,4,-2)$. Показать, что этот треугольник равнобедренный.

2.55. Вектор $\boldsymbol{x}$ перпендикулярен к векторам $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=18\boldsymbol{i}-22\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$ и образует с осью Oy тупой угол. Найти его координаты, если $|\boldsymbol{x}|=14$.

2.56. Даны три вектора: $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=-3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}$. Найти вектор $\boldsymbol{x}$, ортогональный вектору $\boldsymbol{c}$ и удовлетворяющий условиям $\boldsymbol{ax}=4$, $\boldsymbol{bx}=35$.

2.57. Даны три вектора: $\boldsymbol{a}(1,2,-3)$, $\boldsymbol{b}(5,1,2)$, $\boldsymbol{c}(-3,0,1)$. Найти вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий условиям $\boldsymbol{xa}=-4$, $\boldsymbol{bx}=5$, $\boldsymbol{cx}=2$.

2.58. Найти вектор $\boldsymbol{x}$, коллинеарный вектору $\boldsymbol{a}(2,1,-1)$ и удовлетворяющий условию $\boldsymbol{xa}=3$.

2.59. Луч образует с векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ углы, равные соответственно $\pi/4$ и $\pi/3$, а с вектором $\boldsymbol{k}$ – тупой угол. Найти этот угол.

2.60. Вычислить координаты вектора $\boldsymbol{a}$, если его длина равна 8, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{i}})=\pi/4$, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{k}})=\pi/3$, угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{j}$ острый.

2.61. Может ли вектор составлять с координатными осями следующие углы:

1) $\alpha=45^\circ,\beta=60^\circ,\gamma=120^\circ$; 2) $\alpha=90^\circ,\beta=150^\circ,\gamma=30^\circ$?

2.62. Вычислить проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на координатные оси, если $|\boldsymbol{a}|=2$, $\alpha=45^\circ,\beta=60^\circ,\gamma=120^\circ$.

2.63. Пусть $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=5$ и $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi/3$. Вычислить:

1) $|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]|$; 2) $|[3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}]|$;

3) $|[\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}]|$; 4) $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]^2$.

2.64. Упростить:

1) $[2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}]$;

2) $[2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}]$;

3) $[2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}]+[\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}]$;

4) $[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}]-[\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}]+[\boldsymbol{k},\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}]$;

5) $[\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]+[\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}]$.

2.65. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ взаимно перпендикулярны. Вычислить $[2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}]^2$, если $|\boldsymbol{a}|=5$, $|\boldsymbol{b}|=1/3$.

2.66. Доказать, что если $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=\boldsymbol{0}$, $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, то $[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\boldsymbol{0}$.

2.67. Дано: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$. Доказать, что $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]$.

2.68. Доказать тождество $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{ab})^2$.

2.69. Дано: $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$, $\boldsymbol{ab}=-6$. Найти $|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]|$.

2.70. Дано: $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=13$, $|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]|=39$. Найти $\boldsymbol{ab}$.

2.71. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q}=3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$, если $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=5$, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi/4$.

2.72. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{n}-3\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}$, где $|\boldsymbol{m}|=|\boldsymbol{n}|=1$, $(\widehat{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}})=\pi/3$.

2.73. Вычислить $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, если:

1) $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$; 2) $\boldsymbol{a}=7\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$;

3) $\boldsymbol{a}(0,1,2)$, $\boldsymbol{b}(2,0,3)$; 4) $\boldsymbol{a}(3,-1,-2), \boldsymbol{b}(1,2,-1)$.

2.74. Даны векторы $\boldsymbol{a}(5,-2,1)$ и $\boldsymbol{b}(4,0,6)$. Вычислить:

1) $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$; 2) $[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}]$; 3) $[3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}]$.

2.75. Известны две стороны треугольника, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ и $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$. Вычислить длину его высоты CD при условии, что $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ – перпендикулярные друг к другу орты.

2.76. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}(8,4,1)$ и $\boldsymbol{b}(2,-2,1)$.

2.77. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(7,3,4)$, $B(1,0,6)$, $C(4,5,-2)$. Найти длину его высоты AD.

2.78. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{k}-2\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$.

2.79. Найти синус угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

1) $\boldsymbol{a}(-2,2,1), \boldsymbol{b}(2,3,-2)$; 2) $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$.

2.80. Вычислить расстояние между параллельными сторонами параллелограмма $ABCD$, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}(6,0,2)$ и $\overrightarrow{AD}(3/2,2,1)$.

2.81. Найти вектор $\boldsymbol{x}$ из системы уравнений:

1) $\begin{cases}\boldsymbol{x}\boldsymbol{i}=3,\\ [\boldsymbol{x},\boldsymbol{i}]=-2\boldsymbol{k};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})=1,\\ [\boldsymbol{x},\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}]=-2\boldsymbol{j}.\end{cases}$

2.82. Найти единичный вектор $\boldsymbol{c}$, перпендикулярный к каждому из векторов $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$.

2.83. Найти орт $\boldsymbol{x}$, перпендикулярный одновременно к вектору $\boldsymbol{a}(3,\ 6,\ 8)$ и оси абсцисс.

2.84. Найти вектор $\boldsymbol{x}$ из системы уравнений

$$\begin{cases}[\boldsymbol{x},2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}]=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\\ |\boldsymbol{x}|=\sqrt{2}.\end{cases}$$

2.85. Даны векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$. Найти:

1) $[\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]]$; 2) $[[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{c}]$.

2.86. Векторы $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ взаимно перпендикулярны, образуют правую тройку. Вычислить $\boldsymbol{abc}$, если $|\boldsymbol{a}|=4, |\boldsymbol{b}|=1, |\boldsymbol{c}|=3$.

2.87. Вычислить произведения:

1) $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})$; 2) $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,

если $\boldsymbol{abc}=5$.

2.88. Доказать тождества:

1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})(4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c})=0$;

2) $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{abc}$;

3) $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=3\boldsymbol{abc}$;

4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{abc}$;

5) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{abc}$.

2.89. Даны векторы $\boldsymbol{a}(3,1,2)$, $\boldsymbol{b}(2,7,4)$, $\boldsymbol{c}(1,2,1)$. Вычислить $\boldsymbol{abc}$.

2.90. Вычислить $\boldsymbol{abc}$ и указать ориентацию тройки векторов $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$, если:

1) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$;

2) $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$;

3) $\boldsymbol{a}(1,2,-1)$, $\boldsymbol{b}(8,6,4)$, $\boldsymbol{c}(1,2,1)$.

2.91. Определить, какой тройкой (правой или левой) является тройка векторов $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$:

1) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{k}$;

2) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$;

3) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$;

4) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$.

2.92. Установить, являются ли компланарными векторы $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$, если:

1) $\boldsymbol{a}(1,2,-3)$, $\boldsymbol{b}(3,-4,7)$, $\boldsymbol{c}(2,-1,2)$;

2) $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=-3\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$;

3) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$;

4) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{p}-2\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}-2\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{c}=7\boldsymbol{p}+14\boldsymbol{q}-13\boldsymbol{r}$,
где $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}$ – взаимно перпендикулярные орты.

2.93. Лежат ли точки $A(2,1,3)$, $B(0,1,5)$, $C(0,2,-1)$, $D(-1,2,1)$ в одной плоскости?

2.94. Показать, что точки $A(2,-1,-2)$, $B(1,2,1)$, $C(2,3,0)$, $D(5,0,-6)$ лежат в одной плоскости.

2.95. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$. Правой или левой является тройка векторов $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$?

2.96. Вычислить объем пирамиды с вершинами $O(0,0,0)$, $A(5,2,0)$, $B(2,5,0)$, $C(1,2,4)$. Найти площадь грани ABC и высоту пирамиды, проведенную на эту грань.

2.97. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах:

1) $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$;

2) $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{q}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,
где $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ – взаимно перпендикулярные орты;

3) $\boldsymbol{p}=3\boldsymbol{m}+5\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{q}=-\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{r}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$, где $|\boldsymbol{m}|=10$, $|\boldsymbol{n}|=5$, $(\widehat{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}})=\pi/4$.

2.98. Вычислить объем тетраэдра $OABC$, если $\overrightarrow{OA}=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OB}=-3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$.

2.99. Найти длину высоты AH треугольной пирамиды $ABCD$, вершины которой находятся в точках $A(2,-4,5)$, $B(-1,-3,4)$, $C(5,5,-1)$, $D(1,-2,2)$.

2.100. Объем треугольной пирамиды равен 5. Три вершины пирамиды находятся в точках $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$, $C(2,-1,3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси ординат.

2.101. Написать формулы преобразования ДПСК, если $\overrightarrow{OO'}(-5,3)$, $\varphi = 2\pi/3$.

2.102. В репере $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ дана точка $M(5,-3)$. Найти ее координаты в репере $(O'; \boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}')$, если $\varphi = \pi/4$, а вектор $\overrightarrow{OO'}$ имеет координаты 1 и -2.

2.103. Записать уравнения прямых $x+y-1=0$ и $2x-3y+4=0$ в новых системах координат, указанных в двух предыдущих задачах.

2.104. Записать уравнение линии $xy-1=0$ в новой ДПСК, если $O=O'$, $\varphi=\pi/4$.

2.105. Записать формулы преобразования координат при переориентации осей координат в каждом из следующих случаев:

1) $\boldsymbol{i}'=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}'=-\boldsymbol{j}$, $O'(-2,0)$; 2) $\boldsymbol{i}'=-\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}'=\boldsymbol{j}$, $O'(3,4)$;

3) $\boldsymbol{i}'=\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{j}'=\boldsymbol{i}$, $O'(0,1)$; 4) $\boldsymbol{i}'=-\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{j}'=-\boldsymbol{i}$, $O'(0,0)$.

2.106. Записать уравнение окружности $x^2+y^2=5$ в новой ДПСК, если $\varphi=\pi/3$ и известен вектор $\overrightarrow{OO'}(3,-5)$.

2.107. Найти координаты вершин треугольника ABC: $A(2,3)$, $B(4,-2)$, $C(3,2)$ в новой ДПСК, если $\varphi=0$, а точка O' является центром масс треугольника ABC.

2.108. Найти координаты вершин треугольника ABC: $A(1,1)$, $B(3,4)$, $C(2,-2)$ в новой ДПСК, если $\varphi=-\pi/4$, $O=O'$.

2.109. Найти координаты вершин параллелограмма $ABCD$ в репере $(O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, где $O=A$, а концами векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ являются середины сторон BC и CD.

2.110. Пусть $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$. Найти связь между координатами одной и той же точки в двух декартовых системах координат: $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ и $(O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$.

2.111. Пусть A, B, C, D – четыре точки такие, что

$$(\rho(A,B))^2+(\rho(B,C))^2+(\rho(C,D))^2+(\rho(D,A))^2=(\rho(A,C))^2+(\rho(B,D))^2.$$

Доказать, что фигура $ABCD$ – параллелограмм.

Глава 3
ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

Плоскость в пространстве (прямая на плоскости) определяется одной своей точкой M_0 и ненулевым вектором $\boldsymbol{n}$, перпендикулярным к плоскости (прямой). Этот вектор называется *нормальным вектором плоскости* (*прямой на плоскости)*.

Возьмем в пространстве (на плоскости) произвольную точку $M(x, y, z)$ (соответственно $M(x, y)$) с радиусом-вектором $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ ($\boldsymbol{r}(x, y)$), и пусть $\boldsymbol{r}_0$ – радиус-вектор точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ($M_0(x_0, y_0)$). Тогда плоскость (прямая на плоскости) может быть задана следующим векторным уравнением:

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{n}=0. \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) в случае плоскости можно переписать в координатной форме:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \tag{3.2}$$

где A, B, C – координаты нормального вектора $\boldsymbol{n}$; $A^2+B^2+C^2>0$.

В случае прямой на плоскости уравнение (3.1) в координатной форме принимает вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0, \tag{3.3}$$

где A, B – координаты вектора $\boldsymbol{n}$; $A^2+B^2>0$.

Уравнение (3.2) (соответственно (3.3)) называется *уравнением плоскости* (*прямой на плоскости*), *проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *перпендикулярно к вектору* $\boldsymbol{n}(A, B, C)$ (соответственно *уравнением прямой на плоскости*, *перпендикулярной к вектору* $\boldsymbol{n}(A, B)$).

От уравнений (3.2) и (3.3) легко перейти к так называемому *общему уравнению плоскости*

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{3.4}$$

и *общему уравнению прямой на плоскости*

$$Ax+By+C=0. \tag{3.5}$$

Если в уравнении (3.4) все коэффициенты и свободный член отличны от нуля, т.е. $A\neq 0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$, $D\neq 0$, то его можно записать в виде

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{3.6}$$

Легко видеть, что a, b, c – величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью (3.6) на осях Ox, Oy, Oz. Уравнение (3.6) называется *уравнением плоскости в отрезках*. Аналогично строится *уравнение прямой в отрезках*:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Уравнение (3.4) называется *нормальным уравнением плоскости*, если $|\boldsymbol{n}|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}=1,\ D\leqslant 0$. Нормальное уравнение можно записать в виде $\boldsymbol{rn}-p=0$, где $|\boldsymbol{n}|=1,\ p\geqslant 0$.

Переходя к координатной форме, получаем:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0, \tag{3.7}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{n}$.

В случае прямой на плоскости имеем уравнение

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0. \tag{3.8}$$

Переход от общего уравнения (3.4) к нормальному уравнению (3.7) осуществляется умножением уравнения (3.4) на так называемый *нормирующий множитель*

$$\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

знак которого выбирается противоположным знаку свободного члена D. Если $D=0$, то знак λ выбирается произвольно.

Аналогично осуществляется переход от уравнения (3.5) к уравнению (3.8). Тогда

$$\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

причем знак λ выбирается противоположным знаку свободного члена C в уравнении (3.5).

Если плоскость Π в пространстве задана уравнением (3.7), то расстояние $\rho(M_0,\Pi)$ от точки $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости Π находится по формуле

$$\rho(M_0,\Pi)=|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p|, \tag{3.9}$$

а отклонение точки M_0 от плоскости Π – по формуле

$$\delta(M_0,\Pi)=x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p. \tag{3.10}$$

В случае прямой Δ на плоскости расстояние и отклонение вычисляются по формулам:

$$\rho(M_0, \Delta) = \left| x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p \right|, \tag{3.11}$$

$$\delta(M_0, \Delta) = x_0 \sin\alpha + y_0 \sin\alpha - p. \tag{3.12}$$

Если плоскость (прямая на плоскости) задана общими уравнениями, то формулы (3.9)–(3.12) приобретают вид:

$$\rho(M_0, \Pi) = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\delta(M_0, \Pi) = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\rho(M_0, \Delta) = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$\delta(M_0, \Delta) = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Прямую в пространстве (на плоскости) можно задать с помощью точки M_0 на ней и направляющего вектора $\boldsymbol{a}(l, m, n)$ (соответственно $\boldsymbol{a}(l, m)$). Пусть $\boldsymbol{r}_0$ – радиус-вектор точки M_0, а $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор произвольной точки M на этой прямой. Тогда

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}. \tag{3.13}$$

Это уравнение называется *векторно-параметрическим уравнением*.

Плоскость в пространстве также можно задать параметрическим уравнением в векторной форме:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a}_1 + v\boldsymbol{a}_2, \tag{3.14}$$

где $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ – неколлинеарные векторы, параллельные данной плоскости.

Из уравнения (3.13) легко получаются параметрические уравнения прямой в пространстве:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases} \tag{3.15}$$

и на плоскости:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt. \end{cases} \tag{3.16}$$

Преобразовав уравнения (3.15) и (3.16), получим *канонические уравнения прямой в пространстве*:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \quad l^2 + m^2 + n^2 > 0,$$

и *на плоскости*:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \; l^2 + m^2 > 0. \tag{3.17}$$

Если на прямой известны две различные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$, то уравнение этой прямой можно записать в виде

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

или

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}, \tag{3.18}$$

если речь идет о прямой на плоскости, проходящей через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$.

Уравнение (3.17) при $l \neq 0$ можно переписать в виде $y - y_0 = = k(x - x_0)$, где $k = m / l$ (угловой коэффициент). Это уравнение называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*, *проходящей через заданную точку*. Оно преобразуется в уравнение $y = kx + b$, называемое *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Возвращаясь к уравнению (3.14), укажем другие формы его записи:

$$\begin{cases} x = x_0 + ul_1 + vl_2, \\ y = y_0 + um_1 + vm_2, \\ z = z_0 + un_1 + vn_2 \end{cases}$$

(координатная запись параметрического уравнения плоскости);

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = 0$$

(уравнение плоскости в векторной форме по точке и двум параллельным ей векторам);

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

(уравнение плоскости по точке и двум векторам в координатной форме).

Отметим также, что прямая в пространстве может быть задана как пересечение двух плоскостей, т.е. системой двух уравнений первой степени относительно переменных x, y, z вида

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{3.19}$$

причем векторы $\boldsymbol{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\boldsymbol{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ неколлинеарны. Все плоскости, проходящие через данную прямую в пространстве, образуют *пучок плоскостей*. Любая плоскость заданного пучка имеет уравнение следующего вида:

$$\alpha\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) + \beta\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0,$$

где α, β – произвольные числа, причем $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

Справедливо и обратное: всякое уравнение указанного вида задает некоторую плоскость пучка. Это уравнение называется *общим уравнением пучка плоскостей*, определяемого прямой (3.19).

Пучком прямых на плоскости называется множество всех прямых, проходящих через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ – *центр пучка*. Пучок прямых может быть задан также двумя пересекающимися прямыми $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. В первом случае пучок описывается уравнением

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0,$$

а во втором – уравнением

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

где α, β – произвольные скаляры такие, что $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

Пример 1. Определить точку пересечения диагоналей четырехугольника с вершинами в точках $A(3, 9)$, $B(7, 6)$, $C(-2, -6)$ и $D(-3, 1)$, убедившись, что этот четырехугольник выпуклый.

Р е ш е н и е. Для проверки выпуклости установим сначала, что вершины B и D лежат по разные стороны от прямой (AC), а затем – что вершины A и C находятся по разные стороны от прямой (BD). Уравнение прямой (AC) составим, использовав формулу (3.18):

$$\frac{x-3}{3+2} = \frac{y-9}{9+6} \Leftrightarrow 15(x-3) = 5(y-9) \Leftrightarrow 3x - y = 0.$$

Найдем отклонения точек B и D от прямой (AC):

$$\delta(B, (AC)) = \frac{1}{\sqrt{10}}(7 \cdot 3 - 6) > 0, \qquad \delta(D, (AC)) = \frac{1}{\sqrt{10}}(-7 \cdot 3 - 1) < 0.$$

Аналогично составим уравнение прямой (BD): $x-2y+5=0$. Убедимся, что числа $\delta(A,(BD))$ и $\delta(C,(BD))$ имеют разные знаки. Решив систему уравнений

$$\begin{cases}3x-y=0,\\ x-2y=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x=5,\\ x-2y=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1,\\ y=3,\end{cases}$$

найдем точку пересечения $Q(1,3)$.

Пример 2. Составить уравнение плоскости, которая делит пополам острый двугранный угол, образованный двумя плоскостями: $3x-2y+4z+3=0$ и $3x-4y+2z+3=0$.

Решение. Потребуем сначала, чтобы точка $M(x,y,z)$ была равноудалена от данных плоскостей:

$$\frac{|3x-2y+4z+3|}{\sqrt{9+4+16}}=\frac{|3x-4y+2z+3|}{\sqrt{9+16+4}} \Leftrightarrow 3x-2y+4z+3=\pm(3x-4y+2z+3).$$

Отсюда получаем уравнения плоскостей Π_1 и Π_2: $y+z=0$, $x-y+z+1=0$, делящих пополам двугранные углы между данными плоскостями. Для того чтобы выбрать искомую плоскость, поступим следующим образом. На плоскости $3x-2y+4z+3=0$ возьмем некоторую точку, например $A(-1,2,1)$, и сравним расстояния от нее до полученных плоскостей, так как до искомой плоскости расстояние должно быть меньше:

$$\rho(A,\Pi_1)=\frac{|2+1|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}},\quad \rho(A,\Pi_2)=\frac{|-1+1+1|}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно, искомой плоскостью является плоскость $x-y+z+1=0$.

Пример 3. Найти точку P', симметричную точке $P(9,3,1)$ относительно плоскости $x+2y-3z+2=0$.

Решение. Очевидно, что нормальный вектор $\boldsymbol{n}(1,2,-3)$ плоскости, является направляющим вектором перпендикуляра, проведенного из точки P на плоскость. Составим уравнения этого перпендикуляра:

$$\begin{cases}x=9+t,\\ y=3+2t,\\ z=1-3t.\end{cases}$$

Теперь нетрудно найти проекцию Q точки P на плоскость: $9+t+2(3+2t)-3(1-3t)+2=0 \Leftrightarrow t=-1$, поэтому точка Q имеет координаты $x=9-1=8$, $y=3-2=1$, $z=1+3=4$. Поскольку Q — середина отрезка $[P,P']$, то координаты точки P' можно найти из простых уравнений $\frac{x+9}{2}=8$, $\frac{y+3}{2}=1$, $\frac{z+1}{2}=4$. Следовательно, $P'(7,-1,7)$.

Пример 4. Определить косинус угла между прямыми

$$\begin{cases}x-2z-3=0,\\ x+2y+2z+1=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}3x-4y+3z+1=0,\\ 2x+2y+9z-1=0.\end{cases}$$

Решение. Направляющий вектор прямой, заданной пересечением двух плоскостей, можно найти как векторное произведение нормальных векторов плоскостей, поэтому направляющие векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ прямых находятся следующим образом:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} \parallel 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix} = -42\boldsymbol{i} - 21\boldsymbol{j} + 14\boldsymbol{k} \parallel 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}.$$

Теперь вычислим искомый косинус между прямыми, использовав найденные координаты:

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1|\cdot|\boldsymbol{a}_2|} = \frac{12-6-2}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{36+9+4}} = \frac{4}{21}.$$

Пример 5. Вычислить расстояние от точки $P(5,5,-3)$ до прямой $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+23}{-2}$.

Р е ш е н и е. Найдем проекцию P' точки P на прямую. Проектирующая плоскость проходит через точку P, и в качестве ее нормального вектора можно взять направляющий вектор прямой $\boldsymbol{a}(3,2,-2)$. Тогда уравнение проектирующей плоскости имеет вид $3(x-5)+2(y-5)-2(z+3)=0 \Leftrightarrow 3x+2y-2z-31=0$. Для нахождения проекции уравнение исходной прямой запишем в параметрической форме: $x=3t+2,\ y=2t-2,\ z=-2t-23$ и подставим x, y и z в уравнение проектирующей плоскости:

$$3(3t+2)+2(2t-2)-2(-2t-23)-31=0 \Rightarrow 17t+17=0 \Rightarrow t=-1.$$

Отсюда находим: $P'(-1,\ -4,-21)$ и искомое расстояние

$$\rho(P, P') = \sqrt{(5+1)^2+(5+4)^2+(-3+21)^2} = 21.$$

Пример 6. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{1}$ параллельно прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-2}{-1}$.

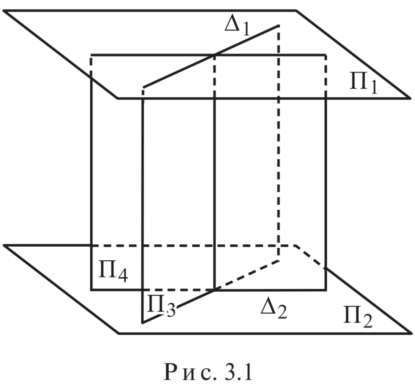
Р е ш е н и е. Замечаем, что плоскости $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-2} \Leftrightarrow 2x+3y-11=0$ и $\frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{1} \Leftrightarrow y+2z-7=0$ проходят через первую прямую, поэтому искомая плоскость принадлежит пучку $\alpha(2x+3y-11)+\beta(y+2z-7)=0$. Для определения α и β потребуем, чтобы направляющий вектор второй прямой $\boldsymbol{a}(1,-2,-1)$ был перпендикулярен к вектору $\boldsymbol{n}(2\alpha, 3\alpha+\beta, 2\beta)$: $2\alpha-6\alpha-2\beta-2\beta=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=0$. Полагая $\alpha=1, \beta=-1$, получаем уравнение искомой плоскости: $2x + 2y - 2z - 4 = 0$.

Пример 7. Найти общий перпендикуляр и расстояние между скрещивающимися прямыми

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{1}, \quad \frac{x-5}{6}=\frac{y}{-5}=\frac{z-1}{3}.$$

Р е ш е н и е. Сначала покажем, что общий перпендикуляр к любым двум скрещивающимся прямым существует. В самом деле, пусть Δ_1 и Δ_2 – две скрещивающиеся прямые. Тогда имеется единственная плоскость Π_1, параллельная прямой Δ_2 и содержащая Δ_1. Аналогично существует единственная плоскость Π_2, параллельная прямой Δ_1 и содержащая Δ_2. Ясно, что $\Pi_1 \parallel \Pi_2$. Теперь через прямую Δ_1 проведем плоскость Π_3, перпендикулярную к Π_1, и через Δ_2 проведем плоскость Π_4, перпендикулярную к Π_2 (рис. 3.1). Поскольку прямые Δ_1 и Δ_2 скрещиваются, то пересечением плоскостей Π_3 и Π_4 является прямая Δ, перпендикулярная к Δ_1 и Δ_2 (ввиду того, что $\Delta_1 \parallel \Pi_1 \parallel \Delta_2$). Пересечение плоскостей Π_1, Π_3, Π_4 состоит из единственной точки (обозначим ее M_1), которая лежит на прямой $\Delta_1 = \Pi_1 \cap \Pi_3$. Аналогично $\Pi_2 \cap \Pi_3 \cap \Pi_4$ состоит из единственной точки (обозначим ее M_2), находящейся на прямой $\Delta_2 = \Pi_2 \cap \Pi_4$. Так как $M_1 \in \Pi_1 \cap \Pi_3 \cap \Pi_4 = \Delta_1 \cap \Delta$, $M_2 \in \Pi_2 \cap \Pi_3 \cap \Pi_4 = \Delta_2 \cap \Delta$, то Δ есть общий перпендикуляр к прямым Δ_1 и Δ_2. При этом, поскольку отрезок $[M_1, M_2]$ перпендикулярен и к плоскости Π_1, и к плоскости Π_2, причем $M_1 \in \Pi_1$, $M_2 \in \Pi_2$, то расстояние $\rho(M_1, M_2)$ и есть расстояние $\rho(\Pi_1, \Pi_2)$. Следовательно, для любых точек $M_3 \in \Pi_1$ и $M_4 \in \Pi_2$, в том числе если эти точки лежат на прямых Δ_1 и Δ_2 соответственно, выполняется неравенство $\rho(M_3, M_4) \geqslant \rho(\Pi_1, \Pi_2) = \rho(M_1, M_2)$. Таким образом, $\rho(M_1, M_2)$ есть расстояние между скрещивающимися прямыми Δ_1 и Δ_2. Обозначим его $\rho(\Delta_1, \Delta_2)$. Если эти прямые заданы параметрическими уравнениями $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_1 t$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a}_2 t$, где $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ – радиусы-векторы некоторых точек N_1 и N_2 на прямых Δ_1 и Δ_2 соответственно, то $\rho(\Delta_1, \Delta_2)$ можно получить по формуле

$$\rho(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2|}{\|[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\|}. \tag{3.20}$$



Р и с. 3.1

В самом деле, если рассмотреть параллелепипед с вершинами N_1, N_2, ребра которого изображаются векторами $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, то два его ребра лежат на прямых Δ_1, Δ_2 и являются сторонами оснований параллелепипеда – параллелограммов со сторонами, изображаемыми векторами $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$; эти основания лежат в плоскостях Π_1, Π_2, поэтому высота h параллелепипеда будет совпадать с расстоянием $\rho(\Pi_1, \Pi_2)$ между этими плоскостями и, следовательно, с $\rho(\Delta_1, \Delta_2)$. Ввиду того, что объем V данного параллелепипеда равен $|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2|$, а площадь S основания – длина векторного произведения $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$, получаем:

$$\rho(\Delta_1, \Delta_2) = h = \frac{V}{S} = \frac{|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2|}{\|[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\|}.$$

Приступим непосредственно к решению примера. Для вывода уравнения плоскости Π_1 используем тот факт, что она проходит через точку $N_1(1,1,2)$ параллельно векторам $\boldsymbol{a}_1(1,2,1)$ и $\boldsymbol{a}_2(6,-5,3)$:

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 11(x-1) + 3(y-1) - 17(z-2),$$

и получим уравнение плоскости Π_1: $11x + 3y - 17z + 20 = 0$. Нормальный вектор этой плоскости обозначим через $\boldsymbol{n}_1$. Для того чтобы получить уравнение плоскости Π_3, вычислим координаты ее нормального вектора $\boldsymbol{n}_3$. По построению плоскости Π_3 этот вектор должен быть ортогонален как вектору $\boldsymbol{n}_1$, так и вектору $\boldsymbol{a}_1$, в связи с чем в качестве $\boldsymbol{n}_3$ можно взять векторное произведение $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{n}_1]$:

$$\boldsymbol{n}_3 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 11 & 3 & -17 \end{vmatrix} = -37\boldsymbol{i} + 28\boldsymbol{j} - 19\boldsymbol{k}.$$

Поскольку $N_1 \in \Pi_3$, то отсюда выводим уравнение искомой плоскости Π_3:

$$-37(x-1) + 28(y-1) - 19(z-2) = 0 \Leftrightarrow -37x + 28y - 19z + 47 = 0.$$

Аналогично получаем уравнение плоскости Π_4. Она имеет нормальный вектор

$$\boldsymbol{n}_3 = \left[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{n}_1\right] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 6 & -5 & 3 \\ 11 & 3 & -17 \end{vmatrix} = 76\boldsymbol{i} + 135\boldsymbol{j} + 73\boldsymbol{k}$$

и проходит через точку $N_2(5,0,1)$:

$$76(x-5) + 135y + 73(z-1) = 0 \Leftrightarrow 76x + 135y + 73z - 453 = 0.$$

Таким образом, общий перпендикуляр Δ к прямым Δ_1 и Δ_2 имеет уравнение

$$\begin{cases} 37x - 28y + 19z - 47 = 0, \\ 76x + 135y + 73z - 453 = 0. \end{cases}$$

Для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми Δ_1 и Δ_2 воспользуемся формулой (3.20):

$$\rho(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2|}{|[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]|} = \frac{\left\| \begin{matrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & -5 & 3 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{|\boldsymbol{n}_1|}} = \frac{58}{\sqrt{11^2 + 9^2 + 17^2}} = \frac{58}{\sqrt{491}}.$$

3.1. Определить, какие из точек $M_1(2, 1)$, $M_2(e, \pi)$, $M_3(1, 2)$, $M_4(-4, 2)$, $M_5(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ лежат на прямой $3x - 5y + 7 = 0$.

3.2. Точки P_1, P_2, P_3, P_4 расположены на прямой $x + 2y - 3 = 0$, числа 2 и -5 являются абсциссами точек P_1, P_2, а числа -8 и 1 — ординатами точек P_3, P_4. Найти координаты этих точек.

3.3. Определить координаты точек пересечения прямой $4x + 5y - 100 = 0$ с осями координат и изобразить эту прямую на чертеже.

3.4. Составить уравнение прямой и изобразить ее на чертеже, если известны ее угловой коэффициент и отрезок, отсекаемый на оси Oy:

1) $k = 7/10$, $b = 3$; 2) $k = -3/10$, $b = 5$;

3) $k = -1/2$, $b = -2$; 4) $k = 2/5$, $b = -2$.

3.5. Из данных уравнений получить уравнения с угловым коэффициентом и с их помощью построить прямые на чертеже:

1) $x - 5y - 3 = 0$; 2) $3x + 5y + 2 = 0$;

3) $3x - 2y - 6 = 0$; 4) $3x - 2y = 0$.

3.6. Дана прямая $2x - 3y + 5 = 0$. Найти:

1) нормальный вектор прямой; 2) направляющий вектор;

3) точку на прямой; 4) угловой коэффициент.

3.7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (2, 3):

1) параллельно прямой $2x + 5y + 1 = 0$;

2) перпендикулярно к этой прямой.

3.8. Составить уравнения трех прямых так, чтобы площадь образовавшегося треугольника была равна 8.

3.9. Определить взаимное расположение двух прямых:

1) $2x + 3y - 1 = 0$, $4x + 6y - 7 = 0$;

2) $\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = 3 + 2t, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5 + 3t, \\ y = 5 + 2t; \end{cases}$

3) $2x + 3y - 1 = 0$, $3x + 2y - 1 = 0$.

3.10. Даны середины сторон треугольника $M_1(3, 2)$, $M_2(6, 4)$, $M_3(4, -3)$. Составить уравнения его сторон.

3.11. Найти направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ прямой $2x - 3y + 7 = 0$.

3.12. Составить уравнения сторон, высот и медиан треугольника ABC, если $A(1,1)$, $B(2,1)$, $C(3,3)$.

3.13. Даны вершины треугольника $A(2,3)$, $B(0,0)$, $C(3,4)$. Найти его площадь.

3.14. Даны вершины треугольника $A(3,-1)$, $B(4,-4)$, $C(6,8)$. Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла при вершине A.

3.15. Найти уравнения медиан треугольника с вершинами в точках $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

3.16. Дана прямая $x=1+3t$, $y=-2-t$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(3,1)$:

1) параллельно данной прямой;

2) перпендикулярно к данной прямой.

3.17. Найти проекцию точки $M(8,-1)$ на прямую $x-y+1=0$.

3.18. Найти точку Q, симметричную точке $P(2, 5)$ относительно прямой $x+4y-15=0$.

3.19. Дан треугольник ABC, где $A(4, 1)$, $B(7, 5)$, $C(-4, 7)$. Вычислить длину биссектрисы угла A.

3.20. Известны вершины треугольника $A(2, 0)$, $B(6, 8)$ и точка пересечения высот $Q(4,0)$. Составить уравнения сторон этого треугольника.

3.21. Составить уравнения сторон треугольника, если известны уравнения двух медиан $2x-y-1=0$, $x-1=0$ и вершина $A(3, 1)$.

3.22. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $A(3, 6)$, а также уравнения высоты $x-7y+16=0$ и биссектрисы $x+y+12=0$, проведенных из одной вершины.

3.23. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $Q(2,3)$ и равноудаленных от точек $A(3, 4)$, $B(5, 2)$.

3.24. Найти каноническое уравнение прямой $4x-5y+3=0$.

3.25. Составить уравнения прямых, равноудаленных от точек $A(3, 2)$, $B(5, 4)$, $C(7, 2)$.

3.26. Две стороны параллелограмма лежат на прямых $x+y+5=0$, $2x-y+4=0$, его центр тяжести находится в точке $M(3, 1)$. На каких прямых лежат другие стороны параллелограмма?

3.27. На прямой $x-2y+2=0$ найти точку P, сумма расстояний от которой до точек $A(11, 4)$ и $B(-1, 10)$ минимальна.

3.28. Определить, при каких m и n две прямые $mx+6y+n=0$, $2x+my+1=0$:

1) параллельны; 2) совпадают; 3) перпендикулярны.

3.29. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой $3x-2y+12=0$ от координатного угла.

3.30. Найти наименьшую площадь треугольников, отсекаемых от первого координатного угли прямыми, которые проходят через точку $Q(1, 2)$.

3.31. Прямая проходит через точку $M(6,\ 4)$ и отсекает от координатного угла треугольник площадью 6. Найти все такие прямые.

3.32. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(7,-1)$ на одинаковых расстояниях от точек $A(5,-11)$ и $B(-13,7)$.

3.33. Привести общее уравнение прямой на плоскости к нормальному виду в каждом из следующих случаев:

1) $-4x+3y-5=0$; 2) $\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y+9=0$; 3) $5x-12y+10=0$;

4) $x+3=0$; 5) $y+x=0$; 6) $y-7=0$.

3.34. Вычислить отклонение δ и расстояние d от точки до прямой в следующих случаях:

1) $A(1,\ 2)$, $3x+4y+9=0$; 2) $B(-2,\ 3)$, $5x-12y+26=0$.

3.35. Вычислить отклонение δ и расстояние d от точки $A(5,3)$ до следующих прямых:

1) $4x+3y-2=0$; 2) $\dfrac{3}{5}x-\dfrac{4}{5}y+1=0$;

3) $y-1=0$; 4) $\begin{cases} x=2+t, \\ y=3-t. \end{cases}$

3.36. Выяснить, пересекает ли прямая $2x-2y+5=0$ отрезок, ограниченный точками:

1) $A(1,\ 2)$, $B(-2,\ 3)$; 2) $C(1,\ 1)$, $D(19,\ -1)$.

3.37. Является ли четырехугольник с вершинами $A(-9,\ 2)$, $B(1,\ 7)$, $C(4,\ -1)$, $D(-5,\ 3)$ выпуклым?

3.38. Вычислить расстояние d между параллельными прямыми:

1) $4x+3y-15=0$, $-8x-6y+5=0$;

2) $5x-12y-26=0$, $10x-24y+39=0$.

3.39. Составить уравнение прямой, проходящей посередине между двумя параллельными прямыми $5x-2y+7=0$, $5x-2y-9=0$.

3.40. Выяснить, находится ли точка $(1,\ -3)$ между двумя параллельными прямыми $4x-3y+10=0$, $4x-3y-20=0$.

3.41. Определить, находится ли точка $(100,\ -50)$ между двумя параллельными прямыми $2x+3y-10=0$, $2x+3y-75=0$.

3.42. Где лежит точка $M(2,\ 6)$ – внутри или вне треугольника со сторонами $2x-y-8=0$, $14x+3y-16=0$, $x+2y+31=0$?

3.43. Какой угол (острый или тупой), образованный двумя прямыми $2x-3y-4=0$, $x+y-11=0$, содержит точку $A(4,\ -3)$?

3.44. Составить уравнение биссектрисы угла между прямыми $2x+$ $+y-11=0$ и $6x-3y+5=0$, в котором лежит точка $M(-3,\ 1)$.

3.45. Найти уравнение биссектрисы внутреннего угла при вершине A треугольника с вершинами $A(1,\ 4)$, $B(7,\ 8)$, $C(3,\ 1)$.

3.46. Исследовать взаимное расположение двух прямых на плоскости, заданных уравнениями:

$$Ax+By+C=0, \qquad \begin{cases} x=x_0+tl, \\ y=y_0+tm. \end{cases}$$

3.47. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(3,\ 8)$ на расстоянии 5 от точки $B(2,\ 3)$.

3.48. Даны две соседние вершины квадрата $A(4,\ 2)$, $B(1,\ 6)$. Составить уравнения его сторон.

3.49. Известны вершина $A(4,\ -1)$ квадрата и прямая $4x-3y-11=0$, на которой лежит одна из сторон. На каких прямых лежат остальные стороны этого квадрата?

3.50. В пучке прямых на плоскости, заданном уравнением $\alpha(3x-4y+1)+\beta(x-y-2)=0$, найти прямую:

1) проходящую через точку $A(2,\ -3)$;

2) параллельную прямой $2x-3y+5=0$;

3) перпендикулярную к этой же прямой;

4) имеющую угловой коэффициент $k=-0{,}3$.

3.51. Принадлежит ли прямая $5x+2y-8=0$ пучку $\alpha(6x+5y-11)+\beta(7x-3y-4)=0$?

3.52. Доказать, что три прямые $2x+y-5=0$, $3x-5y-1=0$, $2x-7y+3=0$ проходят через одну точку.

3.53. Составить уравнения высот треугольника, если уравнения его сторон $4x+5y-17=0$, $2x+y-1=0$, $4x-y-11=0$. (Решить задачу, не вычисляя координаты вершин треугольника.)

3.54. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x+3y+17=0$, $2x-y-8=0$ и отстоящей от точки $A(2,\ 1)$ на расстоянии 5.

3.55. Найти прямые, проходящие через точку $M(5,\ 1)$ и отсекающие на координатных осях отрезки равной длины.

3.56. Подобрать такое число c, чтобы прямая $2x+3y+c=0$ принадлежала пучку $\alpha(3x+y+5)+\beta(4x+y-6)=0$.

3.57. Даны вершина треугольника $A(3,\ 1)$ и уравнения двух медиан $3x-y+3=0$, $x-y+1=0$. Найти остальные вершины треугольника.

3.58. Составить уравнения сторон ромба, если его противоположные вершины $A(-3,\ 1)$, $B(5,\ 7)$ и площадь $S=25$.

3.59. Вывести уравнение прямой в полярной системе координат.

3.60. Найти центр круга, вписанного в равнобедренный треугольник с боковыми сторонами $7x-y-9=0$, $5x+5y-35=0$ и точкой $M(3,-8)$ на основании.

3.61. Дан треугольник со сторонами (AB): $x+y+3=0$, (BC): $3x+4y+5=0$, (AC): $4x+3y-20=0$. На стороне (AB) найти точку, равноудаленную от двух других сторон.

3.62. Дан треугольник ABC с вершинами $A(3,4)$, $B(7,1)$, $C(8,16)$. Внутри этого треугольника найти такую точку K, чтобы площади треугольников AKB, BKC, CKA были равны.

3.63. Составить уравнения сторон треугольника с вершиной $C(2,0)$, а также биссектрисой $3x-y-2=0$ и медианой $17x-9y+2=$ $=0$, проведенными из одной вершины.

3.64. Гипотенуза прямоугольного треугольника с вершиной $A(5,5)$ лежит на прямой $2x+11y-15=0$, а его площадь равна 25. Найти остальные вершины этого треугольника.

3.65. Луч света направлен по прямой $7x-y+17=0$. Доходя до прямой $2x-y-2=0$, он от нее отражается. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

3.66. Составить уравнения сторон квадрата, две параллельные стороны которого проходят через точки $A(2,\ 1)$, $B(3,5)$, а две другие – через точки $M(0,1)$, $K(-3,-1)$.

3.67. На прямой $x-2y+2=0$ найти точку P, сумма расстояний от которой до точек $A(11,4)$ и $B(-1,10)$ наименьшая.

3.68. На прямой $14x+23y-130=0$ найти точки, равноудаленные от точки $A(1,2)$ и прямой $3x-4y+15=0$.

3.69. Две параллельные прямые $x-y+1=0$, $x-y+2=0$ повернуты вокруг начала координат по ходу часовой стрелки на 30°. Найти точки пересечения исходных и повернутых прямых и показать, что эти точки являются вершинами ромба.

3.70. Доказать, что сумма квадратов расстояний от всех вершин квадрата до произвольной прямой, проходящей через его центр, не зависит от выбора прямой.

3.71. Проверить, лежит ли точка пересечения высот треугольника на одной прямой с точкой пересечения медиан и центром описанного круга.

3.72. Написать формулу осевой симметрии плоскости, которая точку $A(1,2)$ переводит в точку $B(3,4)$.

3.73. Вывести формулу отображения прямой $2x-y-4=0$ на прямую $-2x-y+13=0$, переводящего точку $A(1,-2)$ в точку $B(6,1)$ и увеличивающего длины отрезков в 2 раза.

3.74. Даны уравнения высоты $x+y-2=0$, биссектрисы $y-9=0$ и медианы $x-4y+43=0$ треугольника ABC, исходящих из вершины A. Найти координаты его вершин, если точка $D(3,1)$ лежит на прямой, проходящей через вершины B и C.

3.75. Внутри угла со сторонами $27x-y-357=0$, $11x-3y-91=0$ и вершиной A дана точка $P(10,-7)$. На сторонах этого угла найти точки B и C такие, чтобы четырехугольник $ABPC$ был выпуклый, прямые (BP) и (CP) взаимно перпендикулярны и площади треугольников ABP и ACP равны.

3.76. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3, 2, -1)$ перпендикулярно к вектору $\boldsymbol{n}(-1, 2, 1)$.

3.77. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(9, -3, 2)$ параллельно двум векторам: $\boldsymbol{a}(2, 1, -2)$ и $\boldsymbol{b}(3, 1, 0)$.

3.78. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2, 3, 1)$ и $P(1, 1, 3)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a}(1, 2, 1)$.

3.79. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через три точки: $A(3, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(-1, -2, 0)$.

3.80. Составить параметрические уравнения плоскости:

1) проходящей через точку $A(1, 1, 2)$ параллельно векторам $\boldsymbol{a}(2, 3, 1)$, $\boldsymbol{b}(-1, 1, 0)$;

2) проходящей через точки $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 2, -3)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a}(5, -3, 2)$;

3) заданной общим уравнением $x + 2y - 3z - 1 = 0$.

3.81. Найти координаты точек пересечения плоскости $2x + 3y - 6z + 30 = 0$ с координатными осями.

3.82. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2, 1, 3)$ параллельно плоскости $x + 2y - 3z + 1 = 0$.

3.83. Вычислить объем тетраэдра, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью $3x - 2y + 6z - 6 = 0$.

3.84. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, 2, 1)$ и отсекающей на координатных осях отрезки одинаковой длины.

3.85. Определить взаимное расположение плоскостей:

1) $x + 2y - z + 2 = 0,\ 2x + 4y - 2z + 2 = 0$;

2) $x + 2y + 3z + 1 = 0,\ 2x + 4y + 6z + 2 = 0$;

3) $2x + 3y + 2z - 5 = 0,\ x + y + 5z - 7 = 0$.

3.86. Найти координаты точек пересечения плоскости

$$\begin{cases} x = 2 + u - v, \\ y = -3 - u - 2v, \\ z = 2u + v \end{cases}$$

с осями координат.

3.87. Найти косинусы угла φ между плоскостями:

1) $2x + y + 2z - 1 = 0,\ x - 4y + z + 1 = 0$;

2) $\begin{cases} x = 1 + 2u + v, \\ y = 1 - u - v, \\ z = 2 + v, \end{cases} \quad y + z + 10 = 0.$

3.88. Написать общее уравнение плоскости

$$\begin{cases} x = 1 + u + v, \\ y = 2 - 2u + 3v, \\ z = -1 - u - 2v. \end{cases}$$

3.89. Доказать, что три плоскости $x - 2y + z - 1 = 0$, $2x - 3y + z - 11 = 0$, $x - y - 2z - 2 = 0$ пересекаются в одной точке. Найти координаты этой точки.

3.90. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,1,1)$ перпендикулярно к двум плоскостям: $x + y + z + 5 = 0$ и $x - y + z - 2 = 0$.

3.91. Доказать, что три плоскости $9x + 3y + 6z + 3 = 0$, $5x + 5y + 8z - 1 = 0$, $x + 2y + 3z - 1 = 0$ проходят через одну прямую.

3.92. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} 6x - 17y + 11z - 19 = 0, \\ 5x + y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

параллельно вектору $\boldsymbol{a}(2, 3, -1)$.

3.93. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x + 2y + z + 2 = 0, \\ 3x + y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

перпендикулярно к вектору $\boldsymbol{b}(1, 1, 0)$.

3.94. Найти точку, симметричную точке $A(2, 4, 2)$ относительно плоскости $x + y + z - 5 = 0$.

3.95. Найти проекцию точки $Q(1, 3, 1)$ на прямую

$$\begin{cases} 2x + y - z - 10 = 0, \\ x + 2y + z - 11 = 0. \end{cases}$$

3.96. Найти проекцию прямой

$$\begin{cases} x + y - 16 = 0, \\ x + y + z - 15 = 0 \end{cases}$$

на плоскость $3x - 2y + z - 1 = 0$.

3.97. Выяснить, при каком k следующие уравнения определяют перпендикулярные плоскости:

1) $2x - y - kz + 1 = 0$, $3x + ky - 2z - 3 = 0$;

2) $x + y + kz - 1 = 0$, $2x + 2y + z + 2 = 0$.

3.98. Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку $A(2, 3, 5)$ параллельно координатным плоскостям.

3.99. Задана плоскость $3x + 2y - 6z - 12 = 0$. Написать ее уравнение в отрезках.

3.100. Вычислить площади треугольников, которые плоскость $2x+2y-3z-12=0$ отсекает от координатных углов.

3.101. Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку $A(5,4,3)$ и отсекающих на осях координат отрезки одинаковой длины.

3.102. Написать параметрические уравнения плоскости $13x+$ $+3y-14z-1=0$.

3.103. Каждое из следующих уравнений привести к нормальному виду:

1) $2x-y+2z+3=0$; 2) $x+y+2z-1=0$;
3) $12y-5z+4=0$; 4) $2z+1=0$.

3.104. Вычислить отклонение δ и расстояние d от точки до плоскости в следующих случаях:

1) $M(1,2,1)$, $2x+y-2z+4=0$;
2) $M(6,-3,2)$, $6x-3y+2z+35=0$;
3) $M(13, 12, 5)$, $-5y+12z+13=0$.

3.105. Доказать, что плоскость $2x+y-z-10=0$ пересекает отрезок, соединяющий точки $A(1, 3, 1)$, $B(5, 5, -1)$.

3.106. Написать уравнение плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $x+2y+2z+1=0$ и $-4x+2y+4z+$ $+5=0$.

3.107. Вычислить расстояние от точки $P(1,3,0)$ до плоскости, проходящей через точки $A(3,1,3)$, $B(0,3,5)$, $C(6,-3,0)$.

3.108. Лежит ли начало координат внутри острого угла, образованного плоскостями $6x+7y-z-1=0$ и $2x+3y-3z+10=0$?

3.109. Составить уравнение плоскости, которая делит пополам тупой двугранный угол, образованный плоскостями $x+3y+7z-41=0$ и $3x-5y+5z+21=0$.

3.110. Вычислить объем куба, две грани которого лежат на плоскостях $x+y+z-3=0$ и $2x+2y+2z+3=0$.

3.111. Среди точек плоскости $x+2y+6z-38=0$ найти точку с наименьшей суммой расстояний до точек $A(1,1,-1)$, $B(-3,9,-3)$.

3.112. Даны вершины тетраэдра $A(-5,-4,8)$, $B(2,3,1)$, $C(4,1,-2)$, $D(6,3,7)$. Найти длину высоты, проведенной из вершины A на грань BCD.

3.113. Определить, принадлежит ли плоскость $2x+3y-7=0$ пучку плоскостей $\alpha(x+2y+3)+\beta(-3x-4y-5)=0$.

3.114. Содержат ли три плоскости $3y-z-9=0$, $2x-y+3z-5=0$, $3x-3y+4z-3=0$ общую прямую?

3.115. Найти проекцию прямой

$$\begin{cases} x+y-16=0, \\ x+y+z-15=0 \end{cases}$$

на плоскость $3x-2y+z-1=0$.

3.116. Составить параметрические уравнения прямых, проходящих через точки:

1) $A(0, 1, -3)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a}(3, -2, 1)$;

2) $M_1(2, 1, 2)$ и $M_2(3, 2, 5)$;

3) $P(2, 1, -3)$ перпендикулярно к плоскости $2x-5y+3z=0$.

3.117. Составить канонические и параметрические уравнения прямых, проходящих через точку:

1) $M_1(1, 2, 3)$ параллельно ее радиусу-вектору;

2) $M_2(1, 1, 1)$ параллельно оси с направляющими косинусами $(1/\sqrt{2},\ -1/2,\ 1/2)$.

3.118. Составить параметрические уравнения прямых:

1) $\begin{cases} x+3y+3z-5=0, \\ 5x-y+7z-9=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x+5y+7z-19=0, \\ x+y+z-4=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x-y+2z-4=0, \\ x+y+z-3=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x-y-z-2=0. \end{cases}$

3.119. Представить каждую из следующих прямых как пересечение плоскостей, параллельных осям Oy и Oz:

1) $\begin{cases} x=2+t, \\ y=3+2t, \\ z=6+3t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=3+8t, \\ y=-6, \\ z=2+t. \end{cases}$

3.120. Составить параметрические уравнения биссектрисы внутреннего угла при вершине A треугольника, если даны координаты его вершин $A(3, 5, -4)$, $B(5, 7, -2)$, $C(2, 6, -3)$.

3.121. Найти точку, симметричную точке $A(1, 3, 2)$ относительно прямой

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-1}{1}.$$

3.122. Найти точку, симметричную точке $A(0,\ 5,\ -3)$ относительно прямой

$$\begin{cases} x+y+z-6=0, \\ 3x+y-z-12=0. \end{cases}$$

3.123. Убедившись, что прямые

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-1}{1}, \quad \frac{x-2}{2}=\frac{y-9}{4}=\frac{z-1}{2}$$

параллельны, вычислить расстояние между ними.

3.124. Доказать, что прямые

$$\begin{cases} x=2+t, \\ y=5-2t, \\ z=1-t, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-z-6=0, \\ 3x+y+z-12=0. \end{cases}$$

совпадают.

3.125. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-7}{2}=\frac{z}{-1}, \quad \frac{x-1}{5}=\frac{y-7}{2}=\frac{z+2}{1}.$$

3.126. Найти общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым

$$\begin{cases} x=1+t, \\ y=3+2t, \\ z=2-t, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+4z-5=0, \\ x-y-2z-3=0. \end{cases}$$

3.127. Найти угол между прямой $x=1+2t$, $y=1+2t$, $z=-2-t$ и плоскостью $x+y+z+1=0$.

3.128. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ параллельно прямой $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$.

3.129. Составить уравнение прямой, лежащей в плоскости $4x-7y-7z+31=0$ и пересекающей прямые

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y-6}{2}=\frac{z+3}{4}, \quad \begin{cases} x=15-13t, \\ y=9-5t, \\ z=4+t. \end{cases}$$

3.130. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,2,2)$ параллельно плоскости $x+2y+2z+1=0$ и пересекающей прямую $x=5+8t$, $y=1+t$, $z=1+2t$.

3.131. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3,3,3)$ и пересекающей прямые

$$\frac{x-9}{8}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}, \quad \frac{x-4}{-5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}.$$

3.132. Доказать, что прямая в пространстве может быть задана уравнением $[\boldsymbol{r},\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}$ – направляющий вектор прямой, а $\boldsymbol{b}$ – вектор, ему ортогональный.

3.133. Найти расстояние от начала координат до прямой $[\boldsymbol{r},\boldsymbol{a}]=\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-9\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$.

3.134. Найти уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые:

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{2}, \quad \frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-5}{-2}.$$

3.135. На прямой $\frac{x-5}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-7}{2}$ найти точку, ближайшую к точке $A(5,3,4)$.

3.136. Показать, что прямые

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{1},\quad \frac{x-3}{8}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-1}{1}.$$

пересекаются, и найти уравнение биссектрисы тупого угла между ними.

3.137. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(5,1,1)$ перпендикулярно к вектору $\boldsymbol{n}(1,2,2)$ и пересекающей прямую

$$\begin{cases}3x+5y+5z-27=0,\\ x-5y+5z-9=0.\end{cases}$$

3.138. Доказать, что прямые $\frac{x-10}{3}=\frac{\mathrm{y}-4}{2}=\frac{z+1}{-2}$, $x=1+2t$, $y=-2-3t$, $z=5-4t$ лежат в одной плоскости, и составить уравнение этой плоскости.

3.139. Луч света исходит из точки $A(-1,2,0)$ и, отразившись от плоскости $x-y-z-6=0$, попадает в точку $B(1,-1,-1)$. Найти уравнения прямых, содержащих эти лучи.

3.140. Даны вершина $A(1,3,1)$ куба и три смежные с ней вершины $B(3,5,2)$, $C(2,1,3)$, $K(-1,4,3)$. Какая фигура получится в пересечении этого куба и плоскости $5x-y-13=0$?

3.141. К непересекающимся диагоналям двух граней куба, имеющих общее ребро, проведен общий перпендикуляр. В каком отношении основание этого перпендикуляра делит содержащую его диагональ?

3.142. Грани треугольной пирамиды заданы уравнениями $x+2y-2z+3=0$, $4x-4y+7z-9=0$, $8x+4y+z-3=0$, $y-z=0$. Составить уравнение прямой, лежащей во внутреннем трехгранном угле между первыми тремя гранями, все точки которой равноудалены от этих трех граней.

3.143. Составить уравнения плоскостей, равноудаленных от четырех точек: $A(1,-1,3)$, $B(3,\ 3,\ 5)$, $C(1,\ 7,\ 3)$, $K(5,\ 1,\ 5)$.

3.144. Определить, находится ли точка $K(3,\ 1,\ 2)$ внутри треугольника ABC, где $A(4,\ 3,\ 1)$, $B(1,\ 3,\ 4)$, $C(4,\ -5,\ 1)$.

3.145. Даны плоскости Π_1: $2x+3y+4z+6=0$ и Π_2: $2x-y+z-6=0$. Найти плоскость Π_3 такую, чтобы плоскость Π_2 делила пополам тупой двугранный угол между плоскостями Π_1 и Π_3.

3.146. Представить прямую $x=3+8t$, $y=-6+t$, $z=2+t$ как пересечение плоскостей, параллельных осям Oy и Oz.

3.147. Найти точку, которая является серединой трех отрезков, соединяющих точки каждой из пар следующих трех прямых:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-5}{-1},\quad \frac{x+1}{4}=\frac{y}{6}=\frac{z-2}{3},\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-5}=\frac{z-1}{6}.$$

3.148. На плоскости $x+2y-z-4=0$ найти точку пересечения проекций прямых

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{3},\quad \frac{x+2}{0}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{-4}.$$

3.149. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(5, 1, 1)$ перпендикулярно к вектору $\boldsymbol{a}(1, 2, 2)$ и пересекающей прямую

$$\begin{cases} 3x+5y+5z-27=0, \\ x-5y+5z-9=0. \end{cases}$$

3.150. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3, -1, 2)$ и пересекающей две прямые:

$$\begin{cases} x-2z+1=0, \\ y+3z-4=0, \end{cases} \quad \begin{cases} 4x+y-1=0, \\ x-z-2=0. \end{cases}$$

3.151. Найти уравнение прямой, пересекающей три прямые:

$$\frac{x}{-1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z}{-1},\quad \frac{x-5}{3}=\frac{y-7}{4}=\frac{z+5}{-7},\quad \frac{x-7}{3}=\frac{y-7}{2}=\frac{z+1}{-5}$$

и параллельной плоскости $x+2y-3z+1=0$.

3.152. Найти уравнения прямых, проходящих через точку $A(1, -1, 3)$ параллельно плоскости $x+y+5z=0$ на расстоянии 1 от прямой $x=2t$, $y=-5t$, $z=6t$.

3.153. Доказать, что множество середин отрезков, соединяющих точки на двух скрещивающихся прямых, есть плоскость.

3.154. Вывести формулу для симметрии пространства относительно точки, если эта симметрия переводит точку $A(0, -2, -2)$ в точку $B(2, 4, 6)$.

3.155. Симметрия пространства относительно плоскости переводит точку $A(1, 4, 2)$ в точку $B(-1, -2, 4)$. Вывести соответствующую формулу.

3.156. Симметрия пространства относительно прямой переводит точки $A(0, 1, 2)$ и $B(-4, -2, 11)$ в точки $C(2, 3, 10)$ и $K(2, -6, 5)$ соответственно. Вывести формулу для этой симметрии.

3.157. Найти уравнение прямой, относительно которой симметричны следующие две прямые:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{0},\quad \frac{x-10}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{-1}.$$

3.158. Даны точки $A(5,\ 11,\ 4)$, $B(-10, 23, -2)$ и прямая

$$\frac{x-10}{-1}=\frac{y-13}{2}=\frac{z-9}{2}.$$

Среди точек этой прямой найти такую точку C, чтобы площадь треугольника ABC была наименьшей.

3.159. Даны вершины $A(-5,5,12)$, $B(2,3,11)$, $C(1,3,8)$, $D(0,0,-1)$ треугольной пирамиды. Из вершины A проведена прямая

$$\frac{x+5}{-2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-12}{2}.$$

Пересекает ли эта прямая основание BCD пирамиды?

3.160. Найти уравнения прямых, проходящих через точку $A(6,-3,2)$ и содержащихся в поверхности

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1.$$

Глава 4

ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

К основным линиям второго порядка относятся эллипс, гипербола, парабола. *Эллипсом* называется множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой линии, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (бóльшая, чем расстояние между фокусами).

Полусумму расстояний от точки эллипса до его фокусов обычно обозначают через a, половину расстояния между фокусами – через c. Если ДПСК на плоскости выбрана так, что фокусы эллипса располагаются на оси Ox симметрично относительно начала координат, то в этой ДПСК эллипс задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{4.1}$$

называемым *каноническим уравнением эллипса*, где $b=\sqrt{a^2-c^2}$ (рис. 4.1).

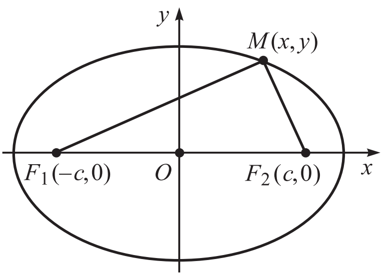


Рис. 4.1

При указанном выборе ДПСК эллипс симметричен относительно осей координат и начала координат. Оси симметрии эллипса называют его *осями*, а центр симметрии – его *центром*. Вместе с тем часто осями эллипса называют числа $2a$ и $2b$, а числа a и b – *большой* и *малой полуосью* соответственно.

Если $a=b$, то уравнение (4.1) определяет окружность. Число $\varepsilon=c/a$ $(0<\varepsilon<1)$ называется *эксцентриситетом эллипса*. В случае окружности $\varepsilon=0$. Для произвольной точки $M(x, y)$ вводится понятие *фокальных радиусов* $r_1=\rho(F_1, M)$, $r_2=\rho(F_2, M)$. Фокальные радиусы точки $M(x, y)$ на эллипсе вычисляются по формулам:

$$r_1=a+\varepsilon x,\ \ r_2=a-\varepsilon x.$$

Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами эллипса*. Произвольная точка M плоскости принадлежит эллипсу тогда и только тогда, когда

$$\frac{r}{d} = \varepsilon, \tag{4.2}$$

где r – фокальный радиус точки M; d – расстояние от этой точки до односторонней с фокусом директрисы.

Уравнение эллипса (4.1) можно записать также в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = b\sin\varphi. \end{cases}$$

Гиперболой называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (не равная нулю и меньшая, чем расстояние между фокусами).

Пусть расстояние между фокусами равно $2c$, а указанный модуль разности расстояний равен $2a$. Выберем ДПСК так же, как и для эллипса. В этой ДПСК уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{4.3}$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

Уравнение (4.3) называется *каноническим уравнением гиперболы*.

При данном выборе ДПСК оси координат являются *осями гиперболы*, а начало координат – ее центром симметрии (*центром гиперболы*). Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный, как указано на рис. 4.2, называется *основным прямоугольником гиперболы*. Числа $2a$ и $2b$ – оси гиперболы, а числа a и b – ее *полуоси*. Прямые, являющиеся продолжением диагоналей основного прямоугольника, образуют асимптоты гиперболы

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Число $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$ называется *эксцентриситетом гиперболы*. Фокальные радиусы точек правой ветви гиперболы находят по формулам:

$$r_1 = \varepsilon x + a, \quad r_2 = \varepsilon x - a, \tag{4.4}$$

а фокальные радиусы точек левой ветви – по формулам:

$$r_1 = -(\varepsilon x + a), \quad r_2 = -(\varepsilon x - a). \tag{4.5}$$

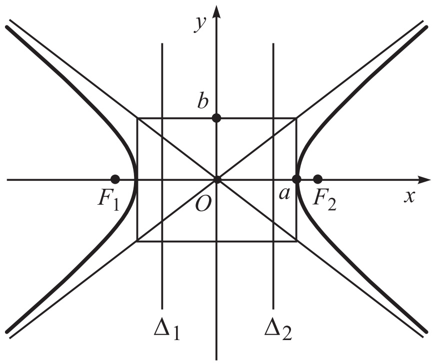


Рис. 4.2

Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами гиперболы*. Как и в случае эллипса, точки гиперболы характеризуются соотношением (4.2).

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки F (*фокуса*) и данной прямой Δ (*директрисы*), $F \notin \Delta$. Из определения следует, что точки параболы так же, как точки эллипса и гиперболы, характеризуются соотношением (4.2) с учетом того, что *эксцентриситет* параболы ε равен единице.

Для вывода канонического уравнения параболы начало координат выбирают в середине отрезка $[D, F]$ (*вершине параболы*), представляющего собой перпендикуляр, проведенный из фокуса на директрису, а оси координат направлены так, как указано на рис. 4.3.

Пусть $p = |\overline{DF}|$ – фокальный параметр параболы. Тогда *каноническое уравнение параболы* имеет вид

$$y^2 = 2px.$$

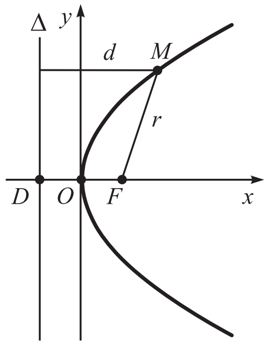


Рис. 4.3

Для построения полярного уравнения эллипса, гиперболы и параболы поместим полюс в один из фокусов, а полярную ось проведем перпендикулярно к директрисе в сторону, противоположную ей. Тогда уравнение

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

является уравнением эллипса, параболы и ветви гиперболы, внутри которой расположен полюс, причем ε – эксцентриситет линии, p – величина, называемая *фокальным параметром*, равная b^2/a для эллипса и гиперболы и совпадающая с фокальным параметром p для параболы. Вторая ветвь гиперболы удовлетворяет уравнению

$$\rho = \frac{-p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Пусть $M(x_0, y_0)$ – точка эллипса, гиперболы или параболы. Тогда уравнение касательной, проходящей через точку M к каждой из этих фигур, можно записать соответственно в виде:

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1, \quad \frac{x_0}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y = 1, \quad yy_0 = p(x + x_0). \tag{4.6}$$

Эллипс, гипербола и парабола являются примерами *линий второго порядка на плоскости*, т.е. линий, задаваемых уравнениями вида

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{4.7}$$

где A, B, C, D, E, F – действительные числа, причем $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Уравнение (4.7) можно значительно упростить, перейдя к другой ДПСК. Если совершить поворот ДПСК на угол φ, найденный из уравнения $\operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{2B}{A - C}$, то линия (4.7) будет задаваться в новой ДПСК уравнением без произведения xy. С помощью параллельного переноса ДПСК в уравнении (4.7) можно избавиться от первой степени x или y при наличии второй, затем от свободного члена, если останется x или y. В итоге уравнение (4.7) будет приведено к одному из следующих *канонических уравнений*:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (эллипс);

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (гипербола);

$y^2 = 2px$ (парабола);

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ (мнимый эллипс);

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ (пара мнимых пересекающихся прямых);

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ (пара пересекающихся прямых);

$x^2-a^2=0$ (пара параллельных прямых);

$x^2+a^2=0$ (пара мнимых параллельных прямых);

$x^2=0$ (пара совпадающих прямых).

Пусть теперь задана ДПСК в пространстве. Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+a_{33}z^2+2a_{23}yz+$$
$$+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0,$$

где хотя бы один из коэффициентов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ не равен нулю, называется *поверхностью второго порядка*.

Перейдя к другой ДПСК, это уравнение можно привести к одному из семнадцати канонических уравнений:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (эллипсоид);

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ (мнимый эллипсоид);

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (однополостный гиперболоид);

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (двуполостный гиперболоид);

$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\ p,q>0$ (эллиптический параболоид);

$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,\ p,q>0$ (гиперболический параболоид);

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (эллиптический цилиндр);

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ (мнимый эллиптический цилиндр);

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (гиперболический цилиндр);

$x^2=2py,\ p>0$ (параболический цилиндр);

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (конус);

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ (мнимый конус);

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ (пара пересекающихся плоскостей);

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ (пара мнимых пересекающихся плоскостей);

$\frac{x^2}{a^2}=1$ (пара параллельных плоскостей);

$x^2+a^2=0$ (пара мнимых параллельных плоскостей);

$x^2=0$ (пара совпадающих плоскостей).

В некоторых случаях определить вид поверхности второго порядка можно, приведя ее уравнения к каноническому виду с помощью переноса начала координат, не изменяя направлений координатных осей. Соответствующие преобразования координат имеют вид:

$$\begin{cases} x=x_1+a, \\ y=y_1+b, \\ z=z_1+c. \end{cases}$$

Здесь (x, y, z) – координаты точки в старой системе координат; (x_1, y_1, z_1) – координаты той же точки в новой системе координат; (a, b, c) – координаты нового начала координат в старой системе координат. Можно использовать также поворот вокруг какой-либо координатной оси. Например, преобразование координат

$$\begin{cases} x=x_1\cos\beta-y_1\sin\beta, \\ y=x_1\sin\beta+y_1\cos\beta, \\ z=z_1 \end{cases}$$

соответствует повороту системы координат вокруг оси Oz на угол β. Уравнение поверхности в новой системе координат получается подстановкой в исходное уравнение выражений старых координат через новые.

Для того чтобы наглядно представить форму поверхности, можно использовать *метод сечений*. Пусть $F(x, y, z) = 0$ – уравнение поверхности. Тогда уравнение проекции линии пересечения этой поверхности плоскостью $z = h$ на плоскость Oxy имеет вид $F(x, y, h) = 0$, так как точка $M_1(x, y, 0)$ есть точка на проекции линии пересечения тогда и только тогда, когда точка $M_2(x, y, h)$ находится на данной поверхности, т.е. $F(x, y, h) = 0$. Изменяя h, получаем так называемую *карту поверхности*, состоящую из линий уровня для некоторого набора параметров h, т.е. проекций на плоскость Oxy линий пересечений поверхности и плоскостей $z = h$.

Среди поверхностей второго порядка встречаются цилиндрические, конические поверхности и поверхности вращения. Их задают определенным образом, исходя из некоторых линий. Рассмотрим вопрос, как найти уравнение такой поверхности, если исходная линия задана.

Пусть в ДПСК $Oxyz$ задано уравнение линии L как пересечения двух поверхностей:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Цилиндрической поверхностью П с *направляющей* L и *образующими*, параллельными вектору $\boldsymbol{a}(l, m, n)$, называется объединение всех прямых (образующих поверхности П), которые пересекают линию L и параллельны вектору $\boldsymbol{a}$. *Конической поверхностью* K с *вершиной* в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ называется объединение всех прямых (образующих поверхности K), которые содержат точку M и пересекают линию L (направляющую поверхности K). Для получения уравнения цилиндрической (конической) поверхности П (соответственно K) составляем уравнение произвольной образующей:

$$\frac{X - x}{l} = \frac{Y - y}{m} = \frac{Z - z}{n} \tag{4.9}$$

в случае поверхности П и

$$\frac{X - x_0}{x - x_0} = \frac{Y - y_0}{y - y_0} = \frac{Z - z_0}{z - z_0} \tag{4.10}$$

в случае поверхности K. Здесь X, Y, Z – координаты произвольной точки на образующей, проходящей через точку (x, y, z) на направляющей. Составляя вместе уравнения (4.8) и пропорции (4.9) или (4.10) и исключая x, y, z, получаем в первом случае уравнение цилиндрической поверхности П, во втором – уравнение конической поверхности K (т.е. находим такую функцию $F(X, Y, Z)$, что для любых $X, Y, Z \in \mathbb{R}$ равенство $F(X, Y, Z) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда для некоторых $x, y, z \in \mathbb{R}$ выполняются равенства (4.8) совместно с пропорциями (4.9) или (4.10)).

Поверхностью вращения линии L вокруг прямой Δ называется объединение окружностей с центрами на прямой Δ, которые лежат в плоскостях, перпендикулярных к прямой Δ, и пересекают линию L. Если $f(y, z) = 0$ − уравнение линии L (*направляющей поверхности*) в плоскости Oyz, то для вывода уравнения поверхности вращения линии L вокруг оси Oz в уравнении $f(y, z) = 0$ заменяем переменную y на $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ и получаем уравнение искомой поверхности вращения:

$$f\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0.$$

В самом деле, если точка $A(0, y, z)$ находится на линии L, то и всякая точка $M(x_1, y_1, z)$, где $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = |y|$, принадлежит поверхности вращения; верно и обратное.

Пример 1. Точка $A(2, -1)$ лежит на эллипсе, точка $F(1, 0)$ является его фокусом, соответствующая директриса Δ задана уравнением $2x - y - 10 = 0$. Составить уравнение этого эллипса.

Р е ш е н и е. Расстояние r от точки A до фокуса F равно

$$\sqrt{(2-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

а расстояние d от точки A до директрисы равно

$$\frac{1}{\sqrt{5}}|2 \cdot 2 - (-1) - 10| = \sqrt{5}.$$

Согласно свойству (4.2) эллипса отношение таких расстояний одно и то же для всех точек эллипса, поэтому для произвольной его точки $M(x, y)$ имеем:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{r}{d} = \frac{\rho(M, F)}{\rho(M, \Delta)} = \frac{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{\frac{1}{\sqrt{5}}|2x - y - 10|}.$$

Возводя в квадрат крайние члены этой цепочки равенств и делая очевидные преобразования, приходим к искомому уравнению эллипса:

$$25((x-1)^2 + y^2) = 2(2x - y - 10)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 - 50x + 25 + 25y^2 = 8x^2 + 2y^2 + 200 - 8xy - 80x + 40y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 17x^2 + 8xy + 23y^2 + 30x - 40y - 175 = 0.$$

Пример 2. Определить точки гиперболы $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$, расстояние от которых до правого фокуса равно 9/2.

Р е ш е н и е. Согласно формулам (4.4) и (4.5) правые фокальные радиусы r_2 точек правой (левой) ветви гиперболы равны $\varepsilon x - a$ (соответственно $a-\varepsilon x$), где x – абсциссы этих точек. В нашем случае из канонического уравнения гиперболы выводим: $a=8,\ b=6,\ c=\sqrt{a^2+b^2}=10,\ \varepsilon=10/8=5/4$. Так как $a>4$ и $a>5$, то на левой ветви гиперболы точек с требуемым свойством нет. Искомые точки находятся на правой ветви. Система уравнений для определения координат x, y этих точек имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1, \quad \frac{5}{4}x-8=\frac{9}{2}.$$

Решая эту систему, получаем $x=10$. Тогда $y^2=36(10^2/64-1)=36^2/64$ и $y=$ $=\pm 9/2$. Таким образом, $A(10,\ 9/2)$ и $B(10,-9/2)$ – искомые точки.

Пример 3. На параболе $y^2=64x$ найти точку M_0, ближайшую к прямой $4x+3y+44=0$, и вычислить расстояние от точки M_0 до этой прямой.

Р е ш е н и е. Данные прямая и парабола не имеют общих точек, для доказательства чего достаточно составить систему уравнений этих линий и убедиться в том, что она не имеет решений. Значит, искомая точка $M_0(x_0, y_0)$ параболы будет точкой касания некоторой прямой, параллельной данной прямой $4x+3y+44=0$. Согласно формуле (4.6) уравнение касательной в этой точке имеет вид $yy_0=32(x+x_0)$. Учитывая параллельность касательной и данной прямой, имеем $\frac{32}{4}=-\frac{y_0}{3}$, откуда $y_0=-24$, $x_0=\frac{y_0^2}{64}=\frac{24^2}{64}=9$. Получили искомую точку $M_0(9,-24)$. Остается определить расстояние d от точки M_0 до прямой $4x+3y+44=0$:

$$d=\frac{|4\cdot 9+3(-24)+44|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{8}{5}.$$

Пример 4. Выяснить, какая фигура задается уравнением $x^2-12xy-4y^2+$ $+12x+8y+5=0$, и изобразить ее на чертеже, определив расположение относительно исходной ДПСК.

Р е ш е н и е. Сначала совершим поворот ДПСК на угол φ, найденный из условия $\operatorname{tg}2\varphi=\frac{2B}{A-C}=-\frac{12}{5}$. Для этого находим $\operatorname{tg}\varphi$ из уравнения

$$\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}=-\frac{12}{5}\Rightarrow 6^2\operatorname{tg}\varphi-5\operatorname{tg}\varphi-6=0\Rightarrow \operatorname{tg}\varphi=\frac{5\pm 13}{12}.$$

Положим $\operatorname{tg}\varphi=3/2$. Тогда $\cos\varphi=2/\sqrt{13}$, $\sin\varphi=3/\sqrt{13}$, поэтому

$$x=\frac{2}{\sqrt{13}}x'-\frac{3}{\sqrt{13}}y', \quad y=\frac{3}{\sqrt{13}}x'+\frac{2}{\sqrt{13}}y'. \tag{4.11}$$

В новой ДПСК исходное уравнение имеет вид

$$-8x'^2+5y'^2+\frac{48}{\sqrt{13}}x'-\frac{20}{\sqrt{13}}y'+5=0.$$

Выделяя полные квадраты, приводим его к виду

$$-8\left((x')^2-\frac{6}{\sqrt{13}}x'+\frac{9}{13}\right)+\frac{72}{13}+5\left((y')^2-\frac{4}{\sqrt{13}}y'+\frac{4}{13}\right)-\frac{20}{13}+5=0,$$

а затем к виду

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2\left(x'-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2\left(y'-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2=1.$$

После параллельного переноса системы координат

$$x'=x''+\frac{3}{\sqrt{13}},\qquad y'=y''+\frac{2}{\sqrt{13}} \tag{4.12}$$

приходим к каноническому уравнению гиперболы

$$\frac{(x'')^2}{\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2}-\frac{(y'')^2}{\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2}=1 \tag{4.13}$$

в системе координат $O''x''y''$. Координаты x, y нового начала координат O'' (центра симметрии гиперболы) в ДПСК Oxy ищем из условия $x''=0=y''$, откуда согласно формулам (4.12) $x'=\frac{3}{\sqrt{13}}$, $y=\frac{2}{\sqrt{13}}$. Подставляя эти значения в формулы (4.11), получаем:

$$x=\frac{2}{\sqrt{13}}\frac{3}{\sqrt{13}}-\frac{3}{\sqrt{13}}\frac{2}{\sqrt{13}}=0,$$

$$y=\frac{3}{\sqrt{13}}\frac{3}{\sqrt{13}}+\frac{2}{\sqrt{13}}\frac{2}{\sqrt{13}}=1.$$

Таким образом, $O''(0,\,1)$ – центр гиперболы. Далее из формул (4.11) следует, что оси $O''x''$ и $O''y''$ имеют направляющие векторы $\boldsymbol{e}_1(2,3)$ и $\boldsymbol{e}_2(-3,2)$ соответственно.

Теперь можем изобразить положение ДПСК $O''x''y''$ относительно исходной ДПСК Oxy. Гиперболу изображаем в новой системе координат исходя из канонического уравнения (4.13) (рис. 4.4).

Для уточнения положения гиперболы относительно ДПСК Oxy ищем координаты y точек пересечения оси Oy с этой гиперболой, подставляя $x=0$ в исходное уравнение: $-4y^2+8y+5=0$, $-4(y^2-2y+1)+9=0$, $y=1\pm3/2$, $y_1=-1/2$, $y_2=5/2$. Значит, $M_1(0,\,-1/2)$, $M_2(0,\,5/2)$ – точки пересечения гиперболы и оси ординат Oy.

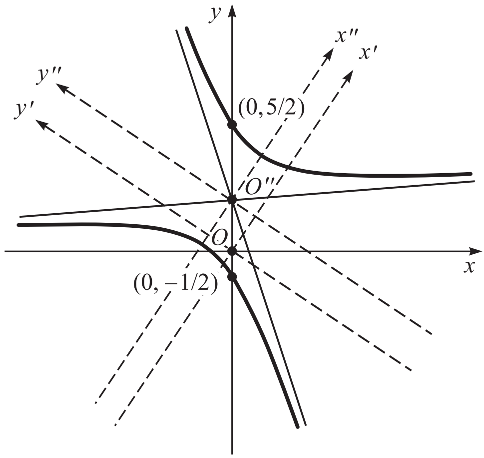


Рис. 4.4

Пример 5. Найти вид и расположение поверхности

$$z = xy \tag{4.14}$$

относительно исходной ДПСК. Исследовать форму поверхности методом сечений.

Решение. Сначала применим преобразование поворота вокруг оси Oz на угол β:

$$\begin{cases} x = x_1\cos\beta - y_1\sin\beta, \\ y = x_1\sin\beta + y_1\cos\beta, \\ z = z_1, \end{cases} \tag{4.15}$$

где угол β подберем так, чтобы коэффициент при x_1y_1 в новом уравнении был бы равен нулю, тогда $2\beta = (0-0)/1 = 0$. Отсюда $\beta = \pi/4$, и тогда преобразование переменных (4.15) принимает следующий вид:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1),$$

$$z = z_1.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (4.14), получаем уравнение поверхности в новой ДПСК $Ox_1y_1z_1$: $2z_1 = x_1^2 - y_1^2$. Мы пришли к каноническому уравнению гиперболического параболоида. Исследуем данную поверхность методом сечений. Для этого вместо переменной z в уравнение (4.14) будем подставлять постоянную h и тем самым получать уравнения проекций линий пересечения данной поверхности и плоскостей $z = h$ на плоскость Oxy. Если $h = 0$, то получим уравнение двух пересекающихся прямых – осей координат Ox и Oy: $xy = 0$.

Если $h \neq 0$, то получим уравнения гипербол с асимптотами – осями координат: $y = h/x$. Все точки этих гипербол находятся в I и III координатных четвертях при $h > 0$ и во II и IV четвертях при $h < 0$. Карта поверхности изображена на рис. 4.5.

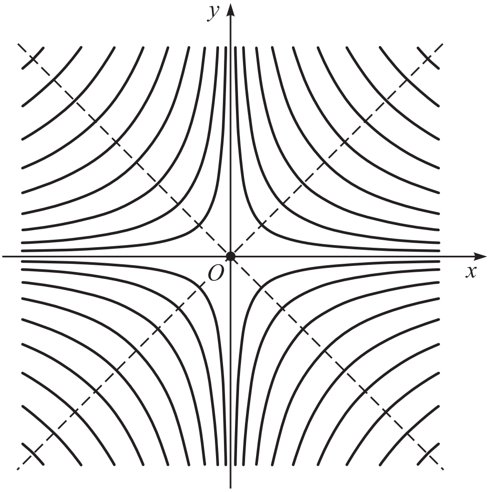


Рис. 4.5

Пример 6. Изобразить тело, ограниченное поверхностью, которая рассмотрена в примере 5, и плоскостями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

Решение. Следует изобразить тело, ограниченное гранями куба с длиной ребра, равной единице, и параболоидом (4.14). Для этого сначала изобразим проекции линий пересечений граней куба с параболоидом. В результате получим шесть фигур, из которых и из части параболоида будет складываться граница искомого тела:

1) $x = 0$. Подставляем $x = 0$ в уравнение (4.14) и получаем прямую $z = 0$. Следовательно, квадрат $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$ пересекается с параболоидом по границе $z = 0$;

2) $x = 1$. Подставляем в уравнение (4.14) $x = 1$ и получаем прямую $z = y$. Эта прямая пересекается с границей квадрата $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$ в точках $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 1)$. Проекции на плоскость Oyz линий пересечений граней куба $x = 0$, $x = 1$ с параболоидом изображены на рис. 4.6;

3) $y = 0$, $y = 1$. Так как переменные x и y в условии примера равноправны, то проекции линий пересечений граней $y = 0$, $y = 1$ куба с параболоидом имеют такой же вид, как и в первых двух случаях. Соответствующий рисунок получается из рис. 4.6 при замене x на y, y на x и точки $A(1, 0, 0)$ на точку $C(0, 1, 0)$;

4) $z = 0$, $z = 1$. Здесь можно использовать карту поверхности, полученную в примере 5 (см. рис. 4.5). Проекции на плоскость Oxy линий пересечений граней $z = 0$, $z = 1$ куба и параболоида изображены на рис. 4.7.

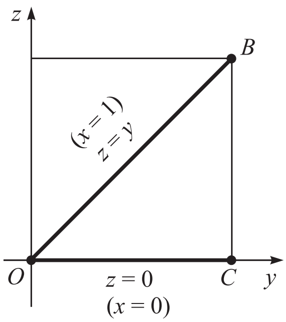


Рис. 4.6

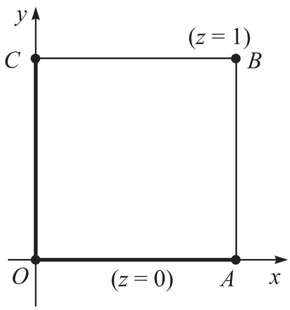


Рис. 4.7

Отождествляя соответствующие точки границ граней куба и части поверхности $z = xy$ и используя карту поверхности, полученную в примере 5, изображаем требуемое тело (рис. 4.8).

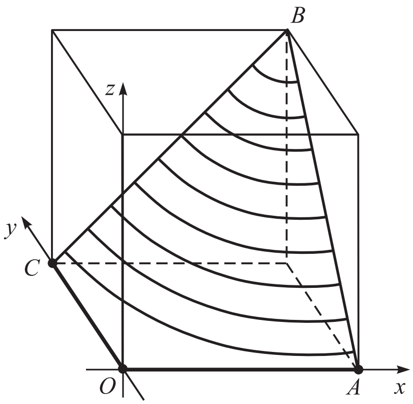


Рис. 4.8

Пример 7. Составить уравнение цилиндрической поверхности, направляющей которой служит окружность

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ z = 0, \end{cases} \tag{4.16}$$

а образующие параллельны вектору $\boldsymbol{a}(5,\ 3,\ 1)$.

Решение. Составляем уравнения образующих:

$$\frac{X - x}{5} = \frac{Y - y}{3} = \frac{Z - z}{1}. \tag{4.17}$$

Из уравнений (4.16) и (4.17) исключаем x, y, z, считая X, Y, Z переменными: $3Z = Y - y$, $5Z = X - x$, $y = Y - 3Z$, $x = X - 5Z$, $(X - 5Z)^2 + (Y - 3Z)^2 = 10$. Итак, искомое уравнение цилиндрической поверхности имеет следующий вид:

$$X^2 + Y^2 + 34Z^2 - 10XZ - 6YZ - 10 = 0.$$

Пример 8. Составить уравнение конической поверхности с направляющей – окружностью (4.16) и вершиной в точке $M(1,1,1)$.

Р е ш е н и е. Составим сначала уравнение образующей, проходящей через произвольную (но фиксированную) точку (x, y, z) на направляющей и через точку M:

$$\frac{X-1}{x-1}=\frac{Y-1}{y-1}=\frac{Z-1}{z-1}.$$

Исключая x, y, z из полученного уравнения образующей и уравнения (4.16), получаем уравнение искомой конической поверхности:

$$z=0 \Rightarrow x-1=\frac{X-1}{-Z+1}, \quad y-1=\frac{Y-1}{-Z+1} \Rightarrow \left(1+\frac{X-1}{1-Z}\right)^2+\left(1+\frac{Y-1}{1-Z}\right)^2=10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (X-Z)^2+(Y-Z)^2=10(Z-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X^2+Y^2-8Z^2-2XZ-2YZ+20Z-10=0.$$

Пример 9. Составить уравнение поверхности вращения параболы

$$\begin{cases} y^2=2x, \\ z=0 \end{cases} \tag{4.18}$$

вокруг оси Oy.

Р е ш е н и е. В первое из уравнений (4.18) вместо x подставим выражение $\pm\sqrt{x^2+z^2}$, возведем обе части полученного равенства в квадрат и будем иметь искомое уравнение поверхности вращения: $y^4=4x^2+4z^2 \Leftrightarrow 4x^2-y^4+4z^2=0$.

4.1. Составить уравнения окружностей для следующих случаев:

1) центром окружности является начало координат, а ее радиус $r=4$;

2) центром окружности является точка $A(3,-2)$, а ее радиус $r=5$;

3) окружность проходит через точку $A(3, 7)$, а ее центр совпадает с точкой $B(0, 3)$;

4) точки $A(4, 3)$ и $B(0, 7)$ являются концами одного диаметра;

5) окружность проходит через точки $A_1(4, 4)$, $A_2(-2, 4)$, $A_3(-3,-3)$;

6) окружность касается прямой $5x-12y+17=0$, а центром окружности является точка $A(2,-1)$;

7) окружность касается двух параллельных прямых $2x+y-15=0$, $2x+y+5=0$ и проходит через точку $A(1, 3)$.

4.2. Составить уравнение эллипса для следующих случаев:

1) известны полуоси эллипса $a=9$, $b=5$;

2) малая ось равна 12, а расстояние между фокусами $2c=5$;

3) известны эксцентриситет $\varepsilon=0,6$, расстояние между фокусами $2c=12$;

4) известна большая ось $2a = 16$, расстояние между директрисами равно 32;

5) расстояние между директрисами равно 32, а эксцентриситет $\varepsilon = 0,75$;

6) большая ось равна 5, а расстояние между фокусами $2c = 4$.

4.3. Дан эллипс $16x^2 + 25y^2 = 400$. Найти его полуоси, фокусы, уравнения директрис и эксцентриситет.

4.4. Определить точки эллипса $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, расстояние от которых до левого фокуса равно 7.

4.5. Определить, как расположены точки $A(4, 1/5)$, $B(1, 1)$, $C(-2, -5)$, $D(-1, -2)$ относительно эллипса $16x^2 + 25y^2 = 65$.

4.6. Показать, что каждое из данных уравнений определяет эллипс, найти его центр симметрии и полуоси:

1) $x^2 + 4y^2 + 2x + 16y - 5 = 0$;

2) $5x^2 + 2y^2 - 50x - 8y - 27 = 0$.

4.7. Найти точки пересечения прямой и эллипса в следующих случаях:

1) $x + 2y - 6 = 0$, $x^2 + 4y^2 + 2x - 24 = 0$;

2) $4x - 3y + 40 = 0$, $9x^2 + 16y^2 = 144$.

4.8. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями, и изобразить их на чертеже:

1) $y = \dfrac{5}{4}\sqrt{16 - x^2}$; 2) $y = -\dfrac{5}{4}\sqrt{16 - x^2}$;

3) $x = -\dfrac{2}{3}\sqrt{7 - y^2}$; 4) $y = \dfrac{1}{9}\sqrt{6 - x^2}$.

4.9. Составить уравнения касательных к эллипсу $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$:

1) параллельных прямой $3x + 2y - 1 = 0$;

2) перпендикулярных к этой прямой.

4.10. Составить уравнение гиперболы для следующих случаев:

1) известны ее оси $2a = 12$, $2b = 10$;

2) расстояние между фокусами $2c = 12$, эксцентриситет $\varepsilon = 1,5$;

3) расстояние между фокусами $2c = 20$, ось $2b = 16$;

4) даны уравнения асимптот $y = \pm\dfrac{5}{3}x$ и расстояние между фокусами $2c = 2\sqrt{34}$;

5) расстояние между директрисами равно 32, ось $2b = 30$;

6) расстояние между вершинами 20 и уравнение асимптоты $y = 2,4x$.

4.11. Для каждой из следующих гипербол найти полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис:

1) $16x^2-9y^2=144$; 2) $x^2-\frac{y^2}{16}=1$; 3) $64x^2-9y^2=1$;

4) $25x^2-16y^2=1$; 5) $x^2-y^2=1$; 6) $4x^2-y^2=16$.

4.12. Установить, какие линии определяются уравнениями:

1) $y=\frac{3}{2}\sqrt{x^2-9}$; 2) $y=-4\sqrt{x^2+1}$;

3) $x=-\frac{3}{2}\sqrt{y^2+9}$; 4) $y=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+16}$;

5) $y=1+\frac{2}{3}\sqrt{x^2+4x+9}$; 6) $x=10-3\sqrt{y^2+4y+16}$.

4.13. Показать, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, найти ее центр симметрии и полуоси:

1) $9x^2-4y^2-36x-16y-16=0$;

2) $3x^2-9y^2-30x+30y+15=0$.

4.14. Найти на гиперболе $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ точки с абсциссой $x=6$ и фокальные радиусы этих точек.

4.15. Доказать, что произведения расстояний от любой точки гиперболы $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ до двух ее асимптот есть величина постоянная, равная $\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)}$.

4.16. Составить уравнение гиперболы, вершины которой совпадают с вершинами эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, при условии, что ее директрисы проходят через фокусы этого эллипса.

4.17. На гиперболе $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ найти точки, фокальные радиусы которых равны 5.

4.18. Найти точки пересечения гиперболы $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ и прямой $x-2y+2=0$.

4.19. Составить уравнение гиперболы, зная ее фокусы $F_1(-2,2)$ и $F_2(2,-2)$ и то, что ее асимптотами являются оси координат.

4.20. Составить уравнение гиперболы, зная один из ее фокусов $F(-1,2)$ и асимптоты $2x-y+3=0$, $x-2y+6=0$.

4.21. Составить уравнение параболы с вершиной в начале ДПСК, симметричной относительно оси Ox, для следующих случаев:

1) парабола проходит через точку $(2, 2\sqrt{2})$;

2) расстояние от фокуса до директрисы равно 4;

3) фокус параболы находится в точке $F(-2, 0)$;

4) расстояние между фокусом и вершиной равно 3.

4.22. Определить, какие линии задаются уравнениями:

1) $y = 3\sqrt{x}$;   2) $y^2 + 5x - 6y + 4 = 0$;

3) $y = \sqrt{-2x}$;   4) $4x + 3y^2 - 6y - 9 = 0$;

5) $x = 5\sqrt{y}$;   6) $9x^2 - 18x + 3y + 12 = 0$;

7) $x = -5\sqrt{-y}$.

4.23. Даны вершина параболы $A(2, 4)$ и уравнение директрисы $x - y = 0$. Составить уравнение этой параболы.

4.24. Найти условие, при котором прямая $y = kx + b$ касается параболы $y^2 = 2px$.

4.25. Составить уравнения касательных к параболе $x^2 = 16y$ для следующих случаев:

1) касательная проходит через точку $A(-4, 1)$;

2) касательная проходит через точку $B(2, -1)$;

3) касательная параллельна прямой $x - 2y + 1 = 0$;

4) касательная перпендикулярна к прямой $x - 2y + 2 = 0$.

4.26. Определить точки пересечения параболы $x^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ и прямой $x + y - 2 = 0$.

4.27. Вычислить фокальный радиус точки параболы $y^2 = 40x$, если абсцисса этой точки равна 14.

4.28. Установить, какие фигуры заданы уравнениями в полярных координатах:

1) $\rho = \dfrac{16}{3 - 7\cos\varphi}$;   2) $\rho = \dfrac{5}{7 - 2\cos\varphi}$;

3) $\rho = \dfrac{4}{3 - 3\cos\varphi}$;   4) $\rho = \dfrac{5}{3 - 4\cos\varphi}$.

4.29. Вычислить полуоси эллипса $\rho = \dfrac{25}{13 - 12\cos\varphi}$.

4.30. Составить полярное уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ при условии, что направление полярной оси совпадает с направлением оси Ox, а полюс находится:

1) в левом фокусе; 2) правом фокусе; 3) центре эллипса.

4.31. Составить полярные уравнения ветвей гиперболы $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ при условии, что направление полярной оси совпадает с направлением оси Ox, а полюс находится:

1) в левом фокусе; 2) правом фокусе.

4.32. Каждое из следующих уравнений привести к каноническому виду. Изобразить на чертеже соответствующую линию второй степени относительно исходной ДПСК:

1) $5x^2+3y^2+40x-6y+98=0$;

2) $9x^2+4y^2+36x-40y+100=0$;

3) $16x^2-25y^2+32x-100y-84=0$;

4) $5x^2+5y^2+6xy+2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y-30=0$;

5) $x^2+y^2-2xy+12\sqrt{2}y+18=0$;

6) $7x^2+7y^2-50xy+32\sqrt{2}x-32\sqrt{2}y+320=0$;

7) $25x^2+10xy+y^2+7=0$;

8) $x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0$;

9) $4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0$;

10) $8x^2+6xy-24x=0$;

11) $9x^2+24xy+16y^2-400=0$;

12) $5x^2+4xy+8y^2+36=0$;

13) $6xy-8y^2-18=0$;

14) $17x^2+17y^2-30xy-6\sqrt{2}x-6\sqrt{2}y-14=0$;

15) $3x^2+3y^2-10xy-2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y+30=0$;

16) $11x^2-20xy-4y^2-20x-8y+140=0$;

17) $11x^2+24xy+4y^2+42x+64y+51=0$.

4.33. Выяснить расположение поверхности относительно исходной ДПСК:

1) $-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{64}+\dfrac{z^2}{36}=1$;

2) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{9}=-1$;

3) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{8}+1=0$;

4) $-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{16}=0$;

5) $-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=2z$;

6) $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{9}+2z=0$;

7) $\dfrac{z^2}{9}-\dfrac{x^2}{10}+2y=0$;

8) $8z^2-9x^2-72y=0$;

9) $6x^2+6y^2+6z^2-1=0$;

10) $x^2+2y=1$.

4.34. Определить вид поверхности, использовав приведение левой части ее уравнения к сумме квадратов:

1) $4x^2+4y^2+4z^2+4xz-8y-4z+4=0$;

2) $x^2+5y^2+z^2-2xy-6xz+2yz+2x+6y-10z=0$;

3) $x^2+y^2-3z^2-2xy+6xz+6yz+2x+2y-4z=0$;

4) $2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+x-4y+4=0$;

5) $-2x^2+y^2+z^2+4xy+4xz-10yz+x=0$;

6) $4x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz+4x-2=0$;

7) $x^2-8y^2+z^2+8xy-10xz+8yz+2x+8y-10z-1=0$;

8) $x^2+9y^2+4z^2+6xy+4xz+12yz-12z+1=0$;

9) $4xy-2x-4y-6z-3=0$;

10) $2xy+xz+2yz+2x+4y-2z=0$.

4.35. Построить проекцию линии пересечения данной поверхности и данной плоскости на плоскость Oxy:

1) $z^2=xy,\ x+y+z-1=0$;

2) $z=xy,\ x+2y-z=5$;

3) $z=2x^2+4y^2+5,\ x+y=0$;

4) $z=x^2-6y,\ 7x-y+2z=0$;

5) $x^2+2xy-z=0,\ x-5y+z-1=0$.

4.36. Построить проекцию линии пересечения данной поверхности и данной плоскости на плоскость Oyz:

1) $x^2+25y^2-2x-10z=0,\ x+5y+5z=0$;

2) $x^2+2xy+y^2-z^2=0,\ x+y+z+1=0$;

3) $z^2=3x+4y+5,\ x-y+2z+5=0$;

4) $z=x^2+2xy+1,\ 2x-y+2z=0$;

5) $x^2+4y^2+9z+8x-1=0,\ x-y+z=0$;

6) $2xy-z^2-2z=0,\ x-2y+6z+1=0$.

4.37. Построить проекцию линии пересечения двух данных поверхностей на плоскость Oxy:

1) $z=x^2+2xy+y^2+1,\ z^2=x^2+2xy+y^2+1$;

2) $3x^2+6x-8y+6z-7=0,\ 2xy+2x+2z+1=0$.

4.38. Определить, по какой линии плоскость $x+y-z+3=0$ пересекает следующую поверхность:

1) $z=-4y^2-6x+15$;

2) $z=x^2+3y^2+1$;

3) $2xy+15x-30=0$;

4) $x^2+y^2-2z^2-2xy+2z=0$;

5) $4x^2-y^2-2xz-6z+1=0$.

4.39. Показать, что плоскость $x+4=0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}+\frac{z^2}{16}=1$ по эллипсу, и найти его вершины и полуоси.

4.40. Найти параметр p и вершину параболы, получающейся в пересечении плоскости $y-12=0$ и гиперболического параболоида $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{8}=6z$.

4.41. Показать, что плоскость $y=3$ пересекает однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{18}-\frac{z^2}{4}=1$ по гиперболе. Найти полуоси и вершины этой гиперболы.

4.42. Изобразить на плоскости Oxy карты поверхностей, заданных следующими уравнениями:

1) $z=2x^2-4y^2+8y+1$;
2) $z=\sqrt{x^2+3y^2-6y+1}$;
3) $z=\sqrt{x^2+2y^2+2x+4y}$;
4) $z=\sqrt{x^2+2xy+y^2+1}$;
5) $z=\sqrt{4x+3y+5}$;
6) $z=x^2+2xy+y$,
7) $z=1+2y+\frac{y^2}{x}$;
8) $z=\sqrt{3x^2+3y^2+4y-1}$;
9) $z=3x+\sqrt{6x^2-3y^2-4y+3}$;
10) $z=y-\sqrt{y^2-2xy+6}$.

4.43. Определить вид и расположение поверхности, использовав преобразования поворота вокруг координатных осей и переноса начала координат:

1) $z=2x^2+4y^2+8y+6$;

2) $-z^2+2xy+2=0$;

3) $x^2+4y^2-z^2-10x-16y+16=0$;

4) $z^2=-3x-4y+5$;

5) $z=16xy+1$;

6) $x^2+8y^2-4xz=0$;

7) $3x^2+3y^2+6z^2+2xy-144=0$;

8) $z^2-x^2-2xy-y^2-1=0$;

9) $4x^2-8y^2-4x+64y+z=0$;

10) $z=x^2+2xy+y^2-12$;

11) $2xy-10x-10y+10z+12=0$.

4.44. Найти центр симметрии поверхности:

1) $z^2 = xy + 2x + 1$;

2) $3x^2 - 3y^2 + 3z^2 - 6z + 4y + 1 = 0$;

3) $z^2 = x^2 + y^2 + 2xy + 2x$.

4.45. Найти уравнение какой-либо оси симметрии поверхности:

1) $z^2 + 3x + 4y + 5 = 0$;

2) $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 0$;

3) $2xy + z^2 - 2z = 0$.

4.46. Найти уравнение плоскости, относительно которой данная поверхность симметрична:

1) $2x^2 + 2y^2 + 17z^2 - 10xz - 6yz - 50 = 0$;

2) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 3 = 0$;

3) $yx + xz + zy = 0$;

4) $9x^2 - 24xz + 16z^2 + 25y^2 - 20x + 15y = 0$.

4.47. Изобразить фигуру, ограниченную данной поверхностью второго порядка и данными плоскостями:

1) $-z^2 + 2xy + 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$, $y + 1 = 0$, $y - 1 = 0$, $z + 1 = 0$, $z - 1 = 0$;

2) $x^2 + 4y^2 - z^2 - 10x - 16y + 6z + 16 = 0$, $x = 10$, $x = -10$, $y = 10$, $y = -10$, $z = 10$, $z = -10$;

3) $x^2 - 8y^2 + 4zx - 2yz = 0$, $x + 4 = 0$, $x - 4 = 0$, $y + 4 = 0$, $y - 4 = 0$, $z + 4 = 0$, $z - 4 = 0$;

4) $3x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 2xy - 12 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$, $y + 1 = 0$, $y - 1 = 0$, $z + 1 = 0$, $z - 1 = 0$;

5) $6xy - 8y^2 - 11z = 0$, $x + 2 = 0$, $x - 2 = 0$, $y + 2 = 0$, $y - 2 = 0$, $z + 2 = 0$, $z - 2 = 0$;

6) $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$, $y + 1 = 0$, $y - 1 = 0$, $z + 1 = 0$, $z - 1 = 0$;

7) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6z + 4y - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$, $y + 1 = 0$, $y - 1 = 0$, $z + 1 = 0$, $z - 1 = 0$;

8) $2xy + 2x + 2z - 1 = 0$, $x + 10 = 0$, $x - 10 = 0$, $y + 10 = 0$, $y - 10 = 0$, $z + 10 = 0$, $z - 10 = 0$;

9) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy - 6xz + 6y - 6 = 0$, $x + 2 = 0$, $x - 2 = 0$, $y + 2 = 0$, $y - 2 = 0$, $z + 2 = 0$, $z - 2 = 0$;

10) $xy + xz + yz + 2x - 2y - 6 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 3 = 0$, $y + 3 = 0$, $y - 3 = 0$, $z + 3 = 0$, $z - 3 = 0$.

4.48. Составить уравнение цилиндрической поверхности для следующих случаев:

1) образующие параллельны вектору $\boldsymbol{a}(2, 4, -3)$, а направляющая задана уравнениями $x^2+y^2=9$, $z+1=0$;

2) цилиндрическая поверхность – круговой цилиндр – проходит через точку $A(1, -1, 2)$, его осью является прямая

$$\begin{cases} x=3+t, \\ y=-4-2t, \\ z=4+3t; \end{cases}$$

3) образующие параллельны оси Ox, а направляющая задана уравнениями $\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{25}=1$, $x=0$;

4) образующие параллельны вектору $\boldsymbol{a}(2, 1, 2)$, а направляющей служит окружность $x^2+y^2=10$, $z=0$;

5) образующие параллельны вектору $\boldsymbol{a}(2, 1, 2)$, а направляющей служит парабола $y^2=6x$, $z=1$.

4.49. Составить уравнение конической поверхности для следующих случаев:

1) вершина находится в точке $M(1, 1, 1)$, а направляющая задана уравнениями $z^2=x^2+y^2$, $z=2x$;

2) вершина находится в точке $M(0, 1, 0)$, а направляющая задана уравнениями $z^2=x^2+y^2$, $z=x+1$;

3) конус – круговой, а оси координат являются его образующими.

4.50. Составить уравнения поверхностей вращения:

1) параболы $y^2=2x$ вокруг оси Ox;

2) эллипса $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ вокруг оси Oy;

3) гиперболы $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=1$ вокруг оси Ox;

4) гиперболы $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=1$ вокруг оси Oy;

5) окружности $\begin{cases} x^2+y^2-4x+3=0, \\ z=0 \end{cases}$ вокруг оси Oy;

6) гиперболы $\begin{cases} xy=1, \\ z=0 \end{cases}$ вокруг прямой $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{0}$;

7) той же гиперболы вокруг прямой $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$.

Глава 5

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Комплексное число z задается парой действительных чисел и записывается в виде $a+bi$ (*алгебраическая форма записи комплексного числа*), где a – действительное число, называемое *действительной частью комплексного числа* z, b – действительное число, называемое *мнимой частью*, а i – *мнимая единица*. Для действительной части комплексного числа z используется обозначение $\operatorname{Re} z$, а для мнимой – $\operatorname{Im} z$. Комплексное число $a+(-b)i$ называется *сопряженным* к комплексному числу $a+bi$ и обозначается $\bar{z}$.

Комплексное число $z=a+bi$ изображается в плоскости Oxy точкой $M(a, b)$ либо радиусом-вектором с концом в точке $M(a, b)$. Плоскость, точки которой отождествляются с комплексными числами, называется *комплексной плоскостью*. На ней ось Ox называется *действительной осью*, ось Oy – *комплексной*.

Укажем свойства сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$:

$$\begin{aligned}
&z_1 \pm z_2=(a_1+a_2)\pm(b_1+b_2)i;\\
&z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i;\\
&\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i, \quad z_2\neq 0.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Тригонометрическая форма записи комплексного числа $z=a+bi$ получается при использовании формул связи декартовых и полярных координат ($a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$): $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. При этом полярный радиус r называют *модулем комплексного числа* z (обозначается $|z|$), полярный угол φ – *аргументом* ($\operatorname{Arg} z$). Модуль и аргумент комплексного числа выражаются через его действительную и мнимую части следующим образом:

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2},\ \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Главным значением аргумента комплексного числа z (обозначается $\arg z$) считают такой его аргумент φ, что $-\pi<\varphi\leqslant\pi$, если $z\neq 0$, и $\varphi=0$, если $z=0$. Отметим, что $\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Экспоненциальная форма записи комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, основанная на формуле Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, имеет вид $z=re^{i\varphi}$.

Умножение и деление комплексных чисел удобнее выполнять, если они заданы в тригонометрической или экспоненциальной форме. Пусть

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2}.$$

Тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2)) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \tag{5.2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),\ z_2 \neq 0. \tag{5.3}$$

Формулы (5.2) и (5.3) в случае экспоненциальной формы чисел z_1 и z_2 имеют соответственно следующий вид:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \quad z_2 \neq 0.$$

Обобщением соотношения (5.2) является *формула Муавра*

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n \in \mathbb{Z},$$

или в экспоненциальной форме $(re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Все корни n-й степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$ вычисляются по формуле

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}},\ k = \overline{0, n-1}. \tag{5.4}$$

Из формулы (5.1) имеем:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2},$$

т.е. модуль разности двух комплексных чисел есть расстояние между точками комплексной плоскости, соответствующими числам z_1 и z_2.

Пример 1. Указать на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} -\pi/2 \leqslant \arg(z + 2 - 3i) \leqslant 3\pi/4, \\ |z + 2 - 3i| \leqslant 4. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Имеем: $z + 2 - 3i = z - (-2 + 3i)$. Легко видеть, что множество точек, удовлетворяющих условию $-\pi/2 \leqslant \arg(z - z_0) \leqslant 3\pi/4$, где $z_0 = -2 + 3i$, изображается на комплексной плоскости так, как указано на рис. 5.1. Учитывая геометрическую интерпретацию модуля разности комплексных чисел, получаем, что множество точек z, удовлетворяющих условию $|z + 2 - 3i| \leqslant 4$, лежит внутри круга с центром в точке z_0 и радиусом 4. Искомое множество указано на рис. 5.2.

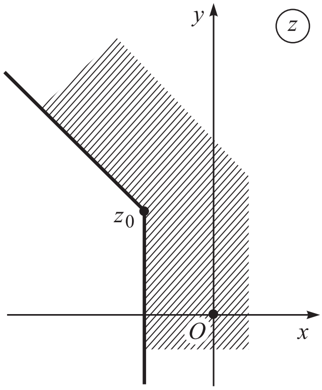


Рис. 5.1

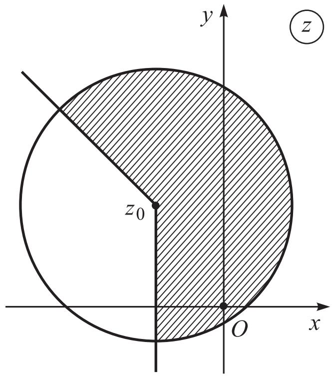


Рис. 5.2

Пример 2. Записать в тригонометрической и экспоненциальной формах комплексное число $z=1-i$.

Решение. Имеем: $|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, $\cos\varphi=1/\sqrt{2}$, $\sin\varphi=-1/\sqrt{2}\Rightarrow\varphi=-\pi/4$. Следовательно, $1-i=\sqrt{2}(\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4))=\sqrt{2}e^{(-\pi/4)i}$.

Пример 3. Найти все корни третьей степени из числа -8.

Решение. Представим -8 в тригонометрической форме: $-8=8(\cos\pi+i\sin\pi)$. Применим формулу (5.4): $z_k=2\left(\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{3}\right)$, $k=0,1,2$. При $k=0$ $z_0=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=1+i\sqrt{3}$; при $k=1$ $z_1=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2$; при $k=2$ $z_2=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)=1-i\sqrt{3}$.

Пример 4. Решить уравнение $x^2+8ix-23+24i=0$.

Решение. Используя формулу для нахождения корней квадратного уравнения, получаем:

$$x_{1,2}=-4i\pm\sqrt{-16+23-24i}=-4i\pm\sqrt{7-24i}\,.$$

Вычисляем $\sqrt{7-24i}$. Квадратный корень из комплексного числа z_0 можно найти следующим образом, не прибегая к представлению z_0 в тригонометрической форме. Пусть $a+bi$ – искомый корень. Тогда по определению квадратного корня $(a+bi)^2=7-24i\Rightarrow a^2-b^2+2abi=7-24i$. Отсюда, так как $a,b\in\mathbb{R}$,

$$\begin{cases}a^2-b^2=7,\\ 2ab=-24\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a^2-b^2=7,\\ b=-\dfrac{12}{a}.\end{cases}$$

Имеем: $a^2 - \frac{144}{a^2} = 7$, $a^4 - 7a^2 - 144 = 0$. Обозначив $a^2 = u$, получим квадратное уравнение $u^2 - 7u - 144 = 0$, из которого находим:

$$u = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 144} = \frac{(7 \pm 25)}{2}.$$

Поскольку $a \in \mathbb{R}$, то $u \geqslant 0$. Значит, $u = 16$, т.е. $a = \pm 4$ и $b = \mp 3$, $a + bi = \pm(4 - 3i)$. Тогда $z_{1,2} = \pm(4 - 3i) - 4i$, откуда $x_1 = 4 - 7i$, $x_2 = -4 - i$.

Пример 5. Представить в тригонометрической форме $z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решение. Имеем:

$$z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} + i2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Если $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$, то это и есть тригонометрическая форма (при $-\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, т.е. $|\alpha| < \pi$). Если же $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$, то внесем -1 внутрь скобок:

$$z = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right) = -2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \pi\right)\right).$$

5.1. Вычислить:

1) $5 - 2i + (-2 + 4i)$;

2) $(a + bi)(c + di) + (a - bi)(c - di)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$;

3) $\frac{b - ai}{a + bi}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 > 0$;

4) $\frac{(2 + i)(3 - 2i) - 3i}{(1 - i)^2 + 2}$.

5.2. Решить уравнение $(1 - i)x + (-2 + i)y = 4 + 8i$, $x, y \in \mathbb{R}$.

5.3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (2 - i)z_1 + (2 + i)z_2 = 6, \\ (3 - 2i)z_1 + (3 + 2i)z_2 = 8. \end{cases}$$

5.4. Построить на комплексной плоскости точки, соответствующие комплексным числам $z_1 = -\pi i / 4$, $z_2 = 3 - 4i$, $z_3 = \sqrt{5}i$, $z_4 = 8$, $z_5 = -10$, $z_6 = -5 - 3i$.

5.5. Как расположены на комплексной плоскости точки, соответствующие:

1) z и $\bar{z}$; 2) z и $-z$?

5.6. Найти $\arg 5$, $\arg(-2)$, $\arg(1 + i)$, $\arg(-\pi i / 4)$.

5.7. Найти модуль комплексных чисел $i - \sqrt{3}$, 27, $8i$, $-1 + \sqrt{2}i$.

5.8. Найти:

1) $\operatorname{Re}\dfrac{2+5i}{-3+2i}$; 2) $\operatorname{Im}\dfrac{3+4i}{3-5i}$.

5.9. Вычислить:

1) $(a+bi)^4-(a-bi)^4,\ a,b\in\mathbb{R}$; 2) $\dfrac{(1-i)^4+1}{(1+i)^4-1}$;

3) $\dfrac{\cos\varphi-i\sin\varphi}{\cos\varphi+i\sin\varphi}$; 4) $\dfrac{1+i\operatorname{ctg}\alpha}{1-i\operatorname{ctg}\alpha}$;

5) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{16}$; 6) $(1-3i)^2(-5+2i)+\dfrac{1}{3+i}$;

7) $(1+i)^{6094}$; 8) $(1-i)^{3047}$;

9) $\dfrac{(1+i)^{1987}}{(1-i)^{1989}}$.

5.10. Найти все комплексные числа, удовлетворяющие условию:

1) $\overline{z}=z^2$; 2) $\overline{z}=z^3$.

5.11. Вычислить:

1) $\sqrt{16i}$; 2) $\sqrt{-11+60i}$; 3) $\sqrt{-3+4i}$;

4) $\sqrt{8-6i}$; 5) $\sqrt{7-24i}$.

5.12. Решить уравнения:

1) $x^2-2x+2=0$; 2) $x^2+4x+13=0$;

3) $x^2+x+1=0$; 4) $x^2+9=0$;

5) $x^2+2x+3=0$; 6) $x^4-3x^2+4=0$;

7) $x^2-(2+i)x-1+7i=0$; 8) $x+|x|=1-3i$;

9) $x^2-4ix-8+3i=0$.

5.13. Доказать, что для любого $z\in\mathbb{C}$ выполняются равенства:

1) $z\overline{z}=|z|^2$; 2) $|\overline{z}|=|z|$;

3) $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}z$; 4) $z-\overline{z}=2i\operatorname{Im}z$.

5.14. Найти $\arg z$, если:

1) $z+\overline{z}=|z|$; 2) $z-\overline{z}=|z|i$.

5.15. На комплексной плоскости изобразить множество точек, соответствующих комплексным числам, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $1<\operatorname{Re}z<2$; 2) $\operatorname{Im}z>-2$;

3) $|z+2-3i|\leqslant 5$; 4) $|z+i|\geqslant 2,\ |z|<3$;

5) $|z+4-3i|\leqslant 5,\ 0<\arg z<\pi/8$;

6) $|z-1-i|\leqslant 1,\ \operatorname{Im}z\geqslant 1,\ \operatorname{Re}z\geqslant 1$;

7) $|z-1-i|\leqslant 1,\ |\arg z|\leqslant \pi/4$;

8) $|z-1|<1,\ 0\leqslant \arg z\leqslant \pi/4,\ 0<\arg(z-1)<\pi/2$;

9) $|\mathrm{Re}\,z|\leqslant 1,\ |\mathrm{Im}\,z|<2$;

10) $z\bar{z}<2,\ \mathrm{Im}\,z>-1,\ \mathrm{Re}\,z\leqslant 1$;

11) $|z|<2,\ \mathrm{Re}\,z\geqslant 1,\ |\arg z|<\pi/4$;

12) $|z+3-i|\leqslant 5,\ \ -\pi/4\leqslant \arg(z+3-i)\leqslant 4\pi/5$.

5.16. Представить в тригонометрической и экспоненциальной формах следующие комплексные числа:

1) -8; 2) $-2i$;

3) $-i$; 4) $-1+\sqrt{3}i$;

5) $-1+i$; 6) $\sin\alpha-i\cos\alpha,\ \ \pi/2<\alpha<\pi$;

7) $\sin\alpha+(1-\cos\alpha)i,\ 0<\alpha<\pi/2$; 8) $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$;

9) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$; 10) $-\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$;

11) $-3\left(\cos\dfrac{\pi}{5}-i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$; 12) $\sqrt{27}$;

13) $4-3i$; 14) $1+2i$;

15) $\sqrt{3}-i$; 16) $-1-i$.

5.17. Вычислить, использовав формулу Муавра:

1) $(-1+i\sqrt{3})^{60}$; 2) $(1+i)^7+(1-i)^7$;

3) $(1-i)^{75}$; 4) $\left(1+\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^4$;

5) $(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^5$; 6) $(\sqrt{3}+i)^{30}$;

7) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{300}$; 8) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$;

9) $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^{45}}{(1+i)^{40}}+\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{45}}{(1-i)^{40}}$; 10) $(\sin\varphi+i\cos\varphi)^n$;

11) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}\right)^{26}$; 12) $(2+\sqrt{3}-i)^{24}$.

5.18. Вычислить:

1) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{(1-i)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}$; 2) $\dfrac{(1+i)(1+i\sqrt{3})(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2\sqrt{2}}$;

3) $\dfrac{\cos\varphi-i\sin\varphi}{1+\cos\varphi+i\sin\varphi}$; 4) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{\sqrt{2}(-1+i)(\cos\psi-i\sin\psi)}$.

5.19. Доказать равенства:

1) $(\sqrt{3}+i)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$;

2) $\left(1+\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n = \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}$;

3) $(1+i\,\mathrm{tg}\,\varphi)^n = \frac{\cos n\varphi}{\cos^n\varphi}(1+i\,\mathrm{tg}\,n\varphi)$;

4) $\left(\frac{1+i\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1-i\,\mathrm{tg}\,\varphi}\right)^n = \frac{1+i\,\mathrm{tg}\,n\varphi}{1-i\,\mathrm{tg}\,n\varphi}$.

5.20. Найти модуль и аргумент комплексного числа:

1) $(1+i\sqrt{3})^6$; 2) $\frac{1+i}{1-i}$; 3) $\frac{\sqrt{3}-i}{8+8i}$.

5.21. Найти все значения корней:

1) $\sqrt{i}$; 2) $\sqrt{-1}$; 3) $\sqrt{3-4i}$;

4) $\sqrt[3]{i}$; 5) $\sqrt[3]{-1+i}$; 6) $\sqrt[3]{2-2i}$;

7) $\sqrt[4]{-8+8i}$; 8) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$; 9) $\sqrt[3]{-\frac{i}{27}}$;

10) $\sqrt[4]{\frac{1}{256}}$; 11) $\sqrt[4]{-81}$; 12) $\sqrt[4]{-128+128\sqrt{3}i}$;

13) $\sqrt[4]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$; 14) $\sqrt[4]{\frac{1+i\sqrt{3}}{128}}$; 15) $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$;

16) $\sqrt[5]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$; 17) $\sqrt[6]{1}$; 18) $\sqrt[4]{-i}$.

5.22. Вычислить:

1) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; 2) $\sqrt[5]{\frac{\sqrt{3}-i}{8+8i}}$.

5.23. Решить уравнения:

1) $x^3+8=0$; 2) $x^4+4=0$; 3) $x^6+729=0$.

5.24. Выразить через $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$:

1) $\cos 3\alpha$; 2) $\sin 3\alpha$.

5.25. Представить заданную функцию от α в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций углов, кратных α:

1) $\cos^3\alpha$; 2) $\sin^3\alpha$.

5.26. Доказать равенства:

1) $\sin^4\alpha = \dfrac{\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3}{8}$;

2) $\cos^5\alpha = \dfrac{\cos 5\alpha + 5\cos 3\alpha + 10\cos\alpha}{16}$.

5.27. Доказать равенства:

1) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}x\sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}, \ x \neq 2k\pi$;

2) $\dfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \dfrac{\sin\dfrac{2n+1}{2}x}{2\sin\dfrac{x}{2}}, \ x \neq 2k\pi$.

5.28. Вычислить:

1) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \ldots + \cos^2 nx$;

2) $\cos^3 x + \cos^3 2x + \ldots + \cos^3 nx$;

3) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \ldots + \sin^2 nx$;

4) $\sin^3 x + \sin^3 2x + \ldots + \sin^3 nx$.

Глава 6

ГРУППА, КОЛЬЦО, ПОЛЕ

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $X_1, X_2, ..., X_n$ – произвольные множества. *Декартово произведение множеств* $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ есть множество последовательностей вида $(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n$. Подмножества декартова произведения $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ называются *n-местными отношениями*. Если $n = 2$, то отношение $\sigma \subseteq X_1 \times X_2$ – бинарное. В этом случае говорят также о соответствии между элементами множества X_1 и элементами множества X_2. Если множества $X_1, X_2, ..., X_n$ равны, скажем, множеству X, то их декартово произведение называется *декартовой n-й степенью* X и обозначается X^n. В частности, X^2 – декартов квадрат множества X. Его подмножества называются *бинарными отношениями на множестве* X. Если $x, y \in X$, $\sigma \subseteq X^2$ и $(x, y) \in \sigma$, то пишут $x\sigma y$ и говорят, что элемент x находится в отношении σ к элементу y.

Отношение σ на множестве X называется:

рефлексивным, если

$$x\sigma x, \quad \forall x \in X;$$

симметричным, если

$$x\sigma y \Rightarrow y\sigma x, \quad \forall x, y \in X;$$

антисимметричным, если

$$x\sigma y \wedge y\sigma x \Rightarrow x = y, \quad \forall x, y \in X;$$

транзитивным, если

$$x\sigma y \wedge y\sigma z \Rightarrow x\sigma z, \quad \forall x, y, z \in X.$$

Отношение эквивалентности определяется как рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение. Каждому отношению эквивалентности σ на множестве X соответствует разбиение множества X на подмножества (называемые σ-*классами*) эквивалентных между собой элементов множества X. Это означает, что множество X есть объединение попарно непересекающихся подмножеств, каждое из которых состоит из эквивалентных между собой элементов, и никакие два элемента из различных подмножеств неэквивалентны. *Трансверсалом* отношения эквивалентности $\sigma \subseteq X^2$ называется такое подмножество $Y \subseteq X$, которое пересекается с каждым σ-классом точно по одному элементу.

Отношение порядка определяется как рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение.

Пусть X и Y – два множества. Соответствие $f \subseteq X \times Y$ называется *частичным отображением*, если

$$\forall x \in X \quad \forall y_1, y_2 \in Y \quad (((x, y_1) \in f) \wedge ((x, y_2) \in f) \Rightarrow y_1 = y_2).$$

В этом случае пишут $f : X \to Y$, а также $f(x) = y$ или $f : x \mapsto y$, если $(x, y) \in f$. Если для каждого $x \in X$ существует элемент $y \in Y$ такой, что $(x, y) \in f$, то частичное отображение называется (полным) *отображением из X в Y*.

В связи с понятиями частичного и полного отображения вводятся следующие определения. Пусть $f : X \to Y$. Тогда X – *множество отправления*, а Y – *множество прибытия*. Если $x \in X$, $y \in Y$ и $f(x) = y$, то y – *образ элемента* x, а x – *прообраз элемента* y при (частичном) отображении f. Множество

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

есть *полный прообраз элемента* y при (частичном) отображении f. Если $X_1 \subseteq X$, $Y_1 \subseteq Y$, то множество

$$f(X_1) = \{y \in Y \mid \exists x \in X_1 \ (f(x) = y)\}$$

называется образом множества X_1, а множество

$$f^{-1}(Y_1) = \{x \in X \mid \exists y \in Y_1 \ (f(x) = y)\}$$

называется прообразом множества Y_1 при (частичном) отображении f. *Ограничение* (*частичного*) *отображения на множество* X_1 есть такое (частичное) отображение $g : X_1 \to Y$ (обозначаемое как $f|_{X_1}$), что выполняется соотношение

$$\forall x \in X_1 \ \forall y \in Y \, (g(x) = y \Leftrightarrow f(x) = y).$$

Инъекция (*инъективное отображение*) x – это такое отображение, при котором полный прообраз всякого элемента из множества прибытия состоит не более чем из одного элемента, а *сюръекция* (*сюръективное отображение*) – такое отображение, при котором полный прообраз каждого элемента из множества прибытия имеет хотя бы один элемент. *Биекция* (*биективное отображение*) есть инъективное и сюръективное отображение. Если $X = Y$, то отображение $f: X \to X$ называется *преобразованием множества* X. *Подстановкой множества* X называется биективное преобразование этого множества. В частности, $\mathrm{id}\, X : x \mapsto x$ – тождественное преобразование – является подстановкой.

Пусть X, Y, Z – множества, $f: Y \to Z$, $g: X \to Y$ – отображения. *Суперпозиция* (*композиция*) *отображений* f и g есть такое отображение $f \circ g: X \to Z$, что $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ для любого $x \in X$. Если $f: X \to Y$ – отображение, то отношение

$$\varepsilon_f = \{(x_1, x_2) \in X^2 \mid f(x_1) = f(x_2)\}$$

является отношением эквивалентности на множестве X. Оно разбивает X на полные прообразы элементов множества $f(X)$ при отображении f и называется *ядром отображения* f. Обратно, если ε – эквивалентность, то она является ядром некоторого отображения $f: X \to Y$ (например, если каждому $x \in X$ сопоставить элемент из трансверсала, содержащийся в том ε-классе, который содержит x).

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $X_1, X_2, ..., X_n, X$ – множества. Частичное (полное) отображение $f: X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \to X$ называется *частичной* (соответственно *полной*) *n-арной операцией*. Если $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X$, то операция f есть n-арная операция на множестве X. В частности, при $n = 2$ операция $f: X \times X \to X$ называется *бинарной* или *алгебраической*.

Пусть $f: X^n \to X$ – частичная n-арная операция и $X_1 \subseteq X$. Говорят, что частичная n-арная операция $g: X_1^n \to X_1$ индуцирована операцией f, если для любых $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} \in X_1$ выполняется соотношение

$$g(x_1, x_2, ..., x_n) = x_{n+1} \Leftrightarrow f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_{n+1}.$$

Для обозначения бинарных операций на множестве X обычно используют символы $*$, $\circ$ (суперпозиция отображений), $+$ (сложение, аддитивная операция), $\cdot$ (умножение, мультипликативная операция) и т.п., причем знак операции располагают между операндами: $x_1 * x_2$, $x_1 \circ x_2$, $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$ (это образы пар $(x_1, x_2) \in X^2$ при отображениях соответственно $*, \circ, +, \cdot : X^2 \to X$). Пара $(X, *)$ обозначает множество X вместе с бинарной операцией $*$ на нем.

Бинарная (алгебраическая) операция $*$ на множестве X называется:

ассоциативной, если для любых $x_1, x_2, x_3 \in X$

$$x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3;$$

коммутативной, если

$$x_1 * x_2 = x_2 * x_1;$$

с законом сокращения, если

$$x_1 * x_2 = x_3 * x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_3,$$

$$x_1 * x_2 = x_1 * x_3 \Leftrightarrow x_2 = x_3.$$

Множество X вместе с ассоциативной бинарной операцией $*$ называется *полугруппой* (*коммутативной полугруппой*, если операция $*$ коммутативна).

Элемент $n \in X$ называется *нейтральным* относительно бинарной операции $*$, если $x * n = n * x = x$ для любого $x \in X$. Если такой элемент существует, то только один. В случае аддитивной операции нейтральный элемент называется *нулем* и обозначается 0, а в случае мультипликативной операции нейтральный элемент называется *единицей* и обозначается 1. Полугруппа $(X, *)$ с нейтральным элементом называется *моноидом*.

Пусть $*$ – бинарная операция на множестве X с нейтральным элементом n. Элемент $x_2 \in X$ называется *симметричным элементу* $x_1 \in X$ (по отношению к операции $*$), если выполняются равенства $x_2 * x_1 = x_1 * x_2 = n$. Если x_2 симметричен x_1, то x_1 симметричен x_2, т.е. x_2 и x_1 симметричны друг другу. Если $(X, *)$ – моноид, то для каждого элемента $x \in X$ может существовать не более одного симметричного ему. В случае аддитивной (соответственно, мультипликативной) операции симметричный к x элемент называется *противоположным* (соответственно *обратным*) и обозначается через $-x$ (соответственно x^{-1} или $\dfrac{1}{x}$ в случае коммутативности умножения).

Моноид $(X, *)$ называется *группой*, если для каждого элемента $x \in X$ существует ему симметричный. В этом случае выполняется закон сокращения и для любых $g, h \in X$ уравнения $g * x = h$, $y * g = h$ имеют единственные решения относительно x и y.

Пусть $(X, *)$ и $(Y, \circ)$ – две группы. Биекция $f : X \to Y$ называется *изоморфизмом группы* $(X, *)$ *на группу* $(Y, \circ)$, если для любых $x_1, x_2 \in X$

$$f(x_1 * x_2) = f(x_1) \circ f(x_2).$$

В этом случае группы $(X, *)$ и $(Y, \circ)$ считаются изоморфными. С алгебраической точки зрения изоморфные группы представляют собой один и тот же объект.

Далее, пусть G – группа с операцией $*$. Непустое подмножество H группы G называется *подгруппой* группы G, если множество H само является группой относительно операции, определенной в G. Это равносильно тому, что подмножество H группы G является ее подгруппой тогда и только тогда, когда H содержит композицию любых двух элементов из H и вместе со всяким своим элементом h множество H содержит симметричный к нему элемент $h_1 \in H$. То, что H есть подгруппа группы $(G, \cdot)$, обозначается следующим образом: $(H, \cdot) \leqslant (G, \cdot)$ или проще $H \leqslant G$.

Кольцо $(K, +, \cdot)$ – это множество K с заданными на нем двумя бинарными операциями: сложением $+$ и умножением $\cdot$, причем

$(K,+)$ – коммутативная (абелева) группа и умножение дистрибутивно относительно сложения. Последнее означает, что для любых $a,b,c\in K$

$$a(b+c)=ab+ac \wedge (a+b)c=ac+bc.$$

Вычитание в кольце K – это операция $-: K\times K\to K$, где для $a,b\in K$

$$a-b=a+(-b).$$

Умножение в кольце дистрибутивно относительно вычитания.

Имеет также место соотношение

$$\forall a\in K \ \ (a\cdot 0=0\cdot a=0).$$

Если, кроме того, выполняется соотношение

$$\forall a,b\in K \ \ (ab=0 \Rightarrow (a=0\vee b=0)),$$

то говорят, что кольцо K не имеет *делителей нуля*. В этом случае выполняется закон сокращения на ненулевой элемент: $\forall a,b,c\in K$

$$ab=cb\Rightarrow (b=0\vee a=c),$$

$$ab=ac\Rightarrow (a=0\vee b=c).$$

Если умножение ассоциативно (соответственно коммутативно), то кольцо $(K,+,\cdot)$ называется *ассоциативным* (соответственно *коммутативным*). Если имеется нейтральный элемент относительно умножения, то $(K,+,\cdot)$ – это кольцо с единицей. Ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля называется *областью целостности*.

Поле $(P,+,\cdot)$ – это область целостности, которая имеет более одного элемента и ненулевые элементы образуют группу относительно операции умножения. Таким образом, поле является ассоциативным, коммутативным кольцом с единицей и без делителей нуля. Кроме того, в поле возможна операция деления на ненулевой элемент: для любых $a,b\in P$, если $b\neq 0$, то уравнение $bx=a$ имеет единственное решение относительно x – частное от деления a на b: $\frac{a}{b}=ab^{-1}$. Поле $(P,+,\cdot)$ называется *числовым*, если P состоит из комплексных чисел, а операции $+$ и $\cdot$ индуцированы операциями соответственно сложения и умножения комплексных чисел. Числовое поле обязательно содержит все рациональные числа. Если $P\subseteq\mathbb{C}$, то множество P относительно операций, индуцированных сложением и умножением комплексных чисел, является числовым полем тогда и только тогда, когда P замкнуто относительно четырех арифметических операций: сложения, умножения, вычитания и деления на ненулевой элемент.

Пример 1. Пусть на множестве X задано бинарное отношение σ. Отношению σ можно поставить в соответствие ориентированный граф Γ_σ отношения σ [29], который состоит из вершин, помеченных элементами множества X, и ребер (по-другому дуг), соединяющих вершину x с вершиной y (по-другому исходящих из вершины x и входящих в вершину y), если $(x, y) \in \sigma$. В этом случае говорят, что вершина x непосредственно достижима из вершины y. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_k$, $k \in \mathbb{N}$, – последовательность вершин графа Γ_σ. Эта последовательность называется *ориентированным маршрутом*, исходящим из вершины x_0 (начальная вершина маршрута) и входящим в вершину x_k (финальная вершина маршрута), если $(x_0, x_1) \in \sigma, \ldots, (x_{k-1}, x_k) \in \sigma$, т.е. каждая последующая вершина маршрута непосредственно достижима из последующей вершины. В этом случае считается, что вершина x_k достижима из вершины x_0. На множестве вершин графа Γ_σ рассматривается отношение ε, которое содержит пары $(x, y) \in X \times X$, если вершины x и y достижимы друг из друга или $x = y$. Какие свойства графа Γ_σ отвечают основным свойствам отношений – рефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности? Показать, что отношение ε есть отношение эквивалентности на множестве вершин графа Γ_σ. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\sigma = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 2), (5, 4), (6, 4), (6, 5)\}$. Найти разбиение множества X, соответствующее отношению ε.

Решение. Рефлексивность отношения σ означает наличие петли у каждой вершины графа Γ_σ. Симметричность сводится к тому, что если одна вершина непосредственно достижима из другой, то эта другая непосредственно достижима из первой. Антисимметричность означает, что если две вершины непосредственно достижимы друг из друга, то они равны. Транзитивность равносильна тому, что если одна вершина достижима из другой, то она непосредственно достижима из нее. Пользуясь этим, легко вывести, что отношение ε есть отношение эквивалентности. Оно соответствует разбиению множества X на классы эквивалентности, которые состоят из достижимых друг из друга вершин либо из одной вершины.

Граф Γ_σ, соответствующий отношению порядка, характеризуется тем, что, во первых, каждая его вершина имеет петлю, во-вторых, отношение достижимости совпадает с отношением непосредственной достижимости, в-третьих, если одна вершина достижима из не равной ей другой вершины, то эта другая вершина не достижима из первой.

Рассмотрим указанное выше отношение σ. Здесь $\{2, 3, 4, 5\}$ – множество вершин, непосредственно достижимых из 1, $\{2, 3, 4\}$ – множество вершин, непосредственно достижимых из 2, $\{4, 5\}$ – множество вершин, непосредственно достижимых из 6. Из вершин 3, 4, 5 непосредственно достижимы только вершины 4, 2, 4 соответственно. Поэтому $\{2, 3, 4\}$ – ε-класс, состоящий из достижимых друг из друга вершин (сильно связная компонента графа Γ_σ), и $X = \{1\} \cup \{2, 3, 4\} \cup \{5\} \cup \{6\}$ – разбиение множества вершин графа на ε-классы.

Пример 2. С помощью ДПСК плоскость П можно биективно отобразить на декартов квадрат $\mathbb{R}^2$ множества всех действительных чисел. Следовательно, отношения на $\mathbb{R}$ можно изображать подмножествами плоскости Π. Выразить геометрически условия, налагаемые на подмножества $M \subseteq \Pi$, чтобы изображаемое им отношение σ_M было: 1) отношением эквивалентности; 2) отношением порядка. Рассмотрим на плоскости Π множество M, являющееся объединением биссектрисы Δ первого и третьего координатных углов и единичного круга с центром в начале координат. Проверить, является ли отношение σ_M на $\mathbb{R}$, соответствующее множеству M, отношением эквивалентности.

Решение. Нетрудно видеть, что рефлексивность σ_M равносильна тому, что M содержит биссектрису Δ, симметричность σ_M равносильна симметричности множества M относительно Δ. Антисимметричность σ_M означает, что из двух точек плоскости Π, симметричных относительно Δ, только одна может принадлежать множеству M. Транзитивность σ_M заключается в так называемом *правиле прямоугольного треугольника*: если точки A, B, C, принадлежащие множеству M, являются вершинами прямоугольного треугольника с вершиной B прямого угла, катеты которого параллельны осям координат, а вершина B находится на биссектрисе Δ, то точка D, симметричная точке B относительно середины гипотенузы $[AC]$, должна принадлежать множеству M. Что касается рассматриваемого конкретного множества M, то нетрудно убедиться, что отношение σ_M рефлексивно и симметрично, но не транзитивно, так как не выполняется правило прямоугольного треугольника. Таким образом, отношение σ_M не является эквивалентностью.

Пример 3. Показать, что отношение $\upuparrows$ одинаковой направленности векторов на множестве V_3 всех векторов пространства рефлексивно, симметрично, но не транзитивно, а на множестве $V_3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ всех ненулевых векторов – транзитивно и потому является отношением эквивалентности. Найти какой-либо трансверсал этого отношения эквивалентности.

Решение. Рассмотрим сначала отношение $\upuparrows$ на множестве V_3. Если $\boldsymbol{a} \in V_3$, то $\boldsymbol{a} \upuparrows \boldsymbol{a}$, поэтому отношение $\upuparrows$ рефлексивно. Если $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_3$ и $\boldsymbol{a} \upuparrows \boldsymbol{b}$, то очевидно, что $\boldsymbol{b} \upuparrows \boldsymbol{a}$, так что отношение $\upuparrows$ симметрично. Пусть теперь $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – два неколлинеарных вектора в V_3, тогда $\boldsymbol{a} \upuparrows \mathbf{0}$, $\mathbf{0} \upuparrows \boldsymbol{b}$. Однако $\boldsymbol{a} \not\upuparrows \boldsymbol{b}$, поэтому отношение $\upuparrows$ не транзитивно.

Рассмотрим теперь отношение $\upuparrows$ на множестве $V_3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Из предыдущего следуют его рефлексивность и симметричность. Далее, если $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V_3$ и $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{a} \upuparrows \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} \upuparrows \boldsymbol{c}$, то представляющие эти векторы направленные отрезки параллельны одной прямой, поэтому $\boldsymbol{a} \upuparrows \boldsymbol{c}$. Значит, отношение $\upuparrows$ на множестве $V_3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ транзитивно и является отношением эквивалентности. В качестве трансверсала отношения $\upuparrows$ на $V_3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ можно взять множество всех ортов пространства V_3.

Пример 4. Показать, что отношение делимости на множестве целых чисел не является отношением порядка, а на множестве натуральных чисел – является.

Решение. Для $m, n \in \mathbb{Z}$ положим $m | n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}\ (n = mk)$. Отношение делимости $|$ на $\mathbb{Z}$ рефлексивно и транзитивно, так как для любых $m, n, k \in \mathbb{Z}$ $m|m$ и $(m|n \wedge n|k) \Rightarrow m|k$. Однако антисимметричности нет, так как, скажем, $(-1)|1$ и $1|(-1)$. В то же время $m = n$ для всяких двух натуральных чисел m и n, если $m|n$ и $n|m$. Следовательно, отношение делимости на множестве $\mathbb{N}$ есть отношение порядка.

Пример 5. *Нумерацией множества X* называется всякая биекция множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел на множество X. Если нумерация существует, то говорят, что множество X *счетно*. Доказать, что множество целых чисел $\mathbb{Z}$ счетно.

Решение. Нетрудно видеть, что в качестве нумерации $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ можно взять соответствие $1\mapsto 0$, $2k\mapsto k$, $2k+1\mapsto -k$ для $k\in\mathbb{N}$.

Пример 6. Доказать, что отображение $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$, где для $x,y\in\mathbb{N}$

$$f(x,y)=\frac{(x+y)^2-x-3y+2}{2},$$

является биекцией. С помощью этого найти нумерацию декартова квадрата $\mathbb{N}^2$ множества $\mathbb{N}$.

Решение. Пусть $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее действительное число x. Все пары натуральных чисел можно расположить в последовательность. Например, по канторовскому расположению имеем: $(1,1)$; $(1,2),(2,1)$; $(1,3),(2,2),(3,1)$; $(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$; … . В этой последовательности пары идут в порядке возрастания суммы их компонент, а из пар с одинаковой суммой сначала берется пара с минимальной первой компонентой. Обозначим через $f(x,y)$ номер пары (x,y) в этой последовательности. Таким образом, $f(1,1)=1$, $f(1,2)=2$, $f(2,1)=3$, $f(1,3)=4$, $f(2,2)=5$, $f(3,1)=6$, $f(1,4)=6$, … . Число $f(x,y)$ будем называть *канторовским номером пары* (x,y). Через $l(n)$ и $r(n)$ будем обозначать соответственно первую и вторую компоненты с номером n. Например, $l(1)=1$, $r(1)=1$, $l(2)=1$, $r(2)=2$ и т.д. Таким образом, для любых $x,\ y,\ n\in\mathbb{N}$

$$l(f(x,y))=x,\quad r(f(x,y))=y,$$

$$f(l(n),\quad r(n))=n.$$

Далее выразим $f(x,y)$ через x,y как многочлен от двух переменных с рациональными коэффициентами. Пара (x,y) находится в промежутке

$$(1,x+y-1),\ \ldots,\ (x,y),\ \ldots,\ (x+y-1,1) \tag{6.1}$$

пар с общей суммой компонент $x+y$ на x-м месте после пары (x,y). Если $x+y\geqslant 2$, то перед парой $(1,x+y-1)$ находится $x+y-2$ промежутка с одинаковой суммой компонент и с количеством элементов соответственно 1, 2, 3, …, $x+y-2$ (если $x=y=1$, то перед парой $(1,x+y-1)$ находится $x+y-2=0$ элементов). Значит, число пар до промежутка (6.1) будет равно

$$1+2+\ldots+x+y-2=\frac{(x+y-2)(x+y-1)}{2}=\frac{(x+y)^2-3x-3y+2}{2}.$$

Если прибавить x, то получим канторов номер пары (x,y):

$$f(x,y)=\frac{(x+y)^2-3x-3y+2}{2}+x=\frac{(x+y)^2-x-3y+2}{2}. \tag{6.2}$$

Теперь для вычисления нумерации $\mathbb{N}^2$ требуется установить формулы для $l(n)$ и $r(n)$, где $n=f(x,y)$; $x,y\in\mathbb{N}$. Зафиксируем $x,y\in\mathbb{N}$, $n=f(x,y)$ и положим

$m=x+y$. Из выражения (6.2) выводим: $2n=x^2+2xy+y^2-x-3y+2$. Умножая на 4, получаем:

$$8n=4x^2+8xy+4y^2-4x-12y+8. \tag{6.3}$$

Выделяя полный квадрат, приходим к равенствам: $8n=4x^2+4y^2+1+8xy-$ $-4x-4y)+4y-1-12y+8=(2x+2y-1)^2-8y+7=(2m-1)^2-8y+7$. Отсюда

$$8n+1=(2m-1)^2-8y+8. \tag{6.4}$$

Если теперь $y = 1$, то число $8n + 1$ является полным квадратом. Тогда $m=\dfrac{\sqrt{8n+1}+1}{2}$ и

$$x=\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}. \tag{6.5}$$

Далее рассматриваем случай, когда $y>1$. Из формулы (6.4) следует, что

$$\sqrt{8n+1}=2m-1. \tag{6.6}$$

Для получения оценки снизу числа $\sqrt{8n+1}$ выделим другой квадрат в выражении (6.3), а именно: $8n=(4x^2+4y^2+9+8xy-12x-12y)+12x-9-4x+8=$ $=(2x+2y-3)^2+8x-1=(2m-3)^2+8x-1$. Отсюда следует, что

$$8n+1=(2m-3)^2+8x \tag{6.7}$$

и $(2m-3)^2<8n+1$. Используя равенства (6.6), (6.7), выводим:

$$2m-3<\sqrt{8n+1}<2m-1, \quad 2m-3<\left[\sqrt{8n+1}\right]<2m-1.$$

Здесь возможны только два случая:

1) число $[\sqrt{8n+1}]$ нечетное, тогда $2m-3=[\sqrt{8n+1}]$, $m=\dfrac{3+[\sqrt{8n+1}]}{2}$ и согласно равенству (6.7)

$$x=\frac{8n+1-[\sqrt{8n+1}]^2}{8}, \quad y=\frac{[\sqrt{8n+1}]^2+4[\sqrt{8n+1}]-8n+11}{8}; \tag{6.8}$$

2) число $[\sqrt{8n+1}]$ четное, тогда $[2m-2=\sqrt{8n+1}]$, $m=\dfrac{2+[\sqrt{8n+1}]}{2}$ и согласно равенству (6.7)

$$x=\frac{8n+1-([\sqrt{8n+1}]-1)^2}{8}, \quad y=\frac{[\sqrt{8n+1}]^2+2[\sqrt{8n+1}]-8n+8}{8}. \tag{6.9}$$

Наконец, заменяя x на $l(n)$ и y на $r(n)$, получаем формулы для нумерации $n \mapsto (l(n), r(n))$, опираясь на равенства (6.5), (6.8), (6.9):

$$l(n)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{8n+1}-1}{2}, & \text{если } 8n+1 \text{ является квадратом натурального числа;} \\ \dfrac{8n+1-[\sqrt{8n+1}]^2}{8}, & \text{если } 8n+1 \text{ не является квадратом и } [\sqrt{8n+1}]\in 2\mathbb{N}-1; \\ \dfrac{8n+1-([\sqrt{8n+1}]-1)^2}{8}, & \text{если } 8n+1 \text{ не является квадратом и } \left[\sqrt{8n+1}\right]\in 2\mathbb{N}; \end{cases}$$

$$r(n)=\begin{cases} 1, & \text{если } 8n+1 \text{ является квадратом натурального числа;} \\ \dfrac{\left[\sqrt{8n+1}\right]^2+4\left[\sqrt{8n+1}\right]-8n+11}{8}, & \text{если } 8n+1 \text{ не является квадратом и } [\sqrt{8n+1}]\in 2\mathbb{N}-1; \\ \dfrac{\left[\sqrt{8n+1}\right]^2+2\left[\sqrt{8n+1}\right]-8n+8}{8}, & \text{если } 8n+1 \text{ не является квадратом и } [\sqrt{8n+1}]\in 2\mathbb{N}. \end{cases}$$

Пример 7. Показать, что множество целых рациональных чисел $\mathbb{Q}$ – счетное, а множество $\mathbb{R}$ действительных чисел не является счетным.

Р е ш е н и е. Согласно примеру 5 множество $\mathbb{Z}$ счетно, а тогда согласно примеру 6 множество $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ также счетно. Отсюда следует счетность множества $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^{\#}$ как бесконечного подмножества счетного множества. Теперь каждой паре $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^{\#}$ поставим в соответствие рациональное число $\dfrac{x}{y}$ и получим сюръективное отображение множества $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^{\#}$ на $\mathbb{Q}$. Значит, множество $\mathbb{Q}$ счетно как бесконечный образ счетного множества при сюръективном отображении.

Для доказательства второго утверждения достаточно убедиться в том, что полуоткрытый интервал $[0,1)=\{x\in\mathbb{R} \mid 0\leqslant x<1\}$ не является счетным. Применим *диагональный метод Кантора* [39]. Допустим от противного, что это не так. Тогда существует биекция ν множества $\mathbb{N}$ на $[0,1)$. Это означает, что числа из интервала $[0,1)$ могут быть расположены в виде последовательности $x_1, x_2, \ldots$, где для каждого индекса $i\in\mathbb{N}$ имеют место равенства $x_i=\nu(i)$. При этом каждое число x_i может быть записано в виде бесконечной десятичной дроби $x_i=0,\ a_1(x_i)a_2(x_i)\ldots$, где для $j\in\mathbb{N}$ $a_j(x_i)\in\{0,1,\ldots,9\}$. Далее построим десятичное число $\xi=0,\ b_1b_2\ldots$, где для $j\in\mathbb{N}$ $b_j\in\{0,1,\ldots,8\}$. Это число подобрано таким образом, что не равно $a_j(x_j)$. Покажем, что число ξ не участвует в последовательности $x_1, x_2, \ldots$, и тем самым придем к противоречию. Действительно, если предположить, что $\xi=x_n$ для некоторого $n\in\mathbb{N}$, то $b_n=a_n(x_n)$, что противоречит выбору b_n. Итак, множество $\mathbb{R}$ не является счетным.

Пример 8. Пусть X – некоторое непустое множество. Обозначим через 2^X множество всех подмножеств множества X. Рассмотрим следующие операции [19]: пересечение множеств $\cap : (A, B) \mapsto A \cap B$ для $A, B \in 2^X$; объединение множеств $\cup : (A, B) \mapsto A \cup B$ для $A, B \in 2^X$; дополнение $^{-}: A \mapsto \overline{A} = X \setminus A$ для $A, B \in 2^X$; симметрическую разность $\Delta : (A, B) \mapsto A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Предположим, что $n \in N$ и X – конечное множество с n элементами, например $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Каждому элементу множества 2^X можно поставить в соответствие (обозначим это соответствие через ζ) двоичную последовательность (битовую строку) длины n следующим образом. Пусть $A \subseteq X$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, тогда последовательность $\zeta(A)$ имеет на k-м месте 0, если $x_k \notin A$, и 1, если $x_k \in A$. Нетрудно увидеть, что ζ есть биекция множества 2^X на множество всех битовых строк длины n (это множество обозначим через $\mathbf{2}^n$). Какие операции над битовыми строками соответствуют приведенным выше операциям над множествами?

Решение. Операциям $\cap, \cup, ^{-}, \Delta$ соответствуют следующие поразрядные операции над битовыми строками: $\wedge$ (логическое И, или логическое умножение); $\vee$ (логическое ИЛИ, или логическое сложение); $\rceil$ (логическое НЕ, или дополнение до единицы); ^ (логическое ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ, или операция сравнения). В самом деле, для любых двух подмножеств A и B множества X непосредственно проверяются следующие равенства: $\zeta(A \cap B) = \zeta(A) \wedge \zeta(B)$, $\zeta(A \cup B) = \zeta(A) \vee \zeta(B)$, $\zeta(\overline{A}) = \zeta(X \setminus A) = \rceil\zeta(A)$, $\zeta(A \Delta B) = \zeta(A) \hat{} \zeta(B)$.

Пример 9. Пусть σ и τ – два (бинарных) отношения на множестве X. Рассмотрим отношение $\sigma \circ \tau = \{(x, y) \in X \times X \mid \exists z \in X\, ((x, z) \in \sigma \wedge (z, y) \in \tau)\}$ и отношение $\sigma^{-1} = \{(x, y) \in X \times X \mid (y, x) \in \sigma\}$. Операция $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma \circ \tau$ называется *суперпозицией* или *сверткой отношений*, а операция $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ – *обращением бинарных отношений*. Проверить справедливость следующих свойств этих операций:

1) $(\sigma \circ \tau) \circ \nu = \sigma \circ (\tau \circ \nu)$;

2) $(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$;

3) $(\sigma \circ \tau)^{-1} = \tau^{-1} \circ \sigma^{-1}$

для любых $\sigma, \tau, \nu \in 2^{X \times X}$.

Решение. При данных предположениях $(x, y) \in (\sigma \circ \tau) \circ \nu \Leftrightarrow \exists z \in X((x, z) \in \sigma \circ \tau \wedge (z, y) \in \nu) \Leftrightarrow \exists z \in X\ \exists u \in X((x, u) \in \sigma \wedge (u, z) \in \tau \wedge (z, y) \in \nu) \Leftrightarrow \exists u \in X\, ((x, u) \in \sigma \wedge (u, y) \in \tau \circ \nu) \Leftrightarrow (x, u) \in \sigma \circ (\tau \circ \nu)$. Таким образом, свойство 1 справедливо, а справедливость свойств 2 и 3 легко проверяется непосредственно.

Пример 10. Пусть X, Y, Z – три множества и $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ – отображения. Доказать следующие утверждения:

1) если U – некоторое множество и h – отображение из Z в U, то $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$;

2) если f и g инъективны, то отображение $g \circ f : X \to Z$ инъективно;

3) если f и g сюръективны, то $g \circ f$ сюръективно;

4) если f и g биективны, то $g \circ f$ биективно;

5) если $g \circ f$ инъективно, то f инъективно;

6) если $g \circ f$ сюръективно, то g сюръективно;

7) f биективно тогда и только тогда, когда существует отображение $h : Y \to X$ такое, что $f \circ h = \mathrm{id}\, Y$, $h \circ f = \mathrm{id}\, X$;

8) множество X^X всех преобразований множества X образует полугруппу с нейтральным элементом $\mathrm{id}\, X$ (т.е. моноид).

Р е ш е н и е. Если $x \in X$, то $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x))$, поэтому $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ и операция $\circ$ ассоциативна. Утверждение 1 доказано.

Пусть теперь f и g – инъективные отображения. Если $x_1, x_2 \in X$ и $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, то $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ и из инъективности g вытекает, что $f(x_1) = f(x_2)$, а тогда ввиду инъективности f имеем $x_1 = x_2$. Значит, отображение $g \circ f$ инъективно. Утверждение 2 доказано. Аналогично доказывается утверждение 3.

Утверждение 4 следует непосредственно из утверждений 2 и 3.

Докажем утверждение 5. Если отображение $g \circ f$ инъективно, то для $x_1, x_2 \in X$ из равенства $f(x_1) = f(x_2)$ следует, что $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Тогда инъективность $g \circ f$ влечет равенство $x_1 = x_2$. Следовательно, отображение f инъективно.

Докажем утверждение 6. Если отображение $g \circ f$ сюръективно, то для каждого элемента $z \in Z$ существует $x \in X$ такой, что $z = (g \circ f)(x)$. Положив $y = f(x)$, получим равенство $z = g(y)$. Таким образом, g сюръективно, что и требовалось доказать.

Докажем утверждение 7. Пусть $f : X \to Y$ – биекция. Тогда для каждого $y \in Y$ существует единственный элемент $x \in X$ такой, что $f(x) = y$. Рассмотрим соответствие $h : y \mapsto x$. Ввиду вышесказанного это соответствие биективно отображает Y на X и, кроме того, $h \circ f = \mathrm{id}\, X$ и $f \circ h = \mathrm{id}\, Y$, так как $h(f(x)) = x$ для всякого элемента x из X и $f(h(y)) = y$ для всякого элемента y из Y. Необходимость утверждения 7 доказана. Для доказательства достаточности предположим, что $f : X \to Y$ и $h : Y \to X$ – такие отображения, что $h \circ f = \mathrm{id}\, X$ и $f \circ h = \mathrm{id}\, Y$. Тогда f инъективно согласно утверждению 5 и сюръективно согласно утверждению 6. В этом случае h также биективно и определяется единственным образом. Оно называется *обратным отображением* к f и обознаначается через f^{-1}. Утверждение 7 доказано.

То, что $(X^X, \circ)$ – полугруппа, следует из утверждения 1. Из очевидных равенств $\mathrm{id}\, X \circ f = f \circ \mathrm{id}\, X = f$ для любого $f \in X^X$ вытекает, что $\mathrm{id}\, X$ является нейтральным элементом относительно суперпозиции и $(X^X, \circ, \mathrm{id}\, X)$ есть моноид. Итак, утверждение 8 доказано.

Пример 11. Рассмотрим бинарные операции $\cap, \cup, \Delta$ на множестве 2^X всех подмножеств множества X, указанные в примере 7. Какие из этих операций ассоциативны и имеют нейтральный элемент? Что можно сказать о существовании симметричного элемента для каждого элемента множества 2^X по отношению к рассматриваемым операциям?

Р е ш е н и е. Пусть $A, B, C \in 2^X$. Нетрудно видеть, что множества $A \cap (B \cap C)$ и $(A \cap B) \cap C$ состоят из элементов, принадлежащих каждому из множеств A, B, C, а множества $A \cup (B \cup C)$ и $(A \cup B) \cup C$ состоят из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B, C. Таким образом, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ и $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. Следовательно, операции $\cap$ и $\cup$ ассоциативны. Очевидно, что они вместе с операцией Δ коммутативны.

Далее будем доказывать справедливость равенства $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$. По определению операции Δ для $x \in X$ имеем: $x \in B\Delta C \Leftrightarrow (x \in B \wedge x \notin C \vee \vee (x \notin B \wedge x \in C))$ и $x \notin B\Delta C \Leftrightarrow (x \notin B \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \notin C) \Leftrightarrow (x \notin B \wedge x \notin C) \vee \vee (x \in B \wedge x \in C)$. Поэтому $x \in A\Delta(B\Delta C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B\Delta C) \vee (x \notin A \wedge x \in B\Delta C) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) = (x \in C \wedge x \notin B \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \in B \wedge x \in A) \vee (x \notin C \wedge x \in B \wedge x \notin A) \vee \vee (x \notin C \wedge x \notin B \wedge x \in A) \Leftrightarrow x \in C\Delta(B\Delta A) = x \in (A\Delta B)\Delta C$.

Таким образом, операция Δ ассоциативна и $(2^X, \cap)$, $(2^X, \cup)$, $(2^X, \Delta)$ – коммутативные полугруппы. Легко видеть, что все они имеют нейтральные элементы – соответственно X, $\varnothing$ и $\varnothing$. В случае операции Δ для каждого элемента $A \in 2^X$ существует ему симметричный. Это сам элемент A ввиду того, что $A \Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \varnothing$. В случае операции пересечения симметричный элемент существует лишь для X, а в случае операции объединения – лишь для $\varnothing$. Таким образом, из полугрупп $(2^X, \cap)$, $(2^X, \cup)$, $(2^X, \Delta)$ в нетривиальном случае $\operatorname{Card} X > 1$ только $(2^X, \Delta)$ является группой.

Пример 12. Пусть X – некоторое непустое множество. Доказать, что множество $\operatorname{Sym}(X)$ всех подстановок множества X образует группу относительно операции суперпозиции преобразований (*симметрическая группа множества* X; если $\operatorname{Card} X = n \in \mathbb{N}$, то эта группа называется *симметрической группой n-й степени* и обозначается через S_n).

Решение. Согласно примеру 10 суперпозиция подстановок есть подстановка. Принимая во внимание ассоциативность операции суперпозиции, приходим к тому, что $(\operatorname{Sym} X, \circ)$ – полугруппа. Так как тождественное преобразование $\operatorname{id} X$ является подстановкой, то эта полугруппа есть моноид с нейтральным элементом $\operatorname{id} X$.

Поскольку для каждой подстановки существует обратная подстановка, то $(\operatorname{Sym} X, \circ)$ – группа.

Пример 13. Доказать, что множество всех перемещений плоскости (т.е. подстановок, сохраняющих расстояния между точками) является группой относительно операции суперпозиции подстановок.

Решение. Пусть Π – плоскость и $\rho : \Pi \times \Pi \to \mathbb{R}$ – функция расстояния между точками. Положим

$$H = \{f \in \operatorname{Sym}(\Pi) \mid \forall\, x, y \in \Pi (\rho(f(x), f(y)) = \rho(x, y))\}.$$

Покажем, что H есть группа относительно операции суперпозиции подстановок. Воспользуемся понятием подгруппы. Если мы покажем, что множество H замкнуто в $\operatorname{Sym}(\Pi)$ относительно суперпозиции и взятия обратной подстановки, то H будет подгруппой группы $(\operatorname{Sym}(\Pi), \circ)$ и относительно операции суперпозиции перемещений, индуцированной операцией $\circ$ на множестве $\operatorname{Sym}(\Pi)$, – группой. Итак, надо доказать, что суперпозиция перемещений есть перемещение и подстановка, обратная к перемещению, есть перемещение. Пусть $f, g \in H$. Если $x, y \in \Pi$, то

$$\rho((f \circ g)(x), (f \circ g)(y)) = \rho(f(g(x)), \quad f(g(y))) = \rho(g(x)), g(y)) = \rho(x, y),$$

поэтому $f \circ g \in H$. Далее, $\rho(x, y) = \rho((f \circ f^{-1})(x),\ (f \circ f^{1})(x)) = \rho(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$, откуда следует, что $f^{-1} \in H$. Значит, H является подгруппой группы $(\operatorname{Sym}(\Pi), \circ)$ и группой относительно операции суперпозиции. Итак, если $(G, *)$ – группа, $\varnothing \neq H \subseteq G$ и операция $*_H$ на H индуцирована операцией $*$, то для проверки того, что $(H, *_H)$ есть группа, достаточно показать, что множество H замкнуто относительно операции $*$ и взятия симметричного элемента.

Пример 14. Доказать, что всякая группа изоморфна некоторой подгруппе подходящей симметрической группы.

Р е ш е н и е. Пусть $(G,\cdot)$ – группа. Покажем, что эта группа изоморфна некоторой подгруппе группы $(\mathrm{Sym}(G),\circ)$. Для этого достаточно найти такую инъекцию $\lambda: G\to \mathrm{Sym}(G)$, что выполнятся следующие условия:

1) $\lambda(gh)=\lambda(g)\circ\lambda(h)$, $\forall g,h\in G$;

2) $\lambda(g^{-1})=\lambda(g)^{-1}$, $\forall g\in G$.

В самом деле, тогда λ биективно отображает G на $\lambda(G)$, причем последнее множество будет подгруппой группы $(\mathrm{Sym}(G),\circ)$, так как оно замкнуто относительно суперпозиции подстановок согласно условию 1 и замкнуто относительно взятия обратного элемента согласно условию 2. По условию 1 λ изоморфно отображает группу $(G,\cdot)$ на группу $(\lambda(G),\circ)$. Рассмотрим произвольный элемент $g\in G$ и преобразование $\lambda_g: x\mapsto gx$ группы G. Ввиду того что для любых $g,h\in G$ уравнение $gx=h$ относительно x имеет единственное решение, то λ_g есть биекция G на G, т.е. $\lambda_g\in\mathrm{Sym}(G)$. Рассмотрим отображение $\lambda: G\to\mathrm{Sym}(G)$, где для $g\in G$ $\lambda(g)=\lambda_g$. Если $g,h\in G$ и $\lambda_g=\lambda_h$, то для $x\in G$ имеем равенство $gx=hx$, которое в силу закона сокращения приводит к равенству $g=h$. Следовательно, λ – инъекция.

Далее, для любых g, h, $x\in G$ имеем: $\lambda_{gh}(x)=(gh)x=g(hx)=(\lambda_g\circ\lambda_h)(x)$, поэтому $\lambda(gh)=\lambda(g)\circ\lambda(h)$ и условие 1 выполняется. Теперь пусть 1 – единица группы G. Тогда для $x\in G$ имеем: $\lambda_1(x)=1\cdot x=x$ и $\lambda_1=\mathrm{id}\,X$. Поэтому согласно условию 1 получаем равенства $\lambda_g\circ\lambda_{g^{-1}}=\lambda_{g^{-1}}\circ\lambda_g=\lambda_1=\mathrm{id}\,G$ для $g\in G$. Отсюда следует, что $\lambda_g^{-1}=\lambda_{g^{-1}}$, $\lambda(g)^{-1}=\lambda(g^{-1})$ и условие 2 для λ выполняется.

Пример 15. Пусть S – множество комплексных чисел, состоящее из всех чисел вида $a+bi$, где $a,b\in\mathbb{Q}$. Проверить, будет ли множество S относительно операций сложения и умножения комплексных чисел образовывать кольцо или поле относительно операций сложения и умножения комплексных чисел.

Р е ш е н и е. Так как для любых $a,b,c,d\in\mathbb{Q}(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$ и множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел замкнуто относительно вычитания, то множество S замкнуто в $\mathbb{C}$ относительно вычитания. Следовательно, S есть подгруппа аддитивной группы комплексных чисел, потому $(S,+)$ – абелева группа. Так как множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел замкнуто в S относительно сложения, вычитания и умножения, то для любых $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$ комплексное число $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$ принадлежит S. Поэтому операция на S, индуцированная умножением комплексных чисел, – полная (везде определена). Поскольку умножение комплексных чисел дистрибутивно относительно сложения, постольку выполняется дистрибутивность умножения в S относительно сложения. Следовательно, $(S,+,\cdot)$ – кольцо. Так как умножение комплексных чисел ассоциативно и коммутативно, то это – ассоциативное и коммутативное кольцо, причем с единицей ввиду того, что $1=1+0\cdot i\in S$. Теперь докажем, что $(S,+,\cdot)$ – поле. Для этого надо установить, что множество $S^{\#}$ ненулевых элементов кольца $(S,+,\cdot)$ образует подгруппу мультипликативной группы поля комплексных чисел. Пусть a, $b\in Q$, $a+bi\neq 0$. Тогда

$$a^2+b^2\neq 0,\quad (a+bi)^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i\in S^{\#},$$

поэтому $(S^{\#},\cdot)$ есть группа и $(S,+,\cdot)$ – числовое поле.

6.1. Построить граф отношения σ, индуцированного на множестве $X = \{-3, -2, 0, 4, 6\}$ отношением делимости целых чисел.

6.2. Выяснить, какими из основных свойств отношений обладают следующие бинарные отношения на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел:

1) $n\sigma_1 m \Leftrightarrow$ числа m и n взаимно просты; 2) $n\sigma m \Leftrightarrow n = m^2$;

3) $n\sigma m \Leftrightarrow n < m$; 4) $n\sigma m \Leftrightarrow n \leqslant m^2$;

5) $n\sigma m \Leftrightarrow n+2 \leqslant m < n+5$; 6) $n\sigma m \Leftrightarrow 5 \mid m-n$;

7) $n\sigma m \Leftrightarrow n \mid m^2$.

6.3. Отношение порядка на множестве X называется *линейным*, если выполняется соотношение $\sigma \cup \sigma^{-1} = X \times X$. Для отношения порядка σ, рассмотренного в задаче 6.1, найти все линейные отношения порядка, содержащие σ. Является ли σ пересечением этих отношений порядков?

6.4. Является ли отношение $\{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,3)\}$ отношением эквивалентности на множестве $\{1,2,3\}$?

6.5. Показать, что отношение параллельности прямых на плоскости есть отношение эквивалентности. Выбрать какой-либо трансверсал этого отношения.

6.6. Пусть $\boldsymbol{a} \in V_3$. Показать, что отношение $\sigma_{\boldsymbol{a}}$ на V_3, для которого выполняется $\boldsymbol{b}\sigma_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c} \Leftrightarrow \boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ac}$ для всех $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V_3$, есть отношение эквивалентности. При каком условии, налагаемом на вектор $\boldsymbol{a}$, соответствующее разбиение множества V_3 состоит из одного класса эквивалентности?

6.7. На множестве комплекснозначных функций $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ рассмотреть отношение $\sigma: f(x)\sigma g(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}\ \exists t_\varepsilon \in \mathbb{R}\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ (|t_\varepsilon| \leqslant |x| \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(x) - g(x)| \leqslant |\varepsilon|)$. Является ли σ отношением эквивалентности?

6.8. Отношение σ называется *отношением квазипорядка*, если оно рефлексивно и транзитивно. Выяснить, какие из бинарных отношений, заданных на множестве всех бесконечных последовательностей действительных чисел, являются отношениями эквивалентности, порядка или квазипорядка:

1) $(a_1, a_2, \ldots)\sigma(b_1, b_2, \ldots) \Leftrightarrow a_k \leqslant b_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots$;

2) $(a_1, a_2, \ldots)\sigma(b_1, b_2, \ldots) \Leftrightarrow$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $a_k = b_k$ для всех $k = n+1, n+2, \ldots$;

3) $(a_1, a_2, \ldots)\sigma(b_1, b_2, \ldots) \Leftrightarrow$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $a_k \leqslant b_k$ для всех $k = n+1, n+2, \ldots$;

4) $(a_1, a_2, \ldots)\sigma(b_1, b_2, \ldots) \Leftrightarrow a_k = b_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$ или найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $a_n < b_n$ и $a_k \leqslant b_k$ для всех $k = n+1, n+2, \ldots$.

6.9. Показать, что отношение σ на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел является отношением квазипорядка, но не является отношением порядка, где $m\sigma n \Leftrightarrow |m| \leqslant |n|$.

6.10. Показать, что отношение $\leqslant$ обычного порядка на множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел рефлексивно, антисимметрично, транзитивно и линейно и, кроме того, удовлетворяет следующему условию: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $(x \leqslant y \Rightarrow x+z \leqslant y+z)$. Показать, что на множестве $\mathbb{C}$ можно ввести отношение порядка, удовлетворяющее таким же условиям.

6.11. Пусть X – множество. Показать, что отношение включения $\subseteq$ на множестве 2^X есть отношение порядка. Изобразить граф этого отношения для множества $X = \{1, 2, 3\}$.

6.12. Выяснить, какие из следующих бинарных отношений на множестве $C([a,b])$ всех непрерывных дествительных функций, определенных на отрезке $[a,b]$, $a < b$, являются отношениями порядка:

1) $f\sigma g \Leftrightarrow \forall c \in [a,b]\ (f(c) \leqslant g(c))$;

2) $f\sigma g \Leftrightarrow \max\{f(c) | c \in [a,b]\} \leqslant \max\{g(c) | c \in [a,b]\}$;

3) $f\sigma g \Leftrightarrow (f(a) \leqslant g(a) \wedge f(b) \leqslant g(b))$.

6.13. На множестве $\mathbf{2}^n$ битовых строк длины n рассмотреть следующие отношения:

$\forall a,b \in \mathbf{2}^n (a\sigma_1 b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbf{2}^n (c \wedge a = b))$;

$\forall a,b \in \mathbf{2}^n (a\sigma_2 b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbf{2}^n (c \vee b = a))$.

Показать, что σ_1 и σ_2 – равные отношения порядка.

6.14. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{2, 3, 4\}$. Показать, что соответствие $f = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,2)\}$ является полным отображением, а соответствие $g = \{(2,1), (2,3), (4,3), (2,4)\}$ не является частичным отображением.

6.15. Какие из функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg} x$, e^x, $\ln x$, $2x+1$, $1/x$ являются полными преобразованиями множества $\mathbb{R}$? Какие из них инъективны и какие сюръективны?

6.16. Пусть A – фиксированное подмножество множества X. Рассмотрим следующие преобразования множества 2^X: для каждого $B \in 2^X$ $f_A : B \mapsto A \cap B$, $g_A : B \mapsto A \cup B$, $h_A : B \mapsto A \Delta B$. Определить, для каких подмножеств A каждое из определенных выше преобразований инъективно, сюръективно, биективно. Является ли преобразование $A \mapsto \overline{A} = X \setminus A$ множества 2^X биективным?

6.17. Показать, что существуют биекции интервалов $[0,1]$ и $(0,1)$ на множество $\mathbb{R}$.

6.18. Пусть $f : X \to Y$ – отображение и $A \subseteq X$. Проверить, что инъективность f влечет инъективность его ограничения $f|_A$ на A и сюръективность $f|_A$ влечет сюръективность f.

6.19. Пусть $f : X \to X$ – преобразование конечного множества X. Доказать, что его инъективность равносильна его сюръективности и равносильна его биективности.

6.20. На множестве $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ рассмотреть операцию $\dot{-}$, где для $m,\ n \in \mathbb{N}_0$

$$m \dot{-} n = \begin{cases} m - n, & \text{если } n \leqslant m; \\ 0, & \text{если } m < n. \end{cases}$$

Является ли эта операция индуцированной операцией вычитания целых чисел?

6.21. На множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел рассмотреть операцию $\div$, где для $m,\ n \in \mathbb{Z}$

$$m \div n = \begin{cases} \left[\dfrac{m}{n}\right], & \text{если } n \neq 0; \\ \text{результат не определен, если } n = 0. \end{cases}$$

Является ли операция $\div$ индуцированной операцией деления действительных чисел?

6.22. Являются ли полными следующие операции:

1) сложение десятичных констант с фиксированной точкой;
2) умножение десятичных констант с фиксированной точкой;
3) сложение десятичных констант с плавающей точкой;
4) умножение десятичных констант с плавающей точкой?

6.23. Пусть X – некоторое множество символов и X^* означает множество всех литерных строк (слов, цепочек) над алфавитом X, т.е. последовательностей вида $a_1 \ldots a_n$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, а также пустую цепочку $\lambda = ""$. Бинарная операция сцепления (конкатенации) $\|$ на множестве X^* определяется следующим образом: если $\alpha = a_1 \ldots a_n$, $\beta = b_1 \ldots b_m$, то $\alpha \| \beta = a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_m$ и $\lambda \| \alpha = \alpha \| \lambda = \alpha$, $\lambda \| \lambda = \lambda$. Показать, что $(X^*, \|, \lambda)$ – моноид с законом сокращения, но не группа. Рассмотреть отношение σ на X^* «быть префиксом»: если $\alpha, \beta \in X^*$, то $\alpha\sigma\beta \Leftrightarrow \exists \varphi \in X^* (\alpha \| \varphi = \beta)$. Проверить, что σ есть отношение порядка.

6.24. Выяснить выполнение свойств (определенность, ассоциативность, наличие нейтрального элемента) для следующих операций:

1) сложение натуральных чисел;
2) умножение натуральных чисел;
3) вычитание действительных чисел;
4) деление действительных чисел;
5) векторное умножение векторов в пространстве V_3.

6.25. Выяснить, выполняются ли свойства (коммутативность, ассоциативность, наличие нейтрального элемента, наличие симметричного элемента для каждого элемента из множества $\mathbb{N}$) для следующих операций, заданных на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$:

1) $(a, b) \mapsto c$, где c – наибольший общий делитель чисел a и b;
2) $(a, b) \mapsto c$, где c – наименьшее общее кратное чисел a и b;

3) $(a,b)\mapsto \min\{1, a-b\}$;

4) $(a,b)\mapsto a^b$;

5) $(a,b)\mapsto \left[\frac{a}{b}\right]+\left[\frac{b}{a}\right]$.

6.26. Выяснить, образует ли полугруппу, моноид, группу указанное множество относительно данной операции:

1) множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел, операция – сложение натуральных чисел;

2) множество $\mathbb{N}$, операция – умножение натуральных чисел;

3) множество $\mathbb{Z}$ целых чисел, операция – сложение целых чисел;

4) $(\mathbb{Q},+)$;

5) $(\mathbb{Q},\cdot)$;

6) множество $\mathbb{Q}^{\#}$ ненулевых рациональных чисел, операция – умножение рациональных чисел;

7) множество $\mathbb{Q}_+$ положительных рациональных чисел, операция – умножение рациональных чисел;

8) множество рациональных чисел вида $m/2^k$, $m\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{N}$ (*двоично-рациональных чисел*), операция – сложение рациональных чисел;

9) множество двоично-рациональных чисел без нуля, операция – умножение рациональных чисел;

10) $(\mathbb{R},+)$;

11) $(\mathbb{R},\cdot)$;

12) множество $\mathbb{R}^{\#}$ ненулевых действительных чисел, операция – умножение действительных чисел;

13) множество $\mathbb{R}_+$ положительных действительных чисел, операция – умножение действительных чисел;

14) отрезок [0, 1], операция – умножение действительных чисел;

15) множество комплексных чисел вида $a+bi$, где $a,b\in\mathbb{Z}$, операция – сложение комплексных чисел;

16) множество K_n всех корней n-й степени из 1, операция – умножение комплексных чисел;

17) множество K_∞ всех корней из 1, операция – умножение комплексных чисел;

18) множество всех комплексных чисел с аргументом α, операция – сложение комплексных чисел;

19) множество всех дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$, $a<b$, a, $b\in\mathbb{R}$, операция – поаргументное сложение функций;

20) множество V_3 всех векторов пространства, операция – сложение векторов;

21) множество $V_2(\Pi)$ векторов, параллельных плоскости Π, операция – сложение векторов;

22) множество $V_1(\Delta)$ векторов, параллельных прямой Δ, операция – сложение векторов;

23) множество поворотов плоскости вокруг точки O, операция – суперпозиция подстановок;

24) множество $\mathbf{2}^n$ битовых строк длины n, операция – логическое сложение: $1100 \vee 1010 = 1110$;

25) множество $\mathbf{2}^n$, операция – сложение с переносом единицы в младший разряд: $1100 \oplus 1010 = 0111$;

26) множество $\mathbf{2}^n$, операция – логическое умножение: $1100 \wedge 1010 = {}$ $= 1000$;

27) множество $\mathbf{2}^n$, операция – ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ, ^, XOR (сравнение): $1100 \,\hat{}\, 1010 = 0110$.

Какие из указанных операций коммутативны?

6.27. Пусть $(G, \cdot)$ – группа. Доказать, что $(a^{-1})^{-1} = a$ и $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ для любых $a, b \in G$.

6.28. Пусть $(G, \ \cdot)$ – группа с нейтральным элементом n. Показать, что если $a^2 = n$, $\forall a \in G$, то группа $(G, \ \cdot)$ абелева.

6.29. Показать, что множество $T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ образует группу относительно операции умножения комплексных чисел. Выяснить геометрический смысл операции взятия обратного элемента: $z \mapsto z^{-1}$.

6.30. Показать, что симметрическая группа n-й степени состоит из $n!$ элементов.

6.31. Показать, что множество строго возрастающих сюръективных действительных функций из $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$ образует подгруппу группы подстановок множества $\mathbb{R}$. Выяснить геометрический смысл соответствия $f \mapsto f^{-1}$.

6.32. Доказать, что никакое непустое конечное подмножество множества $\mathbb{R}$, кроме $\{0\}$, не является подгруппой аддитивной группы действительных чисел.

6.33. Доказать, что множество радиусов-векторов точек I координатной четверти не образует подгруппу группы векторов плоскости относительно операции сложения векторов.

6.34. Показать, что на множестве всех подгрупп данной группы отношение «быть подгруппой» является отношением порядка.

6.35. Доказать соотношения:

1) $(\mathbb{Z}, +) \leqslant (\mathbb{Q}, +) \leqslant (\mathbb{R}, +) \leqslant (\mathbb{C}, +)$;

2) $(\mathbb{Q}^{\#}, \cdot) \leqslant (\mathbb{R}^{\#}, \cdot) \leqslant (\mathbb{C}^{\#}, \cdot)$;

3) $(K_\infty, \cdot) \leqslant (T, \cdot) \leqslant (\mathbb{C}, \cdot)$;

4) $\forall n \in \mathbb{N}((K_n, \cdot) \leqslant (K_\infty, \cdot))$;

5) если натуральное число n делит число m, то $(K_n, \ \cdot) \leqslant (K_m, \ \cdot)$;

6) $(V_1(\Delta), +) \leqslant (V_3, +)$, $(V_2(\Pi), +) \leqslant (V_3, +)$;

7) если прямая Δ параллельна плоскости Π, то $(V_1(\Delta), +) \leqslant (V_2(\Pi), +)$.

6.36. Доказать, что группа поворотов плоскости вокруг точки O относительно суперпозиции подстановок плоскости изоморфна группе $(T, \ \cdot)$ комплексных чисел, по модулю равных единице.

6.37. Доказать, что мультипликативная группа действительных чисел не изоморфна группе положительных действительных чисел относительно операции умножения.

6.38. Доказать, что аддитивная группа действительных чисел изоморфна группе положительных действительных чисел относительно операции умножения.

6.39. Доказать, что аддитивная группа рациональных чисел не изоморфна группе положительных рациональных чисел относительно операции умножения.

6.40. Выяснить, какие из множеств образуют кольцо, область целостности или поле относительно заданных операций сложения и умножения:

1) множество $\mathbb{Z}$, операции – сложение и умножение целых чисел;

2) множество $2\mathbb{Z}$ четных чисел, операции – сложение и умножение целых чисел;

3) множество $\mathbb{Q}$, операции – сложение и умножение рациональных чисел;

4) множество двоично-рациональных чисел, операции – сложение и умножение рациональных чисел;

5) множество $\mathbb{R}$, операции – сложение и умножение действительных чисел;

6) множество $\mathbb{C}$, операции – сложение и умножение комплексных чисел;

7) множество $\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$, операции – сложение и умножение действительных чисел;

8) множество $\{a+b\sqrt{3} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$, операции – сложение и умножение действительных чисел;

9) множество $\mathrm{C}[a,b]$ непрерывных функций на отрезке $[a,b]$, $a<b \in \mathbb{R}$, операции – поаргументное сложение и умножение функций;

10) множество битовых строк длины $n \in N$, операции – сравнение ^ и логическое умножение.

6.41. Показать, что множество всех подмножеств множества X, $\mathrm{Card}\, X>1$, относительно операции сложения $A \Delta B=(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ и операции умножения $A \cdot B = A \cap B$ образует ассоциативное коммутативное кольцо с единицей и делителями нуля.

Глава 7
МНОГОЧЛЕНЫ

Пусть P – числовое поле. Функция $f:P\to P$ называется *многочленом над полем* P, если ее значения вычисляются по формуле

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k,\quad \forall x\in P,\quad a_k\in P.$$

Если при этом $a_n\neq 0$, то $n=\deg f(x)$ – степень многочлена $f(x)$. Если $a_0=a_1=\ldots=a_n=0$, то степень многочлена $f(x)$ (тогда он называется *нулевым*) полагается равной $-\infty$. Многочлен единственным образом определяется набором коэффициентов.

Множество $P[x]$ многочленов от переменной x над полем P составляет ассоциативное коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля (т.е. область целостности) относительно операций поаргументного сложения и умножения.

Пусть $f(x)$, $g(x)\in P[x]$. Тогда имеют место соотношения:

$$\deg(f(x)+g(x))\leqslant\max\{\deg f(x),\deg g(x)\},$$

$$\deg(f(x)g(x))=\deg f(x)+\deg g(x).$$

Многочлен $g(x)$ считается *делителем многочлена* $f(x)$, если существует такой многочлен $h(x)\in P[x]$, что $f(x)=g(x)h(x)$. В этом случае говорят, что многочлен $g(x)$ *делит* $f(x)$ или $f(x)$ *делится на* $g(x)$, и пишут $g(x)|f(x)$. *Наибольшим общим делителем* (НОД) двух многочленов считается такой их общий делитель, который делится на любой их общий делитель.

Если $g(x)$ – ненулевой многочлен, то существуют однозначно определенные многочлены $h(x)$, $r(x)\in P[x]$ (*частное* и *остаток*) такие, что

$$f(x)=g(x)h(x)+r(x)\tag{7.1}$$

и $\deg r(x)<\deg g(x)$. В частности, $g(x)|f(x)\Leftrightarrow r(x)=0(x)$. Процесс нахождения частного и остатка называется *делением с остатком*. Деление с остатком используется в алгоритме Евклида при нахождении НОД двух многочленов.

Если $f(x)$, $g(x)$ – непостоянные многочлены над полем P и $d(x)$ – их НОД, то существуют многочлены $u(x),v(x)\in P[x]$ такие, что

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x),\tag{7.2}$$

причем $\deg u(x) < \deg g(x)$, $\deg v(x) < \deg f(x)$. Нахождение $u(x)$ и $v(x)$ можно осуществлять как с помощью алгоритма Евклида, так и используя метод неопределенных коэффициентов.

Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ называются *взаимно простыми*, если степень их НОД равна нулю. Критерий взаимной простоты состоит в существовании таких многочленов $u(x), v(x) \in P[x]$, что $f(x)u(x)+$ $+g(x)v(x)=1$.

Пусть $f(x) \in P[x]$, $\alpha \in P$. Остаток от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $x-\alpha$ равен постоянному многочлену со значением $f(\alpha)$. Если $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, то коэффициенты частного $h(x)=\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$ и остаток можно найти по *схеме Горнера*:

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_2	a_1	a_0
α	$b_{n-1}=a_n$	$b_{n-2}=a_{n-1}+$ $+\alpha b_{n-1}$	$\dots$	$b_1=a_2+\alpha b_2$	$b_0=a_1+\alpha b_1$	$f(\alpha)=a_0+$ $+\alpha b_0$

Схему Горнера можно применять для вычисления коэффициентов разложения многочлена $f(x)$ по степеням $x-\alpha$ и значений кратных производных $f'(\alpha)$, $f''(\alpha), \dots, f^{(l)}(\alpha), \dots, f^{(n)}(\alpha)$. Именно: если $f(x)=c_0+c_1(x-\alpha)+c_2(x-\alpha)^2+\dots+c_l(x-\alpha)^l+\dots+c_n(x-\alpha)^n$, то $f(\alpha)=c_0$, $f'(\alpha)=1!\cdot c_1$, $f''(\alpha)=2!\cdot c_2, \dots, f^{(l)}(\alpha)=l!\cdot c_l, \dots, f^{(n)}(\alpha)=n!\cdot c_n$.

Всякий многочлен $f(x)\in\mathbb{C}[x]$ степени больше нуля имеет хотя бы один корень и разлагается в произведение вида

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_m)^{k_m}.$$

где a_n – старший коэффициент; $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ – множество всех его корней и $k_1, \dots, k_m$ – их соответствующие кратности. При этом $m \leqslant n$ и $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$.

Если $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ – последовательность, состоящая из различных чисел поля P и $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$ – произвольная последовательность чисел поля P, то существует единственный многочлен $f(x)\in P[x]$ степени не большей n такой, что $f(\gamma_l)=\beta_l$, $l=0,1,\dots,n$. Он может быть найден с помощью *интерполяционной формулы Лагранжа*:

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{\beta_j(x-\gamma_0)\cdots(x-\gamma_{j-1})(x-\gamma_{j+1})\cdots(x-\gamma_n)}{(\gamma_j-\gamma_0)\cdots(\gamma_j-\gamma_{j-1})(\gamma_j-\gamma_{j+1})\cdots(\gamma_j-\gamma_n)}.$$

Еще один способ построения такого многочлена состоит в следующем: если $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k$, то коэффициенты a_k могут быть вычислены путем решения системы $n+1$ линейных уравнений с неизвестными $a_0, a_1, ..., a_n$:

$$\sum_{k=0}^{n}a_k\gamma_l^k=\beta_l,\quad l=0,1,...,n.$$

Связь между корнями и коэффициентами многочлена выражается *формулами Виета*: если $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ – последовательность всех корней многочлена $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k \in \mathbb{C}[x]$ степени n над полем P, то верны равенства:

$$\frac{a_{n-1}}{a_n}=-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n),$$

$$\frac{a_{n-2}}{a_n}=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n,$$

....

$$\frac{a_{n-k}}{a_n}=(-1)^k\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\ldots<j_k\leqslant n}\alpha_{j_1}\alpha_{j_2}\cdots\alpha_{j_k},$$

....

$$\frac{a_0}{a_n}=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.$$

Пусть все коэффициенты многочлена $f(x)\in\mathbb{C}[x]$ действительны. Если $\alpha\in\mathbb{C}$ – корень многочлена $f(x)$ кратности $k\in\mathbb{N}$, то сопряженное к α число $\overline{\alpha}$ есть также корень многочлена $f(x)$ кратности k.

Пусть $f(x)\in P[x]$. Многочлен $f(x)$ степени больше нуля называется *неприводимым над полем P*, если он не имеет непостоянных делителей меньшей степени, чем $\deg f(x)$. Неприводимыми многочленами над полем $\mathbb{C}$ являются только многочлены первой степени. Неприводимыми многочленами над полем $\mathbb{R}$ являются только многочлены первой степени либо многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом. Всякий многочлен $f(x)$ над полем $\mathbb{R}$ степени больше нуля разлагается в произведение многочлена нулевой степени и неприводимых многочленов над полем $\mathbb{R}$ со старшим коэффициентом 1. Такое разложение единственно с точностью до перестановки сомножителей.

Пример 1. Найти частное и остаток от деления многочлена $f(x)=21x^5-$ $-17x^4+28x^3-6x^2+2$ на многочлен $g(x)=-3x^2+2x+1$.

Решение. Деление с остатком многочленов является аналогом деления с остатком целых чисел, и его можно производить так называемым «уголком»:

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{\overset{\displaystyle 21x^5-17x^4+28x^3-6x^2+2}{-\;21x^5-14x^4-7x^3\qquad\qquad}} & \underline{-3x^2+2x+1} \\
\underline{\overset{\displaystyle -3x^4+35x^3-6x^2+2}{-\;-3x^4+2x^3+x^2\qquad}} & -7x^3+x^2-11x-5 \\
\underline{\overset{\displaystyle 33x^3-7x^2+2}{-\;33x^3-22x^2-11x}} & \\
\underline{\overset{\displaystyle 15x^2+11x+2}{-\;15x^2-10x-5}} & \\
21x+7 &
\end{array}
$$

Следовательно, $f(x)=g(x)(-7x^3+x^2-11x-5)+21x+7$ и многочлен $q(x)=$ $=-7x^3+x^2-11x-5$ является частным, а $r(x)=21x+7$ – остатком от деления $f(x)$ на g.

Пример 2. Найти остаток от деления многочлена $f(x)=x^{261}+x^{236}-10x^{182}+$ $+10x^{179}+5x^2+300$ на многочлен $g(x)=x^3-1$.

Решение. Воспользовавшись утверждением (7.1), многочлен $f(x)$ можно записать в виде $f(x)=(x^3-1)q(x)+ax^2+bx+c$, где $q(x)$ – многочлен с рациональными коэффициентами; $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Присваивая в этом равенстве переменной x значение $\varepsilon_k=e^{\frac{2\pi k}{3}i}$, $k=0,1,2$, корня третьей степени из 1, получаем: $f(\varepsilon_k)=\varepsilon_k^{261}+\varepsilon_k^{236}-10\varepsilon_k^{182}+10\varepsilon_k^{179}+5\varepsilon_k^2+300=1+\varepsilon_k^2-10\varepsilon_k^2+10\varepsilon_k^2+5\varepsilon_k^2+300=6\varepsilon_k^2+$ $+301=(\varepsilon_k^3-1)q(\varepsilon_k)+a\varepsilon_k^2+b\varepsilon_k+c=a\varepsilon_k^2+b\varepsilon_k+c$. Итак, для $k=0,1,2$ имеем $(a-6)\varepsilon_k^2+b\varepsilon_k+c-301=0$. Полагая $x=a-6$, $y=b$, $z=c-301$ и используя то, что $\varepsilon_2=\varepsilon_1^2$, получаем систему трех линейных уравнений относительно неизвестных x,y,z:

$$
\begin{cases}
x+y+z=0,\\
\varepsilon_1^2x+\varepsilon_1y+z=0,\\
\varepsilon_1x+\varepsilon_1^2y+z=0.
\end{cases}
$$

Решая эту систему, заключаем, что она имеет единственное решение $x=0$, $y=0$, $z=0$. Следовательно, $a=6$, $b=0$, $c=301$ и остаток от деления $f(x)$ на $g(x)$ равен $6x^2+301$.

Пример 3. Найти НОД многочленов $f(x)=x^5+3x^4+3x^3+x^2-x-1$ и $g(x)=x^4-2x^3-x^2-2x+1$.

Решение. Находим НОД$(f(x),g(x))$, используя алгоритм Евклида, а именно: сначала находим остаток $r_1(x)$ от деления многочлена $f(x)$ на $g(x)$ (так как $\deg f(x)>\deg g(x)$, то в качестве делимого следует брать $f(x)$). Если

$r_1(x) \neq 0(x)$, то делим $g(x)$ с остатком на $r_1(x)$ и получаем $r_2(x)$ и так до тех пор, пока при делении ненулевого остатка $r_k(x)$ на ненулевой остаток $r_{k+1}(x)$ не получим нулевой остаток. Тогда в качестве НОД$(f(x), g(x))$ можно взять последний ненулевой остаток $r_{k+1}(x)$. В процессе последовательных делений с остатком для удобства вычислений промежуточные делимые можно умножать на ненулевые элементы из поля P.

Итак, делим $f(x)$ на $g(x)$ с остатком:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
- & x^5+ & 3x^4+ & 3x^3+ & x^2- & x & -\,1 & x^4-2x^3-x^2-2x+1 \\ \cline{8-8}
 & x^5- & 2x^4- & x^3- & 2x^2+ & x & & x+5 \\ \cline{2-7}
- & & 5x^4+ & 4x^3+ & 3x^2- & 2x & -\,1 & \\
 & & 5x^4- & 10x^3- & 5x^2- & 10x & +\,5 & \\ \cline{3-7}
 & & r_1(x)= & 14x^3+ & 8x^2+ & 8x & -\,6 &
\end{array}
$$

Теперь делим с остатком $g(x)$ на $r_1(x)$, предварительно разделив все коэффициенты многочлена $r_1(x)$ на 2 и умножив многочлен $g(x)$ на 7:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
- & 7x^4- & 14x^3- & 7x^2- & 14x & +\,7 & & 7x^3+4x^2+4x-3 \\ \cline{8-8}
 & 7x^4+ & 4x^3+ & 4x^2- & 3x & & & x-18\,//^{*} \\ \cline{2-7}
 & & -18x^3- & 11x^2- & 11x & +\,7 & & \\ \hdashline
- & & -126x^3- & 77x^2- & 77x & +\,49 & & \\
 & & -126x^3- & 72x^2- & 72x & +\,54 & & \\ \cline{2-7}
 & r_2(x)= & & -5x^2- & 5x & -\,5 & &
\end{array}
$$

Далее делим с остатком многочлен $r_1(x)$ на $r_2(x)$, предварительно разделив все коэффициенты многочлена $r_2(x)$ на -5:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
- & 7x^3+ & 4x^2+ & 4x & -\,3 & x^2+x+1 \\ \cline{6-6}
 & 7x^3+ & 7x^2+ & 7x & & 7x+1\,// \\ \cline{2-5}
 & & -3x^2- & 3x & -\,3 & \\ \hdashline
- & & x^2+ & x & +\,1 & \\
 & & x^2+ & x & +\,1 & \\ \cline{2-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Следовательно, x^2+x+1 есть НОД $(f(x), g(x))$ как последний ненулевой остаток при применении к $f(x)$ и $g(x)$ алгоритма Евклида.

---

[*] Знак // означает, что частное искажается в процессе деления.

Пример 4. Для двух многочленов $f(x)=(x-1)^3$ и $g(x)=(x+2)^2$ найти такие многочлены $u(x)$ и $v(x)$, что $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$.

Решение. *Способ 1.* Из утверждения (7.2) следует, что многочлен $u(x)$ можно искать в виде a_1x+b_1, а многочлен $v(x)$ – в виде $b_2x^2+b_1x+b_0$, где $a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$. Удобнее (так как $f(x)$ есть степень $(x-1)^3$, а $g(x)$ – степень $(x+2)$) представить многочлены $u(x)$ и $v(x)$ в виде $u(x)=a(x+2)+b$, $v(x)=c(x-1)^2+d(x-1)+e$, где $a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}$. Коэффициенты a, b, c, d, e определяем из равенства

$$(x-1)^3(a(x+2)+b)+(x+2)^2(c(x-1)^2+d(x-1)+e)=1. \qquad (7.3)$$

Присваивая переменной x значение 1, имеем $9e=1$, следовательно, $e=1/9$. Полагая в равенстве (7.3) $x=-2$, получаем $(-3)^3b=1$, откуда $b=-1/27$. Далее, дифференцируя правые и левые части равенства (7.3) при $x=-2$ и $x=1$, приходим к равенствам $(-3)^3a+3(-3)^2(-1/27)=0$, $2(1+2)\big(1/9\big)+(1+2)^2d=0$. Значит, $a=-1/27$, $d=-2/27$. Сравнивая теперь коэффициенты при x^4 в обеих частях равенства (7.3), заключаем, что $c=-a=1/27$. Итак,

$$u(x)=-\frac{1}{27}(x+2)-\frac{1}{27}=-\frac{1}{27}(x+3),$$

$$v(x)=\frac{1}{27}(x-1)^2-\frac{2}{27}(x-1)+\frac{1}{9}=\frac{1}{27}(x^2-2x+1-2x+2+3)=\frac{1}{27}(x^2-4x+6).$$

Способ 2. Определим многочлены $u(x)$ и $v(x)$, исходя из алгоритма Евклида. Для этого разделим с остатком многочлен $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$ на многочлен $g(x)=x^2+4x+4$:

$$\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^3-3x^2+3x-1 \\ x^3+4x^2+4x\phantom{{}-1} \end{array} & \begin{array}{l} x^2+4x+4 \\ \hline x-7=q_1(x) \end{array} \\
\cline{1-1}
-\begin{array}{r} -7x^2-x-1 \\ -7x^2-28x-28 \end{array} & \\
\cline{1-1}
r_1(x)= 27x+27 &
\end{array}$$

Далее разделим с остатком многочлен $g(x)$ на $r_1(x)$:

$$\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^2+4x+4 \\ x^2+x\phantom{{}+4} \end{array} & \begin{array}{l} 27x+27 \\ \hline \frac{1}{27}x+\frac{1}{9}=q_2(x) \end{array} \\
\cline{1-1}
-\begin{array}{r} 3x+4 \\ 3x+3 \end{array} & \\
\cline{1-1}
r_2(x)= 1 &
\end{array}$$

Поскольку $\deg r_2(x) \neq 0$ и $27x+27$ делится на $r_2(x)$, то $r_2(x)$ есть НОД $(f(x), g(x))$. Предыдущие вычисления приводят к следующим равенствам:

$$\begin{cases} f(x) = g(x)(x-7) + r_1(x), \\ g(x) = r_1(x)\left(\dfrac{1}{27}x + \dfrac{1}{9}\right) + 1. \end{cases} \tag{7.4}$$

Из первого равенства системы (7.4) выражаем $r_1(x)$ через $f(x)$ в $g(x)$ и подставляем во второе:

$$r_1(x) = f(x) + g(x)(7-x), \quad g(x) = (f(x) + g(x)(7-x))\left(\frac{1}{27}x + \frac{1}{9}\right) + 1.$$

После упрощений в последнем равенстве получаем:

$$1 = f(x)\left(-\frac{1}{27}x - \frac{1}{9}\right) + g(x)\left(\frac{1}{27}x^2 - \frac{4}{27}x + \frac{6}{27}\right).$$

Следовательно,

$$u(x) = -\frac{1}{27}(x+3), \quad v(x) = \frac{1}{27}(x^2 - 4x + 6).$$

Пример 5. Найти частное и остаток от деления многочлена $f(x) = x^6 + (1-i)x^4 + (1+i)x^3 + 2ix^2 + x + 1$ на многочлен $x+i$.

Решение. Воспользуемся схемой Горнера:

	a_6 1	a_5 0	a_4 $1-i$	a_3 $1+i$	a_2 $2i$	a_1 1	a_0 1
$-i$	$b_5 =$ $= a_6 =$ $=1$	$b_4 =$ $= b_5(-i)+$ $+a_5 =$ $=-i$	$b_3 =$ $=-ib_4+$ $+a_4 =$ $=-i$	$b_2 =$ $=-ib_3+$ $+a_3 =$ $=i$	$b_1 =$ $=-ib_2+$ $+a_2 =$ $=1+2i$	$b_0 =$ $=-ib_1+$ $+a_1 =$ $=3-i$	$f(-i) =$ $=-ib_0+$ $+a_0 =$ $=-3i$

Таким образом, $f(x) = (x+i)(x^5 - ix^4 - ix^3 + ix^2 + (1+2i)x + 3 - i) + (-3i)$.

Пример 6. Многочлен $f(x) = x^5 - x^4 + 5x^2 - 100$ разложить по степеням $x+1$ и вычислить значения кратных производных при $x = -1$.

Решение. Для разложения многочлена $f(x)$ по степеням $x+1$ можно применять схему Горнера, производя деление с остатком $f(x)$ на $x+1$, получившееся частное снова деля с остатком на $x+1$ и т.д. Если

$$f(x) = a_5(x+1)^5 + a_4(x+1)^4 + a_3(x+1)^3 + a_2(x+1)^2 + a_1(x+1) + a_0, \tag{7.5}$$

то $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = ((((a_5(x+1) + a_4)(x+1) + a_3)(x+1) + a_2) \times \times (x+1) + a_1)(x+1) + a_0$, поэтому коэффициенты $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ являются остатками от деления последовательно получающихся частных на $x+1$. Вычисления можно производить по схеме, объединяющей схемы Горнера для последовательных делений частных на $x+1$:

	1	−1	0	5	0	−100	
−1	1	−2	2	3	−3	−97	$=a_0$
−1	1	−3	5	−2	−1	$=a_1$	
−1	1	−4	9	−11	$=a_2$		
−1	1	−5	14	$=a_3$			
−1	1	−6	$=a_4$				
−1	1	$=a_5$					

Следовательно, $f(x)=(x+1)^5-6(x+1)^4+14(x+1)^3-11(x+1)^2-(x+1)-97$. Из разложения (7.5) непосредственным вычислением k-й производной получаем: $f^{(k)}(-1)=k!a_k$, $k=\overline{1,5}$. Таким образом, $f(-1)=-97$, $f'(-1)=-1$, $f''(-1)=-22$, $f'''(-1)=3!\cdot 14=84$, $f^{(4)}(-1)=4!\cdot(-6)=-144$, $f^{(5)}(-1)=5!\cdot 1=120$, $f^{(6)}(-1)=0,\dots$.

Пример 7. Разложить на линейные множители над полем $\mathbb{C}$ многочлен $f(x)=24x^4-58x^3+17x^2+7x-2$.

Р е ш е н и е. Попытаемся найти рациональные корни многочлена $f(x)$. Для этого покажем, что если $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$ – многочлен с рациональными коэффициентами степени $n>0$ и $\alpha=\dfrac{p}{q}$ – его корень, где p и q взаимно просты, то:

1) q есть делитель a_n;

2) p есть делитель a_0;

3) для любого целого m число $f(m)$ делится на $p-mq$, в частности $f(1)$ делится на $p-q$ и $f(-1)$ делится на $p+q$.

В самом деле, из равенства $f\left(\dfrac{p}{q}\right)=0$ следует, что $\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\dfrac{p^k}{q^k}=0$, поэтому $\sum\limits_{k=0}^{n}a_kq^{n-k}p^k=0$. Ввиду того что p и q взаимно просты, из равенства $\sum\limits_{k=1}^{n}a_kq^{n-k}p^k=-a_0q^n$ следует, что число a_0 делится на p, и из равенства $\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_kq^{n-k}p^k=-a_np^n$ следует, что a_n делится на q.

Далее, пусть m – произвольное целое число. Разделив с остатком многочлен $f(x)$ на $x-m$, получим $f(x)=g(x)(x-m)+f(m)$, где $g(x)$ – некоторый многочлен с целыми коэффициентами. Присвоив в этом равенстве $x=\dfrac{p}{q}$, получим числовое равенство

$$f(m)=g\left(\frac{p}{q}\right)\left(m-\frac{p}{q}\right). \tag{7.6}$$

Поскольку многочлен $g(x)$ имеет степень $n-1$, то после умножения обеих частей равенства (7.6) на q^n имеем:

$$q^n f(m) = \left(q^{n-1} g\left(\frac{p}{q}\right)\right)(qm-p),$$

где $q^{n-1} g\left(\frac{p}{q}\right)$ – целое число.

Следовательно, число $q^n f(m)$ делится на $p-qm$, что приводит к делимости $f(m)$ на $p-qm$, так как $p-qm$ взаимно просто с q^n. Утверждения пп. 1–3 доказаны. Воспользуемся ими для нахождения рациональных корней многочлена $f(x)=24x^4-58x^3+17x^2+7x-2$. Делителями свободного члена являются числа ±1, ±2, а делителями старшего коэффициента – числа ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±8, ±12, ±24, поэтому если несократимая дробь $\alpha=\frac{p}{q}$ есть корень многочлена $f(x)$, то $p\in\{\pm1,\pm2\}$, $q\in\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24\}$.

Теперь, чтобы выявить целые корни, вычислим значения $f(x)$ при $x\in\{\pm1, \pm2\}$: $f(1)=24-58+17+7-2=-12$, $f(-1)=24+58+17-7-2=90$. Значение $f(2)$ находим по схеме Горнера:

	24	−58	17	7	−2
2	24	−10	−3	1	0

Таким образом, $\alpha=2$ есть один из корней многочлена $f(x)$, а многочлен $g(x)=24x^3-10x^2-3x+1$ – частное от деления многочлена $f(x)$ на $x-2$.

Теперь будем искать рациональные корни многочлена $g(x)$. Так как $g(1)=12\neq0$, $g(-1)=-30\neq0$, то $g(x)$ не имеет целых корней и его рациональными корнями могут быть только числа вида $\frac{1}{q}$, где $q\in\{\pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24\}$. Из утверждения п. 3 следует, что число $1-q$ должно делить $g(1)=12$, а число $1+q$ – делить число 30, откуда выводим, что $q\in\{2,-2,-3, 4\}$. Вычислим $g\left(\frac{1}{q}\right)$ по схеме Горнера:

	24	−10	−3	1
1/2	24	2	−2	0
1/2	24	14	5	
−1/3	24	−6	0	
1/4	24	0		

Следовательно, остальные корни многочлена $f(x)$ равны: соответственно $\alpha_2=1/2$, $\alpha_3=-1/3$, $\alpha_4=1/4$ и получаем разложение $f(x)$ на линейные множители:

$$f(x)=24(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right).$$

7.1. Вычислить сумму и произведение многочленов $f(x)$ и $g(x)$:
1) $f(x)=x^3+2x+2$, $g(x)=x^4+3x^2-3x+1$;
2) $f(x)=x^3-5x^2+2$, $g(x)=x^5-x^4+x^3+2x-3$.
7.2. Найти сумму коэффициентов многочлена
$f(x)=(2-5x+x^3)^{211}(3-7x+9x^2-5x^3)^{135}$.
7.3. Выполнить деление с остатком многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$:
1) $f(x)=2x^4+5x^3+7x^2+2x+4$, $g(x)=x^2-x+1$;
2) $f(x)=x^3-4x-4$, $g(x)=3x^2+4x+2$;
3) $f(x)=x^4+4x^3+5x^2-x-1$, $g(x)=x^2+2x-3$;
4) $f(x)=2x^2-3x+1$, $g(x)=x^3+4$;
5) $f(x)=2x^3+3x^2-4x+1$, $g(x)=2x-1$;
6) $f(x)=3x^5+x^4-2x^2+5$, $g(x)=x+1$.
7.4. Воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов, найти остаток от деления многочлена $f(x)$ на $g(x)$:
1) $f(x)=x^{62}+4x^{31}+7$, $g(x)=x^2-1$;
2) $f(x)=x^{17}-x^{10}-2x^3-1$, $g(x)=x^2+1$;
3) $f(x)=x^{243}+x^{81}+x^{27}+x^9+x^3+x+1$, $g(x)=x^4-1$;
4) $f(x)=x^{16}-2x^{15}-x^8+2x^7+x^4-2x^3-x^2+2x+1$, $g(x)=x^2-x-2$;
5) $f(x)=x^{10}-2x^9-x^8+3x^2-2x+1$, $g(x)=x^4+1$.
7.5. При каких значениях параметров $a, b, c, d\in\mathbb{R}$ многочлен $f(x)$ делится на $g(x)$:
1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, $g(x)=x^2+ax+1$;
2) $f(x)=x^4+ax^2+b$, $g(x)=x^2+x+c$;
3) $f(x)=x^4+ax+b$, $g(x)=x^2+dx+1$?
7.6. При каких натуральных n многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$:
1) $f(x)=x^n-1$, $g(x)=x^2+x+1$;
2) $f(x)=x^n+1$, $g(x)=x^2-x+1$;
3) $f(x)=x^{2n}+x^n+1$, $g(x)=x^2+x+1$;
4) $f(x)=(x+1)^n-x^n-1$, $g(x)=x^2+x+1$;
5) $f(x)=x^n-(x+1)^n-1$, $g(x)=x^2-x-1$?
7.7. Определить, делится ли многочлен $f(x)$ на $g(x)$:
1) $f(x)=x^{300}+x^{100}+x^{50}$, $g(x)=x^2+x+1$;
2) $f(x)=x^{404}+x^{397}+x^{242}+x^{39}$, $g(x)=x^3+x^2+x+1$;
3) $f(x)=x^{1812}+x^{1713}+x^{1709}+x^{1380}+x^{911}$, $g(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$;

4) $f(x) = (\cos e - x^2 \sin e)^n - \cos(ne) + x^2 \sin(ne)$, $g(x) = x^4 + 1$;

5) $f(x) = x^{n+1} \sin 1 - r^{n-1} x^2 \sin n + r^{n+1} \cos 1 (\sin(n-1) + i \cos(n-1))$, $g(x) = x^2 - (2r \cos 1)x + r^2$, $r > 0$.

7.8. Показать, что многочлен $(2x+1)^n - x^n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, не делится на многочлен $x^2 - 2x - 1$ ни при каком $n \in \mathbb{N}$.

7.9. При делении многочлена $f(x)$ на $x - 1$ и на $x + 3$ остатки равны соответственно -4 и 6. Чему равен остаток от деления многочлена $f(x)$ на $(x-1)(x+3)$?

7.10. Найти НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$:

1) $f(x) = x^3(x+1)^2(x-2)(x-1)$, $g(x) = x^3(x+1)(x+3)$;

2) $f(x) = (x-2)(x^2-4)(x^3-8)(x^4-16)$, $g(x) = (x+2)(x^2+4) \times$ $\times (x^3+8)(x^4+16)$;

3) $f(x) = (x^3-8)(x^2-4x+4)(x^2-4)^3$, $g(x) = (x^2-4)^2$;

4) $f(x) = (x-1)(x+2)^2(x-3)$, $g(x) = x^2 + x - 6$;

5) $f(x) = x^{54} - 1$, $g(x) = x^{48} - 1$;

6) $f(x) = x^{121} - 1$, $g(x) = x^{77} - 1$.

7.11. Использовав алгоритм Евклида, найти НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$:

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x + 2$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4$;

2) $f(x) = 2x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, $g(x) = x^5 - 1$;

3) $f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 - 3x^2 - 6x - 3$, $g(x) = x^4 - 2x^2 + 1$;

4) $f(x) = 2x^6 - 2x^5 + 3x^3 - x^2 + 1$, $g(x) = 2x^3 + 1$;

5) $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 4x - 2$, $g(x) = 2x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 17x^2 - 14x + 6$;

6) $f(x) = 2x^6 - 2x^5 - x^4 + 5x^3 + 20x^2 + 18x + 60$, $g(x) = 4x^6 - 22x^4 +$ $+ 28x^3 + 8x^2 + 56x + 136$.

7.12. Представить наибольший общий делитель $d(x)$ многочленов $f(x)$ и $g(x)$ в виде $d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$, где $\deg u(x) < \deg g(x)$, $\deg v(x) < \deg f(x)$:

1) $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2$, $g(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x - 2$;

2) $f(x) = 2x^4 + x^3 + 2x + 1$, $g(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$;

3) $f(x) = 6x^3 + 4x^2 + x - 1$, $g(x) = 6x^3 + 10x^2 - x - 1$;

4) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$, $g(x) = x^3 + 3x + 2$;

5) $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 6x - 3$, $g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$;

6) $f(x) = 3x^6 + x^5 - 11x^4 + 7x^3 + 3x^2 + 9x - 12$, $g(x) = 3x^6 - 8x^5 + 7x^4 -$ $-2x^3 + 3x^2 - 3$.

7.13. Использовав метод неопределенных коэффициентов для данных многочленов $f(x)$ и $g(x)$, найти многочлены $u(x)$ и $v(x)$ такие, что $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$, где $\deg u(x)<\deg g(x)$, $\deg v(x)<\deg f(x)$:

1) $f(x)=x^3+x+1$, $g(x)=x^2-x+1$;

2) $f(x)=x^3-x^2-x+2$, $g(x)=x^3+4x^2+5x+2$;

3) $f(x)=x^3$, $g(x)=(x+1)^2$;

4) $f(x)=x^5-5x^4+9x^3-7x^2+5x-3$, $g(x)=x^4-2x^3+2x^2-x+1$;

5) $f(x)=3x^3+2x^2+x+1$, $g(x)=3x^4+5x^3+4x^2+2x+1$;

6) $f(x)=x^4$, $g(x)=(x-1)^4$.

7.14. Для рациональной дроби $\dfrac{h(x)}{f(x)g(x)}$ найти ее представление в виде $\dfrac{u(x)}{g(x)}+\dfrac{v(x)}{f(x)}$, где $\deg u(x)<\deg g(x)$; $\deg v(x)<\deg f(x)$:

1) $h(x)=x^2$, $f(x)=(x+1)^2$, $g(x)=(x-1)^3$;

2) $h(x)=x^4+1$, $f(x)=x^2+x+1$, $g(x)=(x+1)^3$;

3) $h(x)=1$, $f(x)=(x^2-x+1)^2$, $g(x)=x^4+1$;

4) $h(x)=x^4$, $f(x)=x^3+x+1$, $g(x)=x^2+3x+2$;

5) $h(x)=x^3+1$, $f(x)=(x^2+2)^2$, $g(x)=x^3+x^2+x+1$;

6) $h(x)=x^4+2$, $f(x)=x^6-x^4+3x^2-2x+20$, $g(x)=x^3+2$.

7.15. Показать, что если $d(x)\neq 0(x)$ – НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то частные от деления этих многочленов на $d(x)$ взаимно просты.

7.16. Представить число $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}$ в форме $a\sqrt[3]{9}+b\sqrt[3]{3}+c$, где $a,b,c\in\mathbb{Q}$.

7.17. Использовав схему Горнера, найти частное и остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x-c$:

1) $f(x)=x^4+2x^2+20x+7$, $c=-3$;

2) $f(x)=2x^4-3x^3-5x^2+8x-3$, $c=4$;

3) $f(x)=x^3+x^2-7$, $c=4+4i$;

4) $f(x)=3x^5-x^4+2x^3-x+5$, $c=-1+i$;

5) $f(x)=2x^5+2x^3+x$, $c=1+2i$.

7.18. Вычислить $f(c)$, использовав схему Горнера:

1) $f(x)=22x^4-50x^3+24x^2-8x+1$, $c=1/2$;

2) $f(x)=3x^5-3x^3+4ix+1$, $c=1+i$;

3) $f(x)=x^5+(2i-1)x^3-2ix-5$, $c=1-i$.

7.19. Разложить многочлен $f(x)$ по степеням $x-c$:

1) $f(x)=x^3-2x^2+4$, $c=-2$;

2) $f(x)=x^3-2x^2+10x+1,\ c=3;$

3) $f(x)=x^5+4x^4+3x^2+x,\ c=i;$

4) $f(x)=x^4-18x^3+12x+5,\ c=-i;$

5) $f(x)=2x^4+3x^2-4x+7,\ c=1.$

7.20. Разложить многочлен $f(x)$ по степеням x:

1) $f(x)=4(x-2)^4-2(x-2)^2+5(x-2)-1;$

2) $f(x)=3(x+3)^4+8(x+3)^3-2(x+3)^2+6(x+3)-1600;$

3) $f(x)=(x+i)^6+(2-i)(x+i)^4+(i-1)(x+i)^3+(1+i)(x+i)^2-(1+i)\times$ $\times(x+i)+3-i.$

7.21. Посредством схемы Горнера найти значения многочлена $f(x)$ и всех его кратных производных при $x=c$:

1) $f(x)=x^4-4x^3+8x^2+3x-4,\ c=-1;$

2) $f(x)=x^3-8x^2+12x+9,\ c=1;$

3) $f(x)=x^6-15x^4+8x^3-16x-16,\ c=-2;$

4) $f(x)=x^5-10x^3-20x^2-15x+4,\ c=1-i;$

5) $f(x)=x^5+x^4-x^3-2x-1,\ c=1+i.$

7.22. Использовав схему Горнера, разложить на простейшие дроби:

1) $\dfrac{x^2}{(1-x)^{100}};$ 2) $\dfrac{x^3+3x-1}{(x+1)^5};$

3) $\dfrac{x^4+2x^2+2}{(x^2+1)^3};$ 4) $\dfrac{x^6+4x^4+3x^2}{(x^2+1)^5}.$

7.23. Использовав схему Горнера, найти НОД многочленов $f(x)=(x+1)^{201}(x-2)^{170}(x+3)^{47}$ и $g(x)=10x^7-2x^6+3x^5+9x^4+7x^3+$ $+15x^2-4.$

7.24. Представить число α^9, где $\alpha=\sqrt[3]{2}+1$, в виде $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$, где $a,b,c\in\mathbb{Q}$, использовав схему Горнера.

7.25. Определить кратность корня α многочлена $f(x)$:

1) $\alpha=-1,\ f(x)=x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4;$

2) $\alpha=4,\ f(x)=x^5-10x^3-20x^2-15x-4;$

3) $\alpha=-3,\ f(x)=x^6-15x^4+8x^3+51x^2-72x+27;$

4) $\alpha=1+i,\ f(x)=x^5-6x^4+16x^3-24x^2+20x-8;$

5) $\alpha=1+i,\ f(x)=x^7-3x^6+5x^5-7x^4+7x^3-5x^2-2.$

7.26. При каких значениях a многочлен $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ имеет кратный корень:

1) $f(x)=x^3+ax^2+3x-1;$

2) $f(x)=2x^3-x^2+ax+3?$

Какова кратность этого корня?

7.27. При каких p, q, r каждый из следующих многочленов делится на $(x+1)^3$:

1) $f(x)=x^3+px^2+qx+r$;

2) $f(x)=x^4+px^3+qx+r$;

3) $f(x)=x^n+px^2+qx+r,\ n\geqslant 4$?

7.28. При каких натуральных n многочлен $f(x)$ делится на $(x-1)^2$:

1) $f(x)=x^n-nx+n-1$;

2) $f(x)=x^{2n}-x^{n+1}-5x+5$?

7.29. При каких $p, q\in\mathbb{C}$ многочлен x^6+px+q имеет кратный корень?

7.30. Показать, что многочлен $f(x)=x^n+px^m+q$ $(q\neq 0,\ 1\leqslant m<n)$ над числовым полем не может иметь корней кратности больше 2.

7.31. Доказать, что многочлен $f(x)=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}$ не имеет кратных корней.

7.32. Разложить многочлен $f(x)$ на неприводимые множители над полем $\mathbb{C}$:

1) $f(x)=x^3-3x+2$;

2) $f(x)=x^3+6x^2+11x+6$;

3) $f(x)=x^4+1$;

4) $f(x)=x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1$;

5) $f(x)=x^3-5x^2+8x-4$.

7.33. Разложить многочлен $f(x)$ на неприводимые множители над полем $\mathbb{C}$ и над полем $\mathbb{R}$:

1) $f(x)=x^4-4x+3$;

2) $f(x)=x^4+x^2+1$;

3) $f(x)=x^4+4x^2+4x+1$;

4) $f(x)=x^4+3x^3+\dfrac{9}{2}x^2+3x+1$;

5) $f(x)=x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$;

6) $f(x)=x^4+16$;

7) $f(x)=(x^2+x)^2-4(x^2+x)-12$;

8) $f(x)=(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$;

9) $f(x)=(x-1)x(x+1)(x+2)-24$;

10) $f(x)=x^4-10x^3+25x^2-6$.

7.34. Найти над полем $\mathbb{C}$ все корни многочлена $f(x)$, если известен один из его корней c:

1) $f(x)=x^3+4x^2+3x-30,\ c=-3+i\sqrt{6}$;

2) $f(x)=42x^4-18x^3-53x^2+24x-4,\ c=\dfrac{3}{14}+i\dfrac{\sqrt{5}}{14}$;

3) $f(x)=2x^4-10x^3-13x^2+144x-410,\ c=2-i\sqrt{6}$.

7.35. При каком $m\in\mathbb{N}$ многочлен $(x+1)^m-x^m-1$ делится на $(x^2+x+1)^2$?

7.36. Предположим, что модуль каждого корня многочлена $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ не превосходит 1. Что можно сказать о модулях корней многочленов $g(x)=a_nx^n-a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+(-1)^{n-k}a_kx^k+\ldots+(-1)^na_0$ и $R(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$?

7.37. Найти рациональные корни многочленов:

1) $2x^3+17x^2+46x+36$;

2) $3x^5+11x^4+14x^3+6x^2-x-1$;

3) $8x^6-20x^5+18x^4+x^3-11x^2+6x-1$;

4) $x^5-2x^4-4x^3+4x^2-5x+16$.

7.38. Найти НОД многочлена и его производной:

1) $f(x)=(x-1)^2(x+1)^3(x-2)^4$;

2) $f(x)=(x+1)^3(x-2)^3(x+4)$;

3) $f(x)=(x^2-1)^2(x^2+1)^3(x^4-1)$;

4) $f(x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)^2(x^4+x^2+1)^2$;

5) $f(x)=x^7-x^5-x^2+1$.

7.39. Пусть $f(x)=(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_m)^{k_m}$, где $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ — попарно различные корни многочлена $f(x)$. Показать, что НОД многочлена и его производной имеет вид $d(x)=(x-\alpha_1)^{k_1-1}\times$ $\times(x-\alpha_2)^{k_2-1}\cdots(x-\alpha_m)^{k_m-1}$. Использовав это, разложить на линейные множители над полем $\mathbb{C}$ следующие многочлены:

1) $f(x)=x^6+6x^5+9x^4-8x^3-24x^2+16$;

2) $f(x)=x^5+5x^4-40x^2-80x-48$;

3) $f(x)=x^6+12x^5+45x^4+48x^3-21x^2-60x-25$;

4) $f(x)=x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1$;

5) $f(x)=x^7+11x^6+53x^5+143x^4+231x^3+221x^2+115x+25$;

6) $f(x)=x^6+2x^5-9x^4-4x^3+31x^2-30x+9$;

7) $f(x)=x^6+2x^5-x^4-4x^3-x^2+2x+1$;

8) $f(x)=2x^6-ix^5+5x^4-2ix^3+4x^2-ix+1$.

7.40. Какой многочлен над полем $\mathbb{C}$ n-й степени делится на свою производную?

7.41. Показать, что уравнение четвертой степени $x^4+px^3+qx^2+$ $+rx+s$ над полем $\mathbb{R}$ путем деления на x^2 и подстановки $y=x+\dfrac{r}{px}$

сводится к квадратному уравнению, если $p^2s=r^2$, $p\neq 0$, $r\neq 0$. Использовав это, найти корни многочленов:

1) $x^4-x^3+2x^2-2x+4=0$;

2) $x^4+2x^3-9x^2-6x+9=0$.

7.42. Найти корни многочлена

$$f(x)=1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+(-1)^k\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}+\ldots+$$
$$+(-1)^n\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}.$$

7.43. Доказать, что если многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами и со старшим коэффициентом 1 не имеет действительных корней, то $f(x)=(g(x))^2+(h(x))^2$ для некоторых многочленов $g(x)$ и $h(x)$ с действительными коэффициентами.

7.44. Показать, что если в задаче 7.43 степень многочлена $f(x)$ равна 4, то найдутся действительные числа g,h,u,v такие, что $f(x)=(x^2+gx+h)^2+(ux+v)^2$. Воспользовавшись этим, найти корни следующих многочленов:

1) $x^4-6x^3+15x^2-18x+10$;

2) $x^4-6x^3+11x^2-6x+10$;

3) $x^4-8x^3+27x^2-50x+50$;

4) $x^4+4x^3+11x^2+14x+10$.

7.45. Найти корни многочлена $(1+x+x^2+\ldots+x^n)^2-x^n$, где $n\geqslant 3$.

7.46. Доказать, что ни для одного многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами не может быть $f(7)=5$, $f(15)=9$.

7.47. Доказать, что многочлен $f(x)$ второй или третьей степени над полем $\mathbb{Q}$ приводи́м тогда и только тогда, когда $f(x)$ имеет рациональный корень.

7.48. Каким условиям должны удовлетворять действительные числа p и q, чтобы многочлен x^3+px+q имел три различных действительных корня?

7.49. Доказать, что многочлен с действительными коэффициентами степени больше нуля имеет единственный положительный корень, если его старший коэффициент положительный, а остальные коэффициенты отрицательные.

7.50. Доказать, что если все корни многочлена с действительными коэффициентами действительны, то и все его кратные производные имеют только действительные корни.

7.51. Пусть многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами имеет только действительные корни. Доказать, что если a – корень производной $f'(x)$, кратность которого больше 1, то a есть корень многочлена $f(x)$.

7.52. Пусть $f(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ – многочлен с действительными коэффициентами, имеющий n различных действительных корней, причем $a_p=0$ для некоторого p, $1\leqslant p<n$, но $a_j\neq 0$ для $j\neq p$. Показать, что $a_{p+1}a_{p-1}<0$.

7.53. Показать, что корни многочлена $x^6-x^5+x^4+2x^2-x-10$ не все действительные.

7.54. Показать, что многочлен с действительными коэффициентами вида $x^5+ax^4+bx^3+c$, где $c\neq 0$, имеет хотя бы один комплексный недействительный корень.

7.55. Построить многочлен $f(x)$ наименьшей степени с действительными коэффициентами по данным корням:

1) $x_1=2$ кратности 2, $x_2=1$, $x_3=3i$;

2) $x_1=1-i$ кратности 3;

3) $x_1=1$ кратности 2, $x_2=-1$, $x_3=i$.

7.56. Найти корни многочлена $x^3+(1-5i)x^2+(-10-2i)x+8i$, если известно, что они образуют геометрическую прогрессию.

7.57. Определить число c так, чтобы:

1) один из корней уравнения $x^3+21x^2+c=0$ был равен удвоенному другому;

2) произведение двух корней уравнения $x^3-20x+c=0$ было равно третьему корню.

7.58. Сумма двух корней уравнения $x^3+ax-6=0$ равна 3. Найти a.

7.59. Для многочлена $f(x)=x^5+x^4+2x^3+3x^2-x+1$ найти сумму квадратов и сумму кубов его корней.

7.60. Для данного натурального числа n найти сумму всех корней n-й степени из 1.

7.61. Использовав теорему Виета, решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=-2,\\ x^2+y^2+z^2=6,\\ x^3+y^3+z^3=-8. \end{cases}$$

7.62. Использовав теорему Виета, показать, что если a, b, c – три целых числа, сумма которых равна нулю, то число $2a^4+2b^4+2c^4$ есть квадрат целого числа.

7.63. Построить многочлен $f(x)$ степени $\leqslant 6$ с корнями 2, 4, 6, 8 и со следующими значениями: $f(1)=1$, $f(3)=3$.

7.64. Построить многочлен $f(x)$ по заданной таблице значений:

1)

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	-1	-2	1	0

;

2)

x	2	0	1	-1
$f(x)$	-1	1	0	0

;

3)

x	0	-1	-2	$-1-i$
$f(x)$	-1	2	1	2

;

4)

x	-2	-1	0	2	3
$f(x)$	-27	-5	1	5	28

.

7.65. По заданной таблице значений многочлена $f(x)$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	-2	1	2	23

найти его значение $f(3)$ при условии, что $\deg f(x) \leqslant 5$.

7.66. Найти многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $f(-1)=8$, $f(1/2)=20$, $f(2)=5$.

7.67. Найти многочлен с целыми коэффициентами, график которого проходит выше точки $A(-1,1)$, ниже точки $B(2,-1)$, выше точки $C(5,2)$, ниже точки $D(7,3)$.

Глава 8
МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Пусть K – ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей и $m, n \in \mathbb{N}$. *Матрицей размеров* $m \times n$ (или $m \times n$-*матрицей*) *над кольцом* K называется прямоугольная таблица, составленная из mn элементов кольца K и имеющая m строк и n столбцов, т.е. таблица (двухмерный массив) вида

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

где $a_{jk} \in K$, при этом j обозначает номер строки, k – номер столбца, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, n}$.

Элементы a_{jk}, составляющие матрицу, называются ее *элементами*. Будем пользоваться следующими обозначениями матрицы:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, (a_{jk}, j = \overline{1, m},\ k = \overline{1, n}),\ (a_{jk}), A.$$

Множество всех матриц размеров $m \times n$ над кольцом K обозначается $K_{m,n}$. Если $m = n$, то матрица называется *квадратной n-го порядка*. Пусть

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

есть квадратная матрица порядка n. Тогда ее часть, определяемая элементами $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, – *главная диагональ*, а часть, определяемая элементами a_{1n}, $a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$, – *побочная диагональ*. Сумма элементов главной диагонали называется *следом матрицы* A и обозначается $\operatorname{tr} A$.

Квадратная матрица (a_{jk}) называется *диагональной*, если $a_{jk} = 0$ при $j \neq k$; $j, k = \overline{1, n}$. В этом случае пишут:

$$A = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}).$$

Матрица $A = \operatorname{diag}(a, a, \dots, a)$, $a \in K$, называется *скалярной*. Скалярная матрица $\operatorname{diag}(1, 1, \dots, 1)$ порядка n обозначается E_n и называется *единичной*.

Матрица размеров $m \times n$, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается $O_{m,n}$.

Квадратная матрица (a_{jk}) называется *верхней треугольной*, если $a_{jk} = 0$ при $j > k$. Аналогично матрица (b_{jk}) – *нижняя треугольная*, если $b_{jk} = 0$ при $j < k$.

Матрица (a_{jk}) называется *верхней матрицей Хессенберга*, если $a_{jk} = 0$ при $j > k+1$. Аналогично определяется *нижняя матрица Хессенберга*.

Квадратная матрица (a_{jk}) называется *трехдиагональной*, если $a_{jk} = 0$ при $|j-k| > 1$.

Пусть α – обратимый элемент кольца K (т.е. такой, что существует $\beta \in K$, для которого $\alpha\beta = 1$). Диагональная матрица порядка n, получающаяся в результате замены k-го элемента диагонали матрицы E_n на α, обозначается $T_{k,\alpha}$ и называется *элементарной матрицей типа I*. Пусть теперь α – произвольный элемент кольца K и $1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant l \leqslant n$, $k \neq l$. Матрица $T_{k,l,\alpha}$, которая получается из единичной вследствие замены элемента, расположенного на пересечении k-й строки и l-го столбца, на элемент α, называется *элементарной матрицей типа II*. Например,

$$T_{2,-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{2,3,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Квадратная матрица A называется *мономиальной*, если она получается из единичной посредством перестановки столбцов. Матрица A размеров $m \times n$, где $m \leqslant n$, *частично мономиальная*, если из некоторых m ее столбцов можно составить единичную матрицу E_m.

Пусть A – матрица размеров $m \times n$ и $0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_p = m$, $0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_q = n$ – разбиения чисел m и n. В соответствии с этими разбиениями матрица A разбивается на блоки:

$$\begin{bmatrix} A_{[1,m_1],[1,n_1]} & A_{[1,m_1],[n_1+1,n_2]} & \cdots & A_{[1,m_1],[n_{q-1}+1,n_q]} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ A_{[m_{p-1}+1,m_p],[1,n_1]} & A_{[m_{p-1}+1,m_p],[n_1+1,n_2]} & \cdots & A_{[m_{p-1}+1,m_p],[n_{q-1}+1,n_q]} \end{bmatrix},$$

где блок $A_{[1,m_1],\,[1,n_1]}$ – это часть матрицы A, которая составлена из элементов, расположенных на пересечениях строк с номерами $1, 2, \dots, m_1$ и столбцов с номерами $1, 2, \dots, n_1$, и т.д. Такое разбиение матрицы называется *блочным*, и в этом случае говорят, что матрица A является *блочной*.

Если $m = n$ и разбиения чисел m и n, задающие разбиение матрицы A на блоки, одинаковы, то по аналогии с определениями диагональной и треугольной матриц можно ввести понятия *блочно-диагональной* и *блочно-треугольной* (*верхней*, *нижней*) *матриц*.

Две матрицы считаются *равными*, если они одинаковых размеров и элементы одной матрицы равны соответствующим элементам другой.

Сумма двух матриц $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk}) \in K_{m,n}$ определяется как такая матрица $C = (c_{jk}) \in K_{m,n}$, у которой

$$c_{jk} = a_{jk} + b_{jk},\ \forall j,\ k,\ j = \overline{1, m},\ k = \overline{1, n}.$$

Сумма матриц A и B обозначается $A + B$.

Произведением элемента α *кольца* K *на матрицу* $A = (a_{jk}) \in K_{m,n}$ называется матрица $C = (c_{jk}) \in K_{m,n}$ с элементами, которые вычисляются по формуле

$$c_{jk} = \alpha a_{jk},\ \forall j, k, \quad j = \overline{1, m},\ k = \overline{1, n}.$$

Это произведение обозначается αA.

Операции сложения матриц и умножения элемента кольца на матрицу называют *линейными*.

Произведением матрицы $A = (a_{jk})$ *размеров* $m \times n$ *на матрицу* $B = (b_{kl})$ *размеров* $n \times q$ называется матрица $C = (c_{jl})$ размеров $m \times q$, у которой элементы вычисляются по формуле

$$c_{jl} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{kl}.$$

Произведение матрицы A на матрицу B обозначается AB. В общем случае при $mnq \neq 1$ из двух произведений AB и BA одно может быть определено, а второе – нет, или оба определены, но разных размеров, или оба определены и одинаковых размеров, но не равны, даже если обе матрицы A и B квадратные. Таким образом, умножение матриц в общем случае не является коммутативным. Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются *коммутирующими*.

Пусть A – квадратная матрица порядка n. Положим

$$A^0 = E_n, \quad A^1 = A, \quad A^2 = AA,\ \ldots,\ A^{r+1} = A^r A.$$

Таким образом вводятся *степени матрицы* A.

Матрицы A и B, удовлетворяющие равенствам $A^2 = E_n$, $B^2 = B$, называются соответственно *инволютивной* и *идемпотентной* (*проек-*

ционной). Если же существует такое натуральное число $k \geqslant 2$, что $A^k = O_{n,n}$, но $A^{k-1} \neq O_{n,n}$, то матрица A называется *нильпотентной индекса* k.

Элементарными преобразованиями строк (*столбцов*) $m \times n$*-матрицы* A называют следующие операции:

1) умножение какой-либо строки (столбца) матрицы A на обратимый элемент кольца K;

2) прибавление к одной, например j-й, строке (столбцу) матрицы A другой, например k-й, строки (столбца) матрицы A, умноженной на произвольный элемент кольца K (при этом остальные строки (столбцы) не меняются).

Если матрица B получается из матрицы A в результате последовательного применения элементарных преобразований строк и столбцов, то говорят, что *матрица* A *эквивалентна матрице* B, и пишут $A \sim B$. Отношение $\sim$ на множестве $K_{m,n}$ рефлексивно, транзитивно и симметрично, поэтому по праву называется эквивалентностью.

Матрица, *транспонированная* к матрице $A = (a_{jk},\ j = \overline{1,m},\ k = \overline{1,n})$, определяется как матрица $B = (b_{kj},\ k = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m})$, где $b_{kj} = a_{jk}$; $j = \overline{1,m}$; $k = \overline{1,n}$. Она обозначается A^{T}, т.е. $A^{\mathrm{T}} = B$.

Если $A = A^{\mathrm{T}}$, то матрица A называется *симметрической*, а если $A = -A^{\mathrm{T}}$ – *кососимметрической*.

Пусть $A \in \mathbb{C}_{m,n}$, т.е. A – матрица над полем комплексных чисел. Заменим в A каждый элемент ему сопряженным. Полученная таким образом матрица обозначается $\overline{A}$. Матрица $\overline{A}^{\mathrm{T}}$ – называется *сопряженной* матрице A и обозначается A^*. Если же $A = A^*$, то матрица A носит название *эрмитовой*.

Пусть даны многочлен $f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$ из кольца $P[x]$ и квадратная матрица $A \in P_{n,n}$. Матрица $f(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + \ldots + a_mE_n$ называется *значением многочлена* $f(x)$ *при* $x = A$.

В следующих примерах все матрицы рассматриваются над числовым полем P.

Пример 1. Найти матрицу X, удовлетворяющую равенству $3X - 2B = A$, где

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -6 \\ 4 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -9 \\ 1 & -6 & 6 \\ 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Исходя из свойств линейных операций над матрицами, равенство $3X - 2B = A$ равносильно равенству $X = \frac{1}{3}(2B + A)$. Таким образом,

$$X=\frac{1}{3}\left(2\begin{bmatrix}3&-2&6\\4&3&6\\7&2&-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&-5&-9\\1&-6&6\\1&-1&6\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix}2\cdot3&2\cdot(-2)&2\cdot6\\2\cdot4&2\cdot3&2\cdot6\\2\cdot7&2\cdot2&2\cdot(-3)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&-5&-9\\1&-6&6\\1&-1&6\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}6+3&-4-5&12-9\\8+1&6-6&12+6\\14+1&4-1&-6+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-3&1\\3&0&6\\5&1&0\end{bmatrix}.$$

Пример 2. Перемножить матрицы

$$A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&4&6\\-5&-2&-1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&7\\2&-2\\3&0\end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Произведение AB имеет смысл, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, поэтому

$$AB=\begin{bmatrix}(-1)\cdot1+1\cdot2+0\cdot3&(-1)\cdot7+1\cdot(-2)+0\cdot0\\0\cdot1+4\cdot2+6\cdot3&0\cdot7+4\cdot(-2)+6\cdot0\\(-5)\cdot1+(-2)\cdot2+(-1)\cdot3&(-5)\cdot7+(-2)\cdot(-2)+(-1)\cdot0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&-9\\26&-8\\-12&-31\end{bmatrix}.$$

Произведение BA не имеет смысла, так как число столбцов матрицы B (два) не равно числу строк матрицы A (три).

Пример 3. Вычислить $\begin{bmatrix}17&-6\\35&-12\end{bmatrix}^5$, использовав равенство

$$\begin{bmatrix}17&-6\\35&-12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7&3\\5&-2\end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Поскольку матрицы $\begin{bmatrix}2&3\\5&7\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-7&3\\5&-2\end{bmatrix}$ таковы, что выполняется равенство

$$\begin{bmatrix}2&3\\5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7&3\\5&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},$$

постольку

$$\begin{bmatrix}17 & -6\\35 & -12\end{bmatrix}^5=\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}^5\begin{bmatrix}-7 & 3\\5 & -2\end{bmatrix}.$$

Учитывая то, что

$$\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}^5=\begin{bmatrix}2^5 & 0\\0 & 3^5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}32 & 0\\0 & 243\end{bmatrix},$$

окончательно имеем:

$$\begin{bmatrix}17 & -6\\35 & -12\end{bmatrix}^5=\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}32 & 0\\0 & 243\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & 3\\5 & -2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}64 & 729\\160 & 1701\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & 3\\5 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3197 & -1266\\7385 & -2922\end{bmatrix}.$$

Пример 4. Вычислить $f(A)$, если

$$f(x)=x^2-3x+1,\qquad A=\begin{bmatrix}1 & -i\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Подставляя в многочлен $f(x)$ вместо x матрицу A и учитывая, что $1=1\cdot x^0$, получаем:

$$f(A)=A^2-3A+E_2=\begin{bmatrix}1 & -i\\0 & 1\end{bmatrix}^2-3\begin{bmatrix}1 & -i\\0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -2i\\0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 3i\\0 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & i\\0 & -1\end{bmatrix}.$$

Пусть M – множество, состоящее из n элементов. Конечная последовательность длины n, составленная из различных элементов множества M, называется *перестановкой множества* M.

В дальнейшем в качестве множества M будем брать множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ и множество всех перестановок из этих n чисел обозначим P_n. Множество P_n состоит из $n!$ элементов.

Говорят, что в данной перестановке числа i, j образуют *инверсию*, если $i > j$, но i расположено в перестановке раньше j. Число инверсий в перестановке $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ обозначается $\nu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Перестановка называется *четной*, если у нее четное число инверсий, и *нечетной*, если число инверсий нечетное. Если в некоторой перестановке поменять местами какие-либо два числа, не обязательно стоящие рядом, а все остальные оставить на месте, то такое преобразование перестановки называется *транспозицией*. Всякая транспозиция изменяет четность перестановки. Число всех четных перестановок из n чисел равно числу всех нечетных перестановок из этих чисел и равно $n!/2$.

Пример 5. В следующей перестановке определить число инверсий: ($5n$, $5n-5$, ..., 10, 5, $5n-1$, $5n-6$, ..., 9, 4, $5n-2$, $5n-3$, ..., 8, 3, $5n-3$, $5n-8$, ..., 7, 2, $5n-4$, $5n-9$, ..., 6, 1).

Решение. Очевидно, что исходная перестановка состоит из пяти подпоследовательностей: 1) $5n$, $5n-5$, ..., 10, 5; 2) $5n-1$, $5n-6$, ..., 9, 4; 3) $5n-2$, $5n-7$, ..., 8, 3; 4) $5n-3$, $5n-8$, ..., 7, 2; 5) $5n-4$, $5n-9$, ..., 6, 1. В каждой из указанных подпоследовательностей имеется $\frac{n(n-1)}{2}$ инверсий. Следовательно, всего таких инверсий $\frac{5n(n-1)}{2}$. Далее нетрудно видеть, что числа из подпоследовательности $5n-4$, $5n-9$, ..., 6, 1 не образуют инверсий по отношению к числам остальных подпоследовательностей. В то же время числа из подпоследовательности $5n-3$, $5n-8$, ..., 7, 2 по отношению к числам подпоследовательности $5n-4$, $5n-9$, ..., 6, 1 образуют $\frac{n(n+1)}{2}$ инверсий; числа подпоследовательности $5n-2$, $5n-7$, ..., 8, 3 по отношению к числам подпоследовательности $5n-4$, $5n-9$, ..., 6, 1, $5n-3$, $5n-8$, ..., 7, 2 образуют $\frac{2n(n+1)}{2}$ инверсий и т.д. Наконец, числа подпоследовательности $5n$, $5n-5$, ..., 10, 5 по отношению к числам всех остальных подпоследовательностей образуют $\frac{4n(n+1)}{2}$ инверсий. Итак, общее число инверсий в исходной перестановке равно

$$\frac{5n(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2n(n+1)}{2}+\frac{3n(n+1)}{2}+\frac{4n(n+1)}{2}=\frac{5n(3n+1)}{2}.$$

Пример 6. Определить четность перестановки (4, 3, 1, 8, 5, 2, 7, 6, 9) и посредством применения транспозиций определить четность перестановки $(9, 8, 7, 6, 5, 3, 1, 2, 4)$.

Решение. Ясно, что $\nu(4, 3, 1, 8, 5, 2, 7, 6, 9)=3+2+0+4+1+0+1+0=11$. Следовательно, первая перестановка является нечетной. От этой перестановки перейдем ко второй перестановке посредством применения ряда транспозиций: $(4, 3, 1, 8, 5, 2, 7, 6, 9)\to(9, 3, 1, 8, 5, 2, 7, 6, 4)\to(9, 8, 1, 3, 5, 2, 7, 6, 4)\to$ $\to(9, 8, 7, 3, 5, 2, 1, 6, 4)\to(9, 8, 7, 6, 5, 2, 1, 3, 4)\to(9, 8, 7, 6, 5, 3, 1, 2, 4)$. Итак, вторая перестановка получается из первой с помощью пяти транспозиций. Но так как всякая транспозиция изменяет четность перестановки на противоположную, то вторая перестановка является четной.

Определителем квадратной матрицы $A=(a_{jk},\ j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,n})$ над кольцом K называется элемент кольца K, равный

$$\sum_{(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)\in P_n}(-1)^{\nu(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)}a_{1\gamma_1}a_{2\gamma_2}\cdots a_{n\gamma_n},$$

где сумма берется по всем различным перестановкам $(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)$ чисел $1,2,\dots,n$. Здесь $\nu(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)$ означает число инверсий в перестановке $(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)$.

Используются следующие обозначения определителя матрицы A:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ |A|, \ \det A, \ \det(a_{jk}), \ \Delta.$$

Элементы, строки, столбцы, диагонали и порядок матрицы называются соответственно *элементами*, *строками*, *столбцами*, *диагоналями* и *порядком определителя* этой матрицы. Определители первого, второго и третьего порядков можно вычислять, исходя непосредственно из определения:

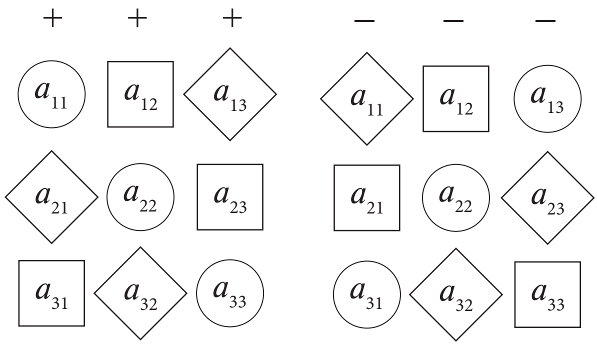
$$\det[a_{11}] = a_{11},$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

При таком вычислении определителей третьего порядка удобно пользоваться *правилом треугольников* (*правилом Саррюса*), отраженным на следующей схеме:



Другой способ вычисления определителя третьего порядка (разложение по строке) был указан в гл. 2.

Непосредственное применение определения определителя позволяет вычислить определитель некоторых $n \times n$-матриц специального вида:

1) определитель единичной матрицы

$$\det E_n = 1;$$

2) определитель диагональной матрицы

$$\det \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

3) определители элементарных матриц:

$$\det T_{k,\alpha} = \alpha, \ \ \det T_{j,k,\alpha} = 1;$$

4) определители верхней и нижней треугольных матриц:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn};$$

5) определитель матрицы, у которой все элементы по одну сторону от побочной диагонали равны нулю,

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

С в о й с т в а о п р е д е л и т е л е й:

1) $\det A^{\mathrm{T}} = \det A$;

2) если матрица B получена из матрицы A умножением некоторой строки на элемент α кольца, то $\det B = \alpha \det A$;

3) определитель с нулевой строкой равен нулю;

4) если матрица B получается из матрицы A перестановкой двух каких-либо ее строк, то $\det B = -\det A$;

5) определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю;

6) определитель с двумя пропорциональными строками равен нулю;

7) если k-я строка определителя Δ_3 есть сумма k-х строк определителей Δ_1 и Δ_2 и для $j \neq k$ j-е строки всех трех определителей $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ равны, то $\Delta_3 = \Delta_1 + \Delta_2$;

8) если матрица B получена из матрицы A прибавлением к некоторой ее строке других строк, умноженных на элементы кольца K (т.е. линейной комбинации других строк), то $\det B = \det A$;

9) если одна строка определителя есть линейная комбинация других строк, то определитель равен нулю.

Пусть $A \in K_{m,n}$. Выберем в матрице A произвольно k строк и k столбцов. Элементы, расположенные на пересечении выбранных строк и столбцов, составляют матрицу k-го порядка. Определитель M этой матрицы называется *минором k-го порядка* матрицы A. Если при этом $m = n$ и $k < n$, то элементы, расположенные на пересечении остальных строк и столбцов, образуют матрицу $(n-k)$-го порядка. Определитель M' полученной матрицы называется *дополнительным минором* к минору M. *Алгебраическим дополнением* M'' *минора* M называется элемент $M'' = (-1)^s M'$, где s – сумма номеров выбранных k строк и k столбцов, на которых расположена матрица минора M.

Каждый элемент a_{jk} матрицы $A = (a_{jk}) \in K_{n,n}$ является минором первого порядка. Его дополнительный минор и алгебраическое дополнение обозначаются соответственно M_{jk} и A_{jk}. Из определения алгебраического дополнения минора следует, что $A_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk}$.

Определитель матрицы $A = (a_{jk}) \in K_{n,n}$ равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) этой матрицы на их алгебраические дополнения, т.е.

$$\det A = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \ldots + a_{jn}A_{jn},\ 1 \leqslant j \leqslant n;$$

$$\det A = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk},\ 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Полученные соотношения называются соответственно *разложением определителя по элементам j-й строки* и *разложением определителя по элементам k-го столбца*.

Выделим в матрице $A \in K_{n,n}$ произвольные k строк (столбцов), где $1 \leqslant k \leqslant n$. Определитель матрицы A равен сумме произведений всех миноров k-го порядка, расположенных на выделенных k строках (столбцах), на их алгебраические дополнения (*теорема Лапласа*). Из этой теоремы вытекает важное следствие: определитель блочно-треугольной матрицы равен произведению определителей ее диагональных блоков.

Теорема Лапласа используется также при доказательстве следующего утверждения: определитель произведения двух квадратных матриц одного порядка над кольцом K равен произведению определителей этих матриц.

Пример 7. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 9 & 9 & 13 & 13 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Решение. Если воспользоваться разложением определителя по элементам какой-либо строки или какого-либо столбца, то его вычисление сведется к вычислению четырех определителей третьего порядка. В то же время, использовав свойства определителей, можно преобразовать исходный определитель так, чтобы все элементы некоторой строки или некоторого столбца, за исключением, быть может, одного, были равны нулю. Затем от вычисления определителя четвертого порядка перейдем к вычислению лишь одного определителя третьего порядка. Для этого из первой строки вычтем вторую, а затем ко второй строке прибавим полученную первую строку, умноженную на -2, к третьей строке – полученную первую, умноженную на -9, к четвертой строке – полученную первую, умноженную на -4. В результате исходный определитель будет равен определителю

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -8 & -6 & -11 \\ 0 & 21 & 16 & 28 \\ 0 & 81 & 67 & 112 \\ 0 & 36 & 29 & 50 \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по первому столбцу:

$$\Delta = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 21 & 16 & 28 \\ 81 & 67 & 112 \\ 36 & 29 & 50 \end{vmatrix}.$$

Итак, от определителя четвертого порядка перешли к определителю третьего порядка, который можно вычислить таким же образом, как и исходный. Умножив первую строку на -4 и прибавив ее ко второй, а затем прибавив второй столбец к первому, получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 37 & 16 & 28 \\ 0 & 3 & 0 \\ 65 & 29 & 50 \end{vmatrix}.$$

Разлагая последний определитель по второй строке, имеем:

$$\Delta = 3\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 37 & 28 \\ 65 & 50 \end{vmatrix} = 3(1850-1820) = 90.$$

Пример 8. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 6 & -1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Вычислим этот определитель, разложив его по каким-либо k, $1 \leqslant k < 5$, строкам, т.е. воспользуемся теоремой Лапласа. Данная теорема позволяет свести вычисление исходного определителя к вычислению определителей меньших порядков. Ею удобно пользоваться тогда, когда в определителе имеются равные нулю миноры. В этом случае при вычислении определителя необходимо выделять те k строк или столбцов, которые содержат наибольшее число миноров k-го порядка, равных нулю. Исходя из этого, преобразуем исходный определитель следующим образом. Из первой строки вычитаем сумму четвертой и пятой строк, а из второй – сумму третьей и четвертой строк. Получаем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Используя первую и вторую строки, по теореме Лапласа имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 19 = -57.$$

Метод вычисления определителей с числовыми элементами, состоящий в обращении в нуль элементов строки (столбца) или нескольких строк (столбцов) и последующем понижении порядка определителя, становится весьма громоздким в случае определителей с буквенными или числовыми элементами, но с произвольным порядком n. Общего метода для вычисления таких определителей не существует (если не считать выражения определителя, данного в его определении). К определителям того или иного специального вида применяются различные методы вычисления, приводящие к выражениям более простым (т.е. требующие меньшее число операций), чем выражение определителя по определению. В последующих примерах укажем наиболее часто применяемые из этих методов.

Пример 9. Вычислить определитель порядка n

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Для вычисления этого определителя воспользуемся *методом приведения его к треугольному виду*. Метод заключается в преобразовании определителя к такому виду, где все элементы, лежащие по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Полученный определитель равен произведению элементов главной диагонали. Прибавляя в определителе Δ первую строку ко всем остальным строкам, получаем:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 0 & 2 & 6 & \ldots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & 2n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{vmatrix}=n!.$$

Пример 10. Вычислить определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. На этом примере продемонстрируем метод вычисления определителей, получивший название *метода рекуррентных соотношений*. Разложив определитель Δ_n по элементам первой строки, получим:

$$\Delta_n=2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Первый определитель имеет такой же вид, как и исходный определитель Δ_n, но на единицу меньшего порядка, значит, его можно записать так: Δ_{n-1}. Далее, если второй определитель разложить по элементам первого столбца, то опять получим определитель такого же вида, как и исходный, но на две единицы меньшего порядка, т.е. Δ_{n-2}. В итоге имеем соотношение $\Delta_n=2\Delta_{n-1}-\Delta_{n-2}$, связывающее данный определитель порядка n с определителями такой же структуры, но порядков $n-1$ и $n-2$. Соотношения этого типа носят название *рекуррентных*. В общем случае рекуррентное соотношение связывает n-й член какой-то последовательности через некоторое число ее предыдущих членов. В нашем случае членами такой последовательности являются определители. Найдем несколько ее первых членов:

$$\Delta_1=2,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3,\ \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=4.$$

Заметим, что значение каждого из вычисленных определителей есть число, на единицу большее индекса, поэтому естественно предположить, что для любого $k\in\mathbb{N}$ $\Delta_k=k+1$. Для доказательства этого утверждения по индукции допустим, что $\Delta_k=k+1$ справедливо для всех k, $k\leqslant n-1$ $(n\geqslant 2)$, и покажем, что оно справедливо и для $k=n$. Подставим значение определителей $\Delta_{n-1},\Delta_{n-2}$ в рекуррентную формулу:

$$\Delta_n=2\Delta_{n-1}-\Delta_{n-2}=2(n-1+1)-(n-2+1)=2n-n+1=n+1.$$

Итак, полученная формула справедлива для любого k, следовательно, $\Delta_n = n+1$.

Вообще говоря, в методе рекуррентных соотношений можно обойтись и без угадывания формулы для Δ_n. Разберем частный случай, где рекуррентное соотношение дает алгоритм для решения задачи, который исключает элемент догадки, имеющийся в общем случае. Пусть рекуррентное соотношение имеет вид

$$\Delta_n = \alpha\Delta_{n-1} + \beta\Delta_{n-2}, \tag{8.1}$$

где α, β – постоянные, т.е. не зависящие от n, величины. По элементам α и β определим величины x_1 и x_2 как корни квадратного уравнения $x^2 - \alpha x - \beta = 0$. Тогда $x_1 + x_2 = \alpha$, $x_1 x_2 = -\beta$ и равенство (8.1) можно переписать в виде

$$\Delta_n - x_2\Delta_{n-1} = x_1(\Delta_{n-1} - x_2\Delta_{n-2}) \tag{8.2}$$

или

$$\Delta_n - x_1\Delta_{n-1} = x_2(\Delta_{n-1} - x_1\Delta_{n-2}). \tag{8.3}$$

Предположим сначала, что $x_1 \neq x_2$. По формуле для $(n-1)$-го члена геометрической прогрессии из равенств (8.2) и (8.3) находим:

$$\Delta_n - x_2\Delta_{n-1} = x_1^{n-2}(\Delta_2 - x_2\Delta_1),\ \Delta_n - x_1\Delta_{n-1} = x_2^{n-2}(\Delta_2 - x_1\Delta_1),$$

откуда $\Delta_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$, где $c_1 = \dfrac{\Delta_2 - x_2\Delta_1}{x_1(x_1 - x_2)}$; $c_2 = \dfrac{\Delta_2 - x_1\Delta_1}{x_2(x_2 - x_1)}$. Если же $x_1 = x_2$, то нетрудно показать, что $\Delta_n = x_1^{n-1}\Delta_1 + x_1^{n-2}(n-1)(\Delta_2 - x_1\Delta_1)$. В рассмотренном примере $x_1 = x_2 = 1$, следовательно, $\Delta_n = 2 + (n-1)(3-2) = 2 + n - 1 = n+1$.

Пример 11. Использовав метод рекуррентных соотношений, вычислить *определитель Вандермонда*

$$\Delta_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Из каждой строки определителя, начиная с последней, поочередно вычтем предыдущую строку, умноженную на x_1. Тогда получим:

$$\Delta_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \ldots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_2 x_1 & \ldots & x_n^2 - x_n x_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} x_1 & \ldots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2} x_1 \end{vmatrix}.$$

Разлагая последний определитель по первому столбцу, а затем вынося в полученном определителе за знак определителя из первого столбца множитель

x_2-x_1, из второго столбца – множитель x_3-x_1 и т.д., из последнего столбца – множитель x_n-x_1, получаем:

$$\Delta_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \ldots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Отсюда $\Delta_n\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\left(x_2-x_1\right)\left(x_3-x_1\right)\cdots\left(x_n-x_1\right)\Delta_{n-1}\left(x_2,\ldots,x_n\right)$. Пользуясь этой рекуррентной формулой, выводим:

$$\Delta_n\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\left(x_2-x_1\right)\cdots\left(x_n-x_1\right)\left(x_3-x_2\right)\cdots\left(x_n-x_2\right)\cdots\left(x_n-x_{n-1}\right)=\prod_{j<k}\left(x_k-x_j\right).$$

Пример 12. Вычислить определитель

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & 3 & 3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 & n-1 \\ n & n & n & \ldots & n & 2n \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся *методом представления определителя в виде суммы определителей*, т.е. исходный определитель вычислим путем разложения его в сумму определителей того же порядка. Для этого элементы последней строки определителя представим в виде сумм $0+n,\ 0+n,\ldots,0+n,\ n+n$. Это дает возможность представить исходный определитель в виде суммы двух других:

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & 3 & 3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & 3 & 3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 & n-1 \\ n & n & n & \ldots & n & n \end{vmatrix}.$$

Первый из этих определителей треугольный, следовательно, он равен $1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n=n!$. Второй определитель равен нулю, так как у него первая и последняя строки пропорциональны. Значит, $\Delta_n=n!+0=n!$.

Пусть A – квадратная матрица порядка n над полем P. Матрица $A^{-1}\in P_{n,n}$ называется *обратной к матрице* A, если $AA^{-1}=A^{-1}A=E_n$.

Квадратная матрица называется *невырожденной* (или *неособенной*), если ее определитель отличен от нуля, и *вырожденной* (или *особенной*), – если ее определитель равен нулю.

Матрицей, *присоединенной* (*союзной*) *к матрице A*, называется матрица

$$B=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Для того чтобы для матрицы A существовала обратная, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной.

Всякая невырожденная матрица A имеет единственную обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{B}{\det A}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Укажем некоторые свойства обратных матриц. Пусть A и B – невырожденные матрицы порядка n над полем P. Тогда справедливы следующие равенства:

1) $(A^{-1})^{-1}=A$;

2) $(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}$;

3) $\det A^{-1}=(\det A)^{-1}$;

4) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

Пример 13. Выяснить, существует ли матрица, обратная к матрице

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

и если существует, то найти ее.

Р е ш е н и е. Вычисление обратной матрицы начнем с вычисления алгебраических дополнений элементов матрицы A. Найдем алгебраические дополнения элементов первой строки: $A_{11}=3$, $A_{12}=3$, $A_{13}=-6$. Тогда $\det A=2\cdot 3+$ $+0\cdot 3+5\cdot(-6)=6-30=-24\neq 0$. Следовательно, матрица, обратная к матрице A, существует. Вычисляем все остальные алгебраические дополнения элементов матрицы A (если $\det A=0$, то матрицы, обратной к матрице A, не существует и вычисление остальных алгебраических дополнений не требуется): $A_{21}=-5$, $A_{22}=-5$, $A_{23}=2$, $A_{31}=-30$, $A_{32}=-6$, $A_{33}=12$. Таким образом,

$$A^{-1}=-\frac{1}{24}\begin{bmatrix}3 & -5 & -30\\ 3 & -5 & -6\\ -6 & 2 & 12\end{bmatrix}.$$

(Другой способ нахождения обратной матрицы указан в следующей главе.)

Пример 14. Найти произведение матриц A и B, используя блочное разбиение матриц, где

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\\ -1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Решение. Из определения умножения матриц нетрудно увидеть, что если $A=[A_1|A_2]$, $B=\left[\frac{B_1}{B_2}\right]$ – матрицы над кольцом K (коммутативным, ассоциативным и с единицей), где $A_1\in K_{m,s}$, $A_2\in K_{m,t}$, $B_1\in K_{s,q}$, $B_2\in K_{t,q}$, то произведение матриц A и B можно подсчитать по формуле $AB=A_1B_1+A_2B_2$.

Возвращаясь к исходным матрицам, разбивая их на две равные части и обозначая матрицу $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ через C, получаем, используя вышеприведенную формулу:

$$AB=[E_2|C]\left[\frac{C}{-E_2}\right]=E_2C-CE_2=O_{2,2}.$$

8.1. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 0 & 2 & -2\end{bmatrix}.$$

Найти:

1) $2A+B$; 2) $-6A+3B$.

8.2. Найти указанные суммы, а в случаях, когда это невозможно, объяснить, почему:

1) $\begin{bmatrix}5 & 7 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 4 & 2\end{bmatrix}$; 2) $A=\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix}7 & -6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}2\\ 4\\ 2\end{bmatrix}+6\begin{bmatrix}-7\\ 2\\ -1\end{bmatrix}$.

8.3. Найти матрицу X, удовлетворяющую условию:

1) $5A+2X=0$, где $A=\begin{bmatrix}4 & -2 & 6\\ 8 & 0 & 0\\ 0 & -4 & -2\end{bmatrix}$;

2) $3X-A=2B$, где $A=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 7 & 9\end{bmatrix}$.

8.4. Вычислить произведения матриц:

1) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 5\\ 3 & 2\end{bmatrix}$;
2) $\begin{bmatrix}x & y\\ z & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 5 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 5\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix}$;
4) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

8.5. Найти произведения AB и BA и сравнить их, если:

1) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$;

2) $A=\begin{bmatrix}3 & -2 & -1\\ 4 & -1 & -3\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$;

3) $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ 1 & 1 & 1\\ \alpha & \beta & \gamma\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$;

4) $A=\begin{bmatrix}5 & 2 & 1\\ 4 & 4 & 3\\ 1 & 5 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$;

5) $A=\begin{bmatrix}-101 & 96 & 103\\ 21 & 73 & 24\\ 31 & 0 & -64\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

8.6. Найти все матрицы, коммутирующие с матрицей A:

1) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}$;
2) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$;
3) $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

8.7. Вычислить:

1) $\begin{bmatrix} 2-i & 1+i \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & i-1 \\ 2 & i-1 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & i & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

8.8. Вычислить AB, $A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$, $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$, если:

1) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$;

2) $A=\begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8.9. Найти $\left(A+A^{\mathrm{T}}\right)B$, если:

1) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$;

2) $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

8.10. Вычислить произведения матриц:

1) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$;

2) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

8.11. Произвести указанные операции над матрицами, имеющими блочные разбиения:

1) $\left[\begin{array}{rr|rr} 3 & -2 & -2 & 3 \\ \hline 6 & 4 & -3 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{rr|rr} 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline -1 & -5 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right];$

2) $3\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ \hline 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{rr|rr} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right].$

8.12. В соответствии с разбиением чисел m, n, l $(0 < m_1 < < m_2 < \ldots < m_p = m,\ 0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_q = n,\ 0 < l_1 < l_2 < \ldots < l_k = l)$ сделать блочное разбиение $m \times n$-матрицы A и $n \times l$-матрицы B и найти произведение матриц A и B как произведение блочных матриц:

1) $0 < 1 < 2,\ 0 < 2 < 3,\ 0 < 1 < 2 < 4,$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \\ 9 & 6 & 5 & 2 \end{bmatrix};$$

2) $0 < 1 < 2,\ 0 < 1 < 3,\ 0 < 3 < 4,$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \\ 9 & 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

8.13. Вычислить:

1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^3;$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}^2;$

3) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^n;$

4) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n;$

5) $\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{bmatrix}^k;$

6) $\begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 \end{bmatrix}^k.$

8.14. Вычислить A^m, использовав соответствующее равенство:

1) $m=5,\ A=\begin{bmatrix} 22 & -12 \\ 35 & -19 \end{bmatrix}$, если $\begin{bmatrix} 22 & -12 \\ 35 & -19 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$;

2) $m=2,\ A=\begin{bmatrix} 168 & 91 & -161 \\ -231 & -70 & 399 \\ 49 & 49 & 0 \end{bmatrix}$, если $\begin{bmatrix} 168 & 91 & -161 \\ -231 & -70 & 399 \\ 49 & 49 & 0 \end{bmatrix}=$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 8 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

8.15. Доказать, что при условии $AB=BA$ имеют место равенства:

1) $(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$;

2) $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$;

3) $(A+B)^n=A^n+C_n^1A^{n-1}B+\ldots+C_n^{n-1}AB^{n-1}+B^n$;

4) $A^n-B^n=(A-B)\left(A^{n-1}+A^{n-2}B+\ldots+AB^{n-2}+B^{n-1}\right)$.

8.16. Вычислить коммутатор $[A,B]=AB-BA$ матриц A и B, если:

1) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$;

2) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8.17. Показать непосредственным вычислением, что для любых квадратных матриц A,B,C порядка n выполняется равенство (тождество Якоби) $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=O_{n,n}$.

8.18. Показать, что если A и B – симметрические матрицы, то матрица AB не обязательно симметрическая.

8.19. Показать, что если A – симметрическая матрица, то для любой матрицы B матрица $B^{\mathrm{T}}AB$ также является симметрической.

8.20. Найти все матрицы второго порядка, квадраты которых равны нулевой матрице.

8.21. Найти все матрицы второго порядка, кубы которых равны нулевой матрице.

8.22. Доказать:

1) $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^{\mathrm{T}}$; 2) $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$;

3) $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr} A$; 4) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, $\forall A, B \in K_{n,n}$ $\forall \alpha \in K$.

8.23. Доказать, что если $\operatorname{tr} AX = 0$ для всех квадратных матриц X, то $A = O_{n,n}$.

8.24. Найти $f(A)$, если:

1) $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$;

2) $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

3) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

8.25. Доказать, что каждая матрица второго порядка $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ удовлетворяет условию $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$.

8.26. Найти все действительные инволютивные матрицы второго порядка.

8.27. Найти все действительные идемпотентные матрицы второго порядка.

8.28. Доказать, что если матрица A является идемпотентной, то матрица $B = 2A - E_n$ является инволютивной.

8.29. Показать, что если $AX = XA$ для всех X, то матрица A является скалярной.

8.30. Пусть $A(x) \in (P[x])_{m,n}$, $B(x) \in (P[x])_{n,l}$. Доказать, что

$$\frac{d}{dx}[A(x)B(x)] = \left[\frac{d}{dx} A(x)\right] B(x) + A(x)\left[\frac{d}{dx} B(x)\right].$$

8.31. Показать, что если матрица $A \in R_{n,n}$ является нижней треугольной, а матрица $B \in R_{n,n}$ – нижней Хессенберга, то матрица $C = AB$ является нижней Хессенберга.

8.32. Доказать, что матрица вида

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

является нильпотентной.

8.33. Определить число инверсий в перестановках:

1) $(2, 3, 8, 1, 4, 5, 7, 6)$;

2) $(4, 3, 1, 8, 5, 2, 6, 7)$;

3) $(8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$.

Перейти от одной перестановки к другой посредством применения ряда транспозиций.

8.34. Определить число инверсий в перестановке $(n, n-1, \dots, 2, 1)$.

8.35. Определить число инверсий в перестановках:

1) $(1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1, 2, 4, \dots, 2n)$;

2) $(1, 4, 7, \dots, 3n-2, 2, 5, 8, \dots, 3n-1, 3, 6, 9, \dots, 3n)$;

3) $(2, 5, 8, \dots, 3n-1, 1, 4, 7, \dots, 3n-2, 3, 6, 9, \dots, 3n)$;

4) $(1, 5, 9, \dots, 4n-3, 2, 6, 10, \dots, 4n-2, 3, 7, 11, \dots, 4n-1, 4, 8, 12, \dots, 4n)$;

5) $(3, 7, 11, \dots, 4n-1, 4, 8, 12, \dots, 4n, 1, 5, 9, \dots, 4n-3, 2, 6, 10, \dots, 4n-2)$;

6) $(2, 6, 10, \dots, 4n-2, 3, 7, 11, \dots, 4n-1, 1, 5, 9, \dots, 4n-3, 4, 8, 12, \dots, 4n)$;

7) $(4, 9, \dots, 5n-1, 2, 7, \dots, 5n-3, 3, 8, \dots, 5n-2, 5, 10, \dots, 5n, 1, 6, \dots, 5n-4)$;

8) $(3, 8, \dots, 5n-2, 1, 6, \dots, 5n-4, 5, 10, \dots, 5n, 2, 7, \dots, 5n-3, 4, 9, \dots, 5n-1)$;

9) $(5n-4, 5n-9, \dots, 6, 1, 5n-2, 5n-7, \dots, 8, 3, 5n-1, 5n-6, \dots, 9, 4, 5n, 5n-5, \dots, 10, 5, 5n-3, 5n-8, \dots, 7, 2)$.

8.36. Определить число инверсий и указать четность перестановок:

1) (e, p, o, t, b, k); 2) (k, t, p, b, o, e);

3) (o, p, b, k, e, t); 4) (t, e, p, k, o, b),

если исходной является перестановка букв в слове *potbek*.

8.37. Пользуясь только определением, вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 10 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

8.38. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & -5 & -2 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$.

8.39. Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+12 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

8.40. Решить неравенство

$$\begin{vmatrix} 1 & x+1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 5+x & -3+x & x \end{vmatrix} > 0.$$

8.41. Исходя из определения и свойств определителя, доказать справедливость равенств:

1) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-b)(c-a);$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b);$

3) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & \cos 2\varphi \end{vmatrix} = 0;$

4) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

8.42. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix};$ 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix};$

3) $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -x & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -x \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix};$ 4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix};$

5) $\begin{vmatrix} 1+2a & 1 & a & x \\ 1+2b & 2 & b & x \\ 1+2c & 3 & c & x \\ 1+2d & 3 & d & x \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & x \\ 1 & 3 & 1 & y \\ 3 & 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix}$;

9) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; 10) $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$.

8.43. Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 5 & 7 & -5 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} a & 0 & c & 0 & 0 & b \\ 0 & d & 0 & b & c & 0 \\ b & 0 & a & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ c & 0 & b & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & a \end{vmatrix}$.

8.44. Вычислить определители приведением к треугольному виду:

1) $\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \\ n-2 & n-1 & n & \dots & 4 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 0 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 0 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} a & -b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & -b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & -b \\ -b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix}$.

8.45. Вычислить определители методом рекуррентных соотношений:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$.

8.46. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -x & x & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -x & 0 & x & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ -x & 0 & 0 & \ldots & x & 0 \\ -x & 0 & 0 & \ldots & 0 & x \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -x & a & a & \ldots & a & a \\ -x & -x & a & \ldots & a & a \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ -x & -x & -x & \ldots & a & a \\ -x & -x & -x & \ldots & -x & a \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \ldots & 2 & 1 \\ 1 & n & n-1 & \ldots & 3 & 2 \\ 1 & 1 & n & \ldots & 4 & 3 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & n & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & n \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \ldots & 0 & a_2 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & a_{n-1} \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \ldots & n \\ n & 2 & n & \ldots & n \\ n & n & 3 & \ldots & n \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ n & n & n & \ldots & n \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \ldots & a_n \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & x+a_n \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \ldots & x \\ y & a_2 & x & \ldots & x \\ y & y & a_3 & \ldots & x \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ y & y & y & \ldots & a_n \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 1 & -a & -a & \ldots & -a \\ 2 & 1 & -a & \ldots & -a \\ 3 & 2 & 1 & \ldots & -a \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ n & n-1 & n-2 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$;

9) $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & x \end{vmatrix}$; 10) $\begin{vmatrix} a+1 & x & x & \ldots & x & x \\ 1 & a & x & \ldots & x & x \\ 1 & 0 & a & \ldots & x & x \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & a & x \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a \end{vmatrix}$;

11) $\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2+x_2 & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & 3+x_3 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n+x_n \end{vmatrix}$;

12) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \dots & (n+1)^n \end{vmatrix}$.

8.47. Доказать, что если элементы $n\times n$-матрицы $A=(A_1, A_2, ..., A_n)$ есть дифференцируемые функции от x, то

$$\frac{d}{dx}\det A = \det\left(\frac{d}{dx}A_1, A_2, ..., A_n\right)+$$

$$+\det\left(A_1, \frac{d}{dx}A_2, ..., A_n\right)+\ldots+\det\left(A_1, A_2, ..., \frac{d}{dx}A_n\right).$$

8.48. Найти обратные матрицы для следующих матриц:

1) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 3 & 1/2 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$;

5) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; 6) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; 7) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$;

8) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$; 9) $\begin{bmatrix} 1-i & i & 1 \\ -i & 1 & 1+i \\ 1 & 1-i & 1+i \end{bmatrix}$;

10) $\begin{bmatrix} 1 & \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3} & i \\ \cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3} & i & \cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3} \\ i & \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3} & 1 \end{bmatrix}$;

11) $\begin{bmatrix} 1 & \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4} \\ \cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3} & 1 & \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3} \\ \cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3} & 1 \end{bmatrix}$;

12) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$; 13) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

14) $\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{bmatrix}$.

8.49. Показать, что если одна из квадратных матриц n-го порядка A и B вырождена, то их произведение AB есть также вырожденная матрица.

8.50. Для определителей матрицы A порядка n и ее присоединенной матрицы B доказать соотношение $\det B = (\det A)^{n-1}$.

8.51. Доказать, что если $A^2 = O_{n,n}$, то матрицы $A + E_n$ и $E_n - A$ являются невырожденными и взаимно обратными.

8.52. Доказать, что если $A^3 = O_{n,n}$, то матрицы $A + E_n$ и $A^2 - A + E_n$ являются невырожденными и взаимно обратными.

8.53. Квадратная $n \times n$-матрица A называется *периодической*, если существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $A^m = E_n$. Показать, что периодическая матрица является невырожденой, и найти обратную к ней.

8.54. Пусть $A^m = O_{n,n}$. Доказать, что матрица $E_n + A + A^2 + A^3 + \dots + A^{m-1}$ является обратной для матрицы $E_n - A$.

8.55. Матрица A называется *целочисленной*, если все ее элементы есть целые числа. Доказать, что для целочисленной $n \times n$-матрицы A существует целочисленная обратная матрица тогда и только тогда, когда $\det A = \pm 1$.

8.56. Доказать, что квадратная матрица A над полем P обратима тогда и только тогда, когда она является произведением элементарных матриц.

8.57. Пусть $A, B \in P_{m,n}$. Показать, что матрицы A и B эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют невырожденные матрицы $T \in P_{m,m}$ и $S \in P_{n,n}$ такие, что $B = TAS$.

Глава 9

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть P – произвольное числовое поле. *Систему m линейных уравнений с n неизвестными*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{9.1}$$

где $a_{ij}, b_i \in P$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, можно записать в виде матричного уравнения $AX = B$, где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

При этом матрица A называется *матрицей системы* (9.1), столбец B – *столбцом свободных членов*, X – *столбцом неизвестных*.

Решением системы (9.1) называется последовательность $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in P^n$ такая, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = b_i, \quad \forall i = \overline{1,m}.$$

Система (9.1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Решить систему – значит выяснить, совместна она или нет, и если совместна, то найти множество всех ее решений. Если такое множество пусто, то система называется *несовместной*.

Матрица $\tilde{A} = (A \mid B)$ называется *расширенной матрицей системы* (9.1). Элементарные преобразования строк матрицы $\tilde{A}$ соответствуют элементарным преобразованиям системы (9.1). Множество решений системы при элементарных преобразованиях не меняется. На этих преобразованиях основан *метод последовательного исключения неизвестных* (*метод Гаусса*):

1) выписываем расширенную матрицу $\tilde{A}$ системы (9.1);

2) если $\tilde{A}$ нулевая, то общее решение является произвольной строкой $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in P$, $i = \overline{1,n}$;

3) если $A = O_{m,n}$, $B \neq O_{m,1}$, то система несовместна;

4) если $A \neq O_{m,n}$, то элементарными преобразованиями система (9.1) приводится либо к приведенной несовместной, либо к частично мономиальной системе, т.е. к системе с частично мономиальной матрицей. В последнем случае те неизвестные, коэффициенты при которых составляют единичную матрицу порядка, равного числу уравнений, объявляются *базисными*, остальные (если они есть) – *свободными*. Базисные неизвестные выражаются через свободные, что позволяет записать *общее решение*.

Если $m = n$, $\det A \neq 0$, то система (9.1) называется *невырожденной*. В этом случае она имеет единственное решение, компоненты которого могут быть найдены по *формулам Крамера*

$$\alpha_i = \frac{\det A_i}{\det A},\ i = \overline{1,n},$$

где A_i – матрица, полученная из A заменой в ней i-го столбца столбцом свободных членов B.

Рассмотрим теперь матричное уравнение $AX = B$, где $A \in P_{m,n}$; $B \in P_{m,q}$; X – неизвестная $n \times q$-матрица. Для решения этого уравнения к его расширенной матрице $(A \mid B)$ применяются элементарные преобразования строк. Как и в предыдущем случае, множество решений при этом не меняется. Решение уравнения $AX = B$ можно представить в виде $X = (X_1 \mid X_2 \mid ... \mid X_q)$, где X_i – решение уравнения $AX_j = B_j$ (B_j – j-й столбец матрицы B). В частности, обратную матрицу для матрицы $A \in P_{n,n}$ можно найти из матричного уравнения $AX = E$.

Пример 1. Выяснить, является ли система

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -7, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 = -7 \end{cases}$$

невырожденной, и, если является, решить ее по формулам Крамера.

Р е ш е н и е. Вычисляем определитель системы:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 35.$$

Поскольку $\det A \neq 0$, то система является невырожденной и, следовательно, имеет единственное решение, для нахождения которого можно применить формулы Крамера. Для этого вычисляем определители:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 & -1 \\ -7 & 3 & -4 & 4 \\ 9 & 1 & -2 & -2 \\ -7 & -3 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 70,$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & -1 \\ 2 & -7 & -4 & 4 \\ 3 & 9 & -2 & -2 \\ 1 & -7 & 7 & 6 \end{vmatrix} = -35,$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & -7 & 4 \\ 3 & 1 & 9 & -2 \\ 1 & -3 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det A_4 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & -7 \\ 3 & 1 & -2 & 9 \\ 1 & -3 & 7 & -7 \end{vmatrix} = -70.$$

Значит, $\alpha_1 = \dfrac{\det A_1}{\det A} = 2$, $\alpha_2 = \dfrac{\det A_2}{\det A} = -1$, $\alpha_3 = \dfrac{\det A_3}{\det A} = 0$, $\alpha_4 = \dfrac{\det A_4}{\det A} = -2$ и последовательность $(2, -1, 0, -2)$ является решением рассматриваемой системы.

В случае, когда число неизвестных n велико, практическое использование формул Крамера затруднено в связи с необходимостью большого объема вычислений (нужно вычислить $n+1$ определителей n-го порядка, которые требуют примерно в n^2 раз больше вычислительных операций, чем метод Гаусса). Однако формулы Крамера имеют весьма важное значение в теоретическом плане, поскольку они дают возможность явно записать значения неизвестных через коэффициенты и свободные члены системы.

Пример 2. Решить методом Гаусса систему уравнений над полем $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} ix_1 + x_2 + x_3 = i, \\ x_1 + ix_2 + x_3 = 0, \\ ix_1 + ix_2 - x_3 = 2i. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Так как каждому элементарному преобразованию системы соответствует элементарное преобразование строк расширенной матрицы этой системы, и наоборот, то можно оперировать не системой, а строками расширенной матрицы. Составим расширенную матрицу рассматриваемой системы:

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} i & 1 & 1 & i \\ 1 & i & 1 & 0 \\ i & i & -1 & 2i \end{array}\right].$$

Умножая третью строку на $-i$, получаем:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} i & 1 & 1 & i \\ 1 & i & 1 & 0 \\ 1 & 1 & i & 2 \end{array}\right].$$

К первой строке прибавим две последние:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} i+2 & i+2 & i+2 & i+2 \\ 1 & i & 1 & 0 \\ 1 & 1 & i & 2 \end{array}\right].$$

Умножаем первую строку на $(i+2)^{-1}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & 1 & 0 \\ 1 & 1 & i & 2 \end{array}\right].$$

Вычитаем из последних строк первую:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & i-1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i-1 & 1 \end{array}\right].$$

Умножаем первую строку на $1-i$ и прибавляем к ней две последние строки:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1-i & 0 & 0 & 1-i \\ 0 & i-1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i-1 & 1 \end{array}\right].$$

Умножаем первую строку на $(1+i)/2$ и последние на $(-1-i)/2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & (1+i)/2 \\ 0 & 0 & 1 & (-1-i)/2 \end{array}\right].$$

Эта матрица является расширенной матрицей системы

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = (1+i)/2, \\ x_3 = (-1-i)/2, \end{cases}$$

поэтому общее решение исходной системы состоит из одной последовательности $\left(1,\ \dfrac{1+i}{2},\ \dfrac{-1-i}{2}\right)$.

Пример 3. Решить методом Гаусса систему уравнений над полем $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = -13, \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 28, \\ x_1 - 6x_3 - 2x_4 - 5x_5 = -22. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Как и в примере 2, каждому элементарному преобразованию системы соответствует элементарное преобразование строк расширенной матрицы этой системы, и наоборот, поэтому можно оперировать не системой, а строками расширенной матрицы.

Составим расширенную матрицу рассматриваемой системы:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -3 & 1 & -2 & -13 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 7 & 28 \\ 1 & 0 & -6 & -2 & -5 & -22 \end{array}\right].$$

Прибавив ко второй строке первую, умноженную на -4, к третьей, четвертой строкам – первую, умноженную на -1, получим:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -7 & -3 & -6 & -25 \\ 0 & 1 & 7 & 3 & 6 & 25 \\ 0 & -1 & -7 & -3 & -6 & -25 \end{array}\right].$$

Прибавим к третьей строке вторую, к четвертой – вторую, умноженную на -1:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -7 & -3 & -6 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Удалим из последней матрицы нулевые строки, что соответствует третьему элементарному преобразованию системы:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -7 & -3 & -6 & -25 \end{array}\right].$$

Прибавив вторую сторону к первой, а затем умножив вторую строку на -1, будем иметь:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -6 & -2 & -5 & -22 \\ 0 & 1 & 7 & 3 & 6 & 25 \end{array}\right].$$

Полученная матрица является матрицей частично мономиальной системы:

$$\begin{cases} x_1 \quad\;\; - 6x_3 - 2x_4 - 5x_5 = -22, \\ \quad x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 6x_5 = \;\; 25. \end{cases}$$

Коэффициенты при неизвестных x_1 и x_2 образуют единичную матрицу второго порядка, поэтому объявляем неизвестные x_1 и x_2 базисными, а неизвестные x_3, x_4, x_5 – свободными. Свободным неизвестным присваиваем соответственно произвольные значения α_3, α_4, α_5 из поля $\mathbb{R}$ и выражаем базисные неизвестные x_1 и x_2:

$$\begin{cases} x_1 = \;\; 6\alpha_3 + 2\alpha_4 + 5\alpha_5 - 22, \\ x_2 = -7\alpha_3 - 3\alpha_4 - 6\alpha_5 + 25. \end{cases}$$

Таким образом, общее решение рассматриваемой системы имеет вид $(6\alpha_3 + 2\alpha_4 + 5\alpha_5 - 22,\ -7\alpha_3 - 3\alpha_4 - 6\alpha_5 + 25,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 3, 4, 5$.

Пример 4. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 11 & 7 \\ 4 & 16 & 12 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу и с помощью единицы, стоящей в позиции $(1,1)$, получим нули в остальных позициях первого столбца:

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 11 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 16 & 12 & 4 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right].$$

Отсюда следует, что уравнение не имеет решений.

Пример 5. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 7 & 9 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 0 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Используем элементарные преобразования строк расширенной матрицы:

$$(A|B) = \left[\begin{array}{cccc|cc} 7 & 9 & 9 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 2 & -12 & -14 & -14 & 14 \\ 0 & 1 & -5 & -5 & -6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|cc}0&0&-2&-4&-2&2\\0&1&-5&-5&-6&6\\1&0&8&8&9&-7\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|cc}0&0&1&2&1&-1\\0&1&-5&-5&-6&6\\1&0&8&8&9&-7\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|cc}0&0&1&2&1&-1\\0&1&0&5&-1&1\\1&0&0&-8&1&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|cc}1&0&0&-8&1&1\\0&1&0&5&-1&1\\0&0&1&2&1&-1\end{array}\right].$$

Матрица A приведена к частично мономиальной матрице, следовательно, исходное матричное уравнение равносильно двум матричным уравнениям с расширенными матрицами:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-8&1\\0&1&0&5&-1\\0&0&1&2&1\end{array}\right],\quad\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-8&1\\0&1&0&5&1\\0&0&1&2&-1\end{array}\right].$$

Первое матричное уравнение имеет общее решение

$$X_1=\begin{bmatrix}1+8\alpha\\-1-5\alpha\\1-2\alpha\\\alpha\end{bmatrix}\quad\alpha\in\mathbb{R},$$

а второе –

$$X_2=\begin{bmatrix}1+8\beta\\1-5\beta\\-1-2\beta\\\beta\end{bmatrix},\quad\beta\in\mathbb{R}.$$

Таким образом,

$$X=\begin{bmatrix}1+8\alpha&1+8\beta\\-1-5\alpha&1-5\beta\\1-2\alpha&-1-2\beta\\\alpha&\beta\end{bmatrix},\quad\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Пример 6. Найти матрицу, обратную к матрице

$$A=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Применим метод элементарных преобразований:

$$(A|\,E_3)=\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&2&3&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&4&3&1&-2&0\\1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4\\ 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4\end{array}\right].$$

Итак,

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{bmatrix}.$$

9.1. Решить по формулам Крамера системы уравнений:

1) $\begin{cases}3x_1+8x_2+3x_3-x_4=4,\\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=-4,\\ x_1-3x_2-2x_3-2x_4=3,\\ 5x_1-8x_2+4x_3+2x_4=-8;\end{cases}$

2) $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-x_4=6,\\ 2x_1+3x_2-4x_3+4x_4=-7,\\ 3x_1+x_2-2x_3-2x_4=9,\\ x_1-3x_2+7x_3+6x_4=-7;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x_1+4x_2+5x_3+2x_4=20,\\ x_1+2x_2+3x_3+x_4=11,\\ 7x_1+9x_2+10x_3+2x_4=40,\\ 2x_1+9x_2+8x_3+3x_4=37;\end{cases}$

4) $\begin{cases}2x_1+x_2+4x_3+3x_4=10,\\ 5x_1+3x_2+5x_3+3x_4=16,\\ 5x_1+x_2+8x_3+6x_4=20,\\ 7x_1+3x_2+5x_3+3x_4=18;\end{cases}$

5) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=4,\\ 2x_1+3x_2+x_3+2x_4=1,\\ x_1+x_2+x_3-x_4=-2,\\ x_1-2x_3-6x_4=-8;\end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 10, \\ x_1 - 7x_2 + x_3 + 8x_4 = -4, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 7, \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 16; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \ldots + a_n^2x_n = b^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \ldots + a_n^{n-1}x_n = b^{n-1}; \end{cases}$

9) $\begin{cases} ix_1 + (1+i)x_2 + 5x_3 = i, \\ (1-i)x_1 + 4x_2 + 3x_3 = i+5, \\ 5x_1 + 3x_2 + (2-i)x_3 = 5i+3; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x_1 + ix_2 - 2x_3 = 10, \\ x_1 - x_2 + 2ix_3 = 20, \\ ix_1 + 3ix_2 - (1+i)x_3 = 30. \end{cases}$

9.2. Решить методом Гаусса системы уравнений:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ -x + 7y = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -3x + 4y = -1, \\ 6x - 8y = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ -4x + 8y = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 5-3i, \\ 10x - 6y = 2+34i; \end{cases}$

5) $\begin{cases} -x + y = 1+i, \\ 3x - 3y = -3-3i; \end{cases}$

6) $\begin{cases} (1-i)x + 3y = 4+i, \\ (3-4i)x + (1+i)y = 5+4i; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9, \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 8x_1 + 12x_2 - 8x_3 = 2; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 + 7 = 0; \end{cases}$

10) $\begin{cases} (2+i)x_1 + ix_2 + 3x_3 = -2-4i, \\ 3ix_1 + 2x_2 - (1-i)x_3 = -1-4i; \end{cases}$

11) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -2; \end{cases}$

12) $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -7, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 12, \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 + 9x_4 = -4, \\ 9x_1 + 7x_2 + 9x_4 = 11; \end{cases}$

13) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 14, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ -8x_1 - 6x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -36; \end{cases}$

14) $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3; \end{cases}$

15) $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 + 10x_5 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 1, \\ 8x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 12x_4 + 18x_5 = 5, \\ 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 = 4; \end{cases}$

16) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 9x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 = 0, \\ x_1 + 9x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 - 2x_6 = 0, \\ 5x_2 + x_3 - x_4 - x_6 = 0, \\ 3x_2 - x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$

17) $\begin{cases} x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 0, \\ x_1 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = n-2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} = n-1. \end{cases}$

9.3. Решить матричные уравнения:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$; 2) $X \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; 4) $X \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$;

5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}$;

6) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$;

7) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$;

8) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

9) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$;

10) $X \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix}$;

11) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \\ 8 & 2 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 2 & 1 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$;

12) $X \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$;

13) $\begin{bmatrix} 2+i & 4 \\ 1-2i & 3+5i \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} i \\ 1-i \end{bmatrix}$;

14) $X \begin{bmatrix} 3 & i & 0 \\ -i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-i & 4 & 3 \\ i & 1+i & 5 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

9.4. Решить систему матричных уравнений:

$$\begin{cases} X \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 9 & 11 & 5 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

9.5. Методом Гаусса найти матрицы, обратные к матрицам из задачи 8.48.

Глава 10
ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Векторное (*линейное*) *пространство* V над полем P – это абелева группа $(V,+)$ вместе с операцией умножения скаляра на вектор: $P\times V\to V$, $(\alpha,\boldsymbol{a})\mapsto\alpha\boldsymbol{a}$, удовлетворяющей следующим условиям:

1) $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$;
2) $\alpha(\beta\boldsymbol{a})=(\alpha\beta)\boldsymbol{a}$;
3) $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$;
4) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$

для любых $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\in V$ и любых $\alpha,\ \beta\in P$.

Пусть $n\in\mathbb{N}$ и $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\ldots,\boldsymbol{g}_n\in V$. Последовательность $G=(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\ldots,\boldsymbol{g}_n)$ называется *системой векторов* пространства V. Число n – *длина системы* G. Система G называется *линейно независимой*, если из того, что линейная комбинация $\alpha_1\boldsymbol{g}_1+\alpha_2\boldsymbol{g}_2+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{g}_n$, $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in P$, векторов этой системы равна нулевому вектору, следует, что все коэффициенты $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ этой системы равны нулю. В случае, когда данное условие не выполняется, система G считается *линейно зависимой*. Множество всех линейных комбинаций системы векторов G, т.е. векторов вида $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\boldsymbol{g}_k$, называется *линейной оболочкой системы* G и обозначается LG.

Если G линейно независима, то любой вектор из LG единственным образом линейно выражается через G:

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\boldsymbol{g}_k=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\boldsymbol{g}_k\Rightarrow\alpha_1=\beta_1,\quad\alpha_2=\beta_2,\ldots,\alpha_n=\beta_n,$$
$$\forall\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\in P.$$

В частности, если $LG=V$, то система G называется *базисом векторного пространства* V. Тогда любой вектор $\boldsymbol{x}$ из V единственным образом представляется в виде

$$\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{g}_1+\alpha_2\boldsymbol{g}_2+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{g}_n=(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2\ldots,\boldsymbol{g}_n)\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}.$$

В этом случае скаляры $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ называются *координатами вектора* $\boldsymbol{x}$ *в базисе* G, а столбец $\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$ – *координатным столбцом*, его иногда обозначают через $\tau_G(\boldsymbol{x})$. Отображение $\tau_G : V \to P_{n,1}$, $\boldsymbol{x} \mapsto \tau_G(\boldsymbol{x})$ биективно и удовлетворяет соотношениям:

$$\tau_G(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \tau_G(\boldsymbol{x}) + \tau_G(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V,$$

$$\tau_G(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\tau_G(\boldsymbol{x}), \forall\alpha \in P, \forall\boldsymbol{x} \in V.$$

Говорят, что система векторов G линейно выражается через систему векторов H (пишут G л.в. H), если $LG \subseteq LH$. Система G эквивалентна H (обозначается $G \sim H$), если $LG = LH$. В частности, все базисы векторного пространства V эквивалентны и имеют одинаковую длину, называемую *размерностью пространства* V (обозначается $\dim V$). Размерность одноэлементного (нулевого) пространства полагается равной нулю.

Подмножество $M \neq \varnothing$ называется *подпространством векторного пространства* V, если для любой системы G, составленной из векторов множества M, выполняется включение $LG \subseteq M$. Тогда множество M является векторным пространством над полем P относительно индуцированных операций сложения векторов из M и умножения скаляров из P на векторы из M, т.е. если $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M$, то результат применения к паре $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ индуцированной операции сложения равен $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ в случае, когда $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in M$, и не определен в случае, когда $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \notin M$. Аналогично если $\alpha \in P$, $\boldsymbol{a} \in M$, то результат применения к паре $(\alpha, \boldsymbol{a})$ индуцированной операции умножения скаляра на вектор равен $\alpha\boldsymbol{a}$, если $\alpha\boldsymbol{a} \in M$, и не определен в противоположном случае. Например, для любой системы векторов G из V ее линейная оболочка есть подпространство векторного пространства V, что можно записать так: $LG \leqslant V$. Если $M \leqslant V$ и $\dim V = n$, то $\dim M \leqslant n$, причем в случае, когда $\dim M = n$, обязательно выполняется равенство $M = V$.

Суммой двух подпространств M_1 и M_2 является подпространство, состоящее из сумм вида $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, где $\boldsymbol{x}_1 \in M_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in M_2$. Если при этом каждая сумма такого вида однозначно определяет слагаемые $\boldsymbol{x}_1 \in M_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in M_2$, то сумма подпространств называется *прямой*. Сумма обозначается $M_1 + M_2$, прямая сумма – $M_1 \dotplus M_2$ или $M_1 \oplus M_2$. Пересечение любого семейства подпространств векторного пространства V является подпространством. Если M_1 и M_2 – подпространства n-мерного векторного пространства V, то

$$\dim M_1 + \dim M_2 = \dim(M_1 + M_2) + \dim(M_1 \cap M_2). \tag{10.1}$$

Если G – система векторов длины m векторного пространства V, то $\dim LG \leqslant m$. При этом $\dim LG = m$ в том и только в том случае, когда G линейно независима. Число $\dim LG$ называется *рангом системы* G и обозначается $\operatorname{rank} G$. Подсистема H системы G называется ее *базисом*, если H линейно независима и $LH = LG$. В этом случае H является *максимальной линейно независимой подсистемой* системы G, т.е. такой линейно независимой подсистемой, что всякая система вида (H, g) линейно зависима, если g – произвольный вектор из G. Длины всех базисов системы G равны рангу системы G. Всякий базис системы векторов является ее максимальной линейно независимой подсистемой, и обратно: любая максимальная линейно независимая подсистема системы векторов является ее базисом. Это обусловливает важность методов получения максимальных линейно независимых подсистем для решения задач о нахождении базиса подпространства конечномерного векторного пространства, так как обычно подпространства задаются в виде линейных оболочек некоторых систем векторов. Ниже предлагаются два способа нахождения максимальной линейно независимой подсистемы ненулевой системы векторов G.

Первый способ (снизу вверх):

1) удаляем из исходной системы векторов все нулевые векторы;

2) помечаем первый ненулевой вектор;

3) если получившаяся система полностью состоит из помеченных векторов, то процесс заканчиваем и все помеченные векторы образуют максимальную линейно независимую подсистему исходной системы, иначе переходим к следующему шагу;

4) присоединяем к помеченным векторам первый непомеченный вектор рассматриваемой системы. Если получившаяся система векторов линейно независима, то помечаем этот вектор и переходим к шагу 3, иначе этот вектор удаляем из рассматриваемой системы и переходим к шагу 3.

Второй способ (сверху вниз):

1) составляем все линейные комбинации исходной системы $G = (\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, ..., \boldsymbol{g}_n)$, равные нулю, и рассматриваем соответствующие последовательности их коэффициентов $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Каждая из компонент α_k является линейной формой от некоторых независимых переменных, пусть это будут $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$. Переходим к следующему шагу;

2) если все линейные формы рассматриваемой последовательности нулевые, то процесс заканчиваем, и соответствующие им векторы образуют ее базис, иначе фиксируем некоторую ненулевую форму и переходим к следующему шагу;

3) приравнивая нулю данную фиксированную линейную форму, получаем выражение некоторой переменной, например β_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, через остальные. Это выражение подставляем вместо β_k в остальные формы и, удаляя данную фиксированную линейную форму из рассматриваемой последовательности форм, получаем новую последо-

вательность линейных форм от переменных $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ с коэффициентом 0 при β_k. Переходим к шагу 2.

В качестве иллюстрации применения приведенных способов может служить решение задачи о нахождении базиса суммы двух подпространств. Пусть $M_1 = LG$, $M_2 = LH$, $G = (\boldsymbol{g}_1, ..., \boldsymbol{g}_m)$, $H = (\boldsymbol{h}_1, ..., \boldsymbol{h}_k)$. Тогда $M_1 + M_2 = L(\boldsymbol{g}_1, ..., \boldsymbol{g}_m, \boldsymbol{h}_1, ..., \boldsymbol{h}_k)$ и для нахождения базиса суммы достаточно найти какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы $(\boldsymbol{g}_1, ..., \boldsymbol{g}_m, \boldsymbol{h}_1, ..., \boldsymbol{h}_k)$. Ранг этой системы равен длине ее базиса и размерности пространства $M_1 + M_2$.

Рассмотрим близкую к предыдущей задачу определения базиса пересечения двух подпространств. Пусть система $G = (\boldsymbol{g}_1, ..., \boldsymbol{g}_m)$ есть базис подпространства M_1, а система $H = (\boldsymbol{h}_1, ..., \boldsymbol{h}_k)$ – базис подпространства M_2. Тогда $M_1 + M_2 = L(G, H)$, и если $\dim(M_1 + M_2) > \dim M_1$, то существует подсистема K системы H такая, что система векторов (G, K) есть базис $M_1 + M_2$. Можно считать, что $K = (\boldsymbol{h}_1, ..., \boldsymbol{h}_s)$ для некоторого $s \leqslant k$. Из формулы (10.1) имеем:

$$m + s = \dim(M_1 + M_2) = \dim M_1 + \dim M_2 - d = m + k - d,$$

где $d = \dim(M_1 \cap M_2)$, поэтому $s = k - d$. Так что если $d = 0$, то $s = k$.

Предположим, что $d > 0$. Тогда векторы $\boldsymbol{h}_{s+1}, ..., \boldsymbol{h}_k$ линейно выражаются через базис (G, K) суммы $M_1 + M_2$ и могут быть представлены в виде

$$\boldsymbol{h}_j = \alpha_{j1}\boldsymbol{g}_1 + \ldots + \alpha_{jm}\boldsymbol{g}_m + \beta_{j1}\boldsymbol{h}_1 + \ldots + \beta_{js}\boldsymbol{h}_s, \quad j = s+1, ..., k.$$

Отсюда следует, что система векторов $(\boldsymbol{c}_1, ..., \boldsymbol{c}_d)$, где для $j = s+1, ..., k$

$$\boldsymbol{c}_{j-s} = \beta_{j1}\boldsymbol{h}_1 - \ldots - \beta_{js}\boldsymbol{h}_s + \boldsymbol{h}_j = \alpha_{j1}\boldsymbol{g}_1 + \ldots + \alpha_{jm}\boldsymbol{g}_m, \tag{10.2}$$

есть базис подпространства $M_1 \cap M_2$. В самом деле, из выражения (10.2) следует, что $\boldsymbol{c}_1, ..., \boldsymbol{c}_d \in M_1 \cap M_2$. Покажем, что система $(\boldsymbol{c}_1, ..., \boldsymbol{c}_d)$ линейно независима. Предположим от противного, что это не так. Тогда если $d = 1$, то $\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{0}$ и согласно (10.2) $\boldsymbol{h}_{s+1}$ линейно выражается через $(\boldsymbol{h}_1, ..., \boldsymbol{h}_s) = K$, что противоречит линейной независимости системы H. Если $d > 1$, то один из векторов $\boldsymbol{c}_1, ..., \boldsymbol{c}_d$ линейно выражается через остальные, пусть это будет $\boldsymbol{c}_1$. Но тогда из (10.2) следует, что $\boldsymbol{h}_{s+1}$ линейно выражается через $\boldsymbol{h}_1, ..., \boldsymbol{h}_s, \boldsymbol{h}_{s+2}, ..., \boldsymbol{h}_k$, а это противоречит линейной независимости системы H. Значит, система $(\boldsymbol{c}_1, ..., \boldsymbol{c}_d)$ линейно независима и ввиду равенства $d = \dim(M_1 \cap M_2)$ является базисом подпространства $M_1 \cap M_2$.

Задачу нахождения базиса и ранга системы векторов можно решить также с помощью элементарных преобразований систем векторов. *Элементарное преобразование системы векторов* $(\boldsymbol{g}_1, ..., \boldsymbol{g}_m)$ есть переход к системе вида $(\boldsymbol{g}_1, ..., \boldsymbol{g}_{j-1}, \alpha\boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}_{j+1}, ..., \boldsymbol{g}_m)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $\alpha \in P$, $\alpha \neq 0$, либо $(\boldsymbol{g}_1, ..., \boldsymbol{g}_{j-1}, \boldsymbol{g}_j + \alpha\boldsymbol{g}_l, \boldsymbol{g}_{j+1}, ..., \boldsymbol{g}_m)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $1 \leqslant l \leqslant m$, $j \neq l$, $\alpha \in P$. Элементарные преобразования приводят к эквивалентным системам векторов, поэтому не изменяют ранги.

Пусть $A \in P_{m,n}$. *Ранг матрицы A* – это ранг ее системы строк, рассматриваемых как векторы арифметического n-мерного пространства строк $P_{1,n}$ (обозначается $\operatorname{rank} A$). Для вычисления ранга матрицы можно использовать два метода – метод элементарных преобразований и метод окаймления миноров.

Метод элементарных преобразований основан на том, что ненулевая матрица с помощью элементарных преобразований и элиминаций нулевых строк (при этом ранг не изменяется) приводится к частично мономиальному виду, а ранг частично мономиальной матрицы равен числу строк, это и будет ранг исходной матрицы.

Метод окаймления миноров основан на теореме о ранге матрицы: ранг ненулевой матрицы равен наибольшему порядку отличных от нуля миноров этой матрицы. Минор наибольшего порядка, отличный от нуля, называется *базисным минором*. Из данной теоремы, в частности, следует, что ранг системы строк равен рангу системы столбцов матрицы. Те строки (столбцы), на которых расположен базисный минор, составляют базис системы строк (столбцов) матрицы. Процесс вычисления ранга матрицы A организуется следующим образом:

1) если все элементы матрицы A нулевые, то полагаем $\operatorname{rank} A = 0$; в противном случае фиксируем некоторый ненулевой элемент a_{jl} матрицы A, полагаем $k = 1$, $\Delta = \det[a_{jl}]$ и переходим к следующему шагу;

2) если $k = \min\{m, n\}$, то $\operatorname{rank} A = k$, иначе вычисляем те миноры $(k+1)$-го порядка, которые окаймляют минор Δ. Когда все они равны нулю, $\operatorname{rank} A = k$. Когда же среди них есть ненулевой минор, то фиксируем его и рассматриваем в дальнейшем в качестве Δ. Полагаем $k = k + 1$ и переходим к шагу 2.

Отметим, что к вычислению ранга матрицы сводятся многие задачи линейной алгебры. Ниже будет показано, как использовать методы вычисления ранга матрицы для нахождения базиса системы векторов.

Пусть $G = (\boldsymbol{g}_1, ..., \boldsymbol{g}_n)$ – базис векторного пространства V над полем P и $H = (\boldsymbol{h}_1, ..., \boldsymbol{h}_m)$ – система векторов. Матрица $A \in P_{n,m}$, столбцы которой $A_1, ..., A_m$ являются координатными столбцами соответствующих векторов системы H в базисе G, т.е. $A_j = \tau_G(\boldsymbol{h}_j)$, $j = \overline{1, m}$, называется *матрицей перехода от базиса G к системе H* и обозначается $\tau_G(H)$. Так как координатное соответствие τ_G сохраняет ранги систем векторов, то $\operatorname{rank} H = \operatorname{rank} \tau_G(H)$.

Таким образом, для нахождения ранга и базиса системы векторов можно использовать методы нахождения ранга матрицы. Например, если найден базисный минор матрицы $\tau_G(H)$, то векторы $\boldsymbol{h}_j$, соответствующие тем столбцам этой матрицы, на которых расположен данный базисный минор, образуют базис системы H. Система H является базисом тогда и только тогда, когда матрица $\tau_G(H)$ невырожденная.

Пусть G, H – базисы, а K – произвольная система векторов n-мерного векторного пространства V. Тогда верны следующие равенства:

1) $\tau_G(G) = E_n$;
2) $\tau_G(H)^{-1} = \tau_H(G)$;
3) $\tau_G(H)\tau_H(K) = \tau_G(K)$.

Из третьего равенства вытекает, что если A – матрица перехода от базиса G к базису H, а X и Y – координатные столбцы вектора $\boldsymbol{g}$ в базисах G и H соответственно, то

$$X = AY. \tag{10.3}$$

Пример 1. Множество $C[a,b]$ действительных непрерывных функций на отрезке $[a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, образует линейное пространство над $\mathbb{R}$. В качестве сложения векторов берется поаргументное сложение функций, а в качестве умножения скаляра на вектор – умножение действительного числа на функцию, т.е. для любых функций $f, g \in C[a,b]$ и для любых $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Проверка аксиом линейного пространства сводится к проверке соответствующих соотношений для каждого значения аргумента, которые выполняются в силу свойств действительных чисел. Например, дистрибутивность умножения числа на функцию относительно сложения функций сводится к проверке выполнения равенства для каждого x: $(\alpha(f+g))(x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x)$. Левая и правая части этого равенства по определению вышеуказанных операций на множестве $C[a,b]$ есть число $\alpha f(x) + \alpha g(x)$.

Пример 2. В арифметическом пространстве $P_{1,n}$ строк длины n векторы

$$\begin{gathered} \boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \\ \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1) \end{gathered}$$

линейно независимы. Действительно, пусть

$$\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}. \tag{10.4}$$

Имеем:

$$\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{e}_n = \alpha_1(1, 0, \ldots, 0) + \alpha_2(0, 1, \ldots, 0) + \cdots + \alpha_n(0, \ldots, 0, 1) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

С учетом равенства (10.4) из соотношения $(\alpha_1, ..., \alpha_n) = (0, 0, ..., 0)$ следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, т.е. векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ линейно независимы.

Пример 3. Рассмотрим матрицы вида

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

где (i, j)-й элемент равен единице, а все остальные элементы – нули.

Покажем, что матрицы $E_{11}, E_{12}, ..., E_{1n}, E_{21}, ..., E_{2n}, ..., E_{nn}$ линейно независимы. Для этого составим и приравняем нулю произвольную линейную комбинацию с коэффициентами из поля P:

$$\alpha_{11}E_{11} + \alpha_{12}E_{12} + \ldots + \alpha_{1n}E_{1n} + \ldots + \alpha_{nn}E_{nn} = O_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} + \alpha_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} + \cdots +$$

$$+ \alpha_{1n}\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_{nn}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots} \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

или $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \ldots = \alpha_{1n} = \ldots = \alpha_{nn} = 0$. Следовательно, матрицы $E_{11}, E_{12}, ..., E_{nn}$ линейно независимы.

Пример 4. В пространстве $C[a, b]$ система функций $(1, \sin^2 x, \cos^2 x)$ линейно зависима, так как для любого $x \in \mathbb{R}$ равенство $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \sin^2 x + \alpha_3 \cos^2 x = 0$ выполняется не только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Оно справедливо, например, и при $\alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = \alpha_3 = 1$. Система $(\sin^2 x, \cos^2 x)$ линейно независима, так как если для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ равенство $\alpha_1 \sin^2 x + \alpha_2 \cos^2 x = 0$ выполняется для всякого $x \in \mathbb{R}$, то $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$. Действительно, при $x = 0$ получаем $\alpha_2 = 0$, при $x = \pi / 2$ имеем $\alpha_1 = 0$, а значит, и $\alpha_2 = 0$.

Пример 5. Проверить, является ли система векторов $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, где $\boldsymbol{e}_1 = (-2, -1, 3)$, $\boldsymbol{e}_2 = (5, 3, -8)$, $\boldsymbol{e}_3 = (1, -1, 1)$, линейно независимой.

Р е ш е н и е. Равенство $\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \alpha_3\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0}$ равносильно системе линейных уравнений

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 - 8\alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases} \tag{10.5}$$

Записав систему (10.5) в матричном виде и совершив элементарные преобразования, получим:

$$\begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -8 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & -8 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, т.е. векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ линейно независимы.

Пример 6. В пространстве многочленов $\mathbb{R}[x]$ рассмотрим систему векторов $G = (1, x, x^2)$. Пусть $A \in \mathbb{R}_{3,2}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$. Найти произведение системы G на матрицу A.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$GA = (1, x, x^2)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} = (2 + 4x + 8x^2,\ 1 - x^2).$$

Пример 7. Выяснить, являются ли эквивалентными системы векторов $G = (1, x, x^2)$, $H = (2,\ 1 + x,\ x + x^2)$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$(2,\ 1+x,\ x+x^2) = (1,\ x,\ x^2)\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

т.е. H л.в. G,

$$(1, x, x^2) = (2,\ 1+x,\ x+x^2)\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

т.е. G л.в. H. Следовательно, $H \sim G$.

Пример 8. Найти ранг и какой-либо базис системы векторов $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_4 = (1, 2, 3, 4)$, $\boldsymbol{a}_5 = (0, 1, 2, 3)$.

Р е ш е н и е. Для получения базиса системы применим первый способ (снизу вверх) нахождения максимальной линейно независимой подсистемы. Так как рассматриваемая система не содержит нулевых векторов, то помечаем вектор $\boldsymbol{a}_1$. Присоединяем к нему вектор $\boldsymbol{a}_2$ и проверяем их линейную независимость, составляя равенство $\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\boldsymbol{a}_2=\mathbf{0}$, которое равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \\ -\alpha_1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\alpha_1=\alpha_2=0$, т.е. векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ линейно независимы.

Помечаем вектор $\boldsymbol{a}_2$ и присоединяем к помеченным векторам вектор $\boldsymbol{a}_3$. Проверяем линейную независимость векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$. Равенство $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + +\alpha_3\boldsymbol{a}_3=\mathbf{0}$ эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет ненулевые решения, например $\alpha_1=\alpha_3=1$, $\alpha_2=-1$. Следовательно, векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ линейно зависимы.

Удаляем из исходной системы вектор $\boldsymbol{a}_3$ и переходим к рассмотрению вектора $\boldsymbol{a}_4$. Исследуем линейную независимость векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$, т.е. систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 = 0, \\ \alpha_2 + 2\alpha_4 = 0, \\ \alpha_2 + 3\alpha_4 = 0, \\ -\alpha_1 + 4\alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Из нее следует, что $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_4=0$.

Помечаем вектор $\boldsymbol{a}_4$ и присоединяем к помеченным векторам $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ вектор $\boldsymbol{a}_5$. Проверяем линейную независимость векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5$. Из равенства $\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\boldsymbol{a}_2+\alpha_4\boldsymbol{a}_4+\alpha_5\boldsymbol{a}_5=\mathbf{0}$ имеем:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 = 0, \\ \alpha_2 + 2\alpha_4 + \alpha_5 = 0, \\ \alpha_2 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 = 0, \\ -\alpha_1 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 = 0. \end{cases}$$

Последняя система уравнений имеет ненулевое решение $\alpha_1=\alpha_4=-1$, $\alpha_2=\alpha_5=1$, поэтому система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5$ линейно зависима. Удаляем из исходной системы вектор $\boldsymbol{a}_5$. Таким образом, в системе остались только три помеченных вектора $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$, которые образуют базис исходной системы векторов. Ранг этой системы равен 3.

Применим теперь второй способ (сверху вниз) нахождения максимальной линейно независимой подсистемы. Рассмотрим все линейные комбинации исходной системы $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5)$ и приравняем их нулю: $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \alpha_3\boldsymbol{a}_3 + \alpha_4\boldsymbol{a}_4 + \alpha_5\boldsymbol{a}_5 = \mathbf{0}$. Сравнивая координаты обеих частей этого равенства, приходим к однородной системе линейных уравнений с матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решая эту систему, получаем, общее решение в виде $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = (\beta_3 - \beta_5, -\beta_3 + \beta_5, \beta_3, 0, \beta_5)$. Здесь β_3, β_5 – свободные переменные. Фиксируем первую линейную форму α_1 и приравниваем ее нулю: $\alpha_1 = \beta_3 - \beta_5 = 0$. Тогда $\beta_3 = \beta_5$. В общем решении заменяем β_3 на β_5 и удаляем первую линейную форму. В результате имеем новую последовательность линейных форм $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = (0, \beta_5, 0, \beta_5)$. Далее рассматриваем линейную форму $\alpha_3 = \beta_5$, приравниваем ее нулю, исключаем из последовательности линейных форм. В результате получаем нулевую последовательность форм $(\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5) = (0, 0, 0)$. Процесс заканчивается, и векторы $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5$ образуют базис исходной системы. Отметим, что если бы мы сначала зафиксировали форму α_3, а потом α_5, то пришли бы к базису $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$, который был найден первым способом. Отметим также, что любой базис исходной системы имеет три вектора и содержит вектор $\boldsymbol{a}_4$, поскольку форма α_4 нулевая и, значит, вектор $\boldsymbol{a}_4$ не может линейно выражаться через остальные векторы этой системы.

Пример 9. Показать, что система векторов $H = (x^2 + 1,\ x - 1)$ векторного пространства $\mathbb{R}[x]$ является базисом системы $G = (x^2 + x,\ x^2 + 1,\ 3x^3 - 2x - 5,\ x - 1)$.

Решение. Система H есть подсистема системы G. Надо доказать ее линейную независимость. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ и $\alpha_1(x^2 + 1) + \alpha_2(x - 1) = 0$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем равенства $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$. Следовательно, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ и система H линейно независима. Осталось показать, что G л.в. H. Это следует из равенств $x^2 + x = 1 \cdot (x^2 + 1) + 1 \cdot (x - 1)$, $3x^2 - 2x + 5 = 3(x^2 + 1) - 2(x - 1)$.

Пример 10. Найти базис и размерность арифметического пространства строк $P_{1,n}$.

Решение. Рассмотрим систему векторов $\tilde{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, где $\boldsymbol{e}_i = (0, \ldots, 0, \underset{(i)}{1}, 0, \ldots, 0)$. В примере 2 показано, что векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ линейно независимы. Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ – произвольная строка из $P_{1,n}$. Тогда справедливо разложение

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1(1, 0, \ldots, 0) + \alpha_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + \alpha_n(0, \ldots, 0, 1) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{e}_i,$$

т.е. $L\tilde{E} = P_{1,n}$. Следовательно, система $\tilde{E}$ – базис векторного арифметического пространства строк, $\dim P_{1,n} = n$.

Пример 11. Показать, что множество

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ -c & b \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

является подпространством векторного пространства квадратных матриц порядка 2 над полем $\mathbb{R}$. Найти базис и размерность этого подпространства. Указать координаты вектора $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ из пространства M в найденном базисе.

Р е ш е н и е. Множество M замкнуто относительно сложения матриц и умножения матриц на действительное число:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ -c & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ -c_1 & b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+a_1) & (c+c_1) \\ -(c+c_1) & (b+b_1) \end{bmatrix} \in M,$$

$$\alpha \begin{bmatrix} a & c \\ -c & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha c \\ -(\alpha c) & \alpha b \end{bmatrix} \in M, \ \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

т.е. множество M на основании критерия подпространства является подпространством. Найдем его базис. Справедливо разложение

$$\begin{bmatrix} a & c \\ -c & b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \tag{10.6}$$

где $G = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)$, причем в силу соотношения (10.6) $LG = M$.

Система G линейно независима, так как из равенства

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

следует $\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ -\gamma & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, т.е. $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Значит, система G – базис, $\dim M = 3$. Ввиду разложения (10.6) координатный столбец вектора $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ в найденном базисе равен $\begin{bmatrix} 5 & 7 & -4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Пример 12. Показать, что векторы $\boldsymbol{e}_1 = (2, 1, -3)$, $\boldsymbol{e}_2 = (3, 2, -5)$, $\boldsymbol{e}_3 = (1, -1, 1)$ образуют базис трехмерного пространства $\mathbb{R}_{1,3}$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x} = (6, 2, -7)$ в этом базисе.

Р е ш е н и е. Покажем, что векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ линейно независимы. Равенство $\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0}$ равносильно системе линейных уравнений

$$
\begin{cases} 2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3=0, \\ \alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0, \\ -3\alpha_1-5\alpha_2+\alpha_3=0. \end{cases} \tag{10.7}
$$

Записав систему (10.7) в матричном виде и совершив элементарные преобразования строк, получим:

$$
\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Следовательно, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, т.е. векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ линейно независимы, поэтому они образуют базис пространства $\mathbb{R}_{1,3}$.

Найдем координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, т.е. коэффициенты разложения

$$
\boldsymbol{x}=\beta_1\boldsymbol{e}_1+\beta_2\boldsymbol{e}_2+\beta_3\boldsymbol{e}_3. \tag{10.8}
$$

Равенство (10.8) равносильно системе линейных уравнений

$$
\begin{cases} 2\beta_1 + 3\beta_2 + \beta_3 = 6, \\ \beta_1 + 2\beta_2 - \beta_3 = 2, \\ -3\beta_1 - 5\beta_2 + \beta_3 = -7. \end{cases}
$$

Записав эту систему в матричном виде и использовав элементарные преобразования над строками расширенной матрицы, получим:

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -3 & -5 & 1 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].
$$

Отсюда $\beta_1=\beta_2=\beta_3=1$. Таким образом, справедливо разложение

$$
\boldsymbol{x}=1\cdot\boldsymbol{e}_1+1\cdot\boldsymbol{e}_2+1\cdot\boldsymbol{e}_3=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},
$$

т.е. $[1\ 1\ 1]^{\mathrm{T}}$ – координатный столбец вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.

Пример 13. Найти базисы суммы и пересечения подпространств $L_1=\{\lambda_1\boldsymbol{a}_1+ +\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3 | \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\in\mathbb{R}\}$ и $L_2=\{\mu_1\boldsymbol{b}_1+\mu_2\boldsymbol{b}_2+\mu_3\boldsymbol{b}_3 \mid \mu_1, \mu_2, \mu_3\in\mathbb{R}\}$, если $\boldsymbol{a}_1 = =(1, 2, 1)$, $\boldsymbol{a}_2=(1, 1, -1)$, $\boldsymbol{a}_3=(1, 3, 3)$, $\boldsymbol{b}_1=(2, 3, -1)$, $\boldsymbol{b}_2=(1, 2, 2)$, $\boldsymbol{b}_3=(1, 1, -3)$.

Р е ш е н и е. Найдем сначала базисы подпространств L_1 и L_2. Имеем:

$$
\dim L_1=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}=2,
$$

$$\dim L_2 = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = 2.$$

Базисные миноры $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ и $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ этих матриц, столбцами которых являются координаты векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ соответственно, расположены в первом и втором столбцах каждой из них, поэтому базисом L_1 является подсистема $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, базисом L_2 – подсистема $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$. Найдем базис $L_1 + L_2$. Его построение сводится к вычислению ранга матрицы, столбцами которой служат координаты векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Поскольку

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \neq 0,$$

то ранг матрицы равен 3, т.е. $\dim(L_1 + L_2) = 3$. Тогда система $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)$ – максимальная линейно независимая подсистема, т.е. базис системы $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$, является базисом подпространства $L_1 + L_2$. Имеем:

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) = 4 - 3 = 1,$$

следовательно, базис $L_1 \cap L_2$ состоит из одного вектора. Вектор $\boldsymbol{b}_2$ разлагается по базису $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)$ подпространства $L_1 + L_2$: $\boldsymbol{b}_2 = \alpha_{21}\boldsymbol{a}_1 + \alpha_{22}\boldsymbol{a}_2 + \beta_{21}\boldsymbol{b}_1$, или в координатной форме $(1, 2, 2) = \alpha_{21}(1, 2, 1) + \alpha_{22}(1, 1, -1) + \beta_{21}(2, 3, -1)$. Решаем систему линейных уравнений:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Отсюда $\alpha_{21} = 2$, $\alpha_{22} = 1$, $\beta_{21} = -1$, т.е. $\boldsymbol{b}_2 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_1$. Значит, вектор $\boldsymbol{c}_1 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = (3, 5, 1)$ составляет базис подпространства $L_1 \cap L_2$.

Пример 14. Дана матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ перехода от базиса $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ к базису $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ в базисе $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$.

Р е ш е н и е. Из формулы (10.3) имеем $Y = A^{-1}X$. Так как

$$X=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix},\quad A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2&1\\-3&2\end{bmatrix},$$

то координатный столбец Y вектора $\boldsymbol{a}$ в новом базисе

$$Y=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2&1\\-3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

Следовательно, справедливо разложение $\boldsymbol{a}=1\cdot\boldsymbol{e}_1'-1\cdot\boldsymbol{e}_2'$.

Пример 15. В пространстве V_3 найти матрицу перехода от базиса $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ к базису $(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_2)$.

Р е ш е н и е. Имеем разложения $\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_3=1\cdot\boldsymbol{e}_1+0\cdot\boldsymbol{e}_2+(-2)\cdot\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3=0\cdot\boldsymbol{e}_1+$ $+0\cdot\boldsymbol{e}_2+1\cdot\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_2=0\cdot\boldsymbol{e}_1+(-1)\cdot\boldsymbol{e}_2+1\cdot\boldsymbol{e}_3$. Тогда матрицу перехода можно представить как

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\-2&1&1\end{bmatrix}.$$

Пример 16. С помощью элементарных преобразований вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{bmatrix}25&31&17&43&10\\75&94&53&132&30\\75&94&54&134&30\\25&32&20&48&10\end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Прибавив ко второй строке первую, умноженную на -3, к третьей – первую, умноженную на -3, к четвертой – первую, умноженную на -1, получим:

$$A\sim\begin{bmatrix}25&31&17&43&10\\0&1&2&3&0\\0&1&3&5&0\\0&1&3&5&0\end{bmatrix}.$$

Прибавив к четвертой строке третью, умноженную на -1, а затем к третьей – вторую строку, умноженную на -1, к первой – вторую, умноженную на -31, будем иметь:

$$A\sim\begin{bmatrix}25&0&-45&-50&10\\0&1&2&3&0\\0&0&1&2&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Заметим, что в левом верхнем углу расположен базисный минор третьего порядка. Следовательно, $\operatorname{rank}A=3$.

Пример 17. Методом окаймления миноров вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Решение. Среди миноров первого порядка есть отличный от нуля, например $\Delta_1=1$. Среди окаймляющих его миноров второго порядка есть отличный от нуля, например $\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$. Среди миноров, окаймляющих минор Δ_2, есть ненулевой минор третьего порядка, например

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Поскольку единственным минором, окаймляющим минор Δ_3, является определитель матрицы A, причем равный нулю, то $\operatorname{rank} A=3$.

Пример 18. Найти базис и ранг системы векторов $K=(2x^2+1,\ -3x+1,\ -3x^3+2x^2+3x,\ 2x^3)$ пространства многочленов степени не большей 3, над полем $\mathbb{R}$.

Решение. Известно, что в вышеуказанном пространстве многочленов степени $\leqslant 3$ система $G=(1,x,x^2,x^3)$ является базисом. Найдем матрицу $\tau_G(K)$ перехода от G к K:

$$\tau_G(K)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Применяя к ней элементарные преобразования столбцов

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

приходим к тому, что ранг этой матрицы равен 3 и последние три ее столбца составляют базис системы столбцов, поэтому $\operatorname{rank} K=3$ и система $(-3x+1,\ -3x^3+2x^2+3x,\ 2x^3)$ является базисом системы K.

Пример 19. Показать, что система векторов $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$ пространства $\mathbb{R}_{1,4}$ линейно независима, и дополнить ее до базиса всего пространства, где $\boldsymbol{a}_1=(1,18,40,1)$, $\boldsymbol{a}_2=(2,1,0,1)$.

Решение. Система $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$ линейно независима, так как эти строки непропорциональны. Далее составляем матрицу $A\in\mathbb{R}_{4,4}$, включая $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ в качестве первых строк, такую, что $\det A \neq 0$. В качестве такой матрицы, можно взять, например, матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 18 & 40 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь мы используем то обстоятельство, что согласно следствию из теоремы о ранге матрицы система строк квадратной матрицы линейно независима тогда и только тогда, когда ее определитель не равен нулю, а также то, что в n-мерном пространстве линейно независимая система длины n является базисом.

Таким образом, система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$, где $\boldsymbol{a}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_4 = (0, 0, 0, 1)$, линейно независима и образует базис пространства $\mathbb{R}_{1,4}$.

10.1. Определить, являются ли указанные множества с заданными на них операциями векторными пространствами:

1) множество всех комплексных чисел с операциями сложения комплексных чисел и умножения рационального числа (скаляра) на комплексное число;

2) множество всех действительных чисел с операциями сложения действительных чисел и умножения комплексного числа (скаляра) на действительное число;

3) множество всех рациональных чисел с операциями сложения рациональных чисел и умножения действительного числа (скаляра) на рациональное число;

4) множество всех целых чисел с операциями сложения целых чисел и умножения комплексного числа (скаляра) на целое число;

5) множество всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ степени $\leqslant n$;

6) множество всех многочленов над полем $\mathbb{C}$ с данным множеством корней;

7) множество всех многочленов над полем $\mathbb{C}$, среди корней каждого из которых имеются числа 1, 2, 3, 4, 5;

8) множество $\mathbb{C}_{m,n}$ всех комплексных матриц размеров $m \times n$ с операциями сложения матриц и умножения действительного числа на матрицу;

9) множество всех числовых последовательностей $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in \mathbb{R}$, с операциями покомпонентного сложения и умножения действительного числа на каждую компоненту;

10) множество $C^k[a, b]$ всех действительных функций, имеющих на отрезке $[a, b]$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, непрерывную производную k-го порядка, с операциями поаргументного сложения функций и умножения действительного числа на функцию.

10.2. Является ли действительным векторным пространством множество F бесконечных действительных последовательностей (Фибоначчи), элементы которых удовлетворяют соотношению

$\alpha_k = \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}$, $k = 3, 4, \ldots$? Операции над последовательностями определены так же, как в задаче 10.1 (п. 9).

10.3. Найти линейную комбинацию $3\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 - 7\boldsymbol{a}_3$ векторов $\boldsymbol{a}_1 = (-7, 3, 4, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, -1, -6, -5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-3, 1, 0, -1)$ арифметического пространства $\mathbb{R}_{1,4}$. Что можно сказать о системе векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$?

10.4. Найти линейную комбинацию $2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{a}_3$ векторов $\boldsymbol{a}_1 = (2, 0, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, -1, 5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-1, 1, 2)$ арифметического пространства $\mathbb{R}_{1,3}$.

10.5. Дана система многочленов $\tilde{F} = (f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x))$, где $f_1(x) = 1 - x^2$, $f_2(x) = 1 + x^3$, $f_3(x) = x - x^3$, $f_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3$. Найти следующие линейные комбинации многочленов этой системы:

1) $11f_2 + f_3 - 5f_4$;

2) $3f_1 + 5f_2 - 2f_3 - 2f_4$.

Что можно сказать о линейной зависимости системы $\tilde{F}$?

10.6. Найти вектор $\boldsymbol{x}$ из уравнения $\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{a}_3 + 4\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, где $\boldsymbol{a}_1 = (2, -1, -8)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-3, 4, -1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-4, 5, -2)$.

10.7. Выяснить, являются ли следующие системы векторов арифметических пространств линейно зависимыми:

1) $\boldsymbol{a}_1 = (2, -1, 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-3, 3, 2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3, -3, -2)$;

2) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 3, 2, 4)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3, 6, 9, 0)$;

3) $\boldsymbol{a}_1 = (2, 4, 6)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 3, 5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (4, 10, 16)$;

4) $\boldsymbol{a}_1 = (2, 4, 6)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 3, 5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (4, 10, 16 + \varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$;

5) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 4)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 0, 1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{a}_4 = (0, 0, 2)$;

6) $\boldsymbol{a}_1 = (1, -2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-2, 1)$;

7) $\boldsymbol{a}_1 = (5, 0, 0, -2, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (4, 1, 0, -3, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3, -1, 1, -1, 0)$, $\boldsymbol{a}_4 = (12, -3, 4, 11, 2)$;

8) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 2, 0, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0, 0, 3, 0)$, $\boldsymbol{a}_4 = (0, 0, 0, \alpha)$;

9) $\boldsymbol{a}_1 = (i, 1 - i, 1, 2 + i)$, $\boldsymbol{a}_2 = (i - 1, 2, 1 + i, 1 + 3i)$.

10.8. Выяснить, является ли линейно независимой каждая из систем векторов в пространстве матриц $\mathbb{R}_{n,m}$:

1) $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right)$;

2) $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$;

3) $\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$;

4) $\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}\right)$;

5) $\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\right)$.

10.9. Проверить, является ли линейно независимой каждая из систем векторов в пространстве $C(-\infty, +\infty)$:

1) $(2x+1, x^2+3)$;
2) $(x+2, (x+2)^2, (x+2)^3)$;
3) $(2, x+2, x^2+x+4)$;
4) (e^x, e^{-x});
5) $(e^x, \operatorname{ch} x, e^{-x})$;
6) $(1, \sin 2x, \sin 3x)$;
7) $(\sin^3 x, \cos^3 x)$;
8) $(1, \ln|x|, \ln|2x|)$;
9) $(2, \cos^2 x, \cos 2x, \operatorname{ch} x)$;
10) $(\sin x, \sin 3x, \sin^3 x)$;
11) $(\cos x, \cos 3x, \cos^3 x, \sin^3 x)$;
12) $(3^x, 4^x, 12^x)$;
13) $(\sin x, \sin(x+2), \cos x, \cos(x+2))$;
14) $(\pi, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x)$.

10.10. Показать, что системы векторов линейно независимы:

1) $(x+4,\ 3x^2-1,\ 2x^2+4x)$ в пространстве многочленов над полем $\mathbb{R}$;

2) $((y, x, 2), (y-x, 6, 4))$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 3$, $y \neq -3$, в пространстве $\mathbb{R}_{1,3}$;

3) $(1, e^x, \operatorname{sh} x)$ в пространстве действительных непрерывных функций;

4) $(\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x)$ в пространстве действительных непрерывных функций;

5) $(1+i, i)$ в пространстве $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{R}$;

6) $(f(x), g(x))$ в пространстве действительных функций на отрезке $[1, 4]$, где

$$f(x) = \begin{cases} x+5, & x \in [1, 2], \\ 0, & x \in (2, 4]; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [1, 2], \\ x+5, & x \in (2, 4]; \end{cases}$$

7) $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$ в пространстве матриц $\mathbb{R}_{2,2}$.

10.11. Показать, что системы векторов линейно зависимы, и найти их линейные комбинации, равные нулю, с ненулевыми наборами коэффициентов:

1) $(2-i,\ 1-2i,\ 7-8i)$ в пространстве $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{R}$;

2) $\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}\right)$ в пространстве матриц $\mathbb{R}_{2,2}$;

3) $(2x-4,\ 2x^2+x,\ x^2-x+3)$ в пространстве многочленов над полем $\mathbb{R}$;

4) $(1, \cos x, \cos 2x, \cos 4x, \cos^4 x)$ в пространстве действительных непрерывных функций;

5) $(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, e^x)$ в пространстве действительных непрерывных функций;

6) $(1, \cos^2 x, \cos 2x, e^x))$ в пространстве $C[0,1]$ действительных непрерывных функций, определенных на отрезке $[0,1]$.

10.12. Описать линейные оболочки следующих систем векторов пространства $\mathbb{R}_{1,4}$:

1) $\boldsymbol{a}_1 = (1,0,0,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0,1,0,0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0,0,1,0)$;

2) $\boldsymbol{a}_1 = (-1,0,0,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-1,0,1,0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-1,1,0,0)$;

3) $\boldsymbol{a}_1 = (1,0,0,0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0,1,0,0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0,0,0,1)$.

10.13. Найти линейные оболочки следующих систем многочленов:

1) $(1, x, x^2)$; 2) $(1+x^2,\ x+x^2,\ 1+x+x^2)$;

3) $(1,\ x^2+x,\ x^2+1)$; 4) $(1-x^2,\ x-x^2)$.

10.14. Описать линейную оболочку системы векторов:

1) $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$;

2) $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$.

10.15. Рассмотрим линейную оболочку чисел 1, $\sqrt{2}$ в множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ – векторном пространстве с операциями сложения действительных чисел и умножения рационального числа на действительное число. Принадлежит ли этой оболочке число $\sqrt[4]{2}$?

10.16. Умножить систему векторов $G = (1,\ x,\ x^2+x)$ на матрицу:

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$; 2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

10.17. Даны системы многочленов $H = (2, x, 3x^2+4x+1)$, $G = (1,\ x+1,\ x^2+2x)$. Показать, что H л.в. G.

10.18. Система векторов $G=(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2)$ линейно выражается через систему $H=(\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\boldsymbol{h}_3,\boldsymbol{h}_4)$: $\boldsymbol{g}_1=2\boldsymbol{h}_1+\boldsymbol{h}_2+3\boldsymbol{h}_4$, $\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{h}_1-5\boldsymbol{h}_2+4\boldsymbol{h}_3-2\boldsymbol{h}_4$. Система H л.в. F, где $F=(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3)$: $\boldsymbol{h}_1=\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{f}_3$, $\boldsymbol{h}_2=\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2-\boldsymbol{f}_3$, $\boldsymbol{h}_3=\boldsymbol{f}_1-\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{f}_3$, $\boldsymbol{h}_4=-\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{f}_3$. Найти выражение системы G через систему F.

10.19. Показать, что $H\sim G$, где $H=(1,x,x^2)$; $G=(x+2,2,x^2-2x+3)$.

10.20. Проверить, являются ли эквивалентными системы векторов G,H:

1) $G=(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3)$, $H=(\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\boldsymbol{h}_3)$, где $\boldsymbol{g}_1=(1,0,0)$; $\boldsymbol{g}_2=(0,1,0)$; $\boldsymbol{g}_3=(0,0,1)$; $\boldsymbol{h}_1=(0,0,1)$; $\boldsymbol{h}_2=(0,1,1)$; $\boldsymbol{h}_3=(1,1,1)$;

2) $G=(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3)$, $H=(\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\boldsymbol{h}_3,\boldsymbol{h}_4)$, где $\boldsymbol{g}_1=(1,1,1)$; $\boldsymbol{g}_2=(1,0,-1)$; $\boldsymbol{g}_3=(1,3,5)$; $\boldsymbol{h}_1=(1,2,3)$; $\boldsymbol{h}_2=(0,1,2)$; $\boldsymbol{h}_3=(3,4,5)$; $\boldsymbol{h}_4=(4,6,8)$.

10.21. Найти какой-либо базис и ранг систем векторов:

1) $\boldsymbol{a}_1=(1,2,4)$, $\boldsymbol{a}_2=(-1,0,1)$, $\boldsymbol{a}_3=(0,2,3)$, $\boldsymbol{a}_4=(5,2,0)$;

2) $\boldsymbol{a}_1=(2,3,-4,1)$, $\boldsymbol{a}_2=(-6,4,-10,16)$, $\boldsymbol{a}_3=(1,2,3,-4)$, $\boldsymbol{a}_4=(12,-5,-26,9)$, $\boldsymbol{a}_5=(4,6,-8,2)$;

3) $\boldsymbol{a}_1=(1,\ 4,\ 7,\ 10)$, $\boldsymbol{a}_2=(1,\ 2,\ 3,\ 4)$, $\boldsymbol{a}_3=(2,\ 5,\ 8,\ 11)$;

4) $\boldsymbol{a}_1=(1,\ -1,\ 0,\ 0)$, $\boldsymbol{a}_2=(0,\ 1,\ -1,\ 0)$, $\boldsymbol{a}_3=(0,\ 0,\ 1,\ -1)$, $\boldsymbol{a}_4=(-1,\ 0,\ 0,\ 1)$;

5) $f_1=3x^2+2x+1$, $f_2=4x^2+3x+2$, $f_3=3x^2+2x+3$, $f_4=x^2+x+1$, $f_5=4x^2+3x+4$;

6) $f_1=x^3+2x^2+3x+4$, $f_2=2x^3+3x^2+4x+5$, $f_3=3x^3+4x^2+5x+{}$ $+6$, $f_4=4x^3+5x^2+6x+7$, $f_5=x^3+x^2+x+1$;

7) $f_1=x^3+2x^2+3x-4$, $f_2=3x^3-4x^2+x+2$, $f_3=2x^3-5x^2+8x-3$, $f_4=2x^3+3x^2-4x+1$, $f_5=5x^3+26x^2-9x-12$.

10.22. Для каждой из систем векторов найти какой-либо базис:

1) $\boldsymbol{a}_1=(0,\ 2,\ -1)$, $\boldsymbol{a}_2=(2,\ 0,\ 3)$, $\boldsymbol{a}_3=(3,\ 7,\ 1)$, $\boldsymbol{a}_4=(5,\ 1,\ 8)$;

2) $\boldsymbol{a}_1=(3-i,\ 4+3i,\ 1-2i,\ -7+5i)$, $\boldsymbol{a}_2=(0,\ -3,\ 1,\ 1)$, $\boldsymbol{a}_3=(1+3i,\ 4i,\ 1+i,\ -6-7i)$.

10.23. Найти все максимальные линейно независимые подсистемы системы векторов $\boldsymbol{a}_1=(1,-2,3,-4)$, $\boldsymbol{a}_2=(2,-4,6,-8)$, $\boldsymbol{a}_3=(3,-1,-2,1)$, $\boldsymbol{a}_4=(9,-3,-6,3)$.

10.24. Найти все базисы для каждой из систем векторов:

1) $\boldsymbol{a}_1=(-3,1,0,0)$, $\boldsymbol{a}_2=(4,3,2,1)$, $\boldsymbol{a}_3=(-9,3,0,0)$;

2) $\boldsymbol{a}_1=(-1,0,3,2,4)$, $\boldsymbol{a}_2=(0,1,1,1,-1)$, $\boldsymbol{a}_3=(-1,2,5,4,2)$;

3) $\boldsymbol{a}_1=(1,2,3)$, $\boldsymbol{a}_2=(2,3,4)$, $\boldsymbol{a}_3=(-3,-2,-3)$, $\boldsymbol{a}_4=(4,3,4)$, $\boldsymbol{a}_5=(2,2,2)$;

4) $\boldsymbol{a}_1=(2i,\ i,\ -1)$, $\boldsymbol{a}_2=(2+3i,\ 1-i,\ 1+i)$, $\boldsymbol{a}_3=(3-2i,\ -1-i,\ 1-i)$, $\boldsymbol{a}_4=(10+2i,\ -4i,\ 4)$.

10.25. Найти какой-либо базис системы векторов и все векторы системы, не входящие в данный базис, выразить через векторы базиса:

1) $\boldsymbol{a}_1=(-3,1,5,2)$, $\boldsymbol{a}_2=(-2,3,4,1)$, $\boldsymbol{a}_3=(1,-5,-3,0)$, $\boldsymbol{a}_4=(-1,2,3,4)$;

2) $\boldsymbol{a}_1=(1,3,4,-3)$, $\boldsymbol{a}_2=(3,5,2,-1)$, $\boldsymbol{a}_3=(3,4,3,-2)$, $\boldsymbol{a}_4=(7,0,-7,6)$.

10.26. Даны две системы векторов: $H=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$, $G=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4)$, где $\boldsymbol{a}_1=(1,3,4)$; $\boldsymbol{a}_2=(2,0,-2)$; $\boldsymbol{a}_3=(1,1,1)$; $\boldsymbol{b}_1=(0,1,2)$; $\boldsymbol{b}_2=(1,2,3)$; $\boldsymbol{b}_3=(3,4,5)$; $\boldsymbol{b}_4=(1,2,2)$. Доказать, что $H\sim G$.

10.27. Систему многочленов $(x^5+x^4,\ x^5-3x^3,\ x^5+2x^3,\ x^5-x)$ дополнить до базиса пространства многочленов над полем $\mathbb{R}$ степени, не большей 5.

10.28. Найти размерность и какой-либо базис линейной оболочки следующей системы многочленов над полем $\mathbb{R}$: $(x^6+x^4,\ x^6-2x^4+x,\ x^6+3x^4-x,\ x^6-4x^4+2x)$.

10.29. Найти размерность и какой-либо базис линейной оболочки системы $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5)$ векторов арифметического пространства строк $\mathbb{R}_{1,4}$, где $\boldsymbol{a}_1=(2,5,2,3)$; $\boldsymbol{a}_2=(2,-1,1,2)$; $\boldsymbol{a}_3=(3,-1,-1,4)$; $\boldsymbol{a}_4=(3,5,2,9)$; $\boldsymbol{a}_5=(1,0,0,6)$.

10.30. Составить какой-либо базис пространства многочленов над полем $\mathbb{R}$ степени, не большей 4, состоящий из многочленов четвертой степени. Можно ли составить базис этого пространства, не содержащий ни одного многочлена четвертой степени?

10.31. Показать, что система векторов $H=(x+1,\ x^2+2)$ является базисом системы векторов $G=(x^2+4x+6,\ x+1,\ 3x^2-4x+2,\ x^2+2)$ векторного пространства многочленов над полем $\mathbb{R}$.

10.32. Показать, что система векторов $H=(2,\ x^2+3,\ x^3+x)$ векторного пространства многочленов над полем $\mathbb{Q}$ является базисом системы векторов $G=(2,\ 2x^3-2x^2+2x+5,\ x^2,\ x^2+3,\ x^3+x)$.

10.33. Выяснить, какова размерность каждого из векторных пространств, и найти какой-либо базис:

1) векторное пространство $V_1(\Delta)$ векторов, параллельных данной прямой Δ;

2) векторное пространство $V_2(\Pi)$ векторов, параллельных данной плоскости Π;

3) векторное пространство комплексных чисел над полем $\mathbb{R}$ с операцией сложения векторов – сложением комплексных чисел и операцией умножения скаляра на вектор – умножением действительного числа на комплексное число;

4) векторное пространство многочленов над полем $\mathbb{R}$ степени, не большей n;

5) векторное пространство всех $m \times n$-матриц с комплексными элементами над полем $\mathbb{R}$;

6) векторное пространство бесконечных последовательностей действительных чисел $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ (см. задачу 10.2);

7) векторное пространство битовых строк длины n с операциями сравнения ^ (ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ) и поразрядного умножения нуля или единицы на битовую строку.

10.34. Выяснить, является ли подпространством соответствующего векторного пространства над полем $\mathbb{R}$ каждое из следующих множеств векторов:

1) все векторы плоскости, каждый из которых параллелен либо оси Ox, либо оси Oy;

2) все векторы плоскости, одинаково направленные с осью Ox;

3) все векторы из пространства V_3, являющиеся радиусами-векторами точек фиксированной плоскости Π;

4) все векторы из пространства $\mathbb{R}_{1,n}$, сумма компонент каждого из которых равна π;

5) все векторы из пространства $\mathbb{R}_{1,n}$, сумма компонент каждого из которых равна нулю;

6) все симметрические матрицы порядка n над полем $\mathbb{R}$;

7) все верхние треугольные матрицы над полем $\mathbb{C}$ порядка 3;

8) все многочлены степени n над полем $\mathbb{R}$;

9) множество всех многочленов $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, удовлетворяющих условию $f(0) = 0$;

10) множество всех многочленов $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, удовлетворяющих условию $f(0) = 1$;

11) множество всех многочленов $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, удовлетворяющих условию $f(0) = f(1) = 0$;

12) множество всех многочленов $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, удовлетворяющих условию $f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(100) = 0$;

13) множество всех многочленов $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, сумма коэффициентов каждого из которых равна нулю;

14) множество всех дифференцируемых функций в пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$;

15) множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$, в пространстве действительных функций, определенных на отрезке $[a, b]$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ (операции – поаргументное сложение функций и умножение действительного числа на функцию);

16) множество всех решений стационарного дифференциального уравнения $D^2 x + a_1 Dx + a_0 x = 0$, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, в пространстве дважды дифференцируемых действительных функций;

17) множество функций $\{a + b\sin^2 x + c\cos^2 x + d\cos 2x | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ в пространстве бесконечно дифференцируемых действительных функций;

18) множество функций $\{ae^x + be^{-x} + cx | a,b,c \in \mathbb{R}\}$ в том же пространстве, что и в п. 17);

19) множество функций $\{a\cos^2 x + b\cos 2x + c\sin^2 x + 5d | a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ в том же пространстве, что и в п. 17);

20) множество всех кососимметрических матриц в пространстве матриц $\mathbb{R}_{3,3}$;

21) множество всех диагональных матриц в пространстве матриц $\mathbb{R}_{n,n}$;

22) множество всех симметрических матриц в пространстве матриц $\mathbb{R}_{n,n}$;

23) множество всех эрмитовых матриц в пространстве матриц $\mathbb{C}_{n,n}$;

24) множество матриц вида $\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & b \end{bmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, в пространстве матриц $\mathbb{R}_{2,2}$;

25) множество матриц вида $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, в пространстве матриц $\mathbb{R}_{2,2}$;

26) множество матриц вида $\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ b & c & a \end{bmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, в пространстве матриц $\mathbb{R}_{3,3}$.

10.35. Перечислить все подпространства пространства геометрических векторов V_3. Найти размерность и базис каждого ненулевого подпространства.

10.36. Доказать, что множества векторов образуют подпространства соответствующих векторных пространств, найти их размерности и для каждого указать какой-либо базис:

1) множество всех векторов пространства $\mathbb{R}_{1,n}$, у которых первая и последняя компоненты равны нулю;

2) множество всех векторов пространства $\mathbb{R}_{1,n}$, у которых все нечетные компоненты равны между собой и все четные компоненты равны между собой;

3) множество всех векторов пространства $\mathbb{R}_{1,n}$, у которых сумма всех четных компонент равна нулю;

4) множество действительных функций

$$\{ae^x + b\operatorname{ch} x + c\operatorname{sh} x + de^{-x} \ |a, b, c, d \in \mathbb{R}\};$$

5) множество действительных функций $\{a+b\sin^2 x+c\sin 2x+$ $+d\cos^2 x \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$;

6) множество действительных функций $\{a+b\cos 2x+c\cos^2 x+$ $+15d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$;

7) множество действительных функций $\{a\sin x+b\sin(x+1)+$ $+c\cos(x+2) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$;

8) множество матриц

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\};$$

9) множество матриц

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & a & d & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\};$$

10) множество матриц

$$\left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \delta & \mu \\ \delta & \beta & \lambda \\ \mu & \lambda & \gamma \end{bmatrix} \middle| \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\};$$

11) множество матриц

$$\left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \alpha & \beta \\ \gamma & \beta & \alpha \end{bmatrix} \middle| \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

10.37. Можно ли в пространстве многочленов над полем $\mathbb{R}$ степени $\leqslant 2$ выбрать в качестве базиса систему многочленов:

1) $(x^2+1, \; -x^2+1, \; 2x+1)$; 2) $(x^2+1, \; -x^2+1, \; 2x^2+1)$?

10.38. Найти координаты каждого из многочленов в базисе $(1, x, x^2, x^3)$ пространства многочленов над полем $\mathbb{R}$ степени $\leqslant 3$:

1) $9x^3-2x^2+10$; 2) $(x-1)^2$;

3) $3x+5$; 4) $(2x+3)^3$.

10.39. Найти координаты многочлена $2x^2+3$ в базисе $(1, \; x-2,$ $x-2)^2)$ пространства многочленов над полем $\mathbb{R}$ степени $\leqslant 2$.

10.40. Найти координаты многочлена $x^5-x^4+x^3-x^2-x+1$ в каждом из базисов пространства многочленов над полем $\mathbb{C}$ степени $\leqslant 5$:

1) $(1, x, x^2, x^3, x^4, x^5)$;

2) $(1, x+1, x^2+1, x^3+1, x^4+1, x^5+1)$.

10.41. Найти координаты вектора $(3, 2, -1, 0, 4)$ в каждом из базисов:

1) $((1,0,0,0,0), (0,1,0,0,0), (0,0,1,0,0), (0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1))$;

2) $((0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1),(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0))$.

10.42. Найти координаты вектора $-5+4i$ в базисе $(-1+2i, 2-i)$ векторного пространства комплексных чисел над полем $\mathbb{R}$.

10.43. В базисе $\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)$ векторного пространства матриц $\mathbb{R}_{2,2}$ над полем $\mathbb{R}$ найти координаты вектора $\begin{bmatrix}5 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}$.

10.44. В базисе $\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)$ векторного пространства симметрических матриц второго порядка над полем $\mathbb{R}$ найти координаты вектора $\begin{bmatrix}3 & 8\\ 8 & 1\end{bmatrix}$.

10.45. В базисе $(\sin x, \cos x)$ линейной оболочки $L(\sin x, \cos x)$ системы непрерывных действительных функций найти координаты векторов:

1) $\sin(x+1)$; 2) $2\sin x + 3\cos(x+2)$.

10.46. В базисе (e^x, e^{-x}) подпространства $L(e^x, e^{-x})$ векторного пространства непрерывных действительных функций найти координаты векторов:

1) $e^x + 4\,\mathrm{ch}x$; 2) $e^{-x} + 6\,\mathrm{sh}x + 2e^x$.

10.47. В арифметическом векторном пространстве $\mathbb{R}_{1,n}$, где $n \in \{2,3,4\}$, заданы векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{x}$. Показать, что $(\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n)$ есть базис пространства $\mathbb{R}_{1,n}$, и найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в этом базисе, если:

1) $\boldsymbol{e}_1 = (3,9,4)$, $\boldsymbol{e}_2 = (1,5,3)$, $\boldsymbol{e}_3 = (2,7,3)$, $\boldsymbol{x} = (2,1,1)$;

2) $\boldsymbol{e}_1 = (-1,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (2,-3)$, $2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_2$;

3) $\boldsymbol{e}_1 = (1,-1,1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (2,1,-3)$, $\boldsymbol{e}_3 = (3,2,-5)$, $\boldsymbol{x} = (6,2,-7)$;

4) $\boldsymbol{e}_1 = (1,2,1,1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (2,3,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (4,2,-1,-6)$, $\boldsymbol{e}_4 = (3,1,1,-2)$, $\boldsymbol{x} = (0,0,2,7)$.

10.48. Найти размерность и какой-либо базис линейной оболочки системы $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5)$ векторов пространства $\mathbb{R}_{1,4}$, где $\boldsymbol{a}_1 = (2,\ 0,\ 0,\ -2)$; $\boldsymbol{a}_2 = (1,1,1,1)$; $\boldsymbol{a}_3 = (4,2,2,0)$; $\boldsymbol{a}_4 = (1,2,3,4)$, $\boldsymbol{a}_5 = (0,1,2,3)$.

10.49. Найти размерность s суммы и размерность d пересечения подпространств $L_1 = L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $L_2 = L(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ арифметического векторного пространства строк $\mathbb{R}_{1,4}$, где $\boldsymbol{a}_1 = (2,2,2,2)$; $\boldsymbol{a}_2 = (-1,1,-1,1)$; $\boldsymbol{a}_3 = (2,6,2,6)$; $\boldsymbol{b}_1 = (1,2,0,2)$; $\boldsymbol{b}_2 = (1,2,1,2)$; $\boldsymbol{b}_3 = (6,2,6,2)$.

10.50. Найти какой-либо базис и размерность суммы подпространства $L_1 = L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $L_2 = L(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ арифметического векторного пространства $\mathbb{R}_{1,4}$, где $\boldsymbol{a}_1 = (-5, -2, -3, 6)$; $\boldsymbol{a}_2 = (-7, 0, 1, 2)$; $\boldsymbol{a}_3 = (4, 3, 2, -5)$; $\boldsymbol{b}_1 = (2, 2, 2, 2)$; $\boldsymbol{b}_2 = (3, -2, 1, 0)$; $\boldsymbol{b}_3 = (5, 1, 3, 3)$. Определить также размерность d пересечения подпространств L_1 и L_2.

10.51. Найти какие-либо базисы суммы и пересечения подпространств $L_1 = L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и $L_2 = L(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ арифметического векторного пространства строк $\mathbb{R}_{1,n}$, где $n = 3$ или $n = 4$, если:

1) $\boldsymbol{a}_1 = (0, 1, 2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3, 2, 1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-1, 2, 5)$, $\boldsymbol{b}_1 = (0, -3, 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (4, 2, 2)$, $\boldsymbol{b}_3 = (-3, 0, -2)$;

2) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 2, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 3, 2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-2, 1, 1, 3)$, $\boldsymbol{b}_1 = (3, 1, 4, 0)$, $\boldsymbol{b}_2 = (-6, -2, 0, 1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (5, 3, 0, 1)$;

3) $\boldsymbol{a}_1 = (0, 0, -1, -1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 2, 2, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{b}_1 = (0, -2, 0, -2)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1, 1, 2, 0)$, $\boldsymbol{b}_3 = (2, 1, 2, 1)$.

10.52. Доказать, что сумма L подпространств L_1, L_2 является их прямой суммой тогда и только тогда, когда объединение базисов этих подпространств дает базис L.

10.53. Показать, что $L_1 \oplus L_2 = \mathbb{R}_{1,4}$, где $L_1 = L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$; $L_2 = L(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$; $\boldsymbol{a}_1 = (2, 3, 5, 11)$; $\boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 2, 5)$; $\boldsymbol{a}_3 = (0, 1, 1, 1)$; $\boldsymbol{b}_1 = (2, 1, 2, 3)$; $\boldsymbol{b}_2 = (1, 1, 4, 3)$; $\boldsymbol{b}_3 = (5, 2, 2, 6)$.

10.54. Доказать, что пространство всех действительных матриц порядка n является прямой суммой подпространства L_1 симметрических матриц и подпространства L_2 кососимметрических матриц.

10.55. Доказать, что для любого подпространства L_1 n-мерного векторного пространства V найдется *дополнительное подпространство*, т.е. такое подпространство L_2, что $V = L_1 \oplus L_2$. Единственным ли образом определяется L_2?

10.56. Для подпространства $L_1 = \{\lambda_1(1, 3, 0, -1) + \lambda_2(3, 5, 1, 2) + \lambda_3(2, 2, 1, 3) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$ пространства $\mathbb{R}_{1,4}$ найти два различных дополнительных подпространства L_2', L_2'', т.е. таких, что $L_1 \oplus L_2' = \mathbb{R}_{1,4}$, $L_1 \oplus L_2'' = \mathbb{R}_{1,4}$.

10.57. Найти матрицы перехода от базиса $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4)$ к базисам:

1) $(\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$;

2) $(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3 + 2\boldsymbol{e}_2,\ 2\boldsymbol{e}_4 - \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_4 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3)$;

3) $(\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_4,\ \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4)$.

10.58. В пространстве V_3 найти матрицы перехода от базиса $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ к базисам:

1) $(-2\boldsymbol{i},\ 3\boldsymbol{j},\ 10\boldsymbol{k})$; 2) $(-\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k},\ -3\boldsymbol{i})$;

3) $(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$; 4) $(10\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{k},\ 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j},\ 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k})$.

10.59. В пространстве многочленов над полем $\mathbb{R}$ степени $\leqslant 2$ найти матрицы перехода от базиса $(1, x, x^2)$ к базисам:

1) $(1,\ x+1,\ (x+1)^2)$; 2) $(1+x^2,\ 1-x^2,\ 1+2x)$.

10.60. Найти матрицу перехода от базиса $(\sin x, \cos x)$ к базису $(\cos x, -\sin x)$ в пространстве функций вида $a\sin x + b\cos x,\ a,b \in \mathbb{R}$.

10.61. Записать матрицу перехода от базиса

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

к базису

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

в пространстве матриц $\mathbb{R}_{2,2}$.

10.62. Дана матрица перехода

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\-1 & 0 & -1\\3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

от базиса $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ к базису $(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3')$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{e}_3'$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ и координаты вектора $\boldsymbol{e}_2$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3')$.

10.63. Найти матрицу перехода от базиса $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ к базису $(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3')$:

1) $\boldsymbol{e}_1' = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2' = 5\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_3' = 2\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 + 4\boldsymbol{e}_3$;

2) $\boldsymbol{e}_1' = 8\boldsymbol{e}_1 - 9\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_3' = \boldsymbol{e}_2$.

10.64. Найти матрицу перехода от базиса $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ к базису $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$, если известны разложения векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ в некотором базисе $(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)$: $\boldsymbol{a}_1 = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{b}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{b}_2 = 5\boldsymbol{e}_1 + 10\boldsymbol{e}_2$.

10.65. Найти матрицу перехода от базиса $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ к базису $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$, если известны разложения векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ в некотором базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$: $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{b}_2 = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$.

10.66. Записать матрицу перехода от базиса $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ к базису $(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2')$ и найти координаты вектора $\boldsymbol{a}$ в этих базисах, если $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_2 = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_1' = 5\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_2' = -5\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}, \boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i}$.

10.67. Записать матрицу перехода от базиса $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ к базису $(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3')$ и найти координаты вектора $\boldsymbol{a}$ в этих базисах, если $\boldsymbol{e}_1 = 1$, $\boldsymbol{e}_2 = x, \boldsymbol{e}_3 = x^2, \boldsymbol{e}_1' = 1, \boldsymbol{e}_2' = (x+1), \boldsymbol{e}_3' = (x+1)^2, \boldsymbol{a} = x^2 + 1$.

10.68. Записать матрицу перехода от базиса $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4)$ к базису $(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3', \boldsymbol{e}_4')$ и найти координаты вектора $\boldsymbol{a}$ в этих базисах, если

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_1'=\begin{bmatrix}2&3\\-3&0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_2'=\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_3'=\begin{bmatrix}1&2\\-2&1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_4'=\begin{bmatrix}0&1\\2&1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}2&4\\5&-3\end{bmatrix}.$$

10.69. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2')$, если известны координаты разложения векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'$ в некотором базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$: $\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{e}_1-5\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_1'=3\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2'=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$.

10.70. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3')$, если известны координаты разложения векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, $\boldsymbol{e}_3'$ в некотором базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$: $\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{e}_1+5\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_1'=2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2'=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3'=\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$.

10.71. Дана матрица $A=\begin{bmatrix}2&-1\\3&2\end{bmatrix}$ перехода от базиса $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ к базису $(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2')$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{a}=7\boldsymbol{e}_1-7\boldsymbol{e}_2$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2')$.

10.72. Пусть $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ – базис трехмерного векторного пространства V над полем $\mathbb{R}$. Доказать, что каждая из двух систем векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$, где $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$; $\boldsymbol{a}_2=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$; $\boldsymbol{a}_3=3\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$; $\boldsymbol{b}_1=3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+4\boldsymbol{e}_3$; $\boldsymbol{b}_2=5\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$; $\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-6\boldsymbol{e}_3$, является базисом V, и найти связь координат одного и того же вектора в этих двух базисах.

10.73. Найти ранг матриц методом окаймления миноров:

1) $\begin{bmatrix}1&2&-3&1&3\\0&2&3&1&8\\0&1&3&4&5\\1&1&-6&-3&-2\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}-1&5&3&4\\4&-3&-1&1\\7&-1&1&6\\1&9&7&14\end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix}3&2&-1&5&1\\1&-3&2&1&1\\-1&4&6&1&2\\-9&-2&0&3&-1\end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix}1&3&4&-4&7\\0&0&5&7&9\\1&3&-1&3&-2\\1&3&9&-11&16\\4&12&1&5&1\end{bmatrix}$.

10.74. Найти ранг матриц в зависимости от значений параметров:

1) $\begin{bmatrix}1&2&2\\2&\lambda^2&4\\-3&-6&-6\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}2&1&\lambda&3\\5&-\lambda&-1&7\\1&6&10&2\end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 1 & \lambda & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & \beta & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 2\beta & 4 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 & 4 \\ 1-\lambda & 1 & 5 & 6 \\ -4 & \lambda & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

10.75. Вычислить с помощью элементарных преобразований ранг матриц:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 93 & 25 & 14 & 121 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 34 & 102 & 54 & 62 \\ 35 & 104 & 55 & 61 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 16 & 3 & -12 & -8 & 24 & 12 \\ -28 & -5 & 20 & 14 & -42 & -20 \\ 20 & 6 & -15 & -16 & 48 & 24 \\ -35 & -10 & 25 & 28 & -84 & -40 \end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix} 1 & 310 & 94 & 67 & 201 \\ 23 & 172 & 52 & -98 & -294 \\ 35 & 104 & 32 & 428 & 1284 \end{bmatrix}$.

10.76. Что можно сказать о произвольной $m\times n$-матрице, если у нее имеется лишь один базисный минор?

10.77. Доказать, что ранг кососимметрической матрицы равен наибольшему порядку отличных от нуля главных миноров этой матрицы, т.е. миноров, расположенных в строках и столбцах с соответственно равными номерами, и что этот ранг – четное число.

10.78. Указать все возможные значения ранга матриц вида:

1) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

10.79. Доказать, что ранг блочно-диагональной матрицы равен сумме рангов ее диагональных блоков.

10.80. Доказать, что приписывание к матрице одной строки (или одного столбца) либо не изменяет ранга, либо увеличивает его на единицу.

10.81. Используя метод элементарных преобразований нахождения ранга матрицы, найти размерность и какой-либо базис линейной оболочки системы $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$ векторов арифметического пространства строк $\mathbb{R}_{1,5}$, где $\boldsymbol{a}_1 = (37, -27, 4, 21, 2)$; $\boldsymbol{a}_2 = (73, -51, 13, 42, 15)$; $\boldsymbol{a}_3 = (7, -5, 1, 4, 1)$; $\boldsymbol{a}_4 = (76, -52, 16, 44, 18)$.

Глава 11

КРИТЕРИЙ СОВМЕСТНОСТИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему линейных уравнений (9.1). Как и в гл. 9, обозначим через A, $\tilde{A}$, B соответственно матрицу, расширенную матрицу и столбец свободных членов системы (9.1).

Согласно теореме Кронекера – Капелли система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы этой системы равен рангу ее расширенной матрицы:

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A}.$$

Исходя из теоремы Кронекера – Капелли, теоремы о ранге матрицы и правила Крамера, можно указать следующий метод решения системы (9.1) (*метод окаймления миноров*):

1) если A и B – нулевые матрицы, то общим решением будет произвольный вектор $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, где $\alpha_i \in P$, $i = \overline{1, n}$. Если же $A = O_{m,n}$, $B \neq O_{m,n}$, то система несовместна;

2) пусть теперь A – ненулевая матрица. Вычислим ее базисный минор M. Обозначим через r его порядок;

3) вычислим все миноры $(r+1)$-го порядка матрицы $\tilde{A}$, окаймляющие минор M и не содержащиеся в A. Если среди них есть ненулевые, то система (9.1) несовместна, иначе переходим к шагу 4;

4) из матрицы $\tilde{A}$ удалим все строки, кроме тех, на которых расположен минор M. Неизвестные, коэффициенты при которых составляют минор M, объявляем базисными, а остальные (если они есть) – свободными. Свободные неизвестные играют роль параметров. Перенесем их в правые части оставшихся уравнений. Пользуясь правилом Крамера, выразим базисные неизвестные через свободные, что и даст общее решение системы (9.1).

Пример 1. Исследовать совместность и найти общее решение системы уравнений над полем $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 6x_1 + 5x_2 - 8x_3 - x_4 = 5. \end{cases} \tag{11.1}$$

Р е ш е н и е. Применяем метод окаймления миноров.

1. Поскольку матрица

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -5 & 1 \\ 6 & 5 & -8 & -1 \end{bmatrix}$$

ненулевая, то переходим к шагу 2.

2. Минор $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=2$ не равен нулю, поэтому рассмотрим миноры матрицы A, окаймляющие его:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 6 & 5 & -8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -10 \end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, ранг матрицы A равен 2 и $M=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=2$ – ее базисный минор.

3. Вычислим ранг расширенной матрицы $\tilde{A}$. Для этого рассмотрим минор, окаймляющий минор M и содержащийся в матрице $\tilde{A}$, т.е. минор

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Отсюда следует, что ранг расширенной матрицы также равен 2 и система совместна.

4. Поскольку базисный минор M расположен в первых двух строках и столбцах, отбрасываем третью строку и объявляем неизвестные x_1, x_2 базисными, а неизвестные x_3, x_4 – свободными параметрами: $x_3=\alpha_1$, $x_4=\alpha_2$; α_1, α_2 – любые действительные числа. Перепишем систему (11.1) в виде

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 + 2\alpha_1 - 3\alpha_2, \\ 4x_1 + 3x_2 = 3 + 5\alpha_1 - \alpha_2 \end{cases}$$

и применим правило Крамера относительно неизвестных x_1 и x_2:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 1+2\alpha_1-3\alpha_2 & 1 \\ 3+5\alpha_1-\alpha_2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{1}{2}(\alpha_1-8\alpha_2),$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1+2\alpha_1-3\alpha_2 \\ 3 & 3+5\alpha_1-\alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{1}{2}(2+2\alpha_1+10\alpha_2).$$

Следовательно, общее решение системы (11.1) имеет вид

$$\left(\frac{1}{2}\alpha_1-4\alpha_2,\ \ 1+\alpha_1+5\alpha_2,\ \ \alpha_1,\ \ \alpha_2\right)=\alpha_1\left(\frac{1}{2},\ \ 1,\ \ 1,\ \ 0\right)+\alpha_2(-4,5,0,1)+(0,1,0,0).$$

Придавая параметрам α_1, α_2 некоторые действительные значения, будем получать частные решения системы (11.1). Например, при $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$ имеем частное решение $(-4,6,0,1)$, при $\alpha_1=\alpha_2=0$ – частное решение $(0,1,0,0)$.

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений, т.е. систему, у которой все свободные члены равны нулю.

Множество решений однородной системы уравнений с n неизвестными над полем P есть подпространство арифметического n-мерного пространства строк над полем P. Размерность этого пространства равна $n-r$, где r – ранг матрицы системы. Базис пространства решений однородной системы линейных уравнений называется *фундаментальной системой решений*. Эта система решений находится следующим образом. Пусть для определенности $x_1, x_2, ..., x_r$ – базисные неизвестные, а $x_{r+1}, ..., x_r$ – свободные. Тогда строка вида

$$\left(\sum_{l=r+1}^{n} c_{1l}\alpha_l, ..., \sum_{l=r+1}^{n} c_{rl}\alpha_l, \alpha_{r+1}, ..., \alpha_n\right),$$

где $c_{1l}, ..., c_{rl}$ – некоторые элементы поля P, которые находятся исходя из матрицы системы, а параметры $\alpha_{r+1}, ..., \alpha_n$ могут принимать любые значения из поля P, является *общим решением однородной системы*.

Придавая свободным неизвестным последовательно значения: $\alpha_{r+1}=1,\ \alpha_{r+2}=0, ..., \alpha_n=0;\ ...\ ;\ \alpha_{r+1}=0,\ \alpha_{r+2}=0, ..., \alpha_{n-1}=0,\ \alpha_n=1$, получаем строки следующей $(n-r)\times n$-матрицы:

$$\begin{bmatrix} c_{1,r+1} & c_{2,r+1} & \cdots & c_{r,r+1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{1,r+2} & c_{2,r+2} & \cdots & c_{r,r+2} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ c_{1,n} & c_{2,n} & \cdots & c_{r,n} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix},$$

система строк которой и является фундаментальной системой решений исходной системы.

Пример 2. Найти общее решение и фундаментальную систему решений системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ -19x_1 + 24x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Используя элементарные преобразования, переходим к эквивалентной системе уравнений:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 5 & 3 \\ 19 & 24 & 8 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 15 & -18 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & -1 & 0 \\ -10 & 12 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы системы равен 2. В качестве базисного минора возьмем минор $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$, расположенный на пересечении второй и третьей строк с третьим и четвертым столбцами преобразованной матрицы. Вследствие этого объявляем x_3 и x_4 базисными, а x_1 и x_2 – свободными неизвестными и получаем следующие выражения базисных неизвестных через свободные:

$$\begin{cases} x_3 = 5x_1 - 6x_2, \\ x_4 = -7x_1 + 8x_2. \end{cases}$$

Следовательно, $(\alpha, \beta, 5\alpha - 6\beta, -7\alpha + 8\beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, есть общее решение, а строки матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений исходной системы уравнений.

Если в системе (9.1) заменить свободные члены нулями, то получим однородную систему линейных уравнений, называемую *приведенной однородной* для системы (9.1). Все решения совместной системы линейных уравнений (9.1) можно получить, складывая какое-либо одно решение этой системы с каждым решением приведенной однородной системы линейных уравнений. Пусть r $(0 < r < n)$ – ранг матрицы совместной системы линейных уравнений (9.1), $\boldsymbol{c}_0$ – некоторое ее решение, а $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, ..., \boldsymbol{c}_{n-r})$ – фундаментальная система решений приведенной однородной системы уравнений для системы (9.1). Тогда любое решение системы (9.1) является линейной комбинацией вида

$$\boldsymbol{c}_0 + \alpha_1 \boldsymbol{c}_1 + \ldots + \alpha_{n-r} \boldsymbol{c}_{n-r}, \tag{11.2}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-r} \in P$, и обратно: любая линейная комбинация вида (11.2) есть решение системы (9.1).

Пример 3. Исследовать совместность и записать общее решение неоднородной системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -8 \end{cases} \tag{11.3}$$

в виде суммы некоторого частного решения этой системы и линейной комбинации базисных решений приведенной однородной системы.

Р е ш е н и е. Минор $M=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}$, расположенный в левом верхнем углу матрицы системы A, является базисным минором как для A, так и для расширенной матрицы системы $\tilde{A}$, так как все миноры

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 5 & 5\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 5 & -4\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 8 & 7\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 8 & -7\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 4\\ 1 & 5 & -4\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 4\\ 1 & 8 & -8\end{vmatrix},$$

матриц A и $\tilde{A}$, окаймляющие минор M, равны нулю. Тогда ранги матриц A и $\tilde{A}$ равны 2. Следовательно, система (11.3) совместна. Рассмотрим далее соответствующую ей приведенную однородную систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0,\\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0,\\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0,\\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases} \tag{11.4}$$

Поскольку базисный минор M матрицы A расположен в первых двух столбцах, объявим неизвестные x_1, x_2 базисными, а неизвестные x_3, x_4 – свободными. Общее решение системы (11.4) имеет вид

$$\boldsymbol{c}=\left(-\frac{5}{3}\alpha_1-\alpha_2,\ -\frac{2}{3}\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2\right)=\alpha_1\left(-\frac{5}{3},\ -\frac{2}{3},\ 1,\ 0\right)+\alpha_2(-1,\ 1,\ 0,\ 1),\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}.$$

Придадим параметрам α_1, α_2 значения 1 и 0 соответственно. Получим частное решение $\boldsymbol{c}_1=\left(-\frac{5}{3},-\frac{2}{3},\ 1,\ 0\right)$ системы (11.4). Полагая далее $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$, имеем второе частное решение системы (11.4): $\boldsymbol{c}_2=(-1,1,0,1)$. Решения $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$ образуют базис пространства решений системы (11.4). Переписав систему (11.3) в виде

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3x_3 + x_4,\\ x_1 - x_2 = -x_3 - 2x_4 + 4, \end{cases}$$

найдем частное решение $\boldsymbol{c}_0$, положив, например, $x_3=0$, $x_4=0$. Имеем:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0,\\ x_1 - x_2 = 4, \end{cases}$$

откуда $\boldsymbol{c}_0=(8/3,-4/3,0,0)$.

Таким образом, общее решение $\boldsymbol{c}$ системы (11.3) имеет вид $\boldsymbol{c} = \left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, 0, 0\right) + \alpha_1\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0\right) + \alpha_2(-1, 1, 0, 1)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

11.1. Исследовать совместность, найти общее решение и одно частное решение системы уравнений:

1) $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - 6x_2 + 13x_3 - 9x_4 = 6; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 6x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8; \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 6; \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 4, \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 - 7x_4 = -5, \\ 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -2; \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 14x_3 - 3x_4 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 6x_4 = -5, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 9x_4 = -4; \end{cases}$$

7) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 3x_5 = 3, \\ 4x_1 + 8x_2 + 13x_3 + 6x_4 - 3x_5 = 9, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 1; \end{cases}$$

8) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 4, \\ 6x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + 7x_5 = 11, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 6; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 3, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 1, \\ -x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 8x_4 = 9; \end{cases}$

10) $\begin{cases} 30x_1 + 40x_2 + 41x_3 + 14x_4 + 24x_5 = 28, \\ 45x_1 + 61x_2 + 62x_3 + 21x_4 + 36x_5 = 43, \\ 60x_1 + 82x_2 + 83x_3 + 28x_4 + 48x_5 = 58; \end{cases}$

11) $\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 8; \end{cases}$

12) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases}$

13) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -4, \\ 7x_1 + x_2 - 7x_3 + 8x_4 = -8. \end{cases}$

11.2. Исследовать систему и найти ее общее решение в зависимости от значения параметра λ:

1) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -5, \\ 3x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 6x_4 = -9, \\ 2x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 4x_4 = -7, \\ 4x_1 - 9x_2 - 10x_3 - \lambda x_4 = -11; \end{cases}$

$$2)\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 14x_4 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 - 3x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 2; \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 1, \\ 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 = \lambda, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$$

$$4)\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = \lambda, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1; \end{cases}$$

$$5)\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2, \\ 7x_2 + 4x_3 = \lambda, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 4; \end{cases}$$

$$6)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + (\lambda+1)x_3 = 2. \end{cases}$$

11.3. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для систем уравнений:

$$1)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 7x_1 + 11x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 9x_1 + 14x_2 - x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0; \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - 18x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 0; \end{cases}$$

$$4)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 10x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0; \end{cases}$$

$$5)\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 - 7x_3 - x_4 - 6x_5 = 0, \\ x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 - 8x_3 - 9x_4 - 9x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 7x_4 - 6x_5 = 0; \end{cases}$$

$$6)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

11.4. Установить, какие из строк матрицы

$$\begin{bmatrix} 13 & 5 & -6 & -8 & 0 \\ 7 & -3 & 2 & -6 & -2 \\ 4 & -7 & 6 & -5 & -3 \\ 7 & 7 & -5 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_2 + 2x_3 + x_4 - 7x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 8x_5 = 0? \end{cases}$$

11.5. Найти однородную систему линейных уравнений, для которой система векторов $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 0, -1, 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 0, 4, -2, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 2, -2, 1, -3)$ является фундаментальной системой решений и которая состоит:

1) из двух уравнений; 2) из трех уравнений.

11.6. Доказать, что если ранг однородной системы уравнений на единицу меньше числа неизвестных, то любые два решения системы пропорциональны.

11.7. Доказать, что если определитель d порядка $n>1$ равен нулю, то его строки (столбцы), составленные из алгебраических дополнений элементов любых двух строк (столбцов), пропорциональны.

11.8. Доказать, что если для матрицы $A\in\mathbb{C}_{n,n}$ выполняются неравенства (*условия Адамара*)

$$\left|a_{jj}\right|>\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{n}\left|a_{jk}\right|,\quad j=\overline{1,n},$$

то матрица A является невырожденной.

11.9. Решить матричные уравнения:

1) $\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}-2 & -4\\ 2 & 4\end{bmatrix}$;

2) $X\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 3\end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$.

11.10. Исследовать совместность и записать общее решение неоднородной системы в виде суммы одного решения этой системы и линейной комбинации базисных решений приведенной однородной системы:

1) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -4,\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8,\\ 4x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 20,\\ 4x_1 - x_2 + 6x_3 - 2x_4 = -4;\end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0,\\ 10x_1 + 16x_2 + 19x_3 + 5x_4 = -2,\\ 5x_1 + 6x_2 + 13x_3 + 3x_4 = 5;\end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 2,\\ 2x_1 - 8x_2 - 7x_3 - 7x_4 + 7x_5 = 3,\\ 3x_1 - 6x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7;\end{cases}$

$$4)\begin{cases} x_1 - x_2 \phantom{{}+2x_3+x_4+x_5} = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ - x_2 + 2x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$$

11.11. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) лежали на одной прямой.

11.12. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы четыре точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), не лежащие на одной прямой, лежали на одной окружности.

11.13. Написать уравнение окружности, проходящей через три точки $(1, 1)$, $(0, 2)$, $(-1, 2)$, и найти ее центр и радиус.

11.14. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки $(1, 0, 1)$, $(1, 2, 0)$, $(0, 1, -1)$.

11.15. Написать уравнение и найти центр и радиус сферы, проходящей через точки $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1)$, $(1, -2, 1)$, $(1, 1, 1)$.

11.16. Дать геометрическую интерпретацию случаев, встречающихся при решении систем линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными.

Глава 12
ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Матрица линейного оператора. Пусть V и U – два векторных пространства над полем P. Отображение $\varphi : V \to U$ называется *линейным отображением* (*линейным оператором*), если выполняются условия:

1) $\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x})+\varphi(\boldsymbol{y})$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$;

2) $\varphi(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\varphi(\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{x} \in V$, $\forall \alpha \in P$.

Множество всех линейных отображений из V в U обозначается через $\mathrm{Hom}(V, U)$. Это множество само будет векторным пространством над полем P, если определить сумму $\varphi+\psi$ для $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, U)$ и произведение $\alpha \cdot \varphi$ для $\alpha \in P$ и $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, U)$ по формулам:

$$(\varphi+\psi)(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x})+\psi(\boldsymbol{x}), \ \forall \boldsymbol{x} \in V,$$

$$(\alpha\cdot\varphi)(\boldsymbol{x}) = \alpha\varphi(\boldsymbol{x}), \ \forall \boldsymbol{x} \in V.$$

Если $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, U)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(U, W)$, то суперпозиция $\psi\circ\varphi : V \to W$ линейных отображений ψ и φ есть линейное отображение пространства V в пространство W, действующее по правилу

$$(\psi\circ\varphi)(\boldsymbol{x}) = \psi(\varphi(\boldsymbol{x})), \ \forall \boldsymbol{x} \in V.$$

В случае, когда $V = U$, линейное отображение $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ называется *линейным оператором* или *линейным преобразованием векторного пространства V*.

Пусть $G = (\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, ..., \boldsymbol{g}_n)$ – базис векторного пространства V, а $H = (\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, ..., \boldsymbol{h}_m)$ – базис пространства U. Разлагая векторы системы $\varphi G = (\varphi(\boldsymbol{g}_1), \varphi(\boldsymbol{g}_2), ..., \varphi(\boldsymbol{g}_n))$ по базису H, получаем равенства:

$$\begin{array}{l}
\varphi(\boldsymbol{g}_1) = a_{11}\boldsymbol{h}_1 + a_{21}\boldsymbol{h}_2 + \ldots + a_{m1}\boldsymbol{h}_m, \\
\varphi(\boldsymbol{g}_2) = a_{12}\boldsymbol{h}_1 + a_{22}\boldsymbol{h}_2 + \ldots + a_{m2}\boldsymbol{h}_m, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi(\boldsymbol{g}_n) = a_{1n}\boldsymbol{h}_1 + a_{2n}\boldsymbol{h}_2 + \ldots + a_{mn}\boldsymbol{h}_m.
\end{array}$$

Матрица

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

называется *матрицей линейного оператора* φ *в базисах G и H*. В обозначениях, использованных в учебном пособии [1], это матрица $\tau_H(\varphi G)$ перехода от базиса H пространства прибытия U к системе φG образов при отображении φ векторов базиса G пространства отправления V. В случае $V = U$, $G = H$ матрица $A_\varphi = \tau_H(\varphi G)$ называется *матрицей линейного оператора* φ *в базисе* G.

Пусть вектор $\boldsymbol{x} \in V$ имеет в базисе G координатный столбец X, а вектор $\varphi(\boldsymbol{x})$ имеет в базисе H координатный столбец Y. Тогда $Y = A_\varphi X$.

Пример 1. Показать, что преобразование φ пространства V_3, действующее по правилу $\varphi(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}]]$, $\forall \boldsymbol{x} \in V_3$, где $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, является линейным, и найти его матрицу в базисе $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

Р е ш е н и е. Используя свойства векторного произведения, получаем: $\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = [\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b}]] = [\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b}]] = [\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}]] + [\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b}]] = \varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y})$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_3$, а также $\varphi(\alpha\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{a}, [\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}]] = [\boldsymbol{a}, \alpha[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}]] = \alpha[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}]] = \alpha\varphi(\boldsymbol{x})$, $\forall \alpha \in P$, $\forall \boldsymbol{x} \in V$. Итак, преобразование φ линейно. Для нахождения матрицы A_φ надо вычислить векторы $\varphi(\boldsymbol{i}), \varphi(\boldsymbol{j}), \varphi(\boldsymbol{k})$. Сначала найдем координаты вектора $\varphi(\boldsymbol{i}) = [\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}]]$. Поскольку

$$\left[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}\right] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = -\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k},$$

то

$$\varphi(\boldsymbol{i}) = [\boldsymbol{a}, -\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = -5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}.$$

Аналогично $\varphi(\boldsymbol{j}) = -4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$, $\varphi(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$. Следовательно

$$\mathrm{A}_\varphi = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Пример 2. Доказать, что преобразование $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_2, 2x_1 + x_2 + x_3)$ пространства $\mathbb{R}_{1,3}$ линейно, и найти его матрицу в каноническом базисе.

Р е ш е н и е. Исходное преобразование запишем в виде $\varphi(X) = AX$, где $X = [x_1 \ \ x_2 \ \ x_3]^{\mathrm{T}}$ и

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда, используя дистрибутивность умножения матриц относительно сложения, для любых двух матриц-столбцов $X, Y \in \mathbb{R}_{3,1}$ имеем: $\varphi(X+Y) = A(X+Y) =$

$= AX + AY = \varphi(X) + \varphi(Y)$. Аналогично для любых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $X \in \mathbb{R}_{3,1}$ получаем $\varphi(\alpha X) = A(\alpha X) = \alpha(AX) = \alpha\varphi(X)$. Далее, $\varphi([1\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}) = A[1\ 0\ 0]^{\mathrm{T}} = [1\ 0\ 2]^{\mathrm{T}}$, $\varphi([0\ 1\ 0]^{\mathrm{T}}) = [1\ 2\ 1]^{\mathrm{T}}$, $\varphi([0\ 0\ 1]^{\mathrm{T}}) = [0\ 0\ 1]^{\mathrm{T}}$, поэтому $A_\varphi = A$.

Пример 3. Рассмотрим отображение $\varphi: \mathbb{R}_{2,3} \to \mathbb{R}_{2,2}$, заданное по формуле $\varphi(X) = XA + BX^{\mathrm{T}}$, где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Показать, что φ линейно, и найти его матрицу в базисах

$$G = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right),$$

$$H = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Решение. Проверим линейность φ, использовав свойства умножения, сложения и транспонирования матриц. Для любых $X, Y \in \mathbb{R}_{2,3}$ имеем: $\varphi(X+Y) = (X+Y)A + B(X+Y)^{\mathrm{T}} = XA + YA + B(X^{\mathrm{T}} + Y^{\mathrm{T}}) = XA + YA + BX^{\mathrm{T}} + BY^{\mathrm{T}} = (AX + BX^{\mathrm{T}}) + (YA + BY^{\mathrm{T}}) = \varphi(X) + \varphi(Y)$. Аналогично проверим, что $\varphi(\alpha X) = \alpha\varphi(X)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall X \in \mathbb{R}_{2,3}$. Теперь образы векторов из G при отображении φ разложим по базису H:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Координаты $2, 1, 1, 0$ будут элементами первого столбца искомой матрицы A_φ. Аналогично можно найти координаты остальных векторов системы φG. В итоге получим:

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ядро и образ линейного оператора. Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, U)$. *Образ линейного оператора* φ есть подмножество пространства U, состоящее из всех векторов вида $\varphi(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in V$. *Ядром линейного оператора* φ называется подмножество пространства V, состоящее из всех векторов, которые линейный оператор φ отображает в нулевой вектор пространства U. Образ и ядро являются подпространствами соответственно пространств U и V и обозначаются через $\operatorname{Im}\varphi$ и $\ker\varphi$. Размерности этих подпространств и ранг матрицы A_φ связаны соотношениями $\dim\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{rank} A_\varphi$, $\dim\ker\varphi = \dim V - \operatorname{rank} A_\varphi$.

В качестве системы координатных столбцов базиса образа $\operatorname{Im}\varphi$ можно взять базис системы столбцов матрицы A_φ, а координатные столбцы базиса ядра $\ker\varphi$ есть базис подпространства решений матричного уравнения $A_\varphi X = 0$.

Пример 4. Найти базис ядра и базис образа линейного оператора, рассмотренного в примере 3.

Р е ш е н и е. Как нетрудно подсчитать, ранг матрицы A_φ равен 4, поэтому $\dim\operatorname{Im}\varphi = 4$, а значит, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}_{2,2}$. В качестве базиса подпространства $\operatorname{Im}\varphi$ можно взять базис H, указанный в примере 3. Для нахождения базиса ядра решим однородную систему уравнений с матрицей A_φ. Общее решение можно записать в виде $\left(\frac{1}{2}\alpha-\beta,\ -\alpha+\beta,\ \beta,\ -\frac{1}{2}\alpha-\beta,\ \alpha,\ \beta\right)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Придавая α и β сначала значения 2 и 0, а затем 0 и 1, находим координаты базисных векторов ядра. Сами эти векторы являются следующими матрицами:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Связь между матрицами линейного оператора в разных базисах. Пусть G и G' – два базиса пространства V, а H и H' – базисы пространства U. Если A и B – матрицы оператора φ в базисах G и H, G' и H' соответственно, то

$$B = T^{-1}AS,$$

где T – матрица перехода от базиса H к базису H'; S – матрица перехода от базиса G к базису G'.

Если $U = V$, то полагаем $H = G$, $H' = G'$, и тогда

$$B = S^{-1}AS,$$

В этом случае матрицы A и B считаются *подобными*, а матрица S называется *трансформирующей A в B*.

Пример 5. Пусть линейный оператор φ пространства многочленов степени, не большей 2, над полем $\mathbb{R}$ имеет в базисе $G = (1, x, x^2)$ матрицу

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

а оператор ψ в базисе $H = (1, x-1, (x-1)^2)$ – матрицу

$$B_\psi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицы линейных операторов $\varphi \circ \psi$, $\varphi + \psi$, 5φ в базисе H.

Р е ш е н и е. Обозначим искомые матрицы через $B_{\varphi\circ\psi}$, $B_{\varphi+\psi}$, $B_{5\varphi}$. Сначала найдем матрицу B_φ оператора φ в базисе H, а затем воспользуемся тем, что $B_{\varphi\circ\psi} = B_\varphi B_\psi$, $B_{\varphi+\psi} = B_\varphi + B_\psi$, $B_{5\varphi} = 5B_\varphi$.

Для нахождения матрицы B_φ ищем матрицу S перехода от базиса G к базису H, для чего выражаем векторы второго базиса через базисы G: $1 = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2$, $x - 1 = (-1)\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2$, $(x-1)^2 = 1\cdot 1 + (-2)\cdot x + 1\cdot x^2$.

Располагая полученные координаты в столбцы, образуем матрицу S:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $B_\varphi = S^{-1} A_\varphi S$, то матрицу B_φ можно найти как решение матричного уравнения $SX = A_\varphi S$. Имеем:

$$A_\varphi S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теперь составляем расширенную матрицу для вышеуказанного уравнения и решаем его методом Гаусса:

$$[S \mid A_\varphi S] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Следовательно,

$$B_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Наконец, вычисляем искомые матрицы:

$$B_{\varphi\circ\psi} = B_\varphi B_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{\varphi+\psi} = B_\varphi + B_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{5\varphi} = 5B_\varphi = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 10 & 5 & -5 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Пусть φ – линейный оператор векторного пространства V над полем P и пусть $\alpha \in P$, $\boldsymbol{u} \in V$, $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$. Если $\varphi(\boldsymbol{u}) = \alpha \boldsymbol{u}$, то вектор $\boldsymbol{u}$ называется *собственным вектором*, а скаляр α – *собственным значением линейного оператора* φ. В этом случае собственный вектор $\boldsymbol{u}$ и собственное значение α считаются соответствующими друг другу.

Каждому собственному вектору соответствует единственное собственное значение. В то же время множество собственных векторов, соответствующих каждому собственному значению α, вместе с нулевым вектором пространства V образует подпространство $L_\alpha = \ker(\varphi - \alpha \operatorname{id} V)$ пространства V.

Система собственных векторов линейного оператора, соответствующих различным собственным значениям, линейно независима. Отсюда следует, что линейный оператор n-мерного векторного пространства может иметь не более чем n различных собственных значений.

Линейный оператор φ называется *оператором простой структуры*, если из его некоторых собственных векторов можно составить базис векторного пространства V. В частности, такой базис можно составить, если число различных собственных значений равно размерности пространства V. Матрица оператора простой структуры в базисе из собственных векторов является диагональной. В связи с этим матрица, подобная диагональной, называется *матрицей простой струтуры*.

Пусть $A_\varphi = (a_{kl})$ – матрица оператора φ в базисе G пространства V. Матрица

$$A_\varphi - \lambda E_n = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

над кольцом многочленов $P[\lambda]$ называется *характеристической матрицей матрицы* A_φ, а ее определитель – многочлен $\Delta(\lambda) = \det(A_\varphi - \lambda E_n)$ – *характеристическим многочленом матрицы* A_φ. Характеристические многочлены подобных матриц равны, поэтому все матрицы линейного оператора имеют один характеристический многочлен, который и называется *характеристическим многочленом оператора* φ. Уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ называется *характеристическим уравнением матрицы* A_φ (*оператора* φ), а его корни (в любом поле, содержащем поле P) – *характеристическими числами матрицы* A_φ (*оператора* φ).

Для нахождения собственных значений и собственных векторов линейного оператора φ n-мерного векторного пространства V над полем P используются следующие утверждения:

1) собственные значения линейного оператора φ – это все его характеристические числа, принадлежащие полю P;

2) если A_φ – матрица линейного оператора φ в базисе G, то координатные столбцы в базисе G собственных векторов оператора φ, соответствующих собственному значению α, – это ненулевые решения матричного уравнения $(A_\varphi - \alpha E_n)X = O_{n,1}$.

Пример 6. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора φ трехмерного векторного пространства V над полем $\mathbb{R}$, заданного в некотором базисе G матрицей

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Во-первых,

$$\det(A_\varphi - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = (2-\lambda)^3,$$

поэтому φ имеет единственное собственное значение $\alpha = 2$.

Во-вторых, координаты x_1, x_2, x_3 собственных векторов находятся как решения однородной системы линейных уравнений с матрицей

$$A_\varphi - 2E_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как ранг этой матрицы равен 1, то можно выбрать два линейно независимых решения, например $(1,2,0)$ и $(0,0,1)$, чтобы получить базис подпространства решений соответствующей однородной системы уравнений. Векторы с координатами $1,2,0$ и $0,0,1$ в базисе G обозначим через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно. Тогда собственные векторы линейного оператора φ – это все линейные комбинации вида $\beta\boldsymbol{a} + \gamma\boldsymbol{b}$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta^2 + \gamma^2 \neq 0$.

Инвариантные подпространства. Пусть φ – линейный оператор n-мерного векторного пространства V над полем P, M – подпространство векторного пространства V. Если $\varphi(M) \subseteq M$, то M называется *инвариантным относительно* φ *подпространством*. Множество таких подпространств обозначим через $\mathrm{inv}_V(\varphi)$, а множество операторов φ, для которых $M \in \mathrm{inv}_V(\varphi)$, обозначим через $\Phi(M)$. Отметим, что множество $\mathrm{inv}_V(\varphi)$ содержит линейные оболочки систем, состоящих из собственных векторов оператора φ, и замкнуто относительно пересечений и сумм подпространств, а также для любого многочлена $f(\lambda)$ над полем P содержит ядро и образ оператора $f(\varphi)$. Множество $\Phi(M)$ содержит все скалярные операторы и замкнуто относительно линейных операций над линейными операторами и операции суперпозиции линейных операторов.

Трудной, но важной задачей при изучении линейной алгебры является определение всех инвариантных относительно данного линейного оператора подпространств векторного пространства и всех включений между ними. Рассмотрим один из способов решения этой задачи в случаях, когда $P=\mathbb{R}$ и когда $P=\mathbb{C}$. Способ основан на переходе от пространств большей размерности, на котором действует линейный оператор, к пространствам меньшей размерности, являющимся инвариантными относительно этого оператора подпространствами, на которых действуют ограничения данного оператора на эти подпространства.

Прежде чем изложить данный способ, приведем несколько вспомогательных утверждений, предположив, что $\Delta(\lambda)$ – характеристический многочлен оператора φ и M – подпространство пространства V размерности k, $0<k<n$.

1. Если подпространство M инвариантно относительно φ, то существуют два многочлена $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ над полем P степеней соответственно k и $n-k$ такие, что и $\Delta(\lambda)=f_1(\lambda)f_2(\lambda)$, и $\operatorname{Im} f_2(\varphi)\subseteq$ $\subseteq M \subseteq \ker f_1(\varphi)$.

Действительно, пусть $G=(\boldsymbol{g}_1,\dots,\boldsymbol{g}_k,\boldsymbol{g}_{k+1},\dots,\boldsymbol{g}_n)$ – такой базис пространства V, что $M=L(\boldsymbol{g}_1,\dots,\boldsymbol{g}_k)$. Положим $U=L(\boldsymbol{g}_{k+1},\dots,\boldsymbol{g}_n)$. Тогда $V=M\oplus U$ – прямая сумма подпространств M и U. Рассмотрим линейный оператор $\varphi_1=\varphi|_M\in\operatorname{Hom}(M,M)$, т.е. ограничение линейного оператора φ на подпространство M, а также линейный оператор $\varphi_2\in\operatorname{Hom}(U,U)$, действующий по следующему правилу: если $\boldsymbol{x}\in U$ и $\varphi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$, где $\boldsymbol{x}_1\in M$, $\boldsymbol{x}_2\in U$, то $\varphi_2(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}_2$. Оператор φ_2 назовем *дополнением к ограничению* φ *на подпространство* M. Матрица $A=\tau_G(\varphi G)$ оператора φ в базисе G имеет вид

$$A=\begin{bmatrix} B & D \\ O_{n-k,\,k} & C \end{bmatrix},$$

где $B\in P_{k,k}$ – матрица оператора φ_1 в базисе $(\boldsymbol{g}_1,\dots,\boldsymbol{g}_k)$; $C\in P_{n-k,\,n-k}$ – матрица оператора φ_2 в базисе $(\boldsymbol{g}_{k+1},\dots,\boldsymbol{g}_n)$; $D\in P_{k,\,n-k}$ – некоторая матрица. Введем обозначения: $f_1(\lambda)=\det(B-\lambda E_k)$, $f_2(\lambda)=$ $=\det(C-\lambda E_{n-k})$. Из свойств характеристического многочлена блочно-треугольной матрицы имеем: $\Delta(\lambda)=\det(A-\lambda E_n)=\det(B-\lambda E_k)\times$ $\times\det(C-\lambda E_{n-k})=f_1(\lambda)f_2(\lambda)$. При этом $\deg f_1(\lambda)=k$, $\deg f_2(\lambda)=n-k$. Так как $f_1(\lambda)$ – характеристический многочлен оператора φ_1, то из теоремы Гамильтона – Кели следует, что для любого вектора $\boldsymbol{x} \in M$ справедливо равенство $\mathbf{0} = f_1(\varphi_1)(\boldsymbol{x}) = f_1(\varphi)(\boldsymbol{x})$, поэтому $f_1(\varphi)(M) = \{\mathbf{0}\}$ и $M \subseteq \ker f_1(\varphi)$.

Поскольку при умножении верхних блочно-треугольных матриц с одинаковыми размерами соответствующих диагональных блоков эти блоки перемножаются, а линейные операции с такими матрицами приводят к линейным операциям с соответствующими диагональными блоками, то

$$f_2(A) = \begin{bmatrix} f_2(B) & D' \\ O_{n-k,k} & f_2(C) \end{bmatrix},$$

где $D' \in P_{k,n-k}$ – некоторая матрица.

Так как C – матрица оператора φ_2, для которого многочлен $f_2(\lambda)$ является характеристическим, то по теореме Гамильтона – Кели $f_2(C) = O_{n-k,n-k}$. Отсюда с учетом того, что $f_2(A)$ есть матрица оператора $f_2(\varphi)$ в базисе G, следует, что образы всех базисных векторов при преобразовании $f_2(\varphi)$ находятся в линейной оболочке системы $(\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_k)$, т.е. в M. Значит, $\operatorname{Im} f_2(\varphi) \subseteq M$.

Для удобства дальнейшего изложения будем называть многочлены $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ *ассоциированными* (обозначается $g(\lambda) \sim h(\lambda)$), если они делятся друг на друга или, что то же самое, отличаются на ненулевой постоянный множитель.

Рассмотрим важный частный случай, когда многочлены $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ взаимно просты.

2. Пусть $\Delta(\lambda) = f_1(\lambda) f_2(\lambda)$ и $\deg f_1(\lambda) = k$, $\deg f_2(\lambda) = n-k$. Тогда V есть прямая сумма инвариантных относительно φ подпространств $M = \ker f_1(\varphi) = \operatorname{Im} f_2(\varphi)$ и $U = \ker f_2(\varphi) = \operatorname{Im} f_1(\varphi)$. При этом многочлен $f_1(\lambda)$ ассоциирован с характеристическим многочленом оператора $\varphi_1 = \varphi|_M$ – ограничения φ на M, а многочлен $f_2(\lambda)$ ассоциирован с характеристическим многочленом оператора $\varphi_2 = \varphi|_U$. В этом случае в некотором базисе пространства V матрица A оператора φ блочно-диагональная и имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} B & O_{k,n-k} \\ O_{n-k,k} & C \end{bmatrix},$$

где $B \in P_{k,k}$ – матрица оператора φ_1; $C \in P_{n-k,n-k}$ – матрица оператора φ_2. Более того, любое инвариантное относительно φ подпространство S пространства V есть прямая сумма подпространств $S_1 = S \cap M$ и $S_2 = S \cap U$, где $S_1 \in \operatorname{inv}_M(\varphi_1)$; $S_2 \in \operatorname{inv}_U(\varphi_2)$.

Для доказательства положим $M_1 = \ker f_1(\varphi)$, $M_2 = \operatorname{Im} f_1(\varphi)$, $M_3 = \ker f_2(\varphi)$, $M_4 = \operatorname{Im} f_2(\varphi)$. На основании вышеизложенного

$$M_i \in \operatorname{inv}_V(\varphi), \ \forall i = \overline{1, 4}.$$

По теореме Гамильтона – Кели имеем равенства:

$$\Delta(\varphi) = f_1(\varphi) f_2(\varphi) = f_2(\varphi) f_1(\varphi) = \varphi_0,$$

где φ_0 – нулевой линейный оператор, т.е. $\varphi_0(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ для любого $\boldsymbol{x} \in V$. Отсюда получаем включения:

$$M_4 = \operatorname{Im} f_2(\varphi) \subseteq \ker f_1(\varphi) = M_1, \tag{12.1}$$

$$M_2 = \operatorname{Im} f_1(\varphi) \subseteq \ker f_2(\varphi) = M_3. \tag{12.2}$$

Поскольку $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ взаимно просты, то согласно критерию взаимной простоты существуют многочлены $u(\lambda)$ и $v(\lambda) \in P[\lambda]$ такие, что

$$u(\lambda) f_1(\lambda) + v(\lambda) f_2(\lambda) = 1. \tag{12.3}$$

Отсюда следует, что если $\boldsymbol{x} \in \ker f_1(\varphi)$, то $\boldsymbol{x} = (u(\varphi) f_1(\varphi) + f_2(\varphi) v(\varphi))(\boldsymbol{x}) = f_2(\varphi) v(\varphi)(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{Im} f_2(\varphi)$. Таким образом, на основании соотношения (12.1) заключаем, что

$$M_1 = M_4 = \operatorname{Im} f_2(\varphi) = \ker f_1(\varphi).$$

Аналогично, так как $\ker f_2(\varphi) \subseteq \operatorname{Im} f_1(\varphi)$, то согласно соотношению (12.2)

$$M_2 = M_3 = \operatorname{Im} f_1(\varphi) = \ker f_2(\varphi). \tag{12.4}$$

Докажем теперь, что $V = M_1 + M_2$. Действительно, для любого $\boldsymbol{x} \in V$ из равенства (12.3) получаем:

$$\boldsymbol{x} = (f_1(\varphi) u(\varphi))(\boldsymbol{x}) + (f_2(\varphi) v(\varphi))(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{Im} f_1(\varphi) + \operatorname{Im} f_2(\varphi) = M_1 + M_2.$$

Далее, из равенств $\dim M_1 + \dim M_2 = \dim \ker f_1(\varphi) + \dim \operatorname{Im} f_1(\varphi) = n$ с учетом равенств (12.4) следует, что V есть прямая сумма подпространств M_1 и M_2, инвариантных относительно φ.

Обозначим $M = M_1$, $U = M_2$, и пусть базис G пространства V есть объединение базисов подпространств M и U. Тогда ввиду того, что $\varphi(M) \subseteq M$ и $\varphi(U) \subseteq U$, матрица A оператора φ в базисе G имеет вид

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

где B – матрица оператора $\varphi_1 = \varphi|_{M_1}$; C – матрица оператора $\varphi_2 = \varphi|_{M_2}$.

Пусть $g_1(\lambda)=\det(B-\lambda E)$, $g_2(\lambda)=\det(C-\lambda E)$. Тогда $\Delta(\lambda)=g_1(\lambda)g_2(\lambda)$, $g_1(\varphi_1)=\varphi_0$, $g_2(\varphi_2)=\varphi_0$. Докажем, что $\dim M=k$, $\dim U=n-k$ и $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ являются многочленами, ассоциированными соответственно с $g_1(\lambda)$ и $g_2(\lambda)$.

Обозначая через $h_i(\lambda)$ минимальный многочлен для φ_i, $i=1,2$, получаем, что $h_i(\lambda)\mid g_i(\lambda)$, $h_i(\lambda)\mid f_i(\lambda)$. В то же время из свойств характеристического многочлена следует, что $g_i(\lambda)\mid(h_i(\lambda))^{m_i}$ для некоторого $m_i\in\mathbb{N}$, $i=1,2$. Так как $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ взаимно просты, то многочлен $g_1(\lambda)$ взаимно прост с $f_2(\lambda)$, а $g_2(\lambda)$ взаимно прост с $f_1(\lambda)$. Теперь из равенства $\Delta(\lambda)=f_1(\lambda)f_2(\lambda)=g_1(\lambda)g_2(\lambda)$ следует, что многочлены $f_i(\lambda)$ и $g_i(\lambda)$, $i=1,2$, делятся друг на друга, т.е. ассоциированы. Отсюда заключаем, что $\dim M=\deg g_1(\lambda)=\deg f_1(\lambda)=k$, $\dim U=n-\dim M=n-k$.

Наконец, пусть $S\in\mathrm{inv}_V(\varphi)$. Очевидно, что $S_1=S\cap M\in\mathrm{inv}_M(\varphi_1)$, $S_2=S\cap U\in\mathrm{inv}_M(\varphi_2)$ и $S_1+S_2\subseteq S$. Докажем обратное включение. Пусть $\boldsymbol{x}$ – произвольный вектор из подпространства S. Тогда из равенства (12.3) получим:

$$\boldsymbol{x}=f_1(\varphi)u(\varphi)(\boldsymbol{x})+f_2(\varphi)v(\varphi)(\boldsymbol{x})\in\mathrm{Im}\,f_1(\varphi)\cap S+f_2(\varphi)\cap S=S_2+S_1.$$

Значит, $S=S_1+S_2$. Так как $S_1\cap S_2=\{\mathbf{0}\}$, то сумма S_1+S_2 – прямая. Утверждение 2 доказано.

3. Обобщим теперь утверждение 2 на случай разложения многочлена $\Delta(\lambda)$ в произведение взаимно простых многочленов. Пусть $\Delta(\lambda)=f_1(\lambda)\ldots f_n(\lambda)$ и $\deg f_i(\lambda)=k_i>0$, где $f_i(\lambda)$ – попарно взаимно простые многочлены, $i=\overline{1,m}$. Тогда V есть прямая сумма инвариантных относительно φ подпространств $M_1,\ldots,M_m$, $\dim M_i=k_i$ и каждый многочлен $f_i(\lambda)$ ассоциирован с характеристическим многочленом оператора $\varphi_i=\varphi|_{M_i}$, $i=\overline{1,m}$. В некотором базисе пространства V матрица A оператора φ имеет вид $\mathrm{diag}(A_1,\ldots,A_m)$, где $A_i\in P_{k_i,k_i}$, $i=\overline{1,m}$, – матрица оператора φ_i в каком-то базисе пространства M_i. Если $M\in\mathrm{inv}_M(\varphi)$, то M – прямая сумма инвариантных относительно φ_i подпространств $M\cap M_i$ $(i=\overline{1,m})$.

Таким образом, нахождение всех инвариантных подпространств сводится к случаю, когда $\Delta(\lambda)$ есть степень неприводимого над полем P многочлена.

4. Если $k=n-1$, то подпространство M инвариантно относительно φ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Im}(\varphi-\alpha\,\mathrm{id}\,V)\subseteq M$ для некоторого собственного значения α оператора φ.

В самом деле, если M инвариантно, то согласно п. 1 $\mathrm{Im}\,f_2(\varphi)\subseteq M$ для некоторого делителя $f_2(\lambda)$ первой степени многочлена $\Delta(\lambda)$. Можно считать, что $f_2(\lambda)=\lambda-\alpha$ для некоторого $\alpha\in P$. Так как

$\Delta(\alpha)=0$, то α – собственное значение оператора φ, и мы имеем включение $\operatorname{Im}(\varphi-\alpha\operatorname{id}V)\subseteq M$.

Обратно, пусть $\operatorname{Im}(\varphi-\alpha\operatorname{id}V)\subseteq M$. Тогда

$$(\varphi-\alpha\operatorname{id}V)(M)\subseteq(\varphi-\alpha\operatorname{id}V)(V)=\operatorname{Im}(\varphi-\alpha\operatorname{id}V)\subseteq M,$$

поэтому M инвариантно относительно оператора $\varphi-\alpha\operatorname{id}V$ и, следовательно, относительно φ, так как M инвариантно и относительно скалярного оператора $\alpha\operatorname{id}V$.

5. Если $k=1$, то M инвариантно относительно φ тогда и только тогда, когда $M = L(\boldsymbol{a})$ для некоторого собственного вектора $\boldsymbol{a}$ оператора φ.

6. Если $k = 2$, то подпространство M инвариантно относительно φ тогда и только тогда, когда для некоторого делителя $f_1(\lambda)$ второй степени многочлена $\Delta(\lambda)$ выполняется включение $M \subseteq \ker f_1(\varphi)$, а также когда $M = L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, где либо $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – линейно независимые собственные векторы оператора φ, либо вектор $\boldsymbol{a}$ не является собственным и $\boldsymbol{b}=\varphi(\boldsymbol{a})$.

В самом деле, пусть $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ – базис инвариантного относительно φ подпространства M. Согласно п. 1 $M \subseteq \ker f_1(\varphi)$, где $f_1(\lambda)$ – некоторый делитель второй степени многочлена $\Delta(\lambda)$. Предположим, что $\boldsymbol{a}$ не является собственным вектором, тогда система $(\boldsymbol{a}, \varphi(\boldsymbol{a}))$ линейно независима и $\varphi(\boldsymbol{a})\in M$ ввиду инвариантности M относительно φ. Так что эта система является базисом M и $M = L(\boldsymbol{a}, \varphi(\boldsymbol{a}))$. Необходимость утверждения доказана.

Для доказательства достаточности предположим, что $M = L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, где либо $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – линейно независимые собственные векторы оператора φ, либо $\boldsymbol{a}$ – несобственный вектор и $\boldsymbol{b}=\varphi(\boldsymbol{a})$. Тогда предположим, что для некоторого многочлена $f_1(\lambda)=\lambda^2+\alpha\lambda+\beta$, делящего $\Delta(\lambda)$, выполняется включение $M\subseteq\ker f_1(\varphi)$. В случае, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – собственные векторы, M инвариантно относительно φ как сумма инвариантных подпространств $L(\boldsymbol{a})$ и $L(\boldsymbol{b})$. Пусть теперь $M = L(\boldsymbol{a}, \varphi(\boldsymbol{a}))$, где $\boldsymbol{a}$ – несобственный вектор. Тогда из включения $M\subseteq\ker f_1(\varphi)$ следует, что $\varphi^2(\boldsymbol{a})+\alpha\varphi(\boldsymbol{a})+\beta\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, откуда $\varphi^2(\boldsymbol{a})\in L(\boldsymbol{a}, \varphi(\boldsymbol{a}))=M$. Следовательно, $\varphi(M)=\varphi(L(\boldsymbol{a},\varphi(\boldsymbol{a})))=L(\varphi(\boldsymbol{a}),\varphi^2(\boldsymbol{a}))\subseteq L(\boldsymbol{a},\varphi(\boldsymbol{a}))=M$, поэтому $M\in\operatorname{inv}_V(\varphi)$.

Далее будем использовать индукцию для нахождения инвариантных подпространств, и для этого требуется определить, когда M будет максимальным инвариантным относительно φ подпространством ($M\neq V$).

7. Предположим, что выполняются допущения п. 1. Покажем, что если $M\in\operatorname{inv}_V(\varphi)$, $M\neq V$, то M максимально в $\operatorname{inv}_V(\varphi)$ тогда и только тогда, когда $f_2(\lambda)$ – неприводимый многочлен над полем P.

В самом деле, если подпространство M – немаксимально, то существует $M_1 \in \mathrm{inv}_V(\varphi)$ такое, что $M \subset M_1 \subset V$, поэтому векторы $\boldsymbol{g}_{k+1}, \boldsymbol{g}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{g}_n$ можно подобрать таким образом, что матрица C станет блочно-треугольной. Следовательно, многочлен $f_2(\lambda)$ разложи́м в произведение многочленов меньшей степени.

Обратно, пусть $f_2(\lambda)$ разложим в произведение многочленов меньшей степени. Если мы докажем, что существует $M_1 \in \mathrm{inv}_U(\varphi_2)$ такое, что $M_1 \neq \{\mathbf{0}\}$, $M_1 \neq U$, то подпространство $M_2 = M + M_1$ будет инвариантным относительно φ, причем $M \neq M_2 \neq V$, так что M не является максимальным в $\mathrm{inv}_U(\varphi_2)$. Предположим от противного, что $\mathrm{inv}_U(\varphi_2)$ состоит только из тривиальных подпространств. Поскольку $f_2(\lambda)$ – характеристический многочлен оператора φ_2, то многочлен $f_2(\lambda)$ имеет только один элементарный делитель, иначе согласно утверждению 2 матрица C была бы подобна блочно-диагональной и подпространство U разлагалось бы в прямую сумму нетривиальных инвариантных относительно φ_2 подпространств.

Следовательно, $f_2(\lambda) = (p(\lambda))^r$, где $r \in \mathbb{N}$, $r > 1$, а $p(\lambda)$ – неприводимый над полем P многочлен. Кроме того, $f_2(\lambda)$ является минимальным многочленом для φ_2. Поэтому $(p(\varphi_2))^r = \varphi_0$, $p(\varphi_2) \neq \varphi_0$. Но тогда $\{\mathbf{0}\} \neq \mathrm{Im}(p(\varphi_2))$ и, кроме того, $\mathrm{Im}(p(\varphi_2)) \neq U$, иначе оператор $p(\varphi_2)$ был бы невырожденным, что противоречит равенствам $f_2(\varphi_2) = (p(\varphi_2))^r = \varphi_0$. Теперь, так как $\mathrm{Im}(p(\varphi_2)) \in \mathrm{inv}_L(\varphi_2)$, мы пришли к противоречию с предположением об отсутствии нетривиальных инвариантных относительно φ_2 подпространств пространства L.

Итак, M максимально в $\mathrm{inv}_V(\varphi)$ тогда и только тогда, когда $f_2(\lambda)$ неприводим над P. Отметим, что утверждения пп. 1–7 справедливы для любого поля P. Далее будем рассматривать ситуацию, когда $P = \mathbb{C}$ или $P = \mathbb{R}$. Из доказанного выше утверждения следует, что для $P = \mathbb{C}$ максимальными инвариантными являются только подпространства размерности $n-1$, а если $P = \mathbb{R}$, то размерностью такого подпространства может быть лишь $n-1$ или $n-2$.

8. Пусть $M \in \mathrm{inv}_V(\varphi)$ и $P = \mathbb{C}$. Тогда существует одномерное инвариантное относительно φ подпространство, содержащееся в M.

В самом деле, рассмотрим ограничение φ_1, оператора φ на подпространство M и пусть $f_1(\lambda)$ – характеристический многочлен оператора φ_1. Так как $f_1(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ и $\deg f_1(\lambda) > 0$, то существует корень α многочлена $f_1(\lambda)$. Число α есть собственное значение оператора φ_1 (а также оператора φ), следовательно, в M существует собственный вектор $\boldsymbol{a}$ оператора φ. Положив $U = L(\boldsymbol{a})$, получим: $\dim U = 1$, $U \subseteq M$, $\varphi(U) \subseteq U$.

9. Пусть $2 < k < n$, $P = \mathbb{R}$ и $M \in \mathrm{inv}_V(\varphi)$. Тогда существует инвариантное относительно φ подпространство U размерности 1 или 2, содержащееся в M.

Действительно, если в M существует собственный вектор оператора φ, то его линейная оболочка есть одномерное инвариантное относительно φ подпространство, содержащееся в M.

Предположим теперь, что M не содержит ни одного собственного вектора оператора. Тогда все характеристические числа оператора φ_1, т.е. корни $f_1(\lambda)$, не являются действительными, поэтому любой неприводимый делитель многочлена $f_1(\lambda)$ имеет степень 2. Если бы для каждого такого делителя $h(\lambda)$ линейный оператор $h(\varphi_1)$ был бы невырожденным, то $\ker f_1(\varphi_1) = \{\mathbf{0}\}$, что противоречит теореме Гамильтона – Кели. Следовательно, для некоторого неприводимого делителя $h(\lambda)$ многочлена $f_1(\lambda)$ имеем $\dim\ker h(\varphi_1) > 0$. Пусть $\boldsymbol{a} \in \ker h(\varphi_1)$, $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$. Вектор $\boldsymbol{a}$ не является собственным по предположению, сделанному относительно M, поэтому система векторов $(\boldsymbol{a}, \varphi(\boldsymbol{a}))$ линейно независима и подпространство $U = L(\boldsymbol{a}, \varphi(\boldsymbol{a}))$ двумерно. Нетрудно видеть, что подпространство $\ker h(\varphi_1)$ инвариантно относительно φ_1, откуда $\varphi(\boldsymbol{a}) \in \ker h(\varphi_1)$, поэтому $U \subseteq \ker h(\varphi_1)$. Следовательно, согласно п. 6 подпространство U инвариантно относительно φ_1. Итак, $\varphi(U) = \varphi_1(U) \subseteq U \subseteq M$.

Теперь изложим *способ построения базисов инвариантных относительно* φ *подпространств n-мерного векторного пространства V над полем P*, где P – поле комплексных или действительных чисел. Не нарушая общности, можно считать, что V – это арифметическое n-мерное пространство столбцов $P_{n,1}$, а φ действует по формуле $X \mapsto AX$, $\forall X \in P_{n,1}$, где A – матрица оператора φ в каноническом базисе пространства $P_{n,1}$ (состоящего из столбцов единичной матрицы E_n). Кроме того, согласно утверждениям пп. 2 и 3, если $\Delta(\lambda) = (p_1(\lambda))^{\alpha_1} \cdots (p_r(\lambda))^{\alpha_r}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}$, – разложение характеристического многочлена в произведение степеней различных неприводимых многочленов, то этому разложению соответствует разложение V в прямую сумму инвариантных относительно φ подпространств M_j, $j = \overline{1, r}$, причем оператор $\varphi_j = \varphi|_{M_j}$ имеет характеристический многочлен $(p_j(\lambda))^{\alpha_j}$, а каждое $M \in \mathrm{inv}_V(\varphi)$ есть прямая сумма подпространств $M \cap M_j \in \mathrm{inv}_{M_j}(\varphi_j)$. На основании этого можно предполагать, что φ имеет в качестве характеристического многочлена степень неприводимого многочлена.

Базис инвариантного подпространства размерности 1 состоит из собственного вектора, так что для его нахождения надо решить матричное уравнение вида $(A - \alpha E_n)X = 0$, где α – собственное значение оператора φ. Каждое ненулевое решение такого уравнения образует базис инвариантного подпространства,

Инвариантные подпространства размерности 2 согласно утверждению п. 4 имеют вид $L(X, Y)$, где либо X и Y – собственные векторы, либо X – несобственный вектор и $Y = AX$, причем для некоторого делителя $f_1(\lambda)$ степени 2 характеристического многочлена $\Delta(\lambda)$ матрицы A имеет место равенство $f_1(A)X = 0$. Таким образом, для составления базисов двумерных инвариантных подпространств требуется привлекать либо два линейно независимых собственных вектора, либо решения уравнения вида $f_1(A)X = 0$.

Далее для нахождения инвариантных подпространств используем индукцию по размерности n пространства V. Сначала рассмотрим случай $P = \mathbb{C}$. Опираясь на утверждение п. 4, находим инвариантные подпространства размерности $n-1$: вычисляем собственные значения матрицы A. Пусть это будут $\alpha_1, ..., \alpha_k$. Рассматриваем для каждого $j = \overline{1, k}$ матрицу вида $A - \alpha_j E$ и выделяем базис системы ее столбцов. Дополняем этот базис до линейно независимой системы длины $n-1$ и получаем базис $(n-1)$-мерного инвариантного относительно φ подпространства M. Составляем из этих столбцов матрицу $F \in \mathbb{C}_{n, n-1}$. Матрица $A_1 \in \mathbb{C}_{n-1, n-1}$ ограничения оператора φ на это подпространство в базисе F находится из равенства

$$AF = FA_1.$$

Далее ищем $(n-2)$-мерные инвариантные подпространства пространства M относительно оператора $X \mapsto XA_1$, $X \in \mathbb{C}_{n-1,1}$, и т.д.

Пусть теперь $P = \mathbb{R}$. Будем предполагать, что исходное пространство V – n-мерное арифметическое пространство $\mathbb{R}_{n,1}$. Пусть многочлен $f(\lambda)$ степени n со старшим коэффициентом 1, ассоциированный с характеристическим многочленом $\Delta(\lambda)$ матрицы A оператора φ (в каноническом базисе), есть степень неприводимого над $\mathbb{R}$ многочлена $p(\lambda)$, т.е. $f(\lambda) = p(\lambda)^k, k \in \mathbb{N}$. Если $\deg p(\lambda) = 1$, то действуем так же, как и в случае $P = \mathbb{C}$.

Пусть далее $p(\lambda)$ – многочлен второй степени ($n = 2k$) и $\alpha + \beta i$ – его корень, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$. Рассмотрим линейный оператор $\tilde{\varphi}$ n-мерного арифметического пространства $\mathbb{C}_{n,1}$ над полем $\mathbb{C}$, имеющий в каноническом базисе ту же матрицу A. Тогда $\alpha + \beta i$ является собственным значением этого оператора, и, если $X = S_1 + i \cdot T_1$ – соответствующий собственный вектор, где $S_1, T_1 \in \mathbb{R}_{n,1}$, имеем:

$$AX = (\alpha + \beta i)X \Leftrightarrow A(S_1 + iT_1) = (\alpha + \beta i)(S_1 + iT_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AS_1 + iAT_1 = (\alpha S_1 - \beta T_1) + i(\beta S_1 + \alpha T_1).$$

Отсюда следуют соотношения:

$$AS_1 = \alpha S_1 - \beta T_1, \;\; AT_1 = \beta S_1 + \alpha T_1. \tag{12.5}$$

Отметим, что векторы S_1 и T_1 линейно независимы, иначе, как нетрудно видеть, вектор S_1 или T_1 был бы собственным вектором оператора φ, что невозможно ввиду отсутствия действительных корней у многочлена $\Delta(\lambda)$.

Теперь из равенств (12.5) следует, что подпространство $L_1 = L(S_1, T_1)$ должно быть двумерным инвариантным относительно φ. Далее, если $n > 2$, дополняем систему векторов (S_1, T_1) до базиса $G = (S_1, T_1, P_3, ..., P_n)$ всего пространства V. Пусть A_1 – матрица оператора φ в базисе G. Эта матрица может быть представлена в блочно-треугольном виде:

$$A_1 = \begin{bmatrix} B & D \\ O_{n-2,\,2} & C \end{bmatrix},$$

где $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ – матрица ограничения φ_1 оператора φ на подпространство L_1; $C \in \mathbb{R}_{n-2,\,n-2}$ – матрица дополнения φ_2 к ограничению φ_1, полученная исходя из базиса G.

Ввиду того, что характеристический многочлен матрицы C есть делитель характеристического многочлена матрицы A, его корень $\alpha + \beta i$ является ее собственным значением, и, найдя соответствующий собственный вектор Y этой матрицы в каноническом базисе пространства $\mathbb{C}_{n-2,1}$, представим его в виде $Y = Y_1 + iY_2$, где $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}_{n-2,1}$. Обозначив через P матрицу порядка $n \times (n-2)$ со столбцами $P_3, ..., P_n$ и умножив ее справа на столбцы Y_1, Y_2, получим векторы $S_2 = PY_1, T_2 = PY_2$. Утверждается, что подпространство $L_2 = L(S_1, T_1, S_2, T_2)$ является четырехмерным инвариантным относительно φ подпространством пространства $\mathbb{R}_{n,1}$, и таким путем с помощью индукции находятся все инвариантные подпространства.

Для нахождения включений друг в друга полученных подпространств следует составить матрицу из столбцов, образующих их базисы, и найти ранг получившейся матрицы, который и будет размерностью суммы рассматриваемых подпространств. Если эта размерность совпадает с размерностью одного из подпространств, то такое подпространство включает в себя другое из данных подпространств.

Пример 7. Найти все нетривиальные подпространства пространства $\mathbb{R}_{6,1}$, инвариантные относительно линейного оператора φ, заданного в каноническом базисе матрицей

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & -3 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Так как характеристический многочлен $\Delta(\lambda)$ равен $(\lambda^2+1)^3$, то $p(\lambda)=\lambda^2+1$ и $\alpha+\beta i=i$. Находим собственный вектор X оператора $\tilde{\varphi}$, соответствующий собственному значению i, решая матричное уравнение $(A-iE_6)X=$ $=O_{6,1}$ над полем $\mathbb{C}$. Получим $X=S_1+iT_1$, где $S_1=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $T_1=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Дополняем систему векторов (S_1, T_1) до базиса G пространства V последними четырьмя столбцами единичной матрицы, обозначаемыми соответственно $P_3, \ldots, P_6$. Матрица F перехода от канонического базиса к базису G выглядит следующим образом:

$$F=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицу A_1 оператора φ находим из условия $AF=FA_1$. В результате

$$A_1=\begin{bmatrix} B & D \\ O_{4,2} & C \end{bmatrix},$$

где

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};\ D=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & -2 & -3 \end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Теперь согласно изложенному выше находим соответствующий собственному значению i собственный вектор Y матрицы C, рассматриваемой над полем $\mathbb{C}$:

$$Y=\begin{bmatrix}-i & -1+i & 1 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=Y_1+iY_2,$$

где $Y_1=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$; $Y_2=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Умножая эти столбцы справа на матрицу $P=\begin{bmatrix} O_{2,4} \\ E_4 \end{bmatrix}$, получаем:

$$S_2=-P_4+P_5=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ T_2=-P_3+P_4=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

В результате приходим к тому, что подпространство $L_2 = L(S_1, T_1, S_2, T_2)$ является четырехмерным инвариантным относительно φ подпространством пространства V.

Отметим, что подпространства L_1 и L_2 являются единственными инвариантными относительно φ подпространствами пространства V. Действительно, инвариантное подпространство L размерности 2 должно удовлетворять включению $L \subseteq \ker(\varphi^2 + \mathrm{id}\,V)$, а инвариантное подпространство M размерности 4 – включению $\mathrm{Im}(\varphi^2 + \mathrm{id}\,V) \subseteq M$. В то же время ранг матрицы

$$A_1^2 + E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -15 & -13 & -13 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

равен 4, вследствие чего включения превращаются в равенства, откуда следует единственность вышеупомянутых инвариантных подпространств.

Пример 8. Найти все нетривиальные подпространства пространства $\mathbb{R}_{4,1}$, инвариантные относительно линейного оператора φ, заданного в каноническом базисе матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Так как характеристический многочлен $\Delta(\lambda)$ равен $(\lambda^2+1)^2$, то $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ и $\alpha + \beta i = i$. Собственный вектор $S + Ti$, $S, T \in \mathbb{R}_{4,1}$, оператора $\tilde{\varphi}$, удовлетворяет соотношениям (12.5): $AS = -T$, $AT = S$, поэтому $(A^2 + E_2)T =$ $= A(AT) + T = AS + T = -T + T = O_{4,1}$, т.е. T – решение матричного уравнения $(A^2 + E_2)X = O_{4,1}$. Поскольку

$$A^2 + E_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

то $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ – решение матричного уравнения $(A^2 + E_2)X = O_{4,1}$. Тогда $S = AT = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ и $L = L(S, T)$ – единственное нетривиальное подпространство пространства $\mathbb{R}_{4,1}$, инвариантное относительно линейного оператора φ, что обосновывается теми же рассуждениями, что и в предыдущем примере, так как ранг матрицы $A^2 + E_2$ равен 2.

Пример 9. Линейный оператор φ четырехмерного векторного пространства V над полем $\mathbb{R}$ в некотором базисе имеет матрицу

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Требуется найти все инвариантные относительно φ подпространства векторного пространства V и все включения между ними.

Р е ш е н и е. Можно считать, что $V=\mathbb{R}_{4,1}$ и $\varphi: X \mapsto AX$, $X \in \mathbb{R}_{4,1}$. Пусть M – инвариантное относительно φ подпространство пространства $\mathbb{R}_{4,1}$ и $\dim M = k$. Тогда $0 \leqslant k \leqslant 4$. Если $k=0$, то $M=\{0\}$. Если $k=4$, то $M=\mathbb{R}_{4,1}$. Рассмотрим далее нетривиальные случаи: $k=1,2,3$.

1. $k=1$. Базис M состоит из одного собственного вектора оператора φ. Найдем все собственные значения и собственные векторы этого оператора:

$$\Delta(\lambda)=\det(A-\lambda E_4)=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 4-\lambda & -2 \\ -1 & 0 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^4.$$

Следовательно, оператор φ имеет единственное собственное значение 1, поэтому собственные векторы – это ненулевые решения матричного уравнения $(A-E_4)X=0$. Решаем это уравнение и выбираем два базисных решения: $F_1=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $F_2=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Тогда произвольный собственный вектор имеет вид

$$X_{\alpha,\beta}=\begin{bmatrix} 3\alpha+\beta \\ 2\alpha+\beta \\ \alpha+\beta \\ \beta \end{bmatrix},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha^2+\beta^2>0.$$

Заметим, что векторы $X_{\alpha,\beta}$ и X_{α_1,β_1} порождают одно и то же подпространство тогда и только тогда, когда $\alpha/\alpha_1=\beta/\beta_1$. Следовательно, чтобы выбрать множество индексов для семейства одномерных инвариантных подпространств, зафиксируем сначала параметр $\alpha=0$ и затем, умножив $1/\beta$ на $X_{\alpha,\beta}$, получим подпространство $M_\infty=L\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right)$. После этого, полагая $\alpha\neq 0$ и фиксируя α, умножаем $1/\alpha$ на вектор $X_{\alpha,\beta}$ и, заменяя β/α на β, приходим к подпространствам

$$M_\beta=L\left(\begin{bmatrix} 3+\beta \\ 2+\beta \\ 1+\beta \\ \beta \end{bmatrix}\right).$$

Подпространства M_β, как нетрудно видеть, различны для различных значений $\beta\in\mathbb{R}^*$, где $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ – множество действительных чисел, пополненное символом ∞. Таким образом, множество одномерных инвариантных подпространств находится во взаимно однозначном соответствии с множеством точек прямой, пополненной бесконечно удаленной точкой.

2. $k=2$, 3. Так как инвариантные подпространства операторов φ и $\varphi-\mathrm{id}\,V$ одни и те же, вместо матрицы A будем использовать матрицу

$$B=A-E_4=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 3 & -2\end{bmatrix}.$$

Здесь $B^2=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2 & -1\end{bmatrix}$, $B^3=O_{4,\,4}$. Значит, минимальный многочлен матрицы B равен λ^3.

Построим новый базис пространства V, включив туда два собственных вектора $F_1=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ и $F_2=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, а также вектор F_4, не принадлежащий нуль-пространству матрицы B^2, например $F_4=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Так как $BF_4=$ $=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $B^2F_4=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=F_2$, то в качестве F_3 удобно взять BF_4. Тогда в базисе $G=\left(F_1,F_2,F_3,F_4\right)$ матрица оператора $\varphi-\mathrm{id}\,V$ имеет вид

$$C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Для нахождения двумерных инвариантных подпространств введем в рассмотрение произвольный ненулевой вектор $X=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ и произведения $CX=\begin{bmatrix}0 & x_3 & x_4 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, C^2X=\begin{bmatrix}0 & x_4 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Составим матрицу из этих столбцов:

$$D=\begin{bmatrix}x_1 & 0 & 0\\ x_2 & x_3 & x_4\\ x_3 & x_4 & 0\\ x_4 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Поскольку $C^3=O_{4,4}$, то для того чтобы столбцы этой матрицы порождали двумерное инвариантное подпространство, надо, чтобы $\operatorname{rank}D=2$. Для этого необходимо, чтобы $x_4=0$ и $x_3\neq 0$. Применяя к матрице из первых двух столбцов элементарные преобразования, приходим к матрице

$$\begin{bmatrix}\gamma & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

состоящей из координатных столбцов в базисе G двумерного инвариантного подпространства, которое обозначим через P_γ. Таким образом, $P_\gamma = L(\gamma F_1 + F_3, F_2)$. Легко проверить, что в этой совокупности подпространства различны при различных значениях параметра γ.

Для нахождения трехмерных инвариантных подпространств необходимо, чтобы $\operatorname{rank} D=3$. Это обеспечивается условием $x_4 \neq 0$. Приводя матрицу D элементарными преобразованиями столбцов к виду

$$\begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

получаем базис трехмерного инвариантного подпространства, которое будем обозначать через S_μ и для которого эта матрица является матрицей перехода от базиса G к базису этого подпространства. Таким образом, $S_\mu = L\left(\mu F_1 + F_4, F_3, F_2\right)$. Здесь также соответствие $S_\mu \mapsto \mu$ взаимно однозначно.

Переходим к выяснению включений между нетривиальными инвариантными подпространствами. Включения $M_\infty \subseteq P_\gamma$ и $M_\infty \subseteq S_\mu$ для любых значений параметров очевидны, так как вектор F_2 в них содержится. Для исследования включений M_β в P_γ и S_μ составляем матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \beta & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ранг первой матрицы равен 3, второй равен 4, поэтому $M_\beta \not\subseteq P_\gamma$ и $M_\beta \not\subseteq S_\mu$ для любых значений параметров. Для выяснения включений двумерных инвариантных подпространств в трехмерные составим матрицу

$$\begin{bmatrix} \gamma & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен 3 лишь в случае $\gamma = 0$, поэтому $P_0 \subset S_\mu$ для любого значения $\mu \in \mathbb{R}$. В итоге $M_\infty \subset P_\gamma$, $M_\infty \subset S_\mu$, $P_0 \subset S_\mu$, $\gamma, \mu \in \mathbb{R}$ – это все нетривиальные включения.

Присоединенные векторы. Пусть φ – линейный оператор векторного пространства V над полем P, а $\boldsymbol{u}$ – собственный вектор этого оператора, соответствующий собственному значению α. Система векторов $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ называется *присоединенной к собственному вектору* $\boldsymbol{u}$, если выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}&\varphi(\boldsymbol{v}_1)=\alpha\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{u},\\&\varphi(\boldsymbol{v}_2)=\alpha\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_1,\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&\varphi(\boldsymbol{v}_k)=\alpha\boldsymbol{v}_k+\boldsymbol{v}_{k-1}.\end{aligned}$$

Тогда система векторов $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_k)$ называется *жордановой цепочкой с началом в* $\boldsymbol{u}$.

Каждая жорданова цепочка линейно независима. Система векторов, состоящая из жордановых цепочек, линейно независима тогда и только тогда, когда входящие в нее собственные векторы этого линейного оператора образуют линейно независимую систему. Базис пространства V, состоящий из жордановых цепочек оператора φ, называется *жордановым базисом для оператора* φ.

Пусть $\dim V=n>0$, $P=\mathbb{C}$. Тогда для любого оператора $\varphi\in\mathrm{Hom}(V,V)$ существует в V жорданов базис.

Изложим один из методов нахождения жорданова базиса для оператора φ (см. [1], §12.6). Не нарушая общности, можно считать, что $V=\mathbb{C}_{n,1}$, $\varphi: X\mapsto AX$, $\forall X\in\mathbb{C}_{n,1}$, где $A\in\mathbb{C}_{n,n}$.

Предположим, что собственные значения $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ матрицы A найдены, причем $\alpha_i\neq\alpha_j$, если $i\neq j$. Для каждого из них находим жордановы цепочки, а затем, объединяя их, получаем жорданов базис.

Рассмотрим сначала матрицу $A-\alpha_1E_n$. Последовательно вычисляем ее степени до тех пор, пока ранг последующей не будет равен рангу предыдущей. Таким образом, получаем последовательность матриц

$$A-\alpha_1E_n,\quad (A-\alpha_1E_n)^2,\dots,(A-\alpha_1E_n)^p,(A-\alpha_1E_n)^{p+1},$$

где $\mathrm{rank}(A-\alpha_1E_n)^{p-1}>\mathrm{rank}(A-\alpha_1E_n)^p=\mathrm{rank}(A-\alpha_1E_n)^{p+1}$. После этого находим базис подпространства решений матричного уравнения $(A-\alpha_1E_n)^pX=O_{n,1}$. Пусть это будут столбцы $F_p^{(1)},F_p^{(2)},\dots,F_p^{(k_p)}$. Составляем из этих столбцов матрицу

$$F_p=[F_p^{(1)}\,|\,F_p^{(2)}\,|\dots|\,F_p^{(k_p)}].$$

Далее умножаем матрицу $(A-\alpha_1E_n)^{p-1}$ справа на F_p и пусть $(H_p^{(1)},\dots,H_p^{(l_p)})$ – система столбцов, являющаяся базисом системы столбцов матрицы $(A-\alpha_1E_n)^{p-1}F_p$. После этого решаем матричное уравнение

$$(A-\alpha_1E_n)^{p-1}X=0 \tag{12.6}$$

и составляем матрицу $F_{p-1}=[F_{p-1}^{(1)}\,|\,F_{p-1}^{(2)}\,|\dots|\,F_{p-1}^{(k_{p-1})}]$ так, чтобы ее столбцы образовывали базис подпространства решений уравнения (12.6).

Затем рассматриваем матрицу $(A-\alpha_1 E_n)^{p-2} F_{p-1}$ и выбираем базис линейной оболочки ее системы столбцов так, чтобы он содержал систему $(H_p^{(1)}, ..., H_p^{(l_p)})$ в качестве подсистемы. Например, пусть это будет система $(H_p^{(1)}, ..., H_p^{(l_p)}, H_{p-1}^{(l_{p+1})}, ..., H_{p-1}^{(l_{p-1})})$. Продолжая данный процесс, получаем систему

$$(H_p^{(1)}, ..., H_p^{(l_p)}, H_{p-1}^{(l_{p+1})}, ..., H_{p-1}^{(l_{p-1})}, ..., H_1^{(l_1)}) \tag{12.7}$$

(причем может быть $l_i = l_{i-1}$), которая состоит из собственных векторов, являющихся началами строящихся жордановых цепочек. Чтобы найти теперь жорданову цепочку, начинающуюся, например, с $H_p^{(1)}$, надо в системе $(F_p^{(1)}, ..., F_p^{(k_p)})$ найти вектор $F_p^{(t)}$, для которого $H_p^{(1)} = (A-\alpha_1 E_n)^{p-1} F_p^{(t)}$, и тогда получим жорданову цепочку

$$(H_p^{(1)}, (A-\alpha_1 E_n)^{p-2} F_p^{(t)}, ..., (A-\alpha_1 E_n) F_p^{(t)}, F_p^{(t)}).$$

Аналогично находим для вектора $H_p^{(l_{p-1})}$ (если $l_{p-1} > l_p$) вектор $F_{p-1}^{(s)}$ такой, что $H_p^{(l_{p-1})} = (A-\alpha_1 E_n)^{p-2} F_{p-1}^{(s)}$, и получаем жорданову цепочку с началом в $H_{p-1}^{(l_{p-1})}$:

$$(H_{p-1}^{(l_{p-1})}, (A-\alpha_1 E_n)^{p-3} F_{p-1}^{(s)}, ..., F_{p-1}^{(s)}).$$

Так же действуем в отношении любого вектора из системы (12.7). Объединяя полученные жордановы цепочки, имеем жорданов базис для некоторого подпространства, соответствующего собственному значению α_1. Далее переходим к собственным значениям $\alpha_2, ..., \alpha_m$. Объединяя полученные жордановы цепочки, имеем жорданов базис пространства $\mathbb{C}_{n,1}$ для φ.

Пример 10. Найти жорданов базис в пространстве $\mathbb{C}_{3,1}$, для линейного оператора $\varphi : X \to AX$, где

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & -2 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Ищем характеристические числа матрицы A:

$$\det(A-\lambda E_3) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & -1 \\ -4 & -1-\lambda & -2 \\ 8 & 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = -(\lambda-1)^3.$$

Следовательно, имеется только одно собственное значение $\lambda_1 = 1$ кратности 3. Вычисляем степени матрицы $A - \lambda_1 E_3 = A - E_3$:

$$A-E_3=\begin{bmatrix}-2 & -1 & -1\\ -4 & -2 & -2\\ 8 & 4 & 4\end{bmatrix},\ \operatorname{rank}(A-E_3)=1,$$

$$(A-E_3)^2=\begin{bmatrix}-2 & -1 & -1\\ -4 & -2 & -2\\ 8 & 4 & 4\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \operatorname{rank}(A-E_3)^2=0.$$

Следовательно, $p=2$, и рассматриваем матричное уравнение $(A-E_3)^2X=$ $=0$, т.е. $O_{3,3}\cdot X=0$. Множество его решений есть все пространство $\mathbb{C}_{3,1}$, поэтому в качестве матрицы F_2 можно взять матрицу

$$F_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=E_3.$$

Умножаем теперь $A-E_3$ на $F_2=E_3$ и получаем матрицу $(A-E_3)E_3=A-E_3$. Так как $\operatorname{rank}(A-E_3)=1$, то $l_2=1$ и в качестве столбца $H_2^{(1)}$ выбираем, например, второй столбец матрицы $A-E_3$, т.е.

$$H_2^{(1)}=\begin{bmatrix}-1\\ -2\\ 4\end{bmatrix}.$$

Далее рассматриваем уравнение $(A-E_3)X=0$ и находим базис его подпространства решений. Преобразуем матрицу

$$A-E_3=\begin{bmatrix}-2 & -1 & -1\\ -4 & -2 & -2\\ 8 & 4 & 4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Пусть x_2 – базисная неизвестная, тогда $x_2=-x_3-2x_1$. Следовательно, в качестве общего решения имеем столбец $\begin{bmatrix}\alpha & -\beta-2\alpha & \beta\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. При $\alpha=-1,\ \beta=4$ получаем столбец

$$H_2^{(1)}=\begin{bmatrix}-1\\ -2\\ 4\end{bmatrix}.$$

Выбрав $\alpha=1,\ \beta=0$, приходим к другому базисному решению:

$$H_2^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 0\end{bmatrix}.$$

Векторы $H_2^{(1)}$ и $H_1^{(2)}$ – собственные векторы, являющиеся началами жордановых цепочек. Присоединенный вектор существует только для вектора $H_2^{(1)}$, и так как

$$(A-E_3)H_2^{(s)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

то в качестве присоединенного вектора можно взять столбец

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получен жорданов базис пространства $\mathbb{C}_{3,1}$ для оператора φ:

$$\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Отметим, что оператор φ в этом базисе имеет матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

12.1. Выяснить, являются ли следующие отображения линейными ($\boldsymbol{x}$ означает произвольный вектор пространства V_3 с координатами x_1, x_2, x_3 в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ правой ДПСК в пространстве):

1) $\varphi : V_3 \to \mathbb{R},\ \varphi(\boldsymbol{x}) = 0$;
2) $\varphi : V_3 \to \mathbb{R},\ \varphi(\boldsymbol{x}) = 2$;
3) $\varphi : V_3 \to \mathbb{R},\ \varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{xa},\ \boldsymbol{a} \in V_3$;
4) $\varphi : V_3 \to \mathbb{R},\ \varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{xab},\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_3$;
5) $\varphi : V_3 \to V_3,\ \varphi(\boldsymbol{x}) = x_2\boldsymbol{i} + (x_1 + 2x_2)\boldsymbol{j} - 3x_3\boldsymbol{k}$;
6) $\varphi : V_3 \to V_3,\ \varphi(\boldsymbol{x}) = x_2\boldsymbol{i} + (x_1 + 1)\boldsymbol{j} + (x_3 + 3)\boldsymbol{k}$;
7) $\varphi : V_3 \to V_3,\ \varphi(\boldsymbol{x}) = x_3^2\boldsymbol{i} + (x_1 - x_2)\boldsymbol{j}$;
8) $\varphi : V_3 \to V_3,\ \varphi(\boldsymbol{x}) = 5\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + (x_3 + x_2)\boldsymbol{k}$.

12.2. Привести пример векторного пространства V и биекции $\varphi : V \to V$ такой, что для любого подпространства M пространства V имеет место равенство $\varphi(M) = M$, однако φ не является линейным отображением.

12.3. Показать, что интегральный оператор Фредгольма, который заданную функцию $x(t) \in C([a,b])$ отображает в функцию $y(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$, где $K(t,s)$ – фиксированная непрерывная на

$[a,b]\times[a,b]$ функция двух переменных (ядро оператора Фредгольма), является линейным оператором пространства непрерывных функций $C([a,b])$ на отрезке $[a,b]$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$.

12.4. Доказать, что поворот плоскости на угол α вокруг начала координат приводит к линейному преобразованию векторов плоскости (повороту радиусов-векторов точек на угол α), и найти какую-либо матрицу этого линейного преобразования.

12.5. Доказать, что гомотетия на плоскости приводит к линейному преобразованию пространства векторов плоскости (как и в задаче 12.4), и найти матрицу этого преобразования в каком-либо базисе.

12.6. Доказать, что ортогональное проектирование пространства V_3 на координатную плоскость Oxy есть линейный оператор, и найти его матрицу в базисе $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ данной ДПСК.

12.7. Доказать, что преобразование $\varphi:\boldsymbol{x}\mapsto[\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}]$, где $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, пространства V_3 линейно, и найти его матрицу в базисе $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$.

12.8. Доказать, что преобразование $\varphi:(x_1,x_2,x_3)\mapsto(x_1-x_2,0,x_1+x_2)$ пространства $\mathbb{R}_{1,3}$ является линейным, и найти его матрицу в каноническом базисе.

12.9. Показать, что дифференцирование является линейным оператором пространства многочленов степени $\leqslant n$ над полем $\mathbb{R}$, и найти его матрицы в базисах:

1) $(1,x,x^2,\dots,x^n)$;

2) $\left(1, x-a, \dfrac{(x-a)^2}{2!},\dots,\dfrac{(x-a)^n}{n!}\right)$, где a – действительное число.

12.10. Выяснить, какие из следующих преобразований арифметического пространства $\mathbb{R}_{3,1}$ линейны, и в случае линейности найти их матрицы в каноническом базисе:

1) $\varphi\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_2+x_3\\2x_1-x_3\end{bmatrix}$; 2) $\varphi\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\sin x_1\\\sin x_2x_3\\\sin x_2\end{bmatrix}$;

3) $\varphi\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1-x_2+x_3\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$; 4) $\varphi\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1^2-x_2\\0\\x_3^2+x_1\end{bmatrix}$.

12.11. Найти матрицу линейного оператора $\varphi:\mathbb{R}_{1,3}\to\mathbb{R}_{1,3}$, переводящего систему векторов $(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3)$ в систему $(\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\boldsymbol{h}_3)$, в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов:

1) $\boldsymbol{g}_1=(1,2,3)$, $\boldsymbol{g}_2=(0,2,3)$, $\boldsymbol{g}_3=(0,1,2)$, $\boldsymbol{h}_1=(0,9,10)$, $\boldsymbol{h}_2=(-1,12,8)$, $\boldsymbol{h}_3=(0,8,5)$;

2) $\boldsymbol{g}_1=(2,0,1)$, $\boldsymbol{g}_2=(0,-1,2)$, $\boldsymbol{g}_3=(2,1,3)$, $\boldsymbol{h}_1=(3,-1,2)$, $\boldsymbol{h}_2=(1,-3,1)$, $\boldsymbol{h}_3=(6,-2,1)$.

12.12. Найти матрицу оператора φ пространства V_3, который действует тождественно на векторы из $V_2(\pi)$, где π – плоскость с уравнением $x-2y+z=0$, и который умножает нормальный вектор этой плоскости на 2.

12.13. Найти матрицу линейного оператора φ в V_3, для которого $\ker\varphi=V_2(\pi)$, $\operatorname{Im}\varphi=V_1(\Delta)$, где π – плоскость с уравнением $x-2y+z=0$, а Δ – прямая с уравнением $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{2}$.

12.14. Найти матрицу линейного оператора φ пространства $\mathbb{R}_{1,3}$, если $\ker\varphi=L(\boldsymbol{a}_1)$, $\operatorname{Im}\varphi=L(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$, где $\boldsymbol{a}_1=(13,2,1)$; $\boldsymbol{b}_1=(1,5,-5)$; $\boldsymbol{b}_2=$ $=(-4,-7,-6)$.

12.15. Найти матрицу оператора дифференцирования линейного пространства функций вида $\alpha e^{at}\cos bt+\beta e^{at}\sin bt$, где $\alpha,\beta,a,b\in\mathbb{R}$ (a и b фиксированы) в базисе $(e^{at}\cos bt, e^{at}\sin bt)$.

12.16. Найти базис ядра и базис образа линейного оператора φ пространства $\mathbb{R}_{3,1}$, если этот оператор задан матрицей A:

$$1)\ A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -4\\ 3 & 5 & -7\\ 4 & -5 & -6\end{bmatrix};\quad 2)\ A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 5 & 4 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix};\quad 3)\ A=\begin{bmatrix}-2 & 5 & -3\\ 4 & -10 & 6\\ 2 & -5 & 3\end{bmatrix}.$$

12.17. Дана матрица A линейного оператора φ векторного пространства U_n в базисе $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\dots,\boldsymbol{e}_n)$. Найти матрицу этого оператора в базисе $(\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\dots,\boldsymbol{e}'_n)$:

$$1)\ A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}'_1=-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{e}'_2=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2;$$

$$2)\ A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}'_1=3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{e}'_2=2\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2;$$

$$3)\ A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}'_1=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{e}'_2=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{e}'_3=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2;$$

$$4)\ A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix},\ U_3=\mathbb{R}_2[x],\ \boldsymbol{e}_1=1,\ \boldsymbol{e}_2=t,\ \boldsymbol{e}_3=t^2,\ \boldsymbol{e}'_1=t^2-t+1,$$
$\boldsymbol{e}'_2=2t^2-1$, $\quad\boldsymbol{e}'_3=t$;

5) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\quad \boldsymbol{e}_1'=\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_2'=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_3'=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3,$
$\boldsymbol{e}_4'=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4;$

6) $A=\begin{bmatrix} -85 & -59 & 18 \\ 121 & 84 & -25 \\ -13 & -9 & 3 \end{bmatrix}$, $\quad \boldsymbol{e}_1=3\boldsymbol{e}_1'+\boldsymbol{e}_2'+2\boldsymbol{e}_3', \quad \boldsymbol{e}_2=2\boldsymbol{e}_1'+\boldsymbol{e}_2'+2\boldsymbol{e}_3',$
$\boldsymbol{e}_3=-\boldsymbol{e}_1'+2\boldsymbol{e}_2'+5\boldsymbol{e}_3';$

7) $A=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\quad \boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_1', \quad \boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_1'+\boldsymbol{e}_2', \quad \boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1'+\boldsymbol{e}_2'+\boldsymbol{e}_3',$
$\boldsymbol{e}_4=\boldsymbol{e}_1'+\boldsymbol{e}_2'+\boldsymbol{e}_3'+\boldsymbol{e}_4';$

8) $A=\begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{bmatrix}$, $\; U_3=\mathbb{R}_{1,3}, \; \boldsymbol{e}_1=(8,-6,7), \; \boldsymbol{e}_2=(-16,7,-13),$
$\boldsymbol{e}_3=(9,-3,7), \boldsymbol{e}_1'=(1,-2,1), \boldsymbol{e}_2'=(3,-1,2), \boldsymbol{e}_3'=(2,1,2).$

12.18. Как изменится матрица линейного оператора, если в соответствующем базисе $(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, ..., \boldsymbol{g}_n)$ поменять местами векторы $\boldsymbol{g}_k$ и $\boldsymbol{g}_m$, $1 \leqslant k \leqslant n, \; 1 \leqslant m \leqslant n, \; k \neq m$?

12.19. Пусть $\varphi: U_n \to U_m$ – линейный оператор, $G=(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, ..., \boldsymbol{g}_n)$ и $G'=(\boldsymbol{g}_1', \boldsymbol{g}_2', ..., \boldsymbol{g}_n')$ – базисы пространства U_n, а $H=(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, ..., \boldsymbol{h}_m)$ и $H'=(\boldsymbol{h}_1', \boldsymbol{h}_2', ..., \boldsymbol{h}_m')$ – базисы пространства U_m. Дана матрица A оператора φ в базисах G, H. Найти матрицу этого оператора в базисах G', H':

1) $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$, $\; \boldsymbol{g}_1'=2\boldsymbol{g}_1+3\boldsymbol{g}_2, \; \boldsymbol{g}_2'=-\boldsymbol{g}_1+2\boldsymbol{g}_2, \; \boldsymbol{h}_1'=\boldsymbol{h}_1-2\boldsymbol{h}_2, \; \boldsymbol{h}_2'=$
$=2\boldsymbol{h}_1-3\boldsymbol{h}_2;$

2) $A=\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$, $\quad \boldsymbol{g}_1'=\boldsymbol{g}_1+\boldsymbol{g}_2+3\boldsymbol{g}_3, \quad \boldsymbol{g}_2'=2\boldsymbol{g}_1-\boldsymbol{g}_2+4\boldsymbol{g}_3, \quad \boldsymbol{g}_3'=$
$3\boldsymbol{g}_1+5\boldsymbol{g}_3, \quad \boldsymbol{h}_1'=2\boldsymbol{h}_1-\boldsymbol{h}_2+3\boldsymbol{h}_3, \quad \boldsymbol{h}_2'=\boldsymbol{h}_1+\boldsymbol{h}_3, \quad \boldsymbol{h}_3'=-\boldsymbol{h}_2+2\boldsymbol{h}_3;$

3) $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $U_4=\mathbb{R}_{1,4}$, $\boldsymbol{g}_1=(1,0,0,0)$, $\boldsymbol{g}_2=(0,1,0,0)$, $\boldsymbol{g}_3=$ $=(0,0,1,0)$, $\boldsymbol{g}_4=(0,0,0,1)$, $\boldsymbol{h}_1=(1,0,0)$, $\boldsymbol{h}_2=(0,1,0)$, $\boldsymbol{h}_3=(0,0,1)$, $\boldsymbol{g}_1'=$ $=(1,0,1,0)$, $\boldsymbol{g}_2'=(0,1,0,1)$, $\boldsymbol{g}_3'=(1,0,-1,0)$, $\boldsymbol{g}_4'=(0,1,0,-1)$, $\boldsymbol{h}_1'=(0,0,1)$, $\boldsymbol{h}_2'=(0,1,2)$, $\boldsymbol{h}_3'=(-3,2,1)$.

12.20. Показать, что отображение $X\mapsto AXB$ пространства матриц $\mathbb{R}_{2,2}$ в пространство матриц $\mathbb{R}_{2,3}$ является линейным, и найти его матрицу в канонических базисах, если:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

12.21. Линейное преобразование φ в базисе $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$, где $\boldsymbol{a}_1=(1,1)$; $\boldsymbol{a}_2=(1,2)$, имеет матрицу $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, а преобразование ψ в базисе $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$, где $\boldsymbol{b}_1=(2,-1)$; $\boldsymbol{b}_2=(-1,1)$, – матрицу $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Найти матрицу преобразования $\varphi\circ\psi$ в базисе $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$.

12.22. Преобразование φ в базисе $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$, где $\boldsymbol{a}_1=(-3,7)$; $\boldsymbol{a}_2=(1,-2)$, имеет матрицу $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, а преобразование ψ в базисе $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$, где $\boldsymbol{b}_1=(6,-7)$; $\boldsymbol{b}_2=(-5,6)$, – матрицу $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$. Найти матрицу преобразования $\varphi+\psi$ в том базисе, в котором даны координаты всех векторов.

12.23. Доказать, что для любых квадратных матриц A и B одного порядка матрицы AB и BA имеют одинаковые характеристические многочлены.

12.24. Показать, что всякий многочлен степени n со старшим коэффициентом $(-1)^n$ над числовым полем P может быть характеристическим многочленом некоторой матрицы из множества $P_{n,n}$.

12.25. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в каноническом базисе пространства $\mathbb{R}_{n,1}$ матрицей A:

1) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$; 2) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; 3) $A=\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -3 & 6 & -9 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$;

4) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$; 5) $A=\begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$;

6) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; 7) $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

12.26. Пусть матрица A невырожденная и имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Доказать, что собственные значения матрицы A^{-1} равны $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_m^{-1}$, а соответствующие собственные векторы совпадают.

12.27. Существует ли базис, в котором линейное преобразование с матрицей

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

векторного пространства $\mathbb{R}_{4,1}$ имеет диагональную матрицу? Если да, то найти этот базис и эту матрицу.

12.28. Для каждой из приведенных ниже матриц над полем $\mathbb{C}$ выяснить, является ли оператор с данной матрицей оператором простой структуры:

1) $A=\begin{bmatrix} 10 & -3 & -9 \\ -18 & 7 & 18 \\ 18 & -6 & -17 \end{bmatrix}$; 2) $A=\begin{bmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$;

3) $A=\begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; 4) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$;

5) $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; 6) $A=\begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Если да, то найти матрицу S, трансформирующую матрицу A к диагональной матрице B, и найти эту матрицу B.

12.29. Доказать, что матрицы простой структуры A и B над полем $\mathbb{R}$ подобны тогда и только тогда, когда они имеют равные характеристические многочлены.

12.30. Доказать, что если матрица A является матрицей простой структуры, то матрицы A^{T} и A^* также являются матрицами простой структуры. Если дополнительно A невырождена, то матрица A^{-1} и присоединенная (союзная) матрица к матрице A также являются матрицами простой структуры.

12.31. Пусть линейный оператор φ в некотором базисе векторного пространства $\mathbb{C}_{n,1}$ задан матрицей A. Построить в этом пространстве жорданов базис для оператора φ:

$$1)\ A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{bmatrix};\qquad 2)\ A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix};$$

$$3)\ A=\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix};\qquad 4)\ A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$5)\ A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

12.32. Пусть M – подпространство размерности m n-мерного векторного пространства V. Показать, что отображение вложения $\mathrm{in}_M : M \to V$, сопоставляющее каждому вектору $\boldsymbol{x} \in M$ тот же самый вектор $\boldsymbol{x} \in V$, есть инъективное линейное отображение, и найти матрицу этого отображения в базисе G пространства M и базисе G' пространства V, где базис G' – дополнение базиса G до базиса простанства V.

12.33. Пусть $V = M \oplus L$ – прямая сумма подпространств M и L векторного пространства V. Определим соответствие $\mathrm{pr}_M^{M\oplus L} : V \to M$, где для $\boldsymbol{x} \in M$ полагаем $\mathrm{pr}_M^{M\oplus L}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1$, если $\boldsymbol{x}_1 \in M$ и $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1 \in L$. Показать, что это соответствие есть линейное сюръективное отображение (отображение $\mathrm{pr}_M^{M\oplus L}$ называется *проектированием пространства V на подпространство M параллельно подпространству L*). Доказать, что выполняются равенства:

$$\mathrm{pr}_M^{M\oplus L} \circ \mathrm{in}_M = \mathrm{id}\, M, \quad \mathrm{in}_M \circ \mathrm{pr}_M^{M\oplus L} + \mathrm{in}_L \circ \mathrm{pr}_L^{M\oplus L} = \mathrm{id}\, V.$$

12.34. Пусть φ – линейный оператор пространства V, относительно которого подпространство инвариантно. Показать, что для его ограничения $\varphi_1 = \varphi|_M$ на подпространство M и дополнения φ_2 к этому ограничению (в обозначениях задачи 12.33) имеют место равенства:

$$\varphi_1 = \mathrm{pr}_M^{M\oplus L} \circ \varphi \circ \mathrm{in}_M, \quad \varphi_2 = \mathrm{pr}_L^{M\oplus L} \circ \varphi \circ \mathrm{in}_L.$$

12.35. Пусть φ – линейный оператор векторного пространства V над полем P и $g(\lambda)$ – произвольный многочлен над полем P. Показать, что подпространства $\mathrm{Im}\, g(\varphi)$ и $\ker g(\varphi)$ пространства V инвариантны относительно φ.

12.36. Найти все подпространства пространства $\mathbb{C}_{3,1}$, инвариантные относительно линейного оператора, заданного матрицей A:

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \end{bmatrix}; \qquad 2)\ A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$3)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad 4)\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

12.37. Каждая матрица A из задачи 12.31 определяет некоторый линейный оператор φ соответствующего арифметического векторного пространства $\mathbb{R}_{n,1}$, $n = 3, 4$, по правилу $\varphi : X \mapsto AX$, $\forall X \in \mathbb{R}_{n,1}$. Найти все инвариантные относительно φ подпространства и все включения между ними.

12.38. Найти все нетривиальные подпространства пространства $\mathbb{R}_{4,1}$, которые инвариантны относительно линейного оператора φ, заданного в каноническом базисе матрицей A:

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}; \qquad 2)\ A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

12.39. Найти все такие прямые Δ и плоскости Π, что подпространства $V_1(\Delta)$ и $V_2(\Pi)$ инвариантны относительно линейного оператора $\varphi : \boldsymbol{x} \mapsto [[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}], \boldsymbol{b}]$ векторного пространства V_3, где $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

Глава 13

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

Квадратная матрица порядка n, элементами которой являются многочлены от одной переменной λ с коэффициентами из некоторого числового поля P, называется *λ-матрицей* или *полиномиальной матрицей*.

Элементарными преобразованиями строк λ-матрицы $A(\lambda)$ называются следующие две операции:

1) умножение строки матрицы $A(\lambda)$ на любое отличное от нуля число из поля P;

2) прибавление к одной строке матрицы другой ее строки, умноженной на произвольный многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$.

Аналогично определяются *элементарные преобразования столбцов*.

Элементарными преобразованиями можно поменять местами любые две строки (столбца) матрицы $A(\lambda)$. Если от матрицы $A(\lambda)$ можно перейти к матрице $B(\lambda)$ с помощью конечного числа элементарных преобразований, то матрицы $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ считаются *эквивалентными*. Это записывается следующим образом: $A(\lambda) \sim B(\lambda)$.

Диагональная λ-матрица $K(\lambda) = \mathrm{diag}(f_1(\lambda), ..., f_n(\lambda))$ называется *канонической*, если старший коэффициент каждого ненулевого многочлена из системы $(f_1(\lambda), ..., f_n(\lambda))$ равен единице и $f_{i-1} \mid f_i(\lambda)$, $\forall i$, $2 \leqslant i \leqslant n$. Многочлены $f_1(\lambda), ..., f_n(\lambda)$ называются *инвариантными множителями матрицы* $K(\lambda)$.

Всякая λ-матрица $A(\lambda)$ эквивалентна единственной канонической λ-матрице $K(\lambda)$ (канонической форме матрицы $A(\lambda)$). *Система инвариантных множителей λ-матрицы* $A(\lambda)$ – это система инвариантных множителей ее канонической формы.

Две λ-матрицы одного порядка над кольцом $P[\lambda]$ эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают их системы инвариантных множителей.

Миноры матрицы $A(\lambda)$ являются многочленами из кольца $P[\lambda]$. Наибольший порядок отличных от нуля миноров называется *рангом матрицы* $A(\lambda)$ ($\mathrm{rank}\, A(\lambda)$). Пусть $d_m(\lambda)$ – наибольший общий делитель всех миноров порядка m матрицы $A(\lambda)$. Система многочленов $(d_1(\lambda), ..., d_n(\lambda))$, называемая *системой наибольших общих делителей миноров матрицы* $A(\lambda)$, не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы. Инвариантные множители и наибольшие общие делители миноров матрицы связаны соотношениями:

$$
\begin{gathered}
f_1(\lambda)=d_1(\lambda),\\
f_2(\lambda)=\frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
f_r(\lambda)=\frac{d_r(\lambda)}{d_{r-1}(\lambda)},\\
f_{r+1}(\lambda)=f_{r+2}(\lambda)=\ldots=f_n(\lambda)=0,
\end{gathered}
\tag{13.1}
$$

где $r=\operatorname{rank}A(\lambda)$.

Таким образом, система инвариантных множителей λ-матрицы может быть получена с помощью либо элементарных преобразований, либо системы НОД ее миноров, поэтому для эквивалентности двух λ-матриц одного порядка необходимо и достаточно, чтобы совпадали их системы НОД миноров.

Пусть $f(\lambda)$ – многочлен ненулевой степени над полем P. Представим его в виде произведения старшего коэффициента и степеней попарно различных неприводимых над полем P многочленов, старшие коэффициенты которых равны единице:

$$f(\lambda)=a\cdot\varphi_1^{k_1}(\lambda)\cdot\varphi_2^{k_2}(\lambda)\cdots\varphi_s^{k_s}(\lambda).$$

Многочлены $\varphi_i^{k_i}(\lambda)$, $i=\overline{1,s}$, называются *элементарными делителями многочлена* $f(\lambda)$. В случае $P=\mathbb{C}$ многочлены $\varphi_i(\lambda)$ линейны, а при $P=\mathbb{R}$ либо линейны, либо являются квадратными трехчленами, не имеющими действительных корней.

Системой элементарных делителей λ-матрицы называется объединение систем элементарных делителей всех ее непостоянных инвариантных множителей, причем каждый элементарный делитель учитывается столько раз, во сколько инвариантных множителей он входит.

Две λ-матрицы одного и того же порядка эквивалентны тогда и только тогда, когда равны их ранги и равны с точностью до перестановки элементов их системы элементарных делителей. Отметим, что система элементарных делителей диагональной λ-матрицы есть объединение систем элементарных делителей ее диагональных элементов.

λ-Матрица называется *унимодулярной*, если ее определитель – отличный от нуля элемент поля P. Две λ-матрицы $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ n-го порядка эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют такие унимодулярные матрицы $U(\lambda)$ и $V(\lambda)$ n-го порядка над кольцом $P[\lambda]$, что $B(\lambda)=U(\lambda)A(\lambda)V(\lambda)$.

Две матрицы над полем P одного и того же порядка подобны тогда и только тогда, когда их характеристические матрицы эквивалентны (*критерий подобия матриц*).

Ненулевой многочлен $f(\lambda)$ над полем P называется *аннулирующим многочленом матрицы* A, если $f(A)=0$. В частности, одним из аннулирующих многочленов матрицы является ее характеристический многочлен (теорема Гамильтона – Кели). Многочлен наименьшей степени среди ненулевых аннулирующих многочленов матрицы A со старшим коэффициентом 1 называется *минимальным многочленом матрицы* A. Любой аннулирующий многочлен матрицы делится на ее минимальный многочлен. Минимальный многочлен матрицы равен последнему инвариантному множителю ее характеристической матрицы.

Квадратная матрица m-го порядка вида

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in P,$$

называется *клеткой Жордана* и обозначается $J_m(\alpha)$. Ее характеристический многочлен имеет лишь один элементарный делитель $(\lambda-\alpha)^m$.

Блочно-диагональная матрица

$$J = \operatorname{diag}(J_{m_1}(\alpha_1), \dots, J_{m_s}(\alpha_s)),$$

у которой все диагональные блоки являются клетками Жордана, называется *жордановой матрицей*.

Всякая квадратная матрица A над полем $\mathbb{C}$ подобна некоторой жордановой матрице J, которая определена с точностью до порядка расположения клеток Жордана на диагонали. Матрица J называется *жордановой нормальной формой матрицы* A. Для построения жордановой нормальной формы J матрицы A над полем $\mathbb{C}$ применяется следующий способ:

1) составляется характеристическая матрица $A-\lambda E_n$;

2) находится система ее элементарных делителей;

3) каждому элементарному делителю $(\lambda-\alpha_i)^{m_i}$ матрицы $A-\lambda E_n$ ставится в соответствие клетка Жордана $J_{m_i}(\alpha_i)$ и полагается $J = \operatorname{diag}(J_{m_1}(\alpha_1), \dots, J_{m_s}(\alpha_s))$.

Общее число клеток Жордана в жордановой нормальной форме матрицы равно

$$s = \sum_{i=1}^{t} \dim L_{\lambda_i}, \qquad (13.2)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_t$ – попарно различные характеристические числа матрицы A; L_{λ_i} – подпространство собственных векторов, соответствующих характеристическому числу λ_i.

Количество $k_m(\lambda_i)$ клеток Жордана $J_m(\lambda_i)$ порядка m можно вычислить по формуле

$$k_m(\lambda_i) = \operatorname{rank}(A - \lambda_i E_n)^{m+1} - 2\operatorname{rank}(A - \lambda_i E_n)^m + \operatorname{rank}(A - \lambda_i E_n)^{m-1}. \quad (13.3)$$

При построении нормальной жордановой формы и трансформирующей матрицы в случае $n \leqslant 3$ можно не использовать формулу (13.3), достаточно воспользоваться лишь формулой (13.2). Для этого:

1) составляется характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E_n) = 0$ матрицы A;

2) вычисляются характеристические числа и их кратности;

3) находятся размерности подпространств L_{λ_i} и с использованием формулы (13.2) строится жорданова нормальная форма матрицы A;

4) находится жорданов базис для оператора φ, заданного матрицей A;

5) из координатных столбцов векторов жорданова базиса строится трансформирующая матрица.

Пример 1. Элементарными преобразованиями привести матрицу

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 & \lambda + 1 \\ \lambda + 1 & \lambda^2 + 2\lambda + 1 \end{bmatrix}$$

к канонической форме.

Решение. Прибавив ко второй строке матрицы $A(\lambda)$ ее первую строку, умноженную на $-(\lambda+1)$, получим:

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 & \lambda + 1 \\ (\lambda+1)(2-\lambda^2) & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее, прибавив к первому столбцу полученной матрицы ее второй столбец, умноженный на $-(\lambda-1)$, и поменяв местами столбцы, получим в результате каноническую матрицу

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} 0 & \lambda + 1 \\ (\lambda+1)(2-\lambda^2) & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 0 & (\lambda+1)(\lambda^2-2) \end{bmatrix}.$$

Пример 2. С помощью НОД миноров найти каноническую форму матрицы

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} (\lambda+1)^2 & \lambda + 3 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda+1) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Решение. Сначала находим НОД миноров первого порядка: $(\lambda+1)^2$, $\lambda+3$, $\lambda(\lambda+1)$, λ. Очевидно, что $d_1(\lambda) = 1$. Далее вычисляем НОД миноров второго порядка: $\lambda(\lambda+1)^3, \lambda(\lambda+1)^2, \lambda(\lambda+3), \lambda^2(\lambda+1)$. Получаем $d_2(\lambda)=\lambda$. И, наконец, $d_3(\lambda)=$ $=\det A(\lambda)=\lambda^2(\lambda+1)^3$.

Теперь, пользуясь формулами (13.1), находим инвариантные множители матрицы $A(\lambda)$:

$$f_1(\lambda)=d_1(\lambda)=1, \quad f_2(\lambda)=\frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)}=\lambda, \quad f_3(\lambda)=\frac{d_3(\lambda)}{d_2(\lambda)}=\lambda(\lambda+1)^3.$$

Таким образом, $A(\lambda)\sim\operatorname{diag}(1, \lambda, \lambda(\lambda+1)^3)$.

Пример 3. Найти каноническую форму λ-матрицы

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda^2+1 & \lambda^3+\lambda^2+12\lambda+4 & 2\lambda^2+3\lambda+1 \\ \lambda-1 & \lambda^2+11 & 2\lambda+2 \\ -1 & -\lambda+2 & \lambda+2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Вычислим сначала определитель матрицы $A(\lambda)$: $\det A=(\lambda+3)^3$. Так как определители эквивалентных матриц совпадают с точностью до скалярного множителя, то матрица $A(\lambda)$ может быть эквивалентна лишь одной из следующих канонических матриц: $\operatorname{diag}(\lambda+3, \lambda+3, \lambda+3)$, $\operatorname{diag}(1, \lambda+3, (\lambda+3)^2)$ или $\operatorname{diag}(1, 1, (\lambda+3)^3)$. Поскольку среди элементов матрицы $A(\lambda)$ есть скаляры, то $d_1(\lambda)=1$. Для вычисления $d_2(\lambda)$ рассмотрим все миноры второго порядка матрицы

$$A(-3)=\begin{bmatrix} 10 & -50 & 10 \\ -4 & 20 & -4 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ее строки пропорциональны, а значит, все эти миноры равны нулю. Отсюда $(\lambda+3)\mid d_2(\lambda)$, т.е. $d_2(\lambda)=\lambda+3$. Следовательно, $A(\lambda)\sim\operatorname{diag}(1, \lambda+3, (\lambda+3)^2)$.

Пример 4. Найти систему элементарных делителей матрицы $A(\lambda)=$ $=\operatorname{diag}(\lambda^3-3\lambda+2,\ \lambda^3+2\lambda^2+\lambda+2,\ \lambda^4+\lambda^2-12)$.

Решение. Разложим на элементарные делители диагональные элементы матрицы $A(\lambda)$ над полем $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &\lambda^3-3\lambda+2=(\lambda-1)^2(\lambda+2), \\ &\lambda^3+2\lambda^2+\lambda+2=(\lambda^2+1)(\lambda+2), \\ &\lambda^4+\lambda^2-12=(\lambda-\sqrt{3})(\lambda+\sqrt{3})(\lambda^2+4) \end{aligned}$$

и над полем $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} &\lambda^3-3\lambda+2=(\lambda-1)^2(\lambda+2), \\ &\lambda^3+2\lambda^2+\lambda+2=(\lambda+2)(\lambda+i)(\lambda-i), \\ &\lambda^4+\lambda^2-12=(\lambda-\sqrt{3})(\lambda+\sqrt{3})(\lambda+2i)(\lambda-2i). \end{aligned}$$

Это даст систему элементарных делителей матрицы $A(\lambda)$ над полем $\mathbb{R}$: $((\lambda-1)^2$, $\lambda+2$, λ^2+1, $\lambda+2$, $\lambda-\sqrt{3}$, $\lambda+\sqrt{3}, \lambda^2+4)$ и над полем $\mathbb{C}$: $((\lambda-1)^2$, $\lambda+2$, $\lambda+i$, $\lambda-i$, $\lambda+2$, $\lambda-\sqrt{3}$, $\lambda+\sqrt{3}$, $\lambda+2i$, $\lambda-2i)$.

Пример 5. Найти каноническую форму матрицы $A(\lambda)$ ранга 4 порядка 5, имеющую следующую систему элементарных делителей: $(\lambda-1,\ \lambda-1,\ (\lambda+1)^2,$ $\lambda-2,\ (\lambda-2)^3)$.

Решение. Поскольку ранг матрицы $A(\lambda)$ на единицу меньше порядка, то $f_5(\lambda)=0$. Так как $f_i(\lambda)\,|\,f_{i+1}(\lambda),\ i=\overline{1,r-1}$, то $f_4(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)^2(\lambda-2)^3$. Аналогично $f_3(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2),\ f_2(\lambda)=\lambda-1,\ f_1(\lambda)=1$. Следовательно,

$$K(\lambda)=\operatorname{diag}(1,\ 1,\ (\lambda-1)(\lambda-2),\ (\lambda-1)(\lambda+1)^2(\lambda-2)^3,\ 0).$$

Пример 6. Найти унимодулярные матрицы $U(\lambda)$ и $V(\lambda)$ такие, что $B(\lambda)=$ $=U(\lambda)A(\lambda)V(\lambda)$, где

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^3-\lambda^2 & \lambda^3-\lambda^2+\lambda-1\\ 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda & 2\lambda^3-\lambda^2+\lambda-2\end{bmatrix};$$

$$B(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^2-\lambda & 2\lambda^2-\lambda-1\\ \lambda^3-\lambda & 2\lambda^3+\lambda^2-3\lambda\end{bmatrix}.$$

Решение. Приведем матрицу $A(\lambda)$ к канонической форме с помощью элементарных преобразований:

$$A(\lambda)\sim\begin{bmatrix}\lambda^3-\lambda^2 & \lambda-1\\ 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda & 2\lambda-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}\lambda^3-\lambda^2 & \lambda-1\\ \lambda^2-\lambda & 0\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}0 & \lambda-1\\ \lambda^2-\lambda & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}\lambda-1 & 0\\ 0 & \lambda(\lambda-1)\end{bmatrix}=K(\lambda).$$

Сначала мы прибавили ко второму столбцу первый, умноженный на -1. Применение этого элементарного преобразования равносильно умножению матрицы $A(\lambda)$ справа на элементарную матрицу $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. Заменяя аналогичным образом каждое элементарное преобразование умножением на соответствующую элементарную матрицу, получаем:

$$K(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}A(\lambda)\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\lambda^2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Таким образом, $K(\lambda)=U_1(\lambda)A(\lambda)V_1(\lambda)$, где $U_1(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}, V_1(\lambda)=\begin{bmatrix}-1 & 1+\lambda^2\\ 1 & -\lambda^2\end{bmatrix}$.

Аналогично поступаем с матрицей $B(\lambda)$:

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\lambda & 1\end{bmatrix}B(\lambda)\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda-1 & 0\\ 0 & \lambda(\lambda-1)\end{bmatrix}.$$

Следовательно, $K(\lambda)=U_2(\lambda)B(\lambda)V_2(\lambda)$, где

$$U_2(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda+1 & -1\\ -\lambda & 1\end{bmatrix};\quad V_2(\lambda)=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Тогда $U_1(\lambda)A(\lambda)V_1(\lambda)=U_2(\lambda)B(\lambda)V_2(\lambda)$, и поэтому

$$B(\lambda)=U_2^{-1}(\lambda)U_1(\lambda)A(\lambda)V_1(\lambda)\,V_2^{-1}(\lambda),$$

что позволяет найти искомые матрицы:

$$U(\lambda)=U_2^{-1}(\lambda)U_1(\lambda)=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -\lambda-2 & \lambda+1\end{bmatrix},$$

$$V(\lambda)=V_1(\lambda)V_2^{-1}(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^2+1 & 2\lambda^2+1\\ -\lambda^2 & -2\lambda^2+1\end{bmatrix}.$$

Пример 7. Выяснить, подобны ли между собой матрицы

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ -1 & -1 & 3\\ -1 & -3 & 5\end{bmatrix}.$$

В случае положительного ответа найти трансформирующую матрицу.

Решение. Приведем характеристическую матрицу $A-\lambda E_3$ к канонической форме с помощью элементарных преобразований: $A-\lambda E_3\sim K(\lambda)=$ $=\operatorname{diag}(1,\lambda-2,(\lambda-2)(\lambda-1))$. Заменив, как и в примере 6, каждое элементарное преобразование умножением на соответствующую элементарную матрицу, получим:

$$K(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -\lambda+1 & 0 & 1\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}(A-\lambda E_3)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -\lambda-1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

или $K(\lambda)=U_1(\lambda)(A-\lambda E_3)V_1(\lambda)$, где

$$U_1(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -\lambda+4 & -3 & 1\end{bmatrix};\quad V_1(\lambda)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 3 & -\lambda+2\end{bmatrix}.$$

Проведя аналогичные вычисления для характеристической матрицы $B-\lambda E_3$, получим:

$$U_2(\lambda)(B-\lambda E_3)V_2(\lambda)=\operatorname{diag}(1,\ (\lambda-2),\ (\lambda-2)(\lambda-1)),$$

где

$$U_2(\lambda)=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -\lambda-2\end{bmatrix};\ V_2(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & -\lambda-1 & -\lambda+2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Так как $A-\lambda E_3 \sim B-\lambda E_3$, то матрицы A и B подобны. Займемся нахождением трансформирующей матрицы S. Поскольку $U_1(\lambda)(A-\lambda E_3)V_1(\lambda)=$ $=U_2(\lambda)(B-\lambda E_3)V_2(\lambda)$, то $B-\lambda E_3=U_2^{-1}(\lambda)U_1(\lambda)(A-\lambda E_3)V_1(\lambda)V_2^{-1}(\lambda)$. Положим:

$$U(\lambda)=U_2^{-1}(\lambda)U_1(\lambda)=\begin{bmatrix}-\lambda+7 & \lambda-5 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix},$$

$$V(\lambda)=V_1(\lambda)V_2^{-1}(\lambda)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -\lambda+2 & -\lambda+2\end{bmatrix}.$$

Тогда $B-\lambda E_3=U(\lambda)(A-\lambda E_3)V(\lambda)$. Для нахождения трансформирующей матрицы S воспользуемся тем, что $S=V(B)$. Для этого представим $V(\lambda)$ в виде матричного многочлена:

$$V(\lambda)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}\lambda+\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}.$$

Итак,

$$S=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}B+\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 6 & -6\end{bmatrix}.$$

Пример 8. Найти жорданову нормальную форму матрицы

$$A=\begin{bmatrix}0 & -2 & 3 & 2\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Найдем систему элементарных делителей матрицы:

$$A-\lambda E_4=\begin{bmatrix}-\lambda & -2 & 3 & 2\\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1\\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1-\lambda\end{bmatrix}.$$

Сначала с помощью элементарных преобразований приведем ее к виду

$$A-\lambda E_4\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & \lambda^2\\ 0 & \lambda-2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2 & 0\end{bmatrix}.$$

Далее вычислим систему НОД ее миноров: $(1,\ 1,\ 1,\ \lambda^2(\lambda-2)^2)$. Затем, использовав формулы (13.1), найдем систему инвариантных множителей: $(1,\ 1,\ 1,\ \lambda^2(\lambda-2)^2)$, что даст систему ее элементарных делителей $(\lambda^2, (\lambda-2)^2)$. Элементарному делителю λ^2 соответствует клетка Жордана $J_2(0)$, а элементарному делителю $(\lambda-2)^2$ – клетка Жордана $J_2(2)$. Таким образом,

$$J=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что попутно найден минимальный многочлен матрицы A, поскольку он равен ее последнему инвариантному множителю $\lambda^2(\lambda-2)^2$.

Пример 9. Для матрицы

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

построить жорданову нормальную форму J и трансформирующую матрицу S.

Решение. Характеристическое уравнение матрицы A имеет вид $(\lambda+1)^3=0$, а следовательно, имеет единственный корень $\lambda_1=-1$ кратности $k_1=3$. Пространство L_{λ_1} собственных векторов оператора φ, заданного матрицей A, состоит из всех решений однородной системы линейных уравнений с матрицей $A+E$. Так как $\operatorname{rank}(A+E)=2$, то $\dim L_{\lambda_1}=1$, а столбец $X_1=[1\ -1\ -1]^{\mathrm{T}}$ является базисным в пространстве L_{λ_1}. Согласно формуле (13.2) жорданова нормальная форма матрицы A состоит лишь из одной клетки Жордана, поэтому

$$J=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Вычислим далее жорданов базис для оператора φ. Координатный столбец X_2 присоединенного вектора находится из системы уравнений $(A+E)X_2 = X_1$, решением которой является, в частности, $X_2=[-1\ -1\ 0]^{\mathrm{T}}$. Координатный столбец X_3 найдем из условия $(A+E)X_3=X_2$. Решив это уравнение, получим $X_3=[1\ 2\ 0]^{\mathrm{T}}$.

Теперь составим трансформирующую матрицу

$$S=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

столбцами которой служат координатные столбцы X_1, X_2, X_3.

13.1. Путем элементарных преобразований привести λ-матрицы к каноническому виду:

1) $\begin{bmatrix} \lambda+1 & 2 \\ 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} \lambda^2-4 & \lambda+2 \\ \lambda+2 & \lambda^2+4\lambda+4 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda^2-\lambda \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix}$; 5) $\begin{bmatrix} \lambda-2 & \lambda^2-4 & \lambda \\ 5\lambda-6 & 5\lambda^2-12 & \lambda^2+4\lambda \\ \lambda+2 & \lambda^2+4 & \lambda^2 \end{bmatrix}$;

6) $\begin{bmatrix} \lambda^2+2\lambda+1 & \lambda^2+\lambda & 3\lambda^2+6\lambda+3 \\ \lambda^2+\lambda & 3\lambda^2+5\lambda+2 & \lambda^3+\lambda^2+\lambda+1 \\ \lambda^2+3\lambda+2 & \lambda^2+3\lambda+2 & 3\lambda^2+9\lambda+6 \end{bmatrix}$;

7) $\begin{bmatrix} \lambda+3 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+3 \end{bmatrix}$; 8) $\begin{bmatrix} \lambda^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$;

9) $\begin{bmatrix} \lambda^2 & -\lambda & \lambda-1 \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ \lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2-1 \end{bmatrix}$.

13.2. С помощью наибольших общих делителей миноров привести λ-матрицы к каноническому виду:

1) $\begin{bmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda(\lambda-2) \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ \lambda^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & \lambda-2 \\ 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$;

5) $\begin{bmatrix} 0 & f(\lambda) \\ g(\lambda) & 0 \end{bmatrix}$, где $f(x)$, $g(x)$ – многочлены от λ;

6) $\begin{bmatrix} fg & 0 & 0 \\ 0 & f\varphi & 0 \\ 0 & 0 & g\varphi \end{bmatrix}$, где f, g, φ – многочлены от λ попарно взаимно простые, со старшими коэффициентами, равными 1.

13.3. Найти инвариантные множители λ-матриц:

1) $\begin{bmatrix} \lambda^3-\lambda^2 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ 2\lambda^3-\lambda-1 & 2\lambda^2-2\lambda \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 3\lambda^2+\lambda & 0 & 3\lambda^2 \\ 2\lambda^2+\lambda & \lambda & 2\lambda^2 \\ 2\lambda^2+2\lambda & 0 & 2\lambda^2 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 3\lambda^2+8\lambda+2 & 2\lambda+1 & \lambda^2+4\lambda \\ 4\lambda^2+11\lambda+2 & 3\lambda+1 & \lambda^2+5\lambda \\ \lambda^2+3\lambda-2 & \lambda-1 & \lambda \end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix} \lambda^2-4\lambda+6 & 2\lambda-3 & \lambda^2-4\lambda+5 \\ \lambda^2 & 2\lambda-1 & \lambda^2-1 \\ \lambda^2-8\lambda+15 & 2\lambda-5 & \lambda^2-8\lambda+14 \end{bmatrix}$.

13.4. Найти каноническую форму λ-матрицы, если известны ее непостоянные инвариантные множители, ранг r и порядок n:

1) $(\lambda^2+4)(\lambda^2+4\lambda+4),\ (\lambda^4-16)(\lambda^2+1)(\lambda+2)^2,\ r=4,\ n=5$;

2) $(\lambda^2+\lambda)(\lambda^2-9),\ \lambda-3,\ \lambda(\lambda+1)^2(\lambda^2-9),\ r=3,\ n=4$;

3) $\lambda,\ \lambda^2+2\lambda,\ \lambda^2(\lambda^2-4),\ r=n=5$.

13.5. Найти каноническую форму матрицы $A(\lambda)$, если известны ее элементарные делители, ранг r и порядок n:

1) $\lambda-3,\ (\lambda-3)^2,\ (\lambda-3)^3,\ \lambda+2,\ (\lambda+2)^3,\ r=n=4$;

2) $\lambda,\ \lambda^2,\ \lambda^3,\ \lambda+3,\ (\lambda+3)^3,\ r=4,\ n=5$;

3) $\lambda+1,\ (\lambda+1)^2,\ \lambda-5,\ (\lambda-5)^3,\ r=3,\ n=4$.

13.6. Найти элементарные делители λ-матриц:

1) $\begin{bmatrix} \lambda^3+\lambda^2+\lambda & \lambda^2 \\ 2\lambda^3+4\lambda^2+\lambda & 2\lambda^2+2\lambda \end{bmatrix}$;

2) $\begin{bmatrix} 3\lambda^3-9\lambda^2+7\lambda & 2\lambda^2-3\lambda & 3\lambda^3-7\lambda^2+3\lambda \\ 2\lambda^3-6\lambda^2+4\lambda & \lambda^2-2\lambda & 2\lambda^3-5\lambda^2+2\lambda \\ 5\lambda^3-15\lambda^2+11\lambda & 3\lambda^2-5\lambda & 5\lambda^3-12\lambda^2+5\lambda \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$.

13.7. Найти элементарные делители λ-матриц над полями $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$:

$$1)\begin{bmatrix} 2\lambda-2 & \lambda+1 & 2\lambda-3 \\ \lambda-2 & 1 & \lambda-2 \\ \lambda^4-2\lambda^2+2\lambda-5 & \lambda+1 & \lambda^4-2\lambda^2+2\lambda-6 \end{bmatrix};$$

$$2)\begin{bmatrix} \lambda^3+\lambda+1 & 3\lambda^2+\lambda+1 & \lambda^2+2 \\ \lambda^3+3\lambda+1 & 3\lambda^2-\lambda+1 & \lambda^2+2\lambda+2 \\ \lambda^3-\lambda+1 & 3\lambda^2+1 & \lambda^2-2\lambda+2 \end{bmatrix};$$

$$3)\begin{bmatrix} \lambda^2+2 & \lambda^2+1 & \lambda^2+1 \\ 3 & \lambda^2+1 & 3 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2+1 \end{bmatrix}.$$

13.8. Доказать, что система элементарных делителей блочно-диагональной λ-матрицы есть объединение систем элементарных делителей ее диагональных блоков.

13.9. Доказать, что матрица $A(\lambda)$ унимодулярна тогда и только тогда, когда ее последний инвариантный множитель равен 1.

13.10. Доказать, что λ-матрица $A(\lambda)$ над полем рациональных функций имеет обратную λ-матрицу тогда и только тогда, когда $A(\lambda)$ является унимодулярной.

13.11. Найти унимодулярные λ-матрицы $U(\lambda)$ и $V(\lambda)$ такие, что $K(\lambda)=U(\lambda)A(\lambda)V(\lambda)$, где $K(\lambda)$ – каноническая форма матрицы

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda+4 & \lambda^2+2\lambda+4 \\ \lambda^2+2 & \lambda^2+\lambda+2 \end{bmatrix}.$$

13.12. Выяснить, эквивалентны ли между собой матрицы:

$$1)\ A(\lambda)=\begin{bmatrix} 3\lambda+4 & \lambda+1 & 4\lambda+3 \\ -\lambda^2-2\lambda & \lambda & -\lambda^2-\lambda \\ \lambda^2+3\lambda+4 & \lambda+1 & \lambda^2+4\lambda+3 \end{bmatrix},$$

$$B(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda+2 & \lambda-1 & \lambda^2+1 \\ 2\lambda+2 & 2\lambda-1 & \lambda^2+1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$2)\ A(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & 2\lambda-1 & \lambda+2\\ 1 & 3\lambda-1 & \lambda+2\\ 2 & 5\lambda-2 & \lambda^2+3\lambda+4\end{bmatrix},\quad B(\lambda)=\begin{bmatrix}-\lambda+1 & \lambda^2 & \lambda\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ \lambda+1 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix};$$

$$3)\ A(\lambda)=\begin{bmatrix}3\lambda-\lambda^2 & 2\lambda^2+\lambda & \lambda^2\\ 2\lambda-\lambda^2 & 2\lambda^2+\lambda & \lambda^2\\ -\lambda^2 & 2\lambda^2 & \lambda^2\end{bmatrix},\quad B(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^2+1 & 3\lambda^2 & \lambda^2\\ \lambda^2 & 3\lambda^2 & \lambda^2\\ -\lambda^2 & 2\lambda^2 & \lambda^2\end{bmatrix},$$

$$C(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & \lambda-1 & 2\lambda+3\\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2+\lambda-1 & 2\lambda+3\\ \lambda^2+2\lambda & \lambda^2+2\lambda-2 & \lambda^2+4\lambda+6\end{bmatrix}.$$

13.13. Для данных матриц $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ найти унимодулярные λ-матрицы $U(\lambda)$ и $V(\lambda)$ такие, что $B(\lambda)=U(\lambda)A(\lambda)V(\lambda)$:

$$1)\ A(\lambda)=\begin{bmatrix}2\lambda^2+3\lambda+2 & 3\lambda^2+4\lambda+2\\ 2\lambda^2+5\lambda+2 & 3\lambda^2+7\lambda+2\end{bmatrix},$$

$$B(\lambda)=\begin{bmatrix}3\lambda^3+9\lambda^2+16\lambda+12 & 3\lambda^3+9\lambda^2+13\lambda+6\\ 2\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+8 & 2\lambda^3+6\lambda^2+9\lambda+4\end{bmatrix};$$

$$2)\ A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^2-\lambda-1 & \lambda & \lambda^2-2\lambda-1\\ \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1 & \lambda^2 & \lambda^3-2\lambda^2-\lambda+1\\ \lambda^3-2\lambda^2+2 & \lambda^2-\lambda & \lambda^3-3\lambda^2+\lambda+2\end{bmatrix},$$

$$B(\lambda)=\begin{bmatrix}4\lambda-1 & 2\lambda & 2\lambda^2-6\lambda+1\\ 10\lambda-8 & 5\lambda & 5\lambda^2-15\lambda+8\\ 4\lambda^2-15\lambda+3 & 2\lambda^2-7\lambda & 2\lambda^3-13\lambda^2+22\lambda-3\end{bmatrix}.$$

13.14. Доказать, что если хотя бы одна из матриц A, B невырожденная, то матрицы AB и BA подобны.

13.15. Доказать, что подобные матрицы имеют одинаковый ранг.

13.16. Доказать, что определители подобных матриц совпадают.

13.17. Доказать, что характеристические числа подобных матриц совпадают.

13.18. Доказать, что если матрицы A и B подобны, то матрицы A^2 и B^2 также подобны.

13.19. Доказать, что матрицы A и A^{T} подобны.

13.20. Найти все матрицы, каждая из которых подобна лишь самой себе.

13.21. Выяснить, подобны ли между собой следующие матрицы:

1) $A=\begin{bmatrix} 10 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$;

2) $A=\begin{bmatrix} 1 & 6 & -15 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$;

3) $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -2 & -4 & 13 \\ -1 & -4 & 10 \end{bmatrix}$;

4) $A=\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

5) $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

13.22. Доказать, что произведение всех характеристических чисел матрицы равно ее определителю (каждый множитель повторяется такое число раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена).

13.23. Написать жорданову нормальную форму матрицы A, если даны инвариантные множители $f_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, ее характеристической матрицы:

1) $f_1(\lambda)=f_2(\lambda)=f_3(\lambda)=f_4(\lambda)=1$, $f_5(\lambda)=\lambda^2-9$, $f_6(\lambda)=(\lambda^2-9)^2$;

2) $f_1(\lambda)=f_2(\lambda)=f_3(\lambda)=1$, $f_4(\lambda)=\lambda+2$, $f_5(\lambda)=(\lambda^2-4)^2$;

3) $f_1(\lambda)=f_2(\lambda)=f_3(\lambda)=1$, $f_4(\lambda)=f_5(\lambda)=\lambda+1$, $f_6(\lambda)=(\lambda+1)^3(\lambda-5)$;

4) $f_1(\lambda)=f_2(\lambda)=1$, $f_3(\lambda)=\lambda-1$, $f_4(\lambda)=\lambda^2-1$.

13.24. Найти жорданову нормальную форму матриц:

1) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$;   2) $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 8 \\ 6 & -7 & 5 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$;

5) $\begin{bmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$; 6) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

7) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 3 \\ -2 & -8 & 0 & 17 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$; 8) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

13.25. Вычислить инвариантные множители клетки Жордана вида

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

13.26. Доказать, что матрица A над полем P подобна диагональной матрице тогда и только тогда, когда минимальный многочлен матрицы A не имеет кратных корней и все его корни принадлежат полю P.

13.27. Доказать, что матрица A нильпотентна тогда и только тогда, когда все ее характеристические числа равны нулю.

13.28. Доказать, что нильпотентная матрица, отличная от нулевой, не может быть подобна диагональной.

13.29. Найти жорданову форму инволютивной матрицы A.

13.30. Доказать, что характеристический многочлен матрицы делится на минимальный многочлен этой матрицы.

13.31. Найти минимальный многочлен клетки Жордана $J_m(\alpha)$.

13.32. Доказать, что минимальный многочлен блочно-диагональной матрицы равен наименьшему общему кратному минимальных многочленов ее диагональных клеток.

13.33. Найти минимальные многочлены следующих матриц:

1) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -7 & -2 & 9 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -2 & -4 & 13 \\ -1 & -4 & 10 \end{bmatrix}$.

13.34. Найти квадрат жордановой клетки $J_m(\alpha)$.

13.35. Найти жорданову форму квадрата жордановой клетки $J_m(\alpha)$ при $\alpha = 0$.

13.36. Найти жорданову форму матрицы A^{-1}, если известна жорданова форма матрицы A.

13.37. Найти жорданову форму матрицы A^2, если известна жорданова форма матрицы A.

13.38. Доказать, что характеристический многочлен матрицы A делит некоторую степень минимального многочлена этой матрицы.

13.39. Доказать, что минимальные многочлены матриц A и A^{T} совпадают.

Глава 14

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Билинейной формой Φ над числовым полем P называется отображение $\Phi: P_{n,1} \times P_{n,1} \to P$, определяемое формулой

$$\Phi(X, Y) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} x_k y_l, \tag{14.1}$$

где столбцы $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ и $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ взяты из пространства $P_{n,1}$, причем $a_{kl} = a_{lk} \in P$, $k, l = \overline{1, n}$.

Матрица $A_\Phi = (a_{kl} \mid k, l = \overline{1, n})$ называется *матрицей билинейной формы* Φ.

Всякая билинейная форма единственным образом определяет свою матрицу, и обратно: всякая симметрическая квадратная матрица с элементами из поля P есть матрица некоторой билинейной формы. Билинейную форму (14.1) можно записать в матричном виде:

$$\Phi(X, Y) = X^{\mathrm{T}} A_\Phi Y.$$

Квадратичной формой f_Φ, ассоциированной с билинейной формой Φ, называется отображение $f_\Phi(X): P_{n,1} \to P$, где

$$f_\Phi(X) = \Phi(X, X), \;\; X \in P_{n,1}.$$

Соответствие $\Phi \to f_\Phi$ взаимно однозначно. Квадратичная форма f_Φ есть многочлен второй степени от n переменных $x_1, \ldots, x_n$, значения которой вычисляются по формуле

$$f_\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} x_k x_l, \;\; \forall x_1, \ldots, x_n \in P.$$

Матрицей квадратичной формы f называется матрица билинейной формы, с которой квадратичная форма f ассоциирована. Она обозначается через A_f.

Система

$$\begin{cases} x_1 = s_{11} y_1 + s_{12} y_2 + \cdots + s_{1n} y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = s_{n1} y_1 + s_{n2} y_2 + \cdots + s_{nn} y_n, \end{cases}$$

где $S=(s_{ij})\in P_{n,n}$ – невырожденная матрица, называется *линейным невырожденным преобразованием переменных*. Говорят, что квадратичная форма f *эквивалентна* квадратичной форме g (обозначение: $f\sim g$), если существует такое линейное невырожденное преобразование переменных $X=SY$, которое переводит форму f в форму g, т.е. $g(Y)=f(SY)$.

Множество всех квадратичных форм от n переменных над полем P разбивается на классы эквивалентных друг другу квадратичных форм.

Рангом квадратичной формы f называется ранг ее матрицы.

Квадратичная форма называется *канонической*, если она не содержит произведений различных переменных, т.е. ее матрица диагональная. Всякая квадратичная форма эквивалентна некоторой канонической квадратичной форме, называемой ее *каноническим видом*.

Комплексная квадратичная форма называется *нормальной*, если она либо нулевая, либо является суммой квадратов некоторого числа первых переменных, т.е. имеет вид $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_r^2$, $1\leqslant r\leqslant n$, где r – ранг квадратичной формы. Для любой комплексной квадратичной формы существует единственная нормальная комплексная квадратичная форма, эквивалентная данной. Комплексные квадратичные формы эквивалентны тогда и только тогда, когда равны их ранги.

Действительная каноническая квадратичная форма f называется *нормальной*, если ее коэффициентами могут быть лишь 1, -1, 0, причем -1 не может предшествовать 1, а 0 не может предшествовать ±1. Разность между числом положительных и отрицательных коэффициентов называется *сигнатурой квадратичной формы* f. Для любой действительной квадратичной формы существует единственная эквивалентная ей действительная нормальная квадратичная форма (*закон инерции действительных квадратичных форм*).

Действительная квадратичная форма f называется *положительно определенной*, если $f(X)>0$ для всякого ненулевого X из $P_{n,1}$. Действительная квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда положительны все главные угловые миноры ее матрицы (*критерий Сильвестра*).

Пример 1. Привести квадратичную форму $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+7x_2^2+4x_3^2-$ $-8x_1x_2+4x_1x_3-6x_2x_3$ к каноническому виду и найти соответствующее преобразование переменных.

Р е ш е н и е. Выделим у формы $f(x_1,x_2,x_3)$ полный квадрат, содержащий все слагаемые с переменной x_1:

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1^2-2x_1(2x_2)+2x_1x_3)+$$
$$+7x_2^2+4x_3^2-6x_2x_3=2(x_1-2x_2+x_3)^2-8x_2^2-2x_3^2+8x_2x_3+7x_2^2+$$
$$+4x_3^2-6x_2x_3=2(x_1-2x_2+x_3)^2-x_2^2+2x_3^2+2x_2x_3.$$

Далее у квадратичной формы $-x_2^2+2x_3^2+2x_2x_3$ выделим полный квадрат, содержащий все слагаемые с переменной x_2:

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1-2x_2+x_3)^2-(x_2^2-2x_2x_3)+2x_3^2=2(x_1-2x_2+x_3)^2-(x_2-x_3)^2+$$
$$+x_3^2+2x_3^2=2(x_1-2x_2+x_3)^2-(x_2-x_3)^2+3x_3^2.$$

Применим преобразование переменных:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3, \\ y_2 = x_2 - x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$$

которое является невырожденным и переводит каноническую форму $2y_1^2-y_2^2+$ $+3y_3^2$ в исходную.

Пример 2. Доказать, что формы $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+2x_1x_3$ и $g(u_1,u_2,u_3)=u_1^2-$ $-3u_3^2-2u_1u_2+2u_1u_3-6u_2u_3$ эквивалентны, и найти невырожденное линейное преобразование переменных, переводящее форму f в форму g.

Р е ш е н и е. Так как у формы f отсутствуют квадраты переменных, сначала применим к ней преобразование $X=S_1Y$ с матрицей

$$S_1=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Тогда $f(x_1,x_2,x_3)\sim y_1^2-y_2^2+2y_1y_3-2y_2y_3=(y_1+y_3)^2-y_3^2-y_2^2-2y_2y_3=(y_1+y_3)^2-$ $-(y_2+y_3)^2$. Полученную форму преобразованием переменных $Z=S_2Y$, где

$$S_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

приведем к нормальному виду $z_1^2-z_2^2$. Тогда результирующее преобразование $X=SZ$ с невырожденной матрицей

$$S=S_1S_2^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

приведет форму $f(x_1,x_2,x_3)$ к нормальному виду $z_1^2-z_2^2$.

Теперь приведем форму $g(u_1,u_2,u_3)$ к нормальному виду:

$$g(u_1,u_2,u_3)=(u_1-u_2+u_3)^2-u_2^2-4u_3^2-4u_2u_3=(u_1-u_2+u_3)^2-(u_2+2u_3)^2.$$

Преобразование $Z=TU$ с матрицей

$$T=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

приведет нормальную форму $z_1^2 - z_2^2$ к форме g. Так как у форм f и g одна и та же нормальная форма, то они эквивалентны. Исходя из преобразований $X = SZ$ и $Z = TU$, находим преобразование переменных

$$\begin{cases} x_1 = u_1 - 2u_2 - u_3, \\ x_2 = u_1 + u_3, \\ x_3 = u_3 \end{cases}$$

с матрицей ST, переводящее форму f в форму g.

Пример 3. Найти, при каких значениях λ квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$ является положительно определенной.

Решение. В соответствии с критерием Сильвестра потребуем, чтобы все главные угловые миноры матрицы формы были положительны:

$$\Delta_1 = 4 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = 3\lambda - 52 > 0.$$

Следовательно, форма f положительно определена лишь при $\lambda > 52/3$.

14.1. Выписать матрицу билинейной формы:

1) $\Phi(X, Y) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 5x_1y_3 - 4x_2y_2 + x_2y_3 + 5x_3y_1 + 3x_2y_1 + x_3y_2$;

2) $\Phi(X, Y) = 5x_1y_2 + 7x_1y_3 - 2x_2y_2 + x_2y_3 + 5x_2y_1 + 7x_3y_1 + x_3y_2 - 5x_3y_3$.

14.2. Найти билинейную форму, если известна ее матрица:

1) $A_\Phi = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$; 2) $A_\Phi = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$.

14.3. Составить квадратичную форму, ассоциированную с данной билинейной формой:

1) $\Phi(X, Y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 4x_1y_3 - 3x_2y_1 + x_2y_3 + 4x_3y_1 + x_3y_2 - 2x_3y_3$;

2) $\Phi(X, Y) = x_1y_1 + 3x_1y_2 - 2x_1y_3 + 3x_2y_1 + 5x_2y_2 - 3x_2y_3 - 2x_3y_1 - 3x_3y_2$.

14.4. Найти билинейную форму, с которой ассоциирована данная квадратичная форма:

1) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;

2) $f(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 - 2x_2^2 + 5x_1x_2 - 6x_1x_3 + 8x_2x_3$.

14.5. Привести следующие квадратичные формы к каноническому виду посредством невырожденного линейного преобразования переменных:

1) $x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 12x_2x_3$;

2) $3x_1^2 - 2x_2^2 - 5x_3^2 - 4x_2x_3$;

3) $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$;

4) $2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-10x_2x_3$;

5) $2x_1^2+3x_2^2+10x_3^2+4x_1x_2-12x_1x_3-14x_2x_3$;

6) $3x_1^2+10x_2^2-x_3^2-12x_1x_2-6x_1x_3+4x_2x_3$;

7) $3x_1^2+2x_3^2-4x_1x_2+6x_1x_3$;

8) $x_1^2+x_1x_2+x_2x_3$.

14.6. Найти нормальный вид над полем действительных чисел следующих квадратичных форм:

1) $x_1^2+3x_2^2+2x_3^2+6x_1x_2-4x_1x_3-18x_2x_3$;

2) $2x_1^2+15x_2^2+4x_3^2-12x_1x_2+4x_1x_3-18x_2x_3$;

3) $4x_1^2+3x_2^2-x_3^2-8x_1x_2+4x_1x_3-x_2x_3$;

4) $4x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$;

5) $3x_1^2+x_2^2+x_3^2-6x_1x_2+3x_1x_3-\dfrac{5}{2}x_2x_3$;

6) $3x_1^2+3x_2^2+12x_3^2-6x_1x_2+12x_1x_3-12x_2x_3$;

7) $5x_1^2-2x_2^2-8x_3^2+12x_2x_3$.

14.7. Найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду, следующих квадратичных форм:

1) $4x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$;

2) $x_1x_2+x_2x_3$;

3) $2x_1^2-x_2^2+3x_3^2-4x_1x_3+2x_2x_3$;

4) $3x_1^2+3x_2^2-x_3^2-6x_1x_3+9x_2x_3$;

5) $3x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$.

14.8. Выяснить, какие из следующих квадратичных форм эквивалентны между собой над полем действительных чисел, не приводя их к каноническому виду:

1) $f_1=3x_1^2+3x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$,

$f_2=7x_1^2+7x_2^2+7x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$,

$f_3=x_1^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$;

2) $f_1=6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$,

$f_2=11x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3-20x_2x_3$,

$f_3=x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

14.9. Для данных квадратичных форм f и g найти невырожденное линейное преобразование, переводящее форму f в форму g:

1) $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 12x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 12x_2x_3$,
$g = 2y_1^2 + 9y_2^2 + 3y_3^2 + 8y_1y_2 - 4y_1y_3 - 10y_2y_3$;

2) $f = 3x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2$,
$g = 3y_1^2 + y_2^2 + \frac{1}{4}y_3^2 + 6y_1y_2 + 3y_1y_3 + 5y_2y_3$;

3) $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3$,
$g = 2y_1^2 + 13y_2^2 + 13y_3^2 + 10y_1y_2 + 10y_1y_3 + 26y_2y_3$.

14.10. Найти число классов эквивалентных действительных квадратичных форм от n переменных ранга r.

14.11. Найти число классов эквивалентных действительных квадратичных форм от n переменных.

14.12. Найти все значения параметра λ, при которых положительно определены следующие квадратичные формы:

1) $x_1^2 + 4x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2x_1x_3$;

2) $2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + \lambda x_1x_3 + 2x_2x_3$;

3) $3x_1^2 - 2x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3$;

4) $15x_1^2 + 12x_2^2 + 12x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2\lambda x_2x_3$;

5) $2x_1^2 + 5x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2\lambda x_2x_3$.

14.13. Пусть $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $g(y_1, y_2, ..., y_n)$ – эквивалентные квадратичные формы над полем P. Доказать, что из разрешимости уравнения $g(y_1, y_2, ..., y_n) = \gamma$, $\gamma \in P$, следует разрешимость уравнения $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \gamma$.

14.14. Пусть $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – невырожденная квадратичная форма над полем P такая, что уравнение $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ имеет ненулевое решение. Доказать, что уравнение $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \gamma$ разрешимо при любом $\gamma \in P$.

14.15. Пусть $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $n \geqslant 2$, – квадратичная форма с невырожденной матрицей над полем P такая, что уравнение $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ имеет ненулевое решение. Доказать, что форма $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ эквивалентна форме вида $y_1y_2 + g(y_3, ..., y_n)$.

Глава 15

ЕВКЛИДОВЫ И УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ И СИММЕТРИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть V – векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ (над полем $\mathbb{C}$). Пространство V называется *евклидовым* (*унитарным*), если каждой паре $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ векторов из V поставлено в соответствие действительное (комплексное) число $\boldsymbol{ab}$, называемое *скалярным произведением векторов* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, причем это соответствие подчиняется следующим условиям (P означает поле $\mathbb{R}$ в случае евклидова и поле $\mathbb{C}$ в случае унитарного пространства):

1) $\boldsymbol{ab} = \overline{\boldsymbol{ba}}$;

2) $(\alpha\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{ab})$;

3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac}+\boldsymbol{bc}$

для любых векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ и любого скаляра $\alpha \in P$;

4) для каждого $\boldsymbol{a} \in V$ произведение $\boldsymbol{aa}$ есть неотрицательное действительное число, положительное, если $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$.

Длина вектора $\boldsymbol{a}$ – это число $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{aa}}$. Отображение $\boldsymbol{a} \mapsto |\boldsymbol{a}|$ подчиняется следующим условиям:

1) $|\boldsymbol{a}| \geqslant 0 \wedge (\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0} \Rightarrow |\boldsymbol{a}| > 0)$;

2) $|\alpha\boldsymbol{a}| = |\alpha||\boldsymbol{a}|$;

3) $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ (*неравенство треугольника*);

4) $|\boldsymbol{ab}| \leqslant |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ (*неравенство Коши – Буняковского*)

для любых $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ и любого $\alpha \in P$.

Если $G = (\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, ..., \boldsymbol{g}_m)$ – система векторов пространства V, то матрица

$$A_G = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2 & \cdots & \boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_m \\ \boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_2 & \cdots & \boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{g}_m\boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_m\boldsymbol{g}_2 & \cdots & \boldsymbol{g}_m\boldsymbol{g}_m \end{bmatrix}$$

называется *матрицей Грама*, а ее определитель – *определителем Грама системы векторов* G. Ранг матрицы Грама ситемы векторов G равен рангу системы G. Если G – базис, то эта матрица называется также *матрицей скалярного произведения в базисе* G. Наличие такой матрицы дает возможность вычислять скалярное произведение векторов, используя их координаты в базисе G:

$$\boldsymbol{ab} = \tau_G(\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}} A_G \overline{\tau_G(\boldsymbol{b})}.$$

Для того чтобы матрица $A \in P_{n,n}$ была матрицей скалярного произведения n-мерного евклидова (унитарного) пространства V в некотором базисе, необходимо и достаточно, чтобы она была эрмитовой и все ее главные угловые миноры были действительны и положительны.

Система G является *ортогональной*, если матрица A_G диагональна, и *ортонормированной*, если матрица A_G единична. Из любой системы векторов можно получить эквивалентную ей ортогональную систему с помощью *процесса ортогонализации Грама – Шмидта*.

Пусть имеется произвольная система векторов $G = (\boldsymbol{g}_1, ..., \boldsymbol{g}_m)$. Тогда по этой системе можно построить ортогональную систему $H = (\boldsymbol{h}_1, ..., \boldsymbol{h}_m)$ такую, что $(\boldsymbol{g}_1, ..., \boldsymbol{g}_k) \sim (\boldsymbol{h}_1, ..., \boldsymbol{h}_k)$, $k = \overline{1, m}$. Векторы $\boldsymbol{h}_k$ строятся рекурсивно следующим образом:

1) полагается, что $\boldsymbol{h}_1 = \boldsymbol{g}_1$;

2) если векторы $\boldsymbol{h}_1, ..., \boldsymbol{h}_{k-1}$, $k \leqslant m$, уже построены, то полагается, что

$$\boldsymbol{h}_k = \boldsymbol{g}_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{j,k} \boldsymbol{h}_j, \tag{15.1}$$

где

$$\alpha_{j,k} = \begin{cases} -\dfrac{\boldsymbol{g}_k \boldsymbol{h}_j}{\boldsymbol{h}_j \boldsymbol{h}_j}, & \text{если } \boldsymbol{h}_j \neq \boldsymbol{0}, \\ 0, & \text{если } \boldsymbol{h}_j = \boldsymbol{0}. \end{cases} \tag{15.2}$$

Если G – базис, то H – ортогональный базис. Из него путем нормирования получается ортонормированный базис $H' = (\boldsymbol{h}'_1, ..., \boldsymbol{h}'_m)$, где $\boldsymbol{h}'_j = \dfrac{1}{|\boldsymbol{h}_j|} \boldsymbol{h}_j$, $j = \overline{1, m}$. Любую ортонормированную систему, не являющуюся базисом, можно дополнить до ортонормированного базиса, скажем, сначала дополнив до какого-либо базиса, затем применив процесс ортогонализации, начиная с первого дополненного вектора. После нормирования получим ортонормированный базис, содержащий исходную систему в качестве подсистемы.

Пусть V – евклидово (унитарное) пространство размерности $n > 0$ и L – его подпространство. Положим

$$L^{\perp} = \{\boldsymbol{u} \in V \mid \boldsymbol{y}\boldsymbol{u} = 0, \ \forall \boldsymbol{y} \in L\}.$$

Если $\alpha, \beta \in P$ и $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in L^{\perp}$, то для любого $\boldsymbol{u} \in L$ имеем:

$$\boldsymbol{u}(\alpha \boldsymbol{y} + \beta \boldsymbol{z}) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{y}) + \overline{\beta}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{z}) = \overline{\alpha} \cdot \boldsymbol{0} + \overline{\beta} \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}.$$

Следовательно, множество $L^{\perp}$ есть подпространство пространства V. Оно называется *ортогональным дополнением подпространства L*. Пространство V есть прямая сумма подпространств L и $L^{\perp}$.

В самом деле, положим $M = L + L^{\perp}$ и $m = \dim M$. Должно быть $m > 0$, иначе $L = \{\mathbf{0}\} = L^{\perp}$, а это противоречит тому, что $\{\mathbf{0}\}^{\perp} = V$ и $\dim V = n > 0$. Допустим, что $(\boldsymbol{g}_1, ..., \boldsymbol{g}_m)$ – ортогональный базис подпространства M. Если $m < n$, то этот базис можно дополнить до ортогонального базиса, скажем $(\boldsymbol{g}_1, ..., \boldsymbol{g}_m, ..., \boldsymbol{g}_n)$, всего пространства V. Но тогда $\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_n = ... = \boldsymbol{g}_m\boldsymbol{g}_n = 0$, откуда следует, что $\boldsymbol{g}_n \in L^{\perp}$, однако $\boldsymbol{g}_n \notin M$, и приходим к противоречию. Итак, $m = n$ и $V = M = L + L^{\perp}$. Далее, $L \cap L^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$, поскольку для любого вектора $\boldsymbol{g} \in L \cap L^{\perp}$ должно быть $\boldsymbol{gg} = 0$ и, следовательно, $\boldsymbol{g} = \mathbf{0}$. Таким образом, $V = L \oplus L^{\perp}$.

Предыдущие рассуждения позволяют говорить о проектировании $\mathrm{pr}_L^{L\oplus L^{\perp}}$ пространства V на подпространство L параллельно подпространству $L^{\perp}$. Это отображение называется также *ортогональным проектированием пространства V на подпространство L* и обозначается pr_L. Для $\boldsymbol{x} \in V$ вектор $\mathrm{pr}_L \boldsymbol{x}$ называется *ортогональной проекцией вектора $\boldsymbol{x}$ на подпространство L*, а вектор $\mathrm{pr}_{L^{\perp}}^{L^{\perp}\oplus L} \boldsymbol{x}$ – *ортогональной составляющей вектора $\boldsymbol{x}$ относительно подпространства L* (обозначается $\mathrm{ort}_L \boldsymbol{x}$). Таким образом, $\mathrm{pr}_L \boldsymbol{x}$ и $\mathrm{ort}_L \boldsymbol{x}$ – это однозначно определенные векторы из L и $L^{\perp}$ соответственно, которые в сумме дают вектор $\boldsymbol{x}$.

Матрица $A \in \mathbb{R}_{n,n}$ ($A \in \mathbb{C}_{n,n}$) называется *ортогональной* (соответственно *унитарной*), если $A^{\mathrm{T}} A = AA^{\mathrm{T}} = E_n$ (соответственно $A^* A = AA^* = E_n$).

Пусть H и G – два базиса евклидова (унитарного) пространства V, причем H – ортонормированный базис. Для того чтобы базис G был ортонормированным, необходимо и достаточно, чтобы матрица $\tau_H(G)$ перехода от H к G была ортогональна (соответственно унитарна).

Линейный оператор φ евклидова (унитарного) пространства V называется *изометрическим*, если

$$\varphi(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{xy}, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V,$$

и *самосопряженным* или *симметрическим*, если

$$\varphi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\varphi(\boldsymbol{y}), \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V.$$

В случае, если V – евклидово пространство, изометрический оператор называют также *ортогональным*, а если V – унитарное пространство, – *унитарным*.

Для того чтобы оператор φ был изометрическим (соответственно самосопряженным, или симметрическим), необходимо, чтобы все его матрицы в ортонормированных базисах были ортогональны или унитарны (соответственно эрмитовы), и достаточно, чтобы хотя бы в одном ортонормированном базисе матрица оператора φ была ортогональна или унитарна (соответственно эрмитова). Для того чтобы оператор φ был симметрическим, необходимо и достаточно, чтобы в V существовал ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора φ, и все собственные значения оператора φ были действительны. Пусть $A \in \mathbb{R}_{n,n}$ – симметрическая матрица. Тогда существует ортогональная матрица S такая, что $S^{-1}AS$ – диагональная матрица. Пусть $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ – эрмитова матрица. Тогда существует унитарная матрица S такая, что матрица S^*AS диагональна и имеет действительные элементы.

Пример 1. Пусть l_2 – множество последовательностей $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ действительных чисел таких, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2$ сходится. Показать, что если определить сложение последовательностей и умножение действительного числа на последовательность покомпонентно, то l_2 – векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Показать также, что для любых двух последовательностей ξ и η ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k$ сходится, соответствие $(\xi, \eta) \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k$ определяет скалярное умножение на l_2 и, следовательно, l_2 – евклидово пространство.

Р е ш е н и е. Пусть $\xi, \eta \in l_2$. Зафиксируем произвольное $n \in \mathbb{N}$. Тогда, используя неравенство Коши – Буняковского, получаем:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k \right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \eta_k^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^2}.$$

Значит, частичные суммы $\sum_{k=1}^{n} |\xi_k \eta_k|$ ограничены сверху и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k$ абсолютно сходится. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} (\xi_k \pm \eta_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \pm \sum_{k=1}^{n} 2\xi_k \eta_k + \sum_{k=1}^{n} \eta_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 \pm \sum_{k=1}^{\infty} 2|\xi_k||\eta_k| + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^2,$$

потому ряд $\sum_{k=1}^{n} (\xi_k \pm \eta_k)^2$ сходится. Значит, последовательности $(\xi_k + \eta_k)_{k=1}^{\infty}$ и $(\xi_k - \eta_k)_{k=1}^{\infty}$ содержатся в l_2, а так как сложение и вычитание покомпонентны, то последовательности из l_2 составляют группу по сложению. Далее, для $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\xi \in l_2$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^2 \xi_k^2$ сходится, поэтому последовательность $(\alpha \xi_k)$ содержится в l_2. Ввиду того что умножение скаляра на последовательность производится покомпонентно, остальные аксиомы векторного пространства легко проверяются. Таким образом, l_2 – векторное пространство.

Для $\xi, \eta \in l_2$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k$ сходится, как показано выше, поэтому соответствие $(\xi, \eta) \mapsto \langle \xi, \eta \rangle$, где $\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k$, есть отображение из $l_2 \times l_2$ в $\mathbb{R}$. То, что это скалярное умножение, проверяется непосредственно.

Пример 2. Пусть $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ – ортонормированный базис в n-мерном евклидовом (унитарном) пространстве V и $(\boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{h}_n)$ – такая система векторов, что $\sum_{k=1}^{n} |\boldsymbol{h}_k|^2 < 1$. Показать, что система $(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n + \boldsymbol{h}_n)$ линейно независима.

Р е ш е н и е. Пусть для определенности V – унитарное пространство. Предположим от противного, что система $(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n + \boldsymbol{h}_n)$ линейно зависима. Тогда для некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ имеем $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\boldsymbol{e}_k + \boldsymbol{h}_k) = \boldsymbol{0}$, причем $\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 > 0$. Отсюда получаем равенство $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \boldsymbol{e}_k = \sum_{k=1}^{n} (-\alpha_k) \boldsymbol{h}_k$. Используя его и неравенство Коши – Буняковского, имеем:

$$0 < \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha_k} = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \boldsymbol{e}_k \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \boldsymbol{e}_j \right) = \left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \boldsymbol{e}_k \right|^2 =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} (-\alpha_k) \boldsymbol{h}_k \right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| |\boldsymbol{h}_k| \right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |\boldsymbol{h}_k|^2 \right).$$

Следовательно, $1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\boldsymbol{h}_k|^2$, что противоречит предположению.

Пример 3. Пусть $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \mathbb{R}_{1,4}$, $\boldsymbol{x} = (-4, 7, -1, -1)$, $\boldsymbol{y}_1 = (1, 1, -1, -1)$, $\boldsymbol{y}_2 = (1, 2, 1, 1)$. Найти вектор $\mathrm{ort}_L \boldsymbol{x}$, если $L = L(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2)$.

Р е ш е н и е. Для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ должно выполняться равенство $\mathrm{pr}_L \boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{y}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{y}_2$, тогда $\mathrm{ort}_L \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \mathrm{pr}_L \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \alpha_1 \boldsymbol{y}_1 - \alpha_2 \boldsymbol{y}_2 \in L^{\perp}$ и из $\boldsymbol{y}_1 \perp \mathrm{ort}_L \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}_2 \perp \mathrm{ort}_L \boldsymbol{x}$ получаем равенства $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x} - \alpha_1 \boldsymbol{y}_1 - \alpha_2 \boldsymbol{y}_2) = 0$, $\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x} - \alpha_1 \boldsymbol{y}_1 - \alpha_2 \boldsymbol{y}_2) = 0$. Таким образом, приходим к системе линейных уравнений с неизвестными α_1 и α_2:

$$\begin{cases} \alpha_1 (\boldsymbol{y}_1 \boldsymbol{y}_1) + \alpha_2 (\boldsymbol{y}_1 \boldsymbol{y}_2) = \boldsymbol{y}_1 \boldsymbol{x}, \\ \alpha_1 (\boldsymbol{y}_2 \boldsymbol{y}_1) + \alpha_2 (\boldsymbol{y}_2 \boldsymbol{y}_2) = \boldsymbol{y}_2 \boldsymbol{x}. \end{cases}$$

Привлекая числовые данные, получаем:

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + \alpha_2 = 5, \\ \alpha_1 + 7\alpha_2 = 8. \end{cases}$$

Следовательно, $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$ и $\mathrm{ort}_L \boldsymbol{x} = (-4, 7, -1, -1) - (1, 1, -1, -1) - (1, 2, 1, 1) = (-6, 4, -1, 1)$.

Пример 4. Дополнить ортонормированную систему $(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2)$ до ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}_{1,4}$, где $\boldsymbol{g}_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{g}_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-1, 3, -1, -1)$.

Р е ш е н и е. Сначала дополним систему $(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2)$ до базиса $(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_4)$ (пусть, например, $\boldsymbol{g}_3 = (0,0,4,0)$, $\boldsymbol{g}_4 = (0,0,0,4)$). Затем применим к нему процесс ортогонализации. Положим $\boldsymbol{h}_1 = \boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{h}_2 = \boldsymbol{g}_2$. Далее по формулам (15.1) и (15.2) получаем:

$$\boldsymbol{h}_3 = \boldsymbol{g}_3 - \frac{\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{h}_1}{\boldsymbol{h}_1\boldsymbol{h}_1}\boldsymbol{h}_1 - \frac{\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{h}_2}{\boldsymbol{h}_2\boldsymbol{h}_2}\boldsymbol{h}_2 = (0,0,4,0) - (1,1,1,1) + \left(-\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}, 0, \frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right),$$

$$\boldsymbol{h}_4 = \boldsymbol{g}_4 - \frac{\boldsymbol{g}_4\boldsymbol{h}_1}{\boldsymbol{h}_1\boldsymbol{h}_1}\boldsymbol{h}_1 - \frac{\boldsymbol{g}_4\boldsymbol{h}_2}{\boldsymbol{h}_2\boldsymbol{h}_2}\boldsymbol{h}_2 - \frac{\boldsymbol{g}_4\boldsymbol{h}_3}{\boldsymbol{h}_3\boldsymbol{h}_3}\boldsymbol{h}_3 =$$

$$= (0,0,0,4) - \frac{4}{4}(1,1,1,1) - \frac{4}{12}(-1,3,-1,-1) + \frac{16\cdot 3}{3\cdot 32}\left(-\frac{4}{3}, 0, \frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right) =$$

$$= (0,0,0,4) - (1,1,1,1) + \left(-\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}, 0, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) = (-2,0,0,2).$$

Итак, векторы $\boldsymbol{h}_3 = \frac{4}{3}(-1,0,2,-1)$, $\boldsymbol{h}_4 = (-2,0,0,2)$ дополняют систему до ортогонального базиса пространства. После нормирования получаем ортонормированный базис $(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{h}'_3, \boldsymbol{h}'_4)$, где $\boldsymbol{h}'_3 = \frac{1}{|\boldsymbol{h}_3|}\boldsymbol{h}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,0,2,-1)$; $\boldsymbol{h}'_4 = \frac{1}{|\boldsymbol{h}_4|}\boldsymbol{h}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,0,1)$.

Пример 5. Линейный оператор φ пространства $\mathbb{R}_{1,3}$ в базисе $(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3)$, где $\boldsymbol{g}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{g}_2 = (1,1,0)$, $\boldsymbol{g}_3 = (1,1,1)$, задан матрицей

$$B = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2\sqrt{6} \\ 1-\sqrt{6} & 4 & 2+\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Является ли φ ортогональным оператором?

Р е ш е н и е. По определению матрицы линейного оператора получаем:

$$\varphi(\boldsymbol{g}_1) = \frac{1}{4}(2\boldsymbol{g}_1 + (1-\sqrt{6})\boldsymbol{g}_2 + \sqrt{6}\boldsymbol{g}_3) = \frac{1}{4}(3,1,\sqrt{6}), \quad \varphi(\boldsymbol{g}_2) = \boldsymbol{g}_2 = (1,1,0),$$

$$\varphi(\boldsymbol{g}_3) = \frac{1}{4}(-2\sqrt{6}\boldsymbol{g}_1 + (2+\sqrt{6})\boldsymbol{g}_2 + 2\boldsymbol{g}_3) = \frac{1}{4}(4-\sqrt{6},\ 4+\sqrt{6},\ 2).$$

Если φ – ортогональный оператор, то должны выполняться равенства

$$\varphi(\boldsymbol{g}_k)\varphi(\boldsymbol{g}_l) = \boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}_l, \quad \forall k, l = 1,2,3. \tag{15.3}$$

Из предыдущего имеем: $\varphi(\boldsymbol{g}_1)\varphi(\boldsymbol{g}_1) = \frac{1}{4}(3,1,\sqrt{6})\cdot\frac{1}{4}(3,1,\sqrt{6}) = \frac{1}{16}(9+1+6) = 1 = (1,0,0)(1,0,0) = \boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_1$, $\varphi(\boldsymbol{g}_1)\varphi(\boldsymbol{g}_2) = \frac{1}{4}(3,1,\sqrt{6})(1,1,0) = \frac{1}{4}\cdot 4 = 1 = (1,0,0)(1,1,0) = \boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2$,

$$\varphi(\boldsymbol{g}_1)\varphi(\boldsymbol{g}_3)=\frac{1}{4}(3,\ 1,\ \sqrt{6})\cdot\frac{1}{4}(4-\sqrt{6},\ 4+\sqrt{6},\ 2)=\frac{1}{16}(12-3\sqrt{6}+4+\sqrt{6}+2\sqrt{6})=\frac{16}{16}=$$

$$=1=(1,0,0)(1,1,1)=\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_3,\quad \varphi(\boldsymbol{g}_2)\varphi(\boldsymbol{g}_2)=\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_2,\quad \varphi(\boldsymbol{g}_2)\varphi(\boldsymbol{g}_3)=(1,1,0)\cdot\frac{1}{4}(4-\sqrt{6},\ 4+\sqrt{6},\ 2)=$$

$$=\frac{8}{4}=2=(1,1,0)(1,1,1)=\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3,\ \ \varphi(\boldsymbol{g}_3)\varphi(\boldsymbol{g}_3)=\frac{1}{4}(4-\sqrt{6},\ 4+\sqrt{6},\ 2)\cdot\frac{1}{4}(4-\sqrt{6},\ 4+\sqrt{6},\ 2)=$$

$$=\frac{1}{16}(16-8\sqrt{6}+6+16+8\sqrt{6}+6+4)=\frac{48}{16}=3=(1,1,1)(1,1,1)=\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}_3.$$

Следовательно, условие (15.3) выполняется. Это условие является и достаточным, так как при его выполнении если $\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{g}_1+\alpha_2\boldsymbol{g}_2+\alpha_3\boldsymbol{g}_3$, $\boldsymbol{y}=\beta_1\boldsymbol{g}_1+\beta_2\boldsymbol{g}_2+\beta_3\boldsymbol{g}_3$, то $\varphi(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{y})=\varphi\left(\sum_{k=1}^{3}\alpha_k\boldsymbol{g}_k\right)\varphi\left(\sum_{l=1}^{3}\beta_l\boldsymbol{g}_l\right)=\left(\sum_{k=1}^{3}\alpha_k\varphi(\boldsymbol{g}_k)\right)\left(\sum_{l=1}^{3}\beta_l\varphi(\boldsymbol{g}_l)\right)=$ $=\sum_{k,l=1}^{3}\alpha_k\beta_l\varphi(\boldsymbol{g}_k)\varphi(\boldsymbol{g}_l)=\sum_{k,l=1}^{3}\alpha_k\beta_l\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}_l=\left(\sum_{k=1}^{3}\alpha_k\boldsymbol{g}_k\right)\left(\sum_{l=1}^{3}\beta_l\boldsymbol{g}_l\right)=\boldsymbol{xy}.$ Следовательно, φ является ортогональным оператором.

Другой способ решения этой задачи состоит в том, чтобы найти матрицу оператора φ в ортонормированном (например, каноническом) базисе и проверить, будет ли полученная матрица ортогональной.

Пример 6. Для эрмитовой матрицы

$$A=\begin{bmatrix}2 & i & 0\\ -i & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

найти унитарную матрицу S и диагональную матрицу B с действительными элементами такие, что $B=S^{-1}AS$.

Р е ш е н и е. Можно считать, что A – матрица самосопряженного оператора φ в каноническом базисе арифметического унитарного пространства $\mathbb{C}_{1,3}$. В качестве матрицы S можно взять матрицу перехода от канонического базиса к ортонормированному базису, состоящему из собственных векторов оператора φ: столбцы матрицы S есть координатные столбцы векторов этого базиса. Следовательно, для нахождения матрицы S надо найти характеристические числа матрицы A и затем собственные векторы оператора φ. Для этого рассмотрим характеристическую матрицу и вычислим корни характеристического многочлена матрицы A:

$$A-\lambda E_3=\begin{bmatrix}2-\lambda & i & 0\\ -i & 1-\lambda & -1\\ 0 & -1 & -\lambda\end{bmatrix},$$

$$\det(A-\lambda E_3)=\begin{vmatrix}2-\lambda & i & 0\\ -i & 1-\lambda & -1\\ 0 & -1 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+3\lambda^2-2=$$

$$=-(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda-2)=-(\lambda-1)(\lambda-1+\sqrt{3})(\lambda-1-\sqrt{3}).$$

Таким образом, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1+\sqrt{3}$, $\lambda_3 = 1-\sqrt{3}$ – характеристические числа матрицы A. Решая однородные системы с матрицами $A-\lambda_k E_3$, $k = 1, 2, 3$, находим координаты соответствующих собственных векторов:

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -i & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_1 = (-i, 1, -1);$$

$$\begin{bmatrix} 1-\sqrt{3} & i & 0 \\ -i & -\sqrt{3} & -1 \\ 0 & -1 & -1-\sqrt{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1-\sqrt{3} & i & 0 \\ i+i\sqrt{3} & 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1+\sqrt{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1-\sqrt{3} & i & 0 \\ 0 & 1 & 1+\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_2 = ((1+\sqrt{3})i, 2, 1-\sqrt{3});$$

$$\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & i & 0 \\ -i & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & -1 & -1+\sqrt{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & i & 0 \\ -(-1+\sqrt{3})i & 2-\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -1 & -1+\sqrt{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & i & 0 \\ 0 & -1 & -1+\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_3 = ((1-\sqrt{3})i, 2, 1+\sqrt{3}).$$

Система $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ есть ортогональная система, состоящая из собственных векторов линейного оператора φ. После нормирования получаем ортонормированный базис в $\mathbb{C}_{1,3}$, состоящий из собственных векторов:

$$\boldsymbol{g}_1 = \frac{1}{|\boldsymbol{e}_1|}\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-i, 1, -1), \qquad \boldsymbol{g}_2 = \frac{1}{|\boldsymbol{e}_2|}\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}((1+\sqrt{3})i, 2, 1-\sqrt{3}),$$

$$\boldsymbol{g}_3 = \frac{1}{|\boldsymbol{e}_3|}\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}((1-\sqrt{3})i, 2, 1+\sqrt{3}).$$

Располагая по столбцам координаты этих векторов, получаем искомую ортогональную матрицу S как матрицу перехода от канонического базиса к ортонормированному базису, состоящему из собственных векторов оператора φ:

$$S = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -2i & (1+\sqrt{3})i & (1-\sqrt{3})i \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Соответствующие этим собственным векторам собственные значения расположены в следующем порядке: 1, $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$, поэтому матрица $S^{-1}AS$ как матрица оператора φ в базисе $(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3)$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

15.1. Пусть $A=(a_{jk})$, $B=(b_{jk})$ – квадратные матрицы порядка n над полем $\mathbb{R}$. Показать, что формула $\langle A, B\rangle = \sum\limits_{j,k=1}^{n} a_{jk}b_{jk}$ определяет скалярное произведение в векторном пространстве матриц $\mathbb{R}_{n,n}$.

15.2. Пусть $a, b\in\mathbb{R}$, $a<b$, $\rho(x)\in C[a,b]$. Показать, что отображение $(f,g)\mapsto \int\limits_a^b \rho^2(x)f(x)g(x)dx$ определяет скалярное произведение в векторном пространстве $C[a,b]$ непрерывных функций на отрезке $[a,b]$.

15.3. Доказать, что скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}_{1,3}$ можно ввести следующим образом: если $\boldsymbol{x}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\boldsymbol{y}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, то $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = 10\alpha_1\beta_1+3\alpha_1\beta_2+3\alpha_2\beta_1+2\alpha_2\beta_2+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2+\alpha_3\beta_3$.

15.4. Пусть $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)$ – произвольные векторы из $\mathbb{R}_{1,2}$. Какая из следующих формул определяет скалярное умножение:

1) $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = x_1y_1+x_2y_2$;

2) $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = kx_1y_1+lx_2y_2$, $k\neq 0$, $l\neq 0$;

3) $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = x_1y_1+x_2y_2+2x_2y_1$;

4) $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = 2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2$?

15.5. Пусть $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ – ортонормированный базис евклидова пространства. Найти выражение для скалярного произведения векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ через их координаты:

1) в базисе $(\lambda_1\boldsymbol{e}_1,\lambda_2\boldsymbol{e}_2,\ldots,\lambda_n\boldsymbol{e}_n)$, где $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ – ненулевые скаляры;

2) в базисе $(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$.

15.6. Пусть $\boldsymbol{a}$ – фиксированный вектор евклидова (унитарного) пространства V и $\alpha\in\mathbb{R}$ ($\alpha\in\mathbb{C}$). Для каких пар $(\boldsymbol{a},\alpha)$ множество $\{\boldsymbol{x}\in V \mid \boldsymbol{xa}=\alpha\}$ составляет подпространство пространства V?

15.7. *Углом между ненулевыми векторами* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *в евклидовом пространстве* V называется действительное число $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ такое, что $0\leqslant(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\leqslant\pi$ и $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$. Найти углы между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в арифметическом евклидовом пространстве $\mathbb{R}_{1,4}$, если:

1) $\boldsymbol{a}=(1,1,-1,-1)$, $\boldsymbol{b}=(1,-1,1,1)$;

2) $\boldsymbol{a}=(-1,-2,-1,-2)$, $\boldsymbol{b}=(1,-2,1,-2)$.

15.8. *Расстоянием между векторами* $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ *евклидова* (*унитарного*) *пространства* V называется число $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$. Доказать, что выполняются соотношения:

1) $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 0 \wedge (\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}, \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V)$;

2) $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\rho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$;

3) $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\rho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\geqslant\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$, $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V$.

Найти расстояние между функциями $\sin x$ и $\cos x$ в пространстве непрерывных функций $C[0, \pi]$.

15.9. Доказать, что в неравенстве Коши – Буняковского $|\boldsymbol{ab}| \leqslant |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда система векторов $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ линейно зависима.

15.10. Доказать, что в евклидовом пространстве V выполняется равенство

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=2\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{b}^2, \quad \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V.$$

15.11. Доказать, что сумма квадратов длин векторов в ортогональной системе евклидова (унитарного) пространства равна квадрату длины суммы этих векторов.

15.12. Доказать, что в любом евклидовом или унитарном пространстве V выполняется соотношение $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \perp (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \Rightarrow |\boldsymbol{x}|=|\boldsymbol{y}|$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$. Показать, что соотношение $|\boldsymbol{x}|=|\boldsymbol{y}| \Rightarrow (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \perp (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, верно в любом евклидовом пространстве V и неверно в некотором ненулевом унитарном пространстве V.

15.13. Доказать, что система векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_{1,3}$ составляет ортонормированный базис, если:

1) $\boldsymbol{a}_1=\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $\quad \boldsymbol{a}_2=\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\quad \boldsymbol{a}_3=\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$;

2) $\boldsymbol{a}_1=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\quad \boldsymbol{a}_2=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\quad \boldsymbol{a}_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$;

3) $\boldsymbol{a}_1=\left(-\frac{1}{9}, \frac{8}{9}, \frac{4}{9}\right)$, $\quad \boldsymbol{a}_2=\left(\frac{8}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{4}{9}\right)$, $\quad \boldsymbol{a}_3=\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{7}{9}\right)$.

15.14. Проверить, является ли система векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ ортонормированным базисом в унитарном пространстве $\mathbb{C}_{1,3}$, где

$$\boldsymbol{a}_1=\left(\frac{4+3i}{9}, \frac{4}{9}i, \frac{-6-2i}{9}\right), \boldsymbol{a}_2=\left(-\frac{4}{9}i, \frac{4-3i}{9}, \frac{-2-6i}{9}\right),$$

$$\boldsymbol{a}_3=\left(\frac{6+2i}{9}, \frac{-2-6i}{9}, \frac{1}{9}\right).$$

15.15. Применить процесс ортогонализации к следующим системам векторов:

1) $\boldsymbol{a}_1=(1,1,1,1)$, $\boldsymbol{a}_2=(1,-3,1,-3)$, $\boldsymbol{a}_3=(4,0,3,-1)$;

2) $\boldsymbol{a}_1=(1,2,2,0)$, $\boldsymbol{a}_2=(1,3,1,5)$, $\boldsymbol{a}_3=(1,1,0,0)$.

15.16. Применив процесс ортогонализации, построить ортогональный базис линейной оболочки следующих систем векторов:

1) $\boldsymbol{a}_1=(2,-4,3,-6)$, $\boldsymbol{a}_2=(1,-2,8,-16)$, $\boldsymbol{a}_3=(12,-14,5,5)$, $\boldsymbol{a}_4=(3,4,11,-7)$;

2) $\boldsymbol{a}_1=(1,-1,1,-2)$, $\boldsymbol{a}_2=(-2,5,1,11)$, $\boldsymbol{a}_3=(0,3,3,7)$, $\boldsymbol{a}_4=(1,-1,-1,-3)$.

15.17. Построить ортонормированный базис линейной оболочки следующих систем векторов:

1) $\boldsymbol{a}_1=(1,-2,-5,16)$, $\boldsymbol{a}_2=(3,11,-6,-22)$, $\boldsymbol{a}_3=(-3,-6,-2,4)$, $\boldsymbol{a}_4=(3,6,11,-7)$;

2) $\boldsymbol{a}_1=(3,0,0,-2)$, $\boldsymbol{a}_2=(1,2,2,4)$, $\boldsymbol{a}_3=(3,-6,0,-13)$.

15.18. Показать, что следующие системы векторов ортогональны, дополнить их до ортогональных базисов и пронормировать эти базисы:

1) $\boldsymbol{a}_1=(1,1,-1,-1)$, $\boldsymbol{a}_2=(1,1,1,1)$;

2) $\boldsymbol{a}_1=(1,-1,-1,3)$, $\boldsymbol{a}_2=(1,-3,1,-1)$.

15.19. Дополнить следующие системы векторов до ортонормированных базисов:

1) $\boldsymbol{a}_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\boldsymbol{a}_2=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$;

2) $\boldsymbol{a}_1=\left(\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, $\boldsymbol{a}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$;

3) $\boldsymbol{a}_1=\left(-\frac{2}{15},-\frac{11}{15},\frac{2}{3}\right)$, $\boldsymbol{a}_2=\left(-\frac{14}{15},-\frac{2}{15},-\frac{1}{3}\right)$.

15.20. Пусть L – подпространство евклидова (унитарного) пространства V и $L^\perp$ – его ортогональное дополнение. Показать, что соответствие $\boldsymbol{x}\mapsto \mathrm{pr}_L\boldsymbol{x}$ является линейным отображением из V в L, а соответствие $\boldsymbol{x}\mapsto \mathrm{ort}_L\boldsymbol{x}$ – из V в $L^\perp$.

15.21. Найти ортогональную проекцию вектора $\boldsymbol{x}$ и его ортогональную составляющую относительно подпространства L евклидова пространства $\mathbb{R}_{1,4}$, если:

1) $\boldsymbol{x}=(14,-6,-3,-7)$, $L=L(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{y}_3)$, $\boldsymbol{y}_1=(-3,7,0,6)$, $\boldsymbol{y}_2=(1,3,4,2)$, $\boldsymbol{y}_3=(2,-2,2,-2)$;

2) $\boldsymbol{x}=(66,-32,42,24)$, $L=L(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{y}_3)$, $\boldsymbol{y}_1=(10,5,-6,-8)$, $\boldsymbol{y}_2=(-5,-3,4,2)$, $\boldsymbol{y}_3=(-3,-4,1,1)$;

3) $\boldsymbol{x}=(2,-5,4,3)$, $L=L(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{y}_3)$, $\boldsymbol{y}_1=(1,3,5,3)$, $\boldsymbol{y}_2=(1,3,-3,-5)$, $\boldsymbol{y}_3=(1,-5,-3,3)$.

15.22. Найти ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{R}_{1,3}$, состоящий из собственных векторов, и матрицу в этом базисе линейного преобразования, которое имеет в каноническом базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

15.23. Самосопряженный оператор φ унитарного пространства $\mathbb{C}_{1,3}$ задан в каноническом базисе матрицей A. Найти ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора φ, если:

1) $A = \begin{bmatrix} 4 & -i & 0 \\ i & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; 2) $A = \begin{bmatrix} 3 & i & 0 \\ -i & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

15.24. Самосопряженный оператор φ евклидова пространства $\mathbb{R}_{1,3}$ задан в каноническом базисе матрицей A. Найти ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}_{1,3}$, состоящий из собственных векторов оператора φ, если:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; 2) $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$;

3) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; 4) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$;

5) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; 6) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

15.25. В унитарном пространстве $\mathbb{C}_{1,3}$ линейный оператор φ переводит систему векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ в систему $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$. Будет ли φ самосопряженным, если:

1) $\boldsymbol{a}_1 = (1,\ 2,\ 2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,\ 1,\ -2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2,\ -2,\ 1)$, $\boldsymbol{b}_1 = (3-2i,\ 6+i,\ 8)$, $\boldsymbol{b}_2 = (6-i,\ 3+2i,\ -8)$, $\boldsymbol{b}_3 = (6+2i,\ -6+2i,\ 4)$;

2) $\boldsymbol{a}_1 = (2, 3, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (7, 9, 5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3, 4, 3)$, $\boldsymbol{b}_1 = (2+2i,\ 6-i,\ 0)$, $\boldsymbol{b}_2 = (7+4i,\ 18-2i,\ 3i)$, $\boldsymbol{b}_3 = (3+i,\ 8,\ 2i)$;

3) $\boldsymbol{a}_1 = (3, 2, 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-4, -3, -5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (5, 1, -1)$, $\boldsymbol{b}_1 = (3-i,\ 2,\ 6-i)$, $\boldsymbol{b}_2 = (-4+2i,\ -3-i,\ -5-i)$, $\boldsymbol{b}_3 = (5+2i,\ 1-6i,\ -2+4i)$?

15.26. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}_{1,3}$ линейный оператор φ переводит систему векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ в систему $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$. Будет ли φ самосопряженным, если:

1) $\boldsymbol{a}_1 = (0,1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,0,1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,1,0)$, $\boldsymbol{b}_1 = (2,3,1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (-1,0,3)$, $\boldsymbol{b}_3 = (-5,1,4)$;

2) $\boldsymbol{a}_1 = (-2,3,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3,6,2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,2,1)$, $\boldsymbol{b}_1 = (-6,9,3)$, $\boldsymbol{b}_2 = (2,11,33)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1,4,5)$;

3) $\boldsymbol{a}_1 = (-2,3,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3,6,2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,2,1)$, $\boldsymbol{b}_1 = (-5,10,6)$, $\boldsymbol{b}_2 = (4,20,5)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1,7,2)$;

4) $\boldsymbol{a}_1 = (2,2,-1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,-1,2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (7,1,-1)$, $\boldsymbol{b}_1 = (0,-3,-1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (2,-2,-1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (2,-1,4)$?

15.27. Линейный оператор φ евклидова арифметического пространства $\mathbb{R}_{1,4}$ переводит систему векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$ в систему $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4)$. Будет ли φ ортогональным, если:

1) $\boldsymbol{a}_1 = (2,2,2,2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,0,2,2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2,2,2,0)$, $\boldsymbol{a}_4 = (2,2,0,2)$, $\boldsymbol{b}_1 = (4,0,0,0)$, $\boldsymbol{b}_2 = (3,-1,1,1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (3,1,1,-1)$, $\boldsymbol{b}_4 = (3,1,-1,1)$;

2) $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,0,0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0,1,1,0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0,0,1,1)$, $\boldsymbol{a}_4 = (0,0,0,1)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1,1,0,0)$, $\boldsymbol{b}_2 = (0,-1,1,0)$, $\boldsymbol{b}_3 = (0,0,1,-1)$, $\boldsymbol{b}_4 = (0,0,0,-1)$?

15.28. Доказать, что проектирование векторов пространства V_3 на координатную плоскость Oxy есть самосопряженный оператор пространства V_3.

15.29. В векторном пространстве $\mathbb{R}_n[t]$ многочленов степени не выше n определить скалярное произведение так, чтобы базис $\left(1, t, \dfrac{t^2}{2}, \ldots, \dfrac{t^n}{n!}\right)$ стал ортонормированным.

15.30. Доказать, что система многочленов Лежандра $(P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x))$, где $P_k(x) = \dfrac{1}{2^k k!}\dfrac{d^k}{dx^k}((x^2-1)^k)$, $k = \overline{1,n}$, линейно независима.

15.31. Доказать, что матрица $A \in \mathbb{R}_{n,n}$ является матрицей скалярного произведения тогда и только тогда, когда существует невырожденная матрица $B \in \mathbb{R}_{n,n}$ такая, что матрица A представима в виде $A = B^{\mathrm{T}} B$.

15.32. Доказать, что система комплекснозначных функций $(e^{ix}, e^{i2x}, \ldots, e^{inx})$ линейно независима.

15.33. Пусть процесс ортогонализации переводит систему $G = (\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_m)$ в систему $H = (\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \ldots, \boldsymbol{h}_m)$. Показать, что для определителей Грама этих систем выполняются равенства $\det A_G = \det A_H = |\boldsymbol{h}_1|^2 |\boldsymbol{h}_2|^2 \cdots |\boldsymbol{h}_m|^2$, а также что для каждого $k = \overline{1,m}$ выполняется неравенство $|\boldsymbol{h}_k| \leqslant |\boldsymbol{g}_k|$.

15.34. Доказать, что для определителя Грама $\det A_G$ системы $G = (\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, ..., \boldsymbol{g}_m)$ выполняется соотношение $0 \leqslant \det A_G \leqslant |\boldsymbol{g}_1|^2 |\boldsymbol{g}_2|^2 \cdots |\boldsymbol{g}_m|^2$.

15.35. Показать, что всякая невырожденная матрица A над полем $\mathbb{R}$ (над полем $\mathbb{C}$) представляется в виде $A = BC$ (*разложение Ивасавы*), где B – ортогональная (соответственно унитарная), а C – верхняя треугольная матрица с положительными действительными элементами на диагонали.

15.36. Пусть в унитарном (или евклидовом) пространстве V задано преобразование φ, которое сохраняет скалярное произведение $\varphi(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{xy}$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$. Показать, что φ – линейное и потому изометрическое преобразование пространства V. Показать на примерах, что сохранения скалярных квадратов недостаточно для линейности преобразования φ.

15.37. Доказать, что поворот векторов плоскости на угол α является ортогональным оператором.

15.38. Пусть $\boldsymbol{a} \in V_3$. Показать, что преобразование $\varphi_{\boldsymbol{a}} : \boldsymbol{x} \mapsto [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}]$ является линейным, $\varphi_{\boldsymbol{a}}$ не является ортогональным оператором ни при каком векторе $\boldsymbol{a}$, $\varphi_{\boldsymbol{a}}$ является самосопряженным оператором лишь при $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

15.39. Доказать, что для самосопряженного оператора φ унитарного пространства V число $\varphi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$ действительное при любом $\boldsymbol{x} \in V$.

15.40. Пусть V – евклидово или унитарное пространство и L – его подпространство. Доказать, что соответствие $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{pr}_L \boldsymbol{x}$ есть самосопряженный оператор пространства V.

15.41. Показать, что характеристические числа ортогональной (унитарной) матрицы имеют модуль, равный 1.

15.42. Доказать, что произведение двух ортогональных (унитарных) матриц одного порядка – ортогональная (унитарная) матрица.

15.43. Доказать, что треугольная матрица $A \in \mathbb{R}_{n,n}$ ортогональна тогда и только тогда, когда A – диагональная матрица, диагональные элементы которой равны 1 или -1.

15.44. Показать, что матрица A ортогональна, если:

$$1)\ A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \qquad 2)\ A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{bmatrix};$$

$$3)\ A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad 4)\ A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

15.45. Показать, что матрица

$$A=\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4i & -4+3i & 2+6i \\ 4+3i & 4i & -6-2i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{bmatrix}$$

унитарна.

15.46. Пусть $U=P+iQ$ – комплексная унитарная матрица порядка n, где P,Q – действительные матрицы порядка n. Доказать, что действительная матрица

$$D=\begin{bmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{bmatrix}$$

порядка $2n$ является ортогональной.

15.47. Пусть φ – изометрический оператор n-мерного унитарного (евклидова) пространства V и L – подпространство пространства V, инвариантное относительно φ. Показать, что ортогональное дополнение подпространства L также инвариантно относительно φ.

15.48. Доказать, что собственные векторы унитарного оператора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

15.49. Пусть V – n-мерное унитарное пространство и φ – унитарный оператор этого пространства. Если матрица оператора φ в некотором базисе действительная и собственный вектор, соответствующий собственному значению $\alpha+\beta i$, $\beta\neq 0$, представлен в виде $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}i$, где векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ имеют действительные координаты, то эти векторы ортогональны и имеют одинаковую длину, причем $\varphi(\boldsymbol{x})=\alpha\boldsymbol{x}-\beta\boldsymbol{y}$, $\varphi(\boldsymbol{y})=\beta\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$.

15.50. Пусть φ – ортогональный оператор n-мерного евклидова пространства V, $n>0$. Показать, что существует подпространство размерности 1 или 2, инвариантное относительно φ.

15.51. Показать, что для любого унитарного оператора φ унитарного пространства $\mathbb{C}_{n,1}$, $n>0$, существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора φ, и в этом базисе матрица оператора φ является диагональной с диагональными элементами, по модулю равными 1.

15.52. Показать, что для любого ортогонального оператора φ евклидова пространства $\mathbb{R}_{n,1}$ существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет блочно-диагональный вид, причем каждый блок есть либо матрица первого порядка (± 1), либо матрица второго порядка вида

$$\begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}, \gamma\neq k\pi, \gamma\in\mathbb{R}.$$

15.53. Доказать, что для любого линейного оператора унитарного n-мерного пространства ($n > 0$) существует ортонормированный базис, в котором матрица этого оператора треугольная (*теорема Шура*).

15.54. Пусть V – евклидово n-мерное пространство и $\varphi : V \to \mathbb{R}$ – линейное отображение. Показать, что существует вектор $\boldsymbol{a}_0 \in V$ такой, что отображение φ задается формулой $\varphi : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{a}_0\boldsymbol{x}$, $\forall \boldsymbol{x} \in V$.

15.55. Пусть даны два базиса G и H в евклидовом или унитарном конечномерном пространстве V. Показать, что для существования изометрического оператора φ такого, что $\varphi G = H$, необходимо и достаточно равенство матриц Грама A_G и A_H этих систем.

15.56. Линейный оператор φ евклидова пространства $\mathbb{R}_{1,3}$ в базисе $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\left(0, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\left(0, 0, \frac{1}{3}\right)$ задан матрицей:

$$1)\ A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 & -5 & 2 \\ 16 & 14 & -5 \\ 23 & 16 & -4 \end{bmatrix}; \qquad 2)\ A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Является ли φ ортогональным оператором?

15.57. Пусть $G = (\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n)$ – базис и $H = (\boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{h}_n)$ – система векторов n-мерного евклидова (унитарного) пространства V. Показать, что для существования самосопряженного оператора φ пространства V, переводящего базис G в систему H, необходимо и достаточно выполнение равенств $\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{h}_l = \boldsymbol{h}_k\boldsymbol{g}_l$, $\forall k, l = \overline{1, n}$.

15.58. Показать, что произведение двух самосопряженных операторов φ и ψ евклидова (унитарного) n-мерного пространства есть самосопряженный оператор тогда и только тогда, когда φ и ψ перестановочны.

Глава 16
КВАДРИКИ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть ζ – биекция множества A на векторное пространство V над полем P. Тройка (A, ζ, V) называется *аффинным пространством, связанным с векторным пространством* V, а *точками* этого *аффинного пространства* – элементы множества A. Для $P, Q \in A$ через $\overrightarrow{PQ}$ обозначается вектор $\zeta(Q) - \zeta(P)$ (вектор, соединяющий точку P с точкой Q). Отображение $(P, Q) \mapsto \overrightarrow{PQ}$ называется *операцией соединения точек вектором*.

Например, пусть A_3 – множество всех точек (геометрического) пространства V_3 и O – фиксированная точка. Каждой точке $M \in A_3$ поставим в соответствие ее радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$. Тогда соответствие $\zeta_0 : M \mapsto \overrightarrow{OM}$ биективно отображает A_3 на V_3, и тройка (A_3, ζ_0, V_3) есть аффинное пространство, связанное с векторным пространством V_3. Операция соединения точек вектором совпадает с ее геометрическим аналогом:

$$(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \quad \forall A, B \in A_3.$$

Пусть (A, ζ, V) – аффинное пространство, связанное с векторным пространством V размерности $n > 0$. Пусть $O \in A$ и $G = (\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_n)$ – базис векторного пространства V. Тогда система $(O; G) = (O; \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_n)$ называется *репером аффинного пространства* (A, ζ, V), точка O – *началом координат* данного *репера*, а система G – его *базисом*. *Координатным столбцом*

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

точки P в репере $(O; G)$ называется координатный столбец $X = \tau_G(\overrightarrow{OP})$ вектора $\overrightarrow{OP}$ (радиуса-вектора точки P в базисе G). Скаляры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называются *координатами точки P в репере* $(O; G)$. Так как соответствие $P \mapsto \overrightarrow{OP}$ взаимно однозначно, то отображение $P \mapsto \tau_G(\overrightarrow{OP})$ есть биекция из A на соответствующее арифметическое пространство столбцов.

Если V – евклидово или унитарное пространство и базис G ортонормированный, то репер $(O; G)$ считается *ортонормированным*.

В частности, каждый ортонормированный репер $(O; G)$ аффинного пространства A_3, рассмотренного выше, задает в A_3 ДПСК с началом координат в точке O и направлениями координатных осей, определяемыми базисными векторами из G.

Пусть $(O; G)$ и $(O'; G')$ – два репера в аффинном пространстве (A, ζ, V), $P \in A$, $X = \tau_G(\overrightarrow{OP})$ и $X' = \tau_{G'}(\overrightarrow{O'P})$ – координатные столбцы точки P в реперах $(O; G)$ и $(O'; G')$ соответственно, $S = \tau_G(G')$ – матрица перехода от базиса G к базису G' и $K = \tau_G(\overrightarrow{OO'})$ – координатный столбец точки O' в репере $(O; G)$. Тогда выполняется равенство

$$X = SX' + K. \tag{16.1}$$

В случае, если V – евклидово (унитарное) пространство и реперы $(O; G)$, $(O'; G')$ ортонормированы, матрица S является ортогональной (соответственно унитарной).

Если $G = G'$, то $S = E_n$. Тогда из равенства (16.1) получаем формулу переноса начала координат:

$$X = X' + K. \tag{16.2}$$

При $O = O'$ в формуле (16.1) надо положить $K = O_{n,1}$, и тогда эта формула приобретет вид

$$X = SX'. \tag{16.3}$$

Выражения (16.1)–(16.3) являются *формулами преобразования переменных*, если считать

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

столбцами переменных.

Пусть (A, ζ, V) – евклидово аффинное n-мерное пространство. Рассмотрим уравнение

$$X^{\mathrm{T}} AX + 2F^{\mathrm{T}} X + a = 0, \tag{16.4}$$

где $A = A^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}_{n,n}$ – ненулевая симметрическая матрица; $F \in \mathbb{R}_{n,1}$; $a \in \mathbb{R}$; $\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$ – столбец неизвестных.

Квадрикой L называется множество точек аффинного пространства A, координатные столбцы которых в некотором ортонормированном репере $(O;G)$ пространства A удовлетворяют уравнению (16.4) – уравнению квадрики L в репере $(O;G)$. Матрица B порядка $n+1$ вида

$$B=\left[\begin{array}{c|c} A & F \\ \hline F^{\mathrm{T}} & a \end{array}\right]$$

называется *матрицей уравнения квадрики* (16.4), $X^{\mathrm{T}}AX$ – *квадратичной формой,* $2F^{\mathrm{T}}X$ – *линейной формой*, а a – *свободным членом уравнения* (16.4).

Пусть A – евклидово аффинное пространство A_3 и $(O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ – его репер, определяющий ДПСК в этом пространстве. Рассмотрим уравнение вида

$$\begin{gathered} a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+ \\ +2a_{23}yz+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0, \end{gathered} \tag{16.5}$$

где $a_{kl}, a_k, a\in\mathbb{R}$, $1\leqslant k\leqslant 3$, $1\leqslant l\leqslant 3$, и $a_{kl}\neq 0$ для некоторых индексов k и l. Уравнение (16.5) есть уравнение некоторой поверхности второго порядка. Его можно записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}+[a]=[0],$$

где $a_{21}=a_{12}$; $a_{31}=a_{13}$; $a_{32}=a_{23}$, и получим уравнение вида (16.4), где

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix};\quad F=\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix};\quad X=\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}.$$

Рассмотрим, как преобразуется матрица B уравнения (16.4) квадрики L при переходе от ортонормированного репера $(O;G)$ к новому ортонормированному реперу $(O';G')$. Пусть $S=\tau_G(G')$, $K=\tau_G(\overrightarrow{OO'})$. Тогда координатные столбцы X и X' точки p в реперах $(O;G)$ и $(O';G')$ связаны соотношением (16.1). Чтобы найти уравнение квадрики L в репере $(O';G')$, подставим в уравнение (16.4) вместо столбца X правую часть равенства (16.1). После преобразований получим:

$$(X')^{\mathrm{T}}A'X'+2(F')^{\mathrm{T}}X'+a'=0, \tag{16.6}$$

где $A'=S^{\mathrm{T}}AS$; $F'=S^{\mathrm{T}}AK+S^{\mathrm{T}}F$; $a'=K^{\mathrm{T}}AK+2F^{\mathrm{T}}K+a=C(K)$; $C(K)$ – значение левой части уравнения (16.4) при $X=K$. В частности, если применяется перенос начала координат (16.2), то уравнение (16.6) принимает вид

$$(X')^{\mathrm{T}} AX' + 2(AK + F')^{\mathrm{T}} X' + C(K) = 0, \tag{16.7}$$

а если используется ортогональное преобразование переменных (меняется базис, а начало координат остается на месте), то

$$(X')^{\mathrm{T}}(S^{\mathrm{T}} AS)X' + 2F^{\mathrm{T}} SX' + a = 0. \tag{16.8}$$

Уравнение квадрики (16.4) называется *каноническим*, если оно имеет один из следующих видов:

$$\alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_r x_r^2 = 0, \tag{16.9}$$

$$\alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_r x_r^2 + 1 = 0, \tag{16.10}$$

где $1 \leqslant r \leqslant n$; $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0, ..., \alpha_r \neq 0$;

$$\alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_r x_r^2 + 2x_{r+1} = 0, \tag{16.11}$$

где $1 \leqslant r \leqslant n-1$; $\alpha_1 \neq 0, ..., \alpha_r \neq 0$.

Для всякой квадрики L в n-мерном аффинном евклидовом пространстве существует ортонормированный репер, в котором ее уравнение является каноническим. Процесс приведения уравнения квадрики (16.4) к каноническому виду с помощью перехода к новому реперу заключается в следующем.

Первый шаг состоит в приведении матрицы A квадратичной формы к диагональному виду с использованием ортогонального преобразования переменных.

Пусть S – ортогональная матрица такая, что матрица $A' = S^{\mathrm{T}} AS = S^{-1} AS$ диагональна (т.е. $A' = \operatorname{diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$). После преобразования переменных $X = SX'$ по формуле (16.8) приходим к новому уравнению квадрики L в репере $(O; GS)$, где G – базис исходного репера:

$$\alpha_1 (x_1')^2 + \alpha_2 (x_2')^2 + \ldots + \alpha_n (x_n')^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k' x_k' + a = 0. \tag{16.12}$$

Переставив в случае необходимости элементы базиса, уравнение (16.12) можно привести к такому виду, что

$$\alpha_1 \neq 0, ..., \alpha_r \neq 0, \quad \alpha_{r+1} = 0, ..., \alpha_n = 0, \quad r = \operatorname{rank} A > 0.$$

Второй шаг состоит в преобразовании уравнения (16.12) путем выделения полных квадратов. Тогда получаем уравнение

$$\alpha_1 \left(x_1' + \frac{a_1'}{\alpha_1} \right)^2 + \ldots + \alpha_r \left(x_r' + \frac{a_r'}{\alpha_r} \right)^2 + 2 \sum_{k=r+1}^{n} a_k' (x_k') + a' = 0.$$

Теперь, пользуясь формулой (16.7) переноса начала координат в точку с координатным столбцом $K = \begin{bmatrix} -\dfrac{a_1'}{\alpha_1} & \cdots & -\dfrac{a_r'}{\alpha_r} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, или, иначе говоря, преобразованием переменных

$$\begin{cases} x_1' = x_1'' - \dfrac{a_1'}{\alpha_1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r' = x_r'' - \dfrac{a_r'}{\alpha_r}, \\ x_{r+1}' = x_{r+1}'', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = x_n'', \end{cases}$$

либо в матричной форме $X' = X'' + K$, переходим к уравнению квадрики L в новом репере $(O'; GS)$, где $\overrightarrow{OO'} = GSK$:

$$\alpha_1 (x_1'')^2 + \ldots + \alpha_r (x_r'')^2 + 2 \sum_{k=r+1}^{n} a_k' x_k'' + a' = 0. \qquad (16.13)$$

Теперь возможны два случая:

1) $\alpha_k' = 0, \ \forall k = r+1, \ldots, n$;

2) $\alpha_k' \neq 0, \ \exists k, \ r+1 \leqslant k \leqslant n$.

В первом случае, если $a' = 0$, уравнение (16.13) является каноническим уравнением вида (16.9), а если $a' \neq 0$, то, разделив все коэффициенты уравнения (16.13) на a', получим каноническое уравнение вида (16.10).

Во втором случае, если только один из коэффициентов $\alpha_k' \neq 0$, $r+1 \leqslant k \leqslant n$, после, может быть, перестановки элементов базиса и деления всех коэффициентов уравнения на α_k' приходим к уравнению

$$\alpha_1' y_1^2 + \ldots + \alpha_r' y_r^2 + 2 y_{r+1} + b = 0. \qquad (16.14)$$

Используя преобразование переменных

$$\begin{cases} y_1 = y_1', \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_r = y_r', \\ y_{r+1} = y_{r+1}' - b/2, \\ y_{r+2} = y_{r+2}', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = y_n', \end{cases}$$

после переноса начала координат получаем каноническое уравнение квадрики L вида (16.11):

$$\alpha_1'(y_1')^2+\ldots+\alpha_r'(y_r')^2+2y_{r+1}'=0.$$

Во втором случае, если более чем один из коэффициентов $a_{r+1}',\ldots,a_n'$ не равен нулю, применяем еще одно ортогональное преобразование переменных:

$$X''=TX''', \tag{16.15}$$

где матрица T имеет вид

$$T=\left[\begin{array}{c|c} E_r & O_{r,\,n-r} \\ \hline O_{n-r,\,r} & D \end{array}\right].$$

При этом ортогональная матрица $D\in\mathbb{R}_{n-r,\,n-r}$ строится следующим образом. Ее первый столбец D_1 составляется из коэффициентов уравнения (16.13):

$$D_1=\frac{1}{\sqrt{(a_{r+1}')^2+\ldots+(a_n')^2}}\begin{bmatrix} a_{r+1}' \\ \vdots \\ a_n' \end{bmatrix},$$

а остальные столбцы $D_2,\ldots,D_{n-r}$ выбираются так, чтобы система $(D_1,\ldots,D_{n-r})$ составляла ортонормированный базис в пространстве столбцов $\mathbb{R}_{n-r,1}$.

После ортогонального преобразования переменных (16.15) приходим к уравнению вида (16.14) и, совершив, если надо, параллельный перенос, получаем каноническое уравнение квадрики L вида (16.11).

Пример 1. Найти центр симметрии линии второго порядка $107x^2-48xy+$ $+93y^2+310x-420y+350=0$.

Р е ш е н и е. Из анализа канонических уравнений линий второго порядка видно, что центр симметрии линии второго порядка, если он существует, является началом координат той ДПСК, в которой уравнение этой линии каноническое. Следовательно, для нахождения центра симметрии линии второго порядка можно воспользоваться изложенным выше способом приведения уравнения квадрики к каноническому виду, только вместо первого шага – замены базиса – следует сделать перенос начала координат. Уравнение при этом подвергнется преобразованию координат $X=X'+K$. Столбец K подбирается таким образом, чтобы линейная форма нового уравнения линии стала нулевой. Именно: если $X^{\mathrm{T}}AX+2F^{\mathrm{T}}X+a=0$ – исходное уравнение, то должно выполняться равенство $AK=-F$. Таким образом, координатный столбец K нового начала координат должен удовлетворять матричному уравнению $AX=-F$. Если это уравнение не имеет решений, то данная линия – парабола, иначе после преобразования переменных $X=X'+K$ исходное уравнение приведется к виду

$$(X')^{\mathrm{T}}AX'+K^{\mathrm{T}}AK+2F^{\mathrm{T}}K+a=0.$$

После замены базиса на ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов линейного оператора с матрицей A, это уравнение приводится к каноническому виду, так что K – координатный столбец нового начала координат в той системе координат, в которой уравнение данной линии является каноническим. Следовательно, K – координатный столбец центра симметрии этой линии.

Теперь обратимся к заданному уравнению и составим его матрицу:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & F \\ \hline F^{\mathrm{T}} & a \end{array}\right]=\left[\begin{array}{rr|r} 107 & -24 & 155 \\ -24 & 93 & -210 \\ \hline 155 & -210 & 350 \end{array}\right].$$

Координатный столбец K центра симметрии линии ищем как решение матричного уравнения $AX=-F$:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 107 & -24 & -155 \\ -24 & 93 & 210 \end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{rr|r} 107 & -24 & -155 \\ 404 & -3 & -410 \end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{rr|r} -3125 & 0 & 3125 \\ 404 & -3 & -410 \end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{rr|r} -1 & 0 & 1 \\ 404 & -3 & -410 \end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{rr|r} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -6 \end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Таким образом, $K=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ и (-1) – абсцисса, 2 – ордината центра симметрии заданной линии второго порядка.

Пример 2. Найти ДПСК на плоскости, в которой уравнение линии второго порядка $x^2+8xy+7y^2+2x+16y-7=0$ является каноническим.

Р е ш е н и е. Исходный репер обозначим $(O;G)$. Запишем матрицу исходного уравнения:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & F \\ \hline F^{\mathrm{T}} & a \end{array}\right]=\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 8 \\ \hline 1 & 8 & -7 \end{array}\right].$$

В соответствии с изложенным выше способом приведения уравнения квадрики к каноническому виду найдем сначала ортогональное преобразование переменных, приводящее квадратичную форму с матрицей A к каноническому виду. Для этого ищем ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов линейного оператора $X\mapsto AX$ арифметического векторного пространства столбцов $\mathbb{R}_{2,1}$. Чтобы найти этот базис, сначала вычисляем собственные значения матрицы A:

$$\det(A-\lambda E_2)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 4\\ 4 & 7-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-8\lambda-9=(\lambda+1)(\lambda-9).$$

Следовательно, $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=9$ – собственные значения. Подставляем их вместо λ в характеристическую матрицу матрицы A, решаем соответствующие однородные системы уравнений и находим ортогональный базис, состоящий из собственных векторов. Затем нормируем эти векторы и составляем ортогональную матрицу S из получившихся столбцов:

$$A+E_2=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 4 & 8\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix},\quad h_1=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix},$$

$$A-9E_2=\begin{bmatrix}-8 & 4\\ 4 & -2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix},\quad h_2=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix},$$

$$h_1'=\frac{1}{|h_1|}\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix},\quad h_2'=\frac{1}{|h_2|}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix},$$

$$S=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}.$$

Теперь применяем ортогональное преобразование переменных $X=SX'$ к исходному уравнению и получаем матрицу нового уравнения той же линии в репере $(O;G')$:

$$F^{\mathrm{T}}S=[1\quad 8]\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}[-6\quad 17],$$

$$\left[\begin{array}{c|c}A' & F'\\ \hline (F')^{\mathrm{T}} & a\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}S^{\mathrm{T}}AS & S^{\mathrm{T}}F\\ \hline F^{\mathrm{T}}S & a\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|c}-1 & 0 & -6/\sqrt{5}\\ 0 & 9 & 17/\sqrt{5}\\ \hline -6/\sqrt{5} & 17/\sqrt{5} & -7\end{array}\right].$$

Далее переносим начало координат в такую точку, чтобы линейная форма получившегося уравнения стала равной нулю. Координатный столбец K этой точки в репере $(O;G')$, где $G'=GS$, находится как решение матричного уравнения $A'X=-F'$. Соответствующая система линейных уравнений имеет расширенную матрицу

$$\left[\begin{array}{cc|c}-1 & 0 & -6/\sqrt{5}\\ 0 & 9 & 17/\sqrt{5}\end{array}\right].$$

Отсюда получаем:

$$K=\begin{bmatrix}-6/\sqrt{5}\\ -17/9\sqrt{5}\end{bmatrix}.$$

В новом репере $(O';G')$, где $\overrightarrow{OO'}=G(SK)$, уравнение линии имеет матрицу

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b \end{array}\right],$$

где

$$[b]=K^{\mathrm{T}}A'K+2(F')^{\mathrm{T}}K+[a]=\begin{bmatrix}-\frac{6}{\sqrt{5}} & -\frac{17}{9\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{6}{\sqrt{5}}\\ -\frac{17}{9\sqrt{5}}\end{bmatrix}+$$

$$+2\begin{bmatrix}-\frac{6}{\sqrt{5}} & \frac{17}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{6}{\sqrt{5}}\\ -\frac{17}{9\sqrt{5}}\end{bmatrix}+[-7]=\begin{bmatrix}-\frac{36}{5}+\frac{289}{45}+\frac{72}{5}-\frac{2\cdot 289}{45}-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{9}-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{56}{9}\end{bmatrix}.$$

В результате имеем $-(x'')^2+9(y'')^2=56/9$ – уравнение линии в репере $(O';G')$. Из него видно, что эта линия – гипербола. Чтобы вычислить координаты точки O' в исходном репере $(O;G)$, умножаем матрицу S на K:

$$SK=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-6\\ -17/9\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-125/9\\ 20/9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-25/9\\ 4/9\end{bmatrix}.$$

Таким образом, новая система координат, в которой уравнение линии каноническое, имеет начало в точке $O'(-25/9,\ 4/9)$ и направляющие векторы осей координат $\boldsymbol{e}_1(2,-1)$, $\boldsymbol{e}_2(1,2)$.

Пример 3. Привести уравнение поверхности второго порядка

$$x^2+5y^2+z^2-2xy+6xz-2yz-2x-6y+2z=0 \tag{16.16}$$

к каноническому виду с помощью перехода к новой ДПСК и выяснить расположение этой поверхности относительно старой ДПСК.

Р е ш е н и е. Матрица B исходного уравнения имеет вид

$$\left[\begin{array}{c|c} A & F \\ \hline F^{\mathrm{T}} & a \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ \hline -1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Найдем сначала ортогональное преобразование переменных, приводящее матрицу A квадратичной формы уравнения (16.16) к диагональному виду. Для этого надо определить собственные значения и ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}_{3,1}$, состоящий из собственных векторов линейного оператора $X\mapsto AX$. Рассмотрим характеристическую матрицу и характеристический многочлен матрицы A:

$$A-\lambda E_3=\begin{bmatrix}1-\lambda & -1 & 3\\ -1 & 5-\lambda & -1\\ 3 & -1 & 1-\lambda\end{bmatrix},$$

$$\det(A-\lambda E_3)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 3\\ -1 & 5-\lambda & -1\\ 3 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+7\lambda^2-36=-(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-6).$$

Следовательно, $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=6$ – корни характеристического многочлена, это и есть собственные значения рассматриваемого линейного оператора.

Для нахождения собственных векторов решаем однородные системы линейных уравнений с матрицами соответственно $A+2E_3$, $A-3E_3$, $A-6E_3$ и выделяем по одному ненулевому решению:

1) $\lambda_1=-2$,

$$A+2E_3=\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\ -1 & 7 & -1\\ 3 & -1 & 3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\ -1 & 7 & -1\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}0 & 20 & 0\\ -1 & 7 & -1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_1=(1,0,-1);$$

2) $\lambda_2=3$,

$$A-3E_3=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 3\\ -1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & -2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-2 & -1 & 3\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}-5 & 5 & 0\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=(1,1,1);$$

3) $\lambda_3=6$,

$$A-6E_3=\begin{bmatrix}-5 & -1 & 3\\ -1 & -1 & -1\\ 3 & -1 & -5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & -5\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -8\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3=(1,-2,1).$$

Нормируя векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и располагая координаты в столбцы матрицы, получаем матрицу перехода S к новому ортонормированному базису:

$$S=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6}\\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6}\end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$S^{\mathrm{T}}AS=S^{-1}AS=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}.$$

Применяя к уравнению (16.16) ортогональное преобразование переменных $X = SX_1$, где $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$, в соответствии с формулой (16.8) получаем уравнение этой поверхности в новом репере $(O; GS)$, где $(O; G)$ – ортонормированный репер, соответствующий исходной ДПСК:

$$-2x_1^2 + 3y_1^2 + 6z_1^2 - 2\sqrt{2}x_1 - 2\sqrt{3}y_1 + 2\sqrt{6}z_1 = 0. \qquad (16.17)$$

Коэффициенты линейной формы нового уравнения – это согласно уравнению (16.8) удвоенные элементы матрицы строки

$$F^{\mathrm{T}}S = [-1 \quad -3 \quad 1]\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} = [-\sqrt{2} \quad -\sqrt{3} \quad \sqrt{6}].$$

Выделяем полные квадраты в уравнении (16.17):

$$-2\left(x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3\left(y_1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 6\left(z_1 + \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 + 1 - 1 - 1 = 0 \qquad (16.18)$$

и переносим начало координат в точку O' с координатным столбцом

$$\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

в репере $(O; GS)$. При этом уравнение (16.18) после преобразования переменных $X_1 = X_2 + K$ переходит в уравнение

$$-\frac{x_2^2}{(1/\sqrt{2})^2} + \frac{y_2^2}{(1/\sqrt{3})^2} + \frac{z_2^2}{(1/\sqrt{6})^2} = 1.$$

Это уравнение двуполостного гиперболоида с полуосями $1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{3}$, $1/\sqrt{6}$ в ДПСК $O'x_2y_2z_2$, соответствующей реперу $(O'; GS)$. Поскольку $\overrightarrow{OO'} = GSK$, постольку столбец

$$K_1 = SK = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

есть координатный столбец нового начала координат в старом репере. Итак, $-1/3,\ 2/3,\ 2/3$ – координаты нового начала координат O' в старой ДПСК и векторы $(1, 0, -1)$, $(1, 1, 1)$, $(1, -2, 1)$ – направляющие векторы новых осей координат $O'x_2$, $O'y_2$, $O'z_2$ соответственно.

16.1. Для данных линий второго порядка выяснить существование центра симметрии и найти координаты центра симметрии, если он есть:

1) $2x^2-2xy+y^2-6x-4y+3=0$;

2) $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$;

3) $x^2+3xy-2y^2-2x-3y=0$;

4) $x^2-2xy-y^2-6x-4y+30=0$;

5) $x^2-2xy+y^2+2x-2y-35=0$;

6) $5x^2-4xy+2y^2-8y+6=0$;

7) $x^2+2xy+3y^2-4x-6y+3=0$;

8) $x^2-6xy+9y^2+12x-4y-5=0$;

9) $x^2-6xy+9y^2+2y-7=0$;

10) $9x^2+4xy+4y^2+10x+20y+25=0$;

11) $5x^2-3xy+y^2-4=0$;

12) $2x^2-6xy+5y^2-2x+2y-10=0$;

13) $7x^2+4xy+4y^2-40x-32y+5=0$.

16.2. Привести уравнение линии второго порядка к каноническому виду с помощью перехода к новой ДПСК и выяснить расположение линии относительно старой системы координат:

1) $5x^2-8xy+5y^2-18x+18y+17=0$;

2) $-6xy-8y^2+12x+2y-111=0$;

3) $7x^2-16xy-23y^2-14x+16y-18=0$;

4) $9x^2-24xy+16y^2-40x-30y+1=0$;

5) $x^2-6xy+y^2+6x-2y-1=0$;

6) $3x^2+2xy+3y^2+4x-4y-4=0$;

7) $x^2+xy-y^2-x+y=0$;

8) $x^2+4xy+4y^2+2x+2y-1=0$;

9) $9x^2+6xy+y^2-6x-2y-1=0$;

10) $4x^2+4xy+y^2+4x+2y=0$;

11) $x^2-4xy-5y^2+5x-y=0$;

12) $x^2+2xy+y^2+2x+2y-4=0$;

13) $x^2+4xy-4x-y+4=0$;

14) $x^2+6xy+9y^2-18y+1=0$;

15) $-2x^2+xy+y^2+15x+3y-18=0$.

16.3. Привести уравнения к каноническому виду с помощью перехода к новой ДПСК и выяснить расположение относительно исходной ДПСК следующих поверхностей второго порядка:

1) $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-2x-2y-16z+22=0$;

2) $xy+xz+yz+2\sqrt{2}x+2\sqrt{6}y-2\sqrt{3}z-100=0$;

3) $x^2+4y^2+z^2+4xy-2xz-4yz-2x-6y+6z=0$;

4) $4x^2-6y^2+4z^2-4xz-8y-4z-3=0$;

5) $14x^2+12y^2+10z^2-8xy-8yz-12x-24y-373/9=0$;

6) $5x^2+7y^2+6z^2+4xz+4yz+10x+14y+8z-6=0$;

7) $x^2+5y^2+z^2+2xy+2yz+6xz-2x=0$;

8) $-8x^2+4y^2+4z^2+4xy+4xz-10yz+12x+24y+24z-9=0$;

9) $-18x^2-32z^2+40xy-48xz-30yz+20x-100y-140z-250=0$;

10) $2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+x-4y-3z+2=0$;

11) $\frac{7}{2}x^2+\frac{7}{2}y^2+8z^2-5xy-4xz-4yz-8x-8y-4z+36=0$;

12) $17x^2+17y^2+11z^2-16xy+8xz-8yz-2x+34y-44z+57=0$;

13) $11x^2+2y^2+5z^2+4xy-16xz+20yz+22x-68y-34z+62=0$;

14) $4x^2+y^2+4z^2-4xy+4yz-8xz-14x+y+8z+30=0$;

15) $-xy+xz+yz+2x+2y-2z=0$;

16) $y^2+2xy+4xz+2yz-4x-2y=0$;

17) $3x^2+12y^2+27z^2-12xy+18xz-36yz-3x+6y-9z-18=0$.

Глава 17
ВЕКТОРНЫЕ И МАТРИЧНЫЕ НОРМЫ

Рассмотрим поле P ($P=\mathbb{R}$ или $P=\mathbb{C}$). Через $\tilde{P}$ обозначим множество всех вектор-столбцов арифметических пространств $P_{n,1}$, $n\in\mathbb{N}$, т.е. $\tilde{P}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}P_{n,1}$.

Действительнозначная функция $\|\cdot\|: X\mapsto\|X\|$, определенная на $\tilde{P}$, называется *векторной нормой*, если для любого $n\in\mathbb{N}$ и для любых столбцов $X, Y\in P_{n,1}$ выполняются следующие условия:

1) $\|X\|\geqslant 0$, причем $\|X\|=0$ тогда и только тогда, когда $X=O_{n,1}$;

2) $\|\alpha X\|=|\alpha|\|X\|$, $\forall\alpha\in P$;

3) $\|X+Y\|\leqslant\|X\|+\|Y\|$.

Наиболее употребительными являются следующие векторные нормы:

октаэдрическая

$$\|X\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|,\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad \forall X=[x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^{\mathrm{T}}\in P_{n,1};$$

евклидова (унитарная)

$$\|X\|_2=\sqrt{X^{\mathrm{T}}\bar{X}}=\sqrt{X^{*}X}=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad \forall X\in P_{n,1};$$

кубическая

$$\|X\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|,\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad \forall X\in P_{n,1}.$$

Векторные нормы $\|\cdot\|_i$, $\|\cdot\|_j$ называются *эквивалентными* (обозначаются $\|\cdot\|_i\sim\|\cdot\|_j$), если выполняются следующие соотношения:

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \exists\alpha,\beta\in P\quad \forall X\in P_{n,1}\quad (\alpha\|X\|_i\leqslant\|X\|_j\leqslant\beta\|X\|_i).$$

Все векторные нормы на $\tilde{P}$ являются эквивалентными.

Рассмотрим множество $\tilde{\tilde{P}}$ всех матриц над полем P. Функция $\|\cdot\|: A\mapsto\|A\|$ с действительными значениями, определенная на множестве $\tilde{\tilde{P}}$, называется *матричной нормой*, если для любых $m, n, q\in\mathbb{N}$, любых $A, B\in P_{m,n}$, $C\in P_{n,q}$ и любого $\alpha\in P$ выполняются следующие условия:

1) $\|A\|\geqslant 0\wedge(\|A\|=0\Leftrightarrow A=O_{m,n})$;

2) $\|\alpha A\|=|\alpha|\|A\|$;

3) $\| A+B \| \leqslant \| A \| + \| B \|$;

4) $\| AC \| \leqslant \| A \| \cdot \| C \|$.

Приведем примеры некоторых матричных норм:

евклидова

$$\| A \|_{\mathrm{E}} = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \right)^{1/2}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad \forall A = (a_{ij}) \in P_{m,n};$$

октаэдрическая

$$\| A \|_{\mathrm{O}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad \forall A = (a_{ij}) \in P_{m,n};$$

M-норма

$$\| A \|_{M} = (nm)^{1/2} \max_{i,\, j} | a_{ij} |, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad \forall A = (a_{ij}) \in P_{m,n}.$$

Матричная норма $\| \cdot \|_{\text{м}}$ считается *согласованной* с векторной нормой $\| \cdot \|_{\text{в}}$, если для любых $m, n \in \mathbb{N}$, любой матрицы $A \in P_{m,n}$ и любого вектор-столбца $X \in P_{n,1}$ выполняется неравенство

$$\| AX \|_{\text{в}} \leqslant \| A \|_{\text{м}} \cdot \| X \|_{\text{в}}.$$

Для любой матричной нормы существует векторная норма, с которой эта матричная норма согласована. В то же время для любой векторной нормы существует матричная норма, согласованная с ней. Например, матричная норма, определяемая формулой

$$\| A \| = \sup \left\{ \| AX \|_{\text{в}} \,\middle|\, \| X \|_{\text{в}} = 1,\ X \in P_{n,1} \right\}, \quad \forall A \in P_{m,n}, \tag{17.1}$$

согласована с векторной нормой $\| \cdot \|_{\text{в}}$. Матричная норма (17.1) называется *нормой*, *подчиненной данной векторной норме*. Норму матрицы A, подчиненную векторной норме $\| X \|_i$, обозначают $\| A \|_i$.

Для любых чисел $m, n \in \mathbb{N}$ и любой матрицы $A \in P_{m,n}$ значение матричной нормы, подчиненной октаэдрической (кубической) векторной норме, задается формулами:

$$\| A \|_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{m} | a_{ij} |, \quad \left(\| A \|_{\infty} = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \right).$$

Значение же матричной нормы, подчиненной евклидовой векторной норме, задается формулой

$$\| A \|_2 = \sqrt{\lambda_1}, \tag{17.2}$$

где λ_1 – наибольшее характеристическое число матрицы $A^* A$.

Пример. Найти норму матрицы

$$\begin{bmatrix} 1-i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

подчиненную евклидовой векторной норме.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой (17.2). Для этого вычислим характеристические числа матрицы

$$A^*A = \begin{bmatrix} 1+i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Характеристическое уравнение этой матрицы имеет вид $(3-\lambda)(1-\lambda)^2-(1-\lambda)=$ $=0$, откуда находим характеристические числа: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2+\sqrt{2}$, $\lambda_3=2-\sqrt{2}$. Следовательно, $\|A\|_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

17.1. Найти октаэдрическую норму векторов:

1) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 4-3i \\ 1 \\ \sqrt{3}+i \end{bmatrix}$.

17.2. Найти евклидову норму векторов:

1) $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 2-i \\ -1 \\ 3i \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} -4-2i \\ -11i \\ \sqrt{2}+\sqrt{3}i \end{bmatrix}$.

17.3. Найти кубическую норму векторов:

1) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 2+i \\ -3+\sqrt{7}i \\ -1 \end{bmatrix}$.

17.4. Доказать, что для любых матриц $A, B \in P_{m,n}$ и любой матричной нормы выполняется неравенство $\|A-B\| \geqslant |\|A\|-\|B\||$.

17.5. Доказать, что для любой матричной нормы верны неравенства $\|E_n\| \geqslant 1$, $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$, $\|A^{-1}\| \geqslant \|A\|^{-1}$, $A \in P_{n,n}$.

17.6. Пусть $S \in P_{n,n}$ – некоторая невырожденная матрица, а $\|\cdot\|$ – матричная норма. Доказать, что действительнозначная функция f, определенная как $f(A)=\|SAS^{-1}\|$, $A \in P_{n,n}$, является матричной нормой.

17.7. Найти M-норму матриц:

$$1)\begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 10 \\ -11 & -3 & 5 \end{bmatrix};$$

$$2)\begin{bmatrix} 3-5i & -2 & 4+2i \\ 0 & 8+6i & -5 \\ 9 & \sqrt{2}+5i & 3+i \end{bmatrix};$$

$$3)\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2+\sqrt{2}i \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

17.8. Найти норму матрицы A, подчиненную октаэдрической векторной норме:

$$1)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & \pi & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$2)\begin{bmatrix} 3 & i & 0 \\ -i & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

17.9. Найти норму матрицы A, подчиненную евклидовой векторной норме:

$$1)\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$2)\begin{bmatrix} i & i \\ -i & i \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

17.10. Найти норму матрицы A, подчиненную кубической векторной норме:

1) $A = \begin{bmatrix} 1+i & 1 & -1 \\ 7/5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & \alpha \\ \alpha & -4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$.

17.11. Пусть A — симметрическая матрица порядка n над полем $\mathbb{R}$ с характеристическими числами $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ такими, что $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \lambda_n$. Пусть $\|\cdot\|$ — евклидова векторная норма. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим $B_k = \frac{1}{\| A^k \|} A^k$, где $\|T\| = \max\limits_{\|X\|=1} \|TX\|$ для $T \in \mathbb{R}_{n,n}$. Показать, что существует матрица C ранга 1 такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} \|B_k - C\| = 0$.

17.12. Пусть A — симметрическая матрица порядка n над полем $\mathbb{R}$ с характеристическими числами $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$, причем $|\lambda_1| < |\lambda_n|$, ..., $|\lambda_{n-1}| < |\lambda_n|$. Пусть $\|\cdot\|$ — евклидова векторная норма и Z — собственный вектор линейного оператора $X \mapsto AX$ евклидова пространства $\mathbb{R}_{n,1}$, который соответствует собственному значению λ_n и имеет норму, равную 1. Определим последовательность единичных векторов пространства $\mathbb{R}_{n,1}$: $X_0, X_1, ..., X_k, ...$, где $X_{k+1} = \frac{1}{\| AX_k \|} AX_k$, $k = 1, 2, \dots$. Предположим, что $X_0^T Z \neq 0$. Показать, что $\lim\limits_{k \to \infty} \|X_k - Z\| = 0$.

Глава 18
ПСЕВДООБРАТНАЯ МАТРИЦА

Пусть $A \in P_{m,n}$, где $P = \mathbb{R}$ или $P = \mathbb{C}$. Если матрица A имеет ранг $r > 0$, то эту матрицу можно представить в виде произведения двух матриц B и C:

$$A = B \cdot C, \tag{18.1}$$

имеющих соответственно размеры $m \times r$ и $r \times n$, причем $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} C = r$ (*скелетное разложение матрицы* A).

Матрица A^+ размеров $n \times m$ называется *псевдообратной матрицей* для $m \times n$-матрицы A, если выполняются следующие равенства:

$$AA^+A = A, \qquad A^+AA^+ = A^+,$$
$$(A^+A)^* = A^+A, \quad (AA^+)^* = AA^+.$$

Для любой матрицы $A \in P_{m,n}$ существует псевдообратная матрица A^+, которая может быть вычислена по формуле

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*, \tag{18.2}$$

где B, C — матрицы из скелетного разложения (18.1) матрицы $A \neq O_{m,n}$.

Для всякой матрицы $A \in P_{m,n}$ существует только одна псевдообратная матрица.

Отметим, что если столбцы матрицы A линейно независимы, то

$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^*,$$

если же строки матрицы A линейно независимы, то

$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1}.$$

Для невырожденной матрицы A выполняется равенство $A^+ = A^{-1}$.

Свойства псевдообратной матрицы:

1) $(A^*)^+ = (A^+)^*$;

2) $(A^+)^+ = A$;

3) $(AA^+)^2 = AA^+$;

4) $(A^+A)^2 = A^+A$.

Рассмотрим матричное уравнение

$$AX = B, \quad A \in P_{m,n}, \quad B \in P_{m,1}. \tag{18.3}$$

Столбец $Y = B - AX$ называется *невязкой столбца* X. Ясно, что если X — решение матричного уравнения (18.3), то его невязка нулевая.

Столбец X^0 с минимальной нормой (евклидовой), дающий минимальную невязку, называется *нормальным псевдорешением уравнения*. Нормальное псевдорешение уравнения (18.3) всегда существует, единственно и выражается формулой

$$X^0 = A^+ B. \tag{18.4}$$

Пример. Найти нормальное псевдорешение уравнения (18.3), если

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Для того чтобы найти нормальное псевдорешение, вычислим псевдообратную матрицу A^+. Для этого воспользуемся формулой (18.2). Так как скелетное разложение матрицы A имеет вид

$$A = BC = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

то

$$A^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 14 & 11 \\ 11 & 26 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 6 & -3 & 3 \\ -5 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, согласно формуле (18.4) нормальное псевдорешение имеет вид

$$X^0 = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 6 & -3 & 3 \\ -5 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

18.1. Найти псевдообратную матрицу для нулевой матрицы $O_{m,n} \in P_{m,n}$.

18.2. Как связаны между собой ранги матриц A и A^+?

18.3. Найти скелетное разложение матрицы A:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; 2) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$;

3) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 7 & 3\\ 1 & 3 & 10 & 4\end{bmatrix}$.

18.4. Найти псевдообратную матрицу A^{+} для матрицы A:

1) $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 0 & 5\\ -1 & 2 & 3\end{bmatrix}$; 2) $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$; 3) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$;

4) $A=\begin{bmatrix}2-i & 1+2i\\ 4 & -i\\ 0 & 1\end{bmatrix}$; 5) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 7 & 3\\ 1 & 3 & 10 & 4\end{bmatrix}$.

18.5. Найти псевдообратную матрицу для $m\times n$-матрицы, все элементы которой равны единице.

18.6. Найти нормальное псевдорешение системы линейных уравнений

$$\begin{cases}2x_1 + 3x_2 + x_3 = -2,\\ x_2 + x_3 = 0,\\ x_1 + x_2 = 2.\end{cases}$$

Глава 19
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Множество всех целых чисел $\mathbb{Z}$ замкнуто относительно операций сложения и умножения чисел и относительно этих операций образует коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля (т.е. область целостности). Многие свойства этого кольца аналогичны свойствам кольца многочленов над полем.

Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$. Если существует число $c \in \mathbb{Z}$ такое, что $a = bc$, то говорят, что b *делит* a или a *делится на* b, и пишут $b|a$. При этом число b называется *делителем числа* a.

По теореме о делении с остатком для любых $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, существует единственная пара целых чисел q и r такая, что

$$a = bq + r, \quad 0 \leqslant r < |b|,$$

при этом число q называется *частным*, а число r – *остатком* при делении a на b. В частности, ненулевое число b делит число a тогда и только тогда, когда остаток от деления a на b равен нулю. Процесс нахождения частного и остатка называется *делением с остатком*.

Отметим некоторые свойства отношения делимости целых чисел. Для $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

1) $a|a$;

2) $b|a$ и $a|b$ тогда и только тогда, когда $|a| = |b|$;

3) если $c|b$ и $b|a$, то $c|a$;

4) если $c|a$ и $c|b$, то $c|(a \pm b)$;

5) если $b|a$, то $b|ac$ и $bc|ac$.

Из определения отношения делимости следует также, что любое натуральное число $n > 1$ делится на 1 и на само себя. Если других натуральных делителей у него нет, то число n называется *простым*, в противном случае – *составным*. Любое натуральное число, не равное единице, представимо в виде произведения простых чисел, причем это разложение единственно с точностью до порядка сомножителей (*основная теорема арифметики*). Следовательно, любое целое число $a \notin \{0, \pm 1\}$ можно представить в виде

$$a = cp_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s},$$

где $c \in \{-1, 1\}$; $k_1, \ldots, k_s \in \mathbb{N}$; $p_1, \ldots, p_s$ – попарно различные простые числа.

Такое представление числа называется *каноническим разложением числа* a. Каноническое разложение целого числа единственно с точностью до порядка сомножителей.

Наибольшим общим делителем (НОД) *чисел* $a_1, ..., a_n$ называется наибольшее из чисел, делящих одновременно каждое из чисел $a_1, ..., a_n$. Можно также определить НОД чисел как такой их неотрицательный общий делитель, который сам делится на любой другой общий делитель этих чисел.

Наименьшим общим кратным (НОК) *чисел* $a_1, ..., a_n$ называется наименьшее положительное число, которое делится на каждое из этих чисел. Можно также определить НОК чисел как такое их неотрицательное общее кратное, которое само делит любое другое их общее кратное. НОД и НОК чисел $a_1, ..., a_n$ обозначают $(a_1, ..., a_n)$ и $[a_1, ..., a_n]$ соответственно. Нахождение НОД и НОК нескольких чисел можно свести к нахождению НОД и НОК двух чисел:

$$(a_1, ..., a_n) = (a_1,\ (a_2, ..., a_n)), \quad [a_1, ..., a_n] = [a_1, [a_2, ..., a_n]].$$

Для НОД и НОК любых двух чисел a и b справедливо равенство

$$(a, b) \cdot [a, b] = |ab|.$$

Если числа a и b представимы в виде

$$a = c_a p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s},$$
$$b = c_b p_1^{l_1} p_2^{l_2} \cdots p_s^{l_s},$$

где $c_a, c_b \in \{-1, 1\}$; p_i – попарно различные простые числа; $k_i,\ l_i \in \mathbb{N}_0$, то

$$(a, b) = p_1^{\min\{k_1, l_1\}} p_2^{\min\{k_2, l_2\}} \cdots p_s^{\min\{k_s, l_s\}},$$
$$[a, b] = p_1^{\max\{k_1, l_1\}} p_2^{\max\{k_2, l_2\}} \cdots p_s^{\max\{k_s, l_s\}}.$$

Классическим алгоритмом поиска НОД двух чисел является *алгоритм Евклида*. Для этого необходимо выполнить деление с остатком числа a на b, затем делитель разделить на полученный остаток и так до тех пор, пока не будет получен остаток, равный нулю:

$$\begin{array}{ll}
a = bq_1 + r_1, & 0 < r_1 < |b|, \\
b = r_1 q_2 + r_2, & 0 < r_2 < r_1, \\
r_1 = r_2 q_3 + r_3, & 0 < r_3 < r_2, \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1}, \\
r_{n-1} = r_n q_{n+1}. &
\end{array}$$

Последний ненулевой остаток r_n и является НОД чисел a и b, т.е. $r_n = (a, b)$.

Из алгоритма Евклида можно получить представление наибольшего общего делителя (a, b) в виде линейного разложения:

$$(a, b) = ua + vb, \quad u, v \in \mathbb{Z}.$$

Для этого необходимо из предпоследнего равенства выразить r_n через r_{n-2} и r_{n-1}, затем, используя предыдущее равенство, – через r_{n-3} и r_{n-2} и так до тех пор, пока в результате использования первого равенства не будет получено искомое представление числа $r_n = (a, b)$.

Отметим, что описанный процесс вычисления коэффициентов линейного разложения НОД удобно проводить в матричном виде. Используя алгоритм Евклида, можно получить равенства:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bq_1 + r_1 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ r_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 q_2 + r_2 \\ r_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \ldots = A \begin{bmatrix} r_{n-1} \\ r_n \end{bmatrix},$$

где

$$A = \begin{bmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ldots \begin{bmatrix} q_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда $\begin{bmatrix} r_{n-1} \\ r_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Приравнивая элементы, стоящие во второй строке столбцов в обеих частях последнего равенства, получаем, что коэффициенты линейного разложения числа $r_n = (a, b)$ равны элементам второй строки матрицы A^{-1}. Проследив, как меняются элементы матриц при каждом шаге алгоритма Евклида, можно получить алгоритм вычисления коэффициентов линейного разложения, напоминающий схему Горнера:

	$-q_1$	$-q_2$	...	$-q_i$	...	$-q_n$
$u_0 = 0$	$u_1 = 1$	$u_2 =$ $= u_0 -$ $- q_2 u_1$	...	$u_i =$ $= u_{i-2} -$ $- q_i u_{i-1}$	...	$u = u_n =$ $= u_{n-2} -$ $- q_n u_{n-1}$
$v_0 = 1$	$v_1 = -q_1$	$v_2 =$ $= v_0 -$ $- q_2 v_1$	...	$v_i =$ $= v_{i-2} -$ $- q_i v_{i-1}$	...	$v = v_n =$ $= v_{n-2} -$ $- q_n v_{n-1}$

Отметим, что коэффициенты u_i и v_i не зависят друг от друга, поэтому этот способ удобен, если возникает необходимость искать лишь один из коэффициентов.

Кроме указанного выше алгоритма нахождения НОД существуют другие алгоритмы, среди которых – бинарный алгоритм [14, 42].

Одним из приложений вышеизложенного материала является его использование при решении *диофантовых* (т.е. *целочисленных*) *уравнений*. Рассмотрим линейное диофантово уравнение

$$ax+by=c,\quad a,b,c\in\mathbb{Z},\quad a,b\neq 0. \tag{19.1}$$

Пара целых чисел (x, y), обращающая уравнение в верное равенство, называется *решением уравнения* (19.1). Уравнение называется *совместным*, если оно имеет хотя бы одно решение. Уравнение (19.1) совместно тогда и только тогда, когда c делится на наибольший общий делитель (a, b). В этом случае множество решений имеет вид

$$\left\{\left(x_0+\frac{b}{(a,b)}t,\ y_0-\frac{a}{(a,b)}t\right)\middle|\,t\in\mathbb{Z}\right\},$$

где (x_0, y_0) – частное решение уравнения (19.1). Его можно найти, домножив линейное разложение $(a,b)=ua+vb$ на число $\dfrac{c}{(a,b)}$. В результате получим:

$$(x_0, y_0)=\left(\frac{uc}{(a,b)},\ \frac{vc}{(a,b)}\right).$$

Числа a и b называются *взаимно простыми*, если $(a,b)=1$. Используя линейное разложение НОД и свойства делимости, имеем *критерий взаимной простоты чисел*: числа a и b взаимно просты тогда и только тогда, когда существуют числа u и v такие, что $ua+vb=1$.

Свойства взаимно простых чисел:

1) если $(a,b)=1$, то $(a,bc)=(a,c)$ для любого c;

2) если $(a,b)=1$ и $a|bc$, то $a|c$;

3) если $(a,b_i)=1,\ i=\overline{1,n}$, то $(a,b_1\cdots b_n)=1$;

4) если $(a,b)=1,\ a|c,\ b|c$, то $ab|c$;

5) если $d=(a,b)\neq 0$ и a_1, b_1 – частные при делении соответственно a и b на d, то числа a_1 и b_1 взаимно просты.

Пусть m – натуральное число, a и b – произвольные целые числа. Говорят, что число *a сравнимо с числом b по модулю m*, если разность $a-b$ делится на m, при этом пишут $a\equiv b \pmod m$.

С в о й с т в а с р а в н е н и й:

1) $a \equiv a \pmod m$;

2) если $a \equiv b \pmod m$, то $b \equiv a \pmod m$;

3) если $a \equiv b \pmod m$ и $b \equiv c \pmod m$, то $a \equiv c \pmod m$;

4) если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то $a \pm c \equiv b \pm d \pmod m$, $ac \equiv bd \pmod m$;

5) если $a \equiv b \pmod m$, то $ca \equiv cb \pmod m$;

6) $a \equiv b \pmod m \Leftrightarrow ca \equiv cb \pmod{cm}$, $c \in \mathbb{N}$;

7) если $ca \equiv cb \pmod m$ и $(c, m) = 1$, то $a \equiv b \pmod m$;

8) если $a \equiv b \pmod m$ и d – делитель m, то $a \equiv b \pmod d$;

9) $a \equiv b \pmod m$ тогда и только тогда, когда a и b имеют один и тот же остаток при делении на m;

10) $a \equiv b \pmod{m_i}$, $i = \overline{1, n}$, $\Leftrightarrow a \equiv b \pmod{[m_1, \ldots, m_n]}$;

11) если p – простое число и $(a, p) = 1$, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ (*малая теорема Ферма*).

Из первых трех свойств следует, что бинарное отношение сравнимости целых чисел по модулю m является отношением эквивалентности. При этом классы эквивалентности называются *классами вычетов* по модулю m.

Рассмотрим сравнение с неизвестным x вида

$$ax \equiv b \pmod m. \tag{19.2}$$

Целое число x_0 называется *решением сравнения* (19.2), если $ax_0 \equiv b \pmod m$. Два сравнения называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений.

Сравнение (19.2) имеет решение тогда и только тогда, когда число b делится на число $d = (a, m)$. В этом случае решениями сравнения (19.2) будут все числа из множества $\left\{ x_0 + k\dfrac{m}{d} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$, где $x_0 = \dfrac{bu}{d}$; u – коэффициент при числе a в линейном разложении наибольшего общего делителя $(a, b) = au + mv$.

Таким образом, сравнение (19.2) равносильно сравнению $x \equiv \dfrac{bu}{d} \left(\mathrm{mod}\, \dfrac{m}{d} \right)$.

Рассмотрим систему сравнений

$$\begin{cases} x \equiv b_1 \pmod{m_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x \equiv b_k \pmod{m_k}. \end{cases} \tag{19.3}$$

Система (19.3) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение.

Система (19.3) называется *приведенной*, если числа $m_1, ..., m_k$ попарно взаимно просты. Приведенная система всегда совместна и равносильна сравнению

$$x \equiv b_1 x_1 \frac{m}{m_1} + \ldots + b_k x_k \frac{m}{m_k} (\operatorname{mod} m),$$

где $m = m_1 \cdots m_k$; x_i – произвольное решение сравнения $\frac{m}{m_i} x \equiv$ $\equiv 1 (\operatorname{mod} m_i)$ (*китайская теорема об остатках*).

Если система (19.3) не является приведенной, то для ее решения следует построить равносильную приведенную систему, используя следующие два факта:

1) система сравнений

$$\begin{cases} x \equiv b (\operatorname{mod} m_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x \equiv b (\operatorname{mod} m_k) \end{cases}$$

равносильна сравнению $x \equiv b (\operatorname{mod} [m_1, ..., m_k])$;

2) если m_1 делит m_2, то система сравнений

$$\begin{cases} x \equiv b_1 (\operatorname{mod} m_1), \\ x \equiv b_2 (\operatorname{mod} m_2) \end{cases}$$

совместна тогда и только тогда, когда $b_1 \equiv b_2 (\operatorname{mod} m_1)$, и в этом случае равносильна сравнению $x \equiv b_2 (\operatorname{mod} m_2)$.

Пример 1. Найти НОД и НОК чисел $a = 427$ и $b = 336$, а также линейное разложение НОД по a и b.

Решение. Для нахождения НОД воспользуемся алгоритмом Евклида:

$$\begin{aligned} 427 &= 336 \cdot 1 + 91, \\ 336 &= 91 \cdot 3 + 63, \\ 91 &= 63 \cdot 1 + 28, \\ 63 &= 28 \cdot 2 + 7, \\ 28 &= 7 \cdot 4, \end{aligned}$$

из которого следует, что $(427, 336) = 7$. Тогда,

$$[427, 336] = \frac{427 \cdot 336}{7} = 20\,496.$$

Теперь, используя равенства алгоритма Евклида, получим линейное разложение НОД:

$$7 = 63 - 28 \cdot 2 = 63 - (91 - 63 \cdot 1) \cdot 2 = -91 \cdot 2 + 63 \cdot 3 = -91 \cdot 2 + (336 - 91 \cdot 3) \cdot 3 =$$

$$= 336 \cdot 3 - 91 \cdot 11 = 336 \cdot 3 - (427 - 336 \cdot 1) \cdot 11 = 427 \cdot (-11) + 336 \cdot 14.$$

Таким образом, коэффициенты линейного разложения $(a,b)=au+bv$ наибольшего общего делителя чисел 427 и 336 равны $u=-11$, $v=14$.

Заметим также, что коэффициенты u и v можно искать матричным методом:

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&5\\11&4\end{pmatrix},$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}4&-5\\-11&14\end{pmatrix}\Rightarrow u=-11,\ v=14,$$

а также табличным методом:

	-1	-3	-1	-2
0	1	-3	4	$-11=u$
1	-1	4	-5	$14=v$

Пример 2. Решить диофантово уравнение $2256x+1363y=1316$, $x, y\in\mathbb{Z}$.

Решение. Поскольку число 1316 делится на наибольший общий делитель $(2256, 1363)=47$, то уравнение совместно. Линейное разложение НОД имеет вид $47=2256\cdot(-3)+1363\cdot 5$. Домножив это равенство на 28, получим: $1316=2256\cdot(-84)+1363\cdot 140$. Следовательно, решения рассматриваемого уравнения имеют вид

$$\left(-84+\frac{1363}{47}t,\ 140-\frac{2256}{47}t\right)=(-84+29t,\ 140-48t),\ t\in\mathbb{Z}.$$

Пример 3. Найти $[20, 30, 45]$.

Решение. Согласно формулам нахождения НОК $[20,30,45]=[20,[30,45]]$. Так как $(30,45)=15$, то $[30,45]=\dfrac{30\cdot 45}{15}=90$, а так как $(20,90)=10$, то $[20,90]=\dfrac{20\cdot 90}{10}=180$.

Пример 4. Найти НОД и НОК чисел 264 и 252, если известны их канонические разложения: $264=2^3\cdot 3\cdot 11$; $252=2^2\cdot 3^2\cdot 7$.

Решение. Так как $264=2^3\cdot 3^1\cdot 7^0\cdot 11^1$, $252=2^2\cdot 3^2\cdot 7^1\cdot 11^0$, то

$$(a,b)=2^{\min\{3,2\}}\cdot 3^{\min\{1,2\}}\cdot 7^{\min\{0,1\}}\cdot 11^{\min\{1,0\}}=2^2\cdot 3\cdot 7^0\cdot 11^0=12,$$

$$[a,b]=2^{\max\{3,2\}}\cdot 3^{\max\{1,2\}}\cdot 7^{\max\{0,1\}}\cdot 11^{\max\{1,0\}}=2^3\cdot 3^2\cdot 7\cdot 11=5544.$$

Пример 5. Найти остаток от деления числа $13^{16}-2^{25}\cdot 5^{25}$ на число 3.

Решение. Поскольку $13\equiv 1(\bmod 3)$, $2\equiv -1(\bmod 3)$, $5\equiv -1(\bmod 3)$, то $13^{16}-2^{25}\cdot 5^{25}\equiv 1^{16}-(-1)^{25}(-1)^{25}\equiv 0(\bmod 3)$, т.е остаток при делении $13^{16}-2^{25}\cdot 5^{25}$ на 3 равен 0.

Пример 6. Решить сравнение $3x \equiv 6 \pmod 9$.

Р е ш е н и е. Число $b = 6$ делится на $(a, m) = (3, 9) = 3$, поэтому сравнение совместно. Из свойства 5 сравнений следует, что $x \equiv 2 \pmod 3$. Тогда множество $\{2 + 3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ является множеством решений рассматриваемого сравнения.

Пример 7. Решить сравнение $98x \equiv 35 \pmod{119}$.

Р е ш е н и е. Найдем наибольший общий делитель $(98, 119)$, используя алгоритм Евклида:

$$\begin{aligned} 119 &= 98 \cdot 1 + 21, \\ 98 &= 21 \cdot 4 + 14, \\ 21 &= 14 \cdot 1 + 7, \\ 14 &= 7 \cdot 2. \end{aligned}$$

Таким образом, $(98, 119) = 7$. Поскольку 35 делится на 7, то рассматриваемое сравнение совместно, а так как линейное разложение наибольшего общего делителя 7 имеет вид $7 = 98 \cdot (-6) + 119 \cdot 5$, то исходное сравнение равносильно сравнению $x \equiv \frac{35 \cdot (-6)}{7} \left(\bmod \frac{119}{7} \right)$, т.е $x \equiv -30 \equiv 4 \pmod{17}$.

Пример 8. Решить систему

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 6, \\ x \equiv 7 \pmod 5. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Числа 6 и 5 взаимно просты, поэтому рассматриваемая систем является приведенной. Тогда она равносильна сравнению

$$x \equiv 1 \cdot x_1 \cdot \frac{30}{6} + 7 \cdot x_2 \cdot \frac{30}{5} \pmod{30},$$

где x_1, x_2 – решения сравнений $\frac{30}{6} x \equiv 1 \pmod 6$ и $\frac{30}{5} x \equiv 1 \pmod 5$ соответственно.

Построив линейное разложение $(5, 6) = 1 = 5 \cdot (-1) + 6 \cdot 1$, получим, что первое сравнение равносильно сравнению $x \equiv 1 \cdot (-1) \pmod 6$, а второе – сравнению $x \equiv 1 \cdot 1 \pmod 5$. Следовательно, $x \equiv 5 \cdot (-1) + 7 \cdot 1 \cdot 6 \equiv 37 \equiv 7 \pmod{30}$ – решение исходной системы.

Пример 9. Решить систему

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{15}, \\ x \equiv -3 \pmod 5, \\ x \equiv -1 \pmod 9. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Система не является приведенной, поэтому преобразуем ее. Сравнение $x \equiv 2 \pmod{15}$ равносильно системе

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3, \\ x \equiv 2 \pmod 5. \end{cases}$$

Следовательно, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3, \\ x \equiv 2 \pmod 5, \\ x \equiv -3 \pmod 5, \\ x \equiv -1 \pmod 9. \end{cases}$$

Заметим, что сравнения $x \equiv 2 \pmod 5$ и $x \equiv -3 \pmod 5$ равносильны. Кроме того, система

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3, \\ x \equiv -1 \pmod{3^2} \end{cases}$$

равносильна сравнению $x \equiv -1 \pmod 9$. Таким образом, получили равносильную исходной приведенную систему

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 5, \\ x \equiv -1 \pmod 9, \end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$x \equiv 2 \cdot x_1 \cdot \frac{45}{5} + (-1) \cdot x_2 \cdot \frac{45}{9} \pmod{45},$$

где x_1, x_2 – решения сравнений $\frac{45}{5} x \equiv 1 \pmod 5$ и $\frac{45}{9} x \equiv 1 \pmod 9$ соответственно. Так как $(9,5) = 1 = (-1) \cdot 9 + 2 \cdot 5$, то сравнения $9x \equiv 1 \pmod 5$ и $5x \equiv 1 \pmod 9$ имеют решения $x \equiv 1 \cdot (-1) \pmod 5$ и $x \equiv 2 \cdot 1 \pmod 9$. Следовательно, $x \equiv 2 \cdot (-1) \cdot 9 + (-1) \cdot 2 \cdot 5 \equiv -28 \equiv 17 \pmod{45}$ – решение исходной системы.

19.1. Найти частное g и остаток r от деления числа a на число b, если:

1) $a = 134$, $b = 26$; 2) $a = -134$, $b = 26$;
3) $a = 134$, $b = -26$; 4) $a = -134$, $b = -26$.

19.2. Показать, что если r – остаток при делении числа a на число b, то при любом $n \in \mathbb{N}$ число r^n будет иметь тот же остаток при делении на b, что и число a^n при делении на b^n.

19.3. Пусть q и r – соответственно частное и остаток при делении числа a на число b. Найти b и r, если:

1) $a = 534$, $q = 26$; 2) $a = 741$, $q = -14$;
3) $a = -945$, $q = -16$; 4) $a = -234$, $q = 7$.

19.4. Найти все числа $n \in \mathbb{N}$ такие, что:

1) $25000 < a < 30000$, а остатки при делении a на числа 131 и 1965 совпадают и равны125;

2) $25000 < a < 30000$, а остатки при делении a на числа 393 и 655 совпадают и равны125.

19.5. Найти все $n \in \mathbb{N}$ такие, что число $n^2 + 1$ делится на $n + 1$.

19.6. Показать, что для любого нечетного $n \in \mathbb{Z}$ число $n^2 - 1$ делится на 8.

19.7. Доказать, что существует бесконечно много чисел вида $4n^2+1$, $n\in\mathbb{N}$, делящихся одновременно на 13 и на 5.

19.8. Доказать, что для любого $n\in\mathbb{N}$ число $3^{3n+3}-26n-27$ делится на 169.

19.9. Показать, число 2^n-1, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 1$, лишь тогда является простым (*простое число Мерсенна*), когда n – простое число.

19.10. Показать, что число $(n+1)^n-1$ делится на n^2 для любого $n\in\mathbb{N}$.

19.11. Пусть n – натуральное число. Доказать, что существует натуральное число m такое, что числа m, $m+1$, ..., $m+n+1$ являются составными.

19.12. Доказать, что для любого натурального значения n произведение $(n+1)(n+2)\cdots(n+n)$ делится на 2^n.

19.13. С помощью алгоритма Евклида вычислить наибольшие общие делители:

1) $(187, 221)$; 2) $(549, 387)$;

3) $(6188, 4109)$; 4) $(2419, 1189, 1711)$.

19.14. Вычислить наименьшие общие кратные:

1) $[187,\ 221]$; 2) $[549, 387]$;

3) $[6188, 4109]$; 4) $[2419, 1189, 1711]$.

19.15. Для двух чисел $a, b\in\mathbb{N}$ найти наибольший общий делитель (a, b) и его линейное разложение, если:

1) $a=449,\ b=253$; 2) $a=1734,\ b=822$;
3) $a=4373,\ b=826$; 4) $a=1806,\ b=1462$;
5) $a=3667,\ b=2299$; 6) $a=4623,\ b=3743$;
7) $a=3683,\ b=1073$; 8) $a=3791,\ b=3281$;
9) $a=3827,\ b=3293$; 10) $a=1445,\ b=625$;
11) $a=2890,\ b=1258$; 12) $a=6188,\ b=4709$;
13) $a=12\,606,\ b=6494$.

19.16. Решить уравнения в целых числах:

1) $18x+35y=1$; 2) $91x+117y=156$; 3) $258x+172y=112$.

19.17. Найти канонические разложения следующих чисел: 1711, 48 737, 168 929, 348 687, $10!$, $20!$.

19.18. Используя канонические разложения, найти НОД и НОК чисел a, b, c, если:

1) $a=1862$, $b=1044$, $c=3146$;
2) $a=6897$, $b=6545$, $c=7007$.

19.19. Показать, что количество простых делителей натурального числа a не превосходит $\log_2 a$.

19.20. Доказать, что существует бесконечно много простых чисел вида:

1) $3k+2$, $k\in\mathbb{N}$; 2) $4k+3$, $k\in\mathbb{N}$; 3) $6k+5$, $k\in\mathbb{N}$.

19.21. Показать, что для любого $n\in\mathbb{N}$, $n>1$, числа n и $n+1$ взаимно просты.

19.22. Найти натуральные числа a и b, для которых выполняются следующие условия:

1) $a+b=180, (a,b)=45$; 2) $a+b=168, (a,b)=14$;

3) $(a,b)=6, ab=396$; 4) $(a,b)=30, a/b=7/3$;

5) $(a,b)=12, [a,b]=840$; 6) $(a,b)=15, [a,b]=420$;

7) $a-b=165, [a,b]=328\cdot(a,b)$.

19.23. Доказать, что для всякого натурального числа $n>2$ в интервале $[n, n!]$ имеется хотя бы одно простое число.

19.24. Пусть n – натуральное число, большее 4. Доказать, что число n является простым тогда и только тогда, когда $(n-1)!$ не делится на n.

19.25. Доказать, что для любых натуральных m и n, $m\neq n$, числа Ферма $f_m=2^{2^m}+1$, $f_n=2^{2^n}+1$ взаимно просты.

19.26. Пусть $n\in\mathbb{N}$. Какие значения могут принимать остатки при делении числа 23^n на число 7?

19.27. Показать, что число $13^{n+2}+14^{2n+1}$ делится на 61 для любого $n\in\mathbb{Z}$.

19.28. Показать, что число $8^{2n+1}+7^{n+2}$ делится на 57 для любого $n\in\mathbb{Z}$.

19.29. Показать, что если для некоторых $a,b\in\mathbb{Z}$ число $\dfrac{18a+5b}{19}$ является целым, то число $\dfrac{11a+2b}{19}$ также целое.

19.30. Показать, что число 13 делит число $2^{70}+3^{70}$.

19.31. Показать, что для любого целого числа a и различных нечетных простых чисел p и q, не делящих a, если $(p-1)|(q-1)$, то $a^{q-1}\equiv 1(\operatorname{mod} pq)$.

19.32. Доказать, что $2^{3^n}\equiv -1(\operatorname{mod} 3^{n+1})$ для всех $n\in\mathbb{N}$.

19.33. Доказать, что если число p – простое, то для всех $a,b\in\mathbb{Z}$ $(a+b)^p\equiv a^p+b^p\,(\operatorname{mod} p)$.

19.34. Доказать, что для любого $n\in\mathbb{N}$ число $2^{2^{6n+2}}+3$ делится на 19.

19.35. Найти остаток при делении числа a на число b, если:

1) $a=21\,174\cdot 5178\cdot 39$, $b=1485$;

2) $a=121\,917\cdot 251\,992\cdot 3018$, $b=121$.

19.36. Решить сравнения:

1) $5x\equiv 6(\operatorname{mod} 7)$; 2) $9x\equiv 1(\operatorname{mod} 25)$;

3) $80x\equiv 92(\operatorname{mod} 117)$; 4) $22x\equiv 63(\operatorname{mod} 119)$;

5) $6x\equiv 13(\operatorname{mod} 127)$; 6) $88x\equiv 324(\operatorname{mod} 404)$;

7) $259x\equiv 407(\operatorname{mod} 629)$; 8) $369x\equiv 549(\operatorname{mod} 846)$;

9) $25x\equiv 10(\operatorname{mod} 855)$.

19.37. Решить системы сравнений:

1) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3, \\ x \equiv 5 \pmod 5, \\ x \equiv 7 \pmod 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 5, \\ x \equiv 2 \pmod 7, \\ x \equiv 1 \pmod{11}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{13}, \\ x \equiv 1 \pmod{31}, \\ x \equiv 5 \pmod{23}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3, \\ x \equiv -3 \pmod 5, \\ x \equiv -2 \pmod 7; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x \equiv 6 \pmod{25}, \\ x \equiv 2 \pmod 9, \\ x \equiv -4 \pmod{15}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{14}, \\ x \equiv 3 \pmod{12}, \\ x \equiv -3 \pmod{18}; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x \equiv 10 \pmod{30}, \\ x \equiv 10 \pmod{21}, \\ x \equiv 3 \pmod{28}; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{16}, \\ x \equiv 16 \pmod{22}, \\ x \equiv 5 \pmod{33}; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 9, \\ x \equiv 32 \pmod{43}, \\ x \equiv 4 \pmod{51}, \\ x \equiv 72 \pmod{901}. \end{cases}$

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Глава 1

1.2. 1) При $x > 0$ A правее B, при $x = 0$ $A = B$, при $x < 0$ A левее B; 2) при $x = 0$ или $x = 1$ $A = B$, при $x < 0$ или $x > 1$ A левее B, при $0 < x < 1$ A правее B; 3) при $x < 0$ A правее B, при $x = 0$ $A = B$, при $x > 0$ A левее B; 4) A левее B при всех $x \in \mathbb{R}$.

1.3. 1) Две точки: $A(-5)$, $B(5)$; 2) две точки: $A(-3)$, $B(1)$; 3) две точки: $A(3/2)$, $B(5/2)$; 4) $[5, +\infty)$; 5) $(-\infty, 4]$; 6) $(-\infty, 3]$.

1.4. 1) $[2/9, +\infty)$; 2) $(1, 4]$; 3) $[-4, -1) \cup (1, 4]$; 4) $[-4, 4]$; 5) $(-\infty, -6] \cup [6, +\infty)$; 6) $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$; 7) $[-1, 3]$; 8) $(-2, 4)$; 9) $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$; 10) $x \in \mathbb{R}$; 11) $[-3, 1]$; 12) $(-\infty, 4]$; 13) $[1, 2)$.

1.5. 1) 3, 3; 2) −2, 2; 3) 3, 3; 4) −1, 1; 5) 1, 1.

1.6. $B(6), C(-2)$.

1.7. 1) $x_B = 6$; 2) $x_B = 7$, $x_B = -1$; 3) $x_B = -5$; 4) $x_B = 1$; 5) $x_B = 1$, $x_B = -3$; 6) $x_B = \pm 8$.

1.8. 1) −4; 2) −10.

1.9. $\dfrac{AB}{BC} = -3$, $\dfrac{AC}{CB} = 2$, $\dfrac{BA}{AC} = -\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{BC}{CA} = -\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{CA}{AB} = -\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{CB}{BA} = -\dfrac{1}{3}$.

1.10. 1) −3; 2) 0; 3) −10/3; 4) 1/2.

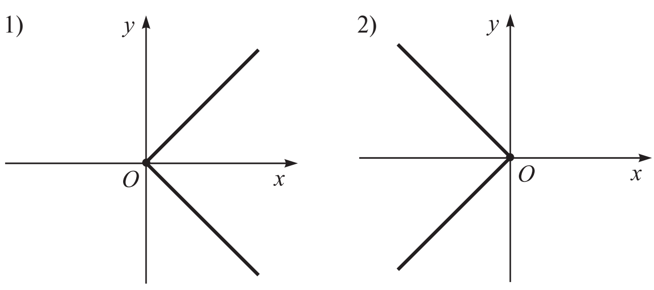
1.11. $\dfrac{AB}{BC} = -\lambda - 1$, $\dfrac{BC}{CA} = \dfrac{1}{\lambda}$, $\dfrac{BA}{AC} = -\dfrac{1}{\lambda} - 1$, $\dfrac{CB}{BA} = -\dfrac{1}{1+\lambda}$, $\dfrac{CA}{AB} = -\dfrac{\lambda}{1+\lambda}$.

1.12. 1) 2; 2) −4.

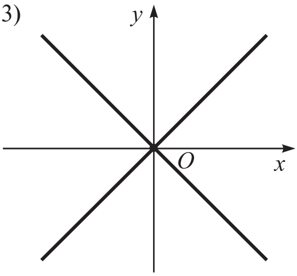
1.13. 1) 17/3; 2) −2; 3) −1.

1.14. 5, 12.

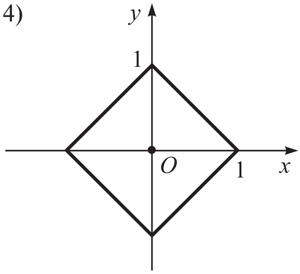
1.15.



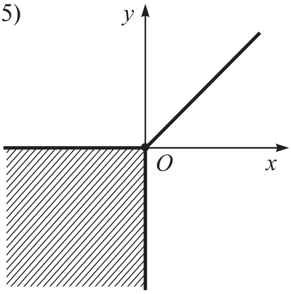
3)



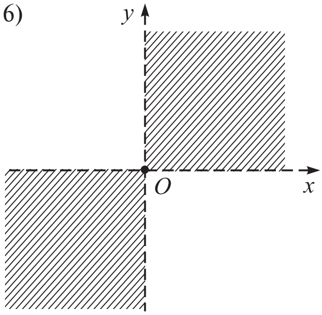
4)



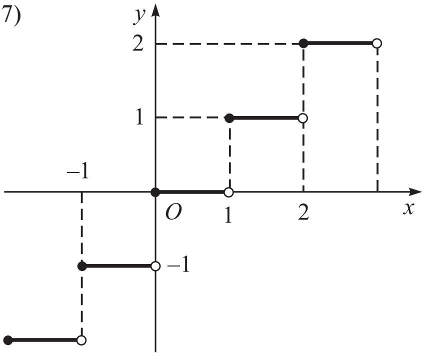
5)



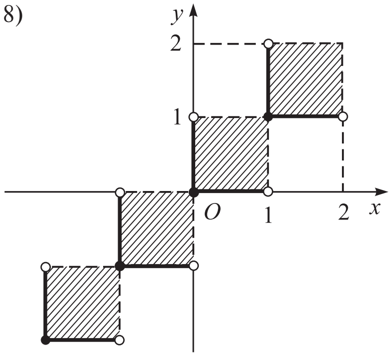
6)



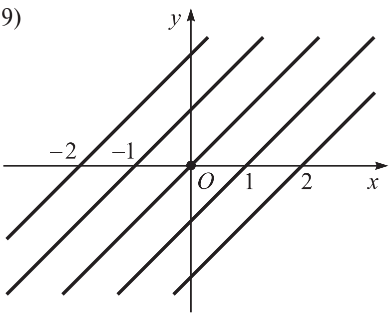
7)



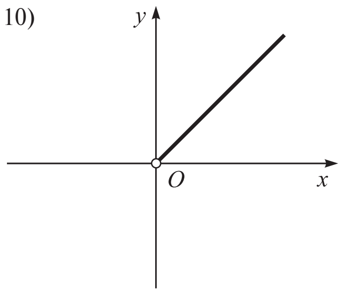
8)



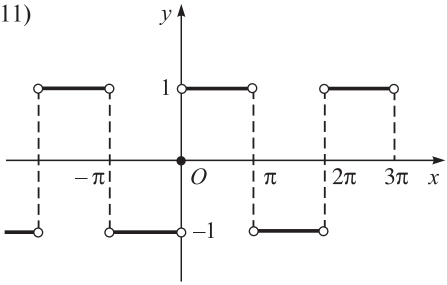
9)



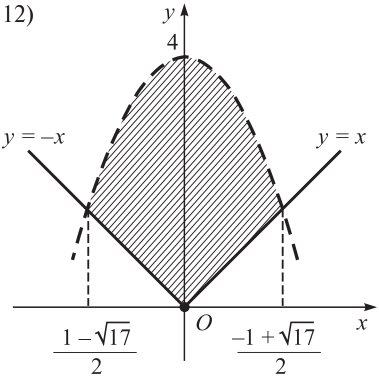
10)



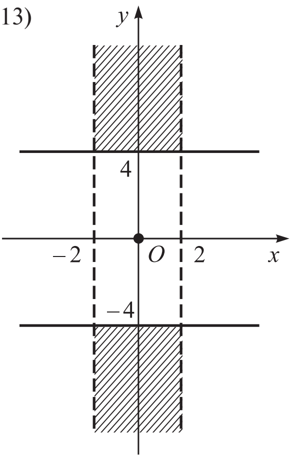
11)



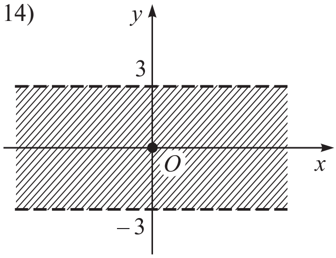
12)



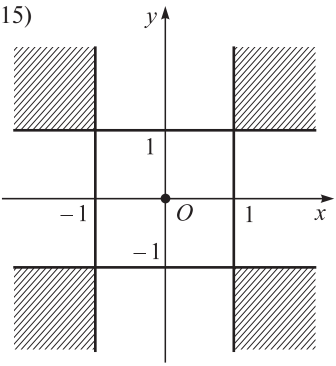
13)



14)

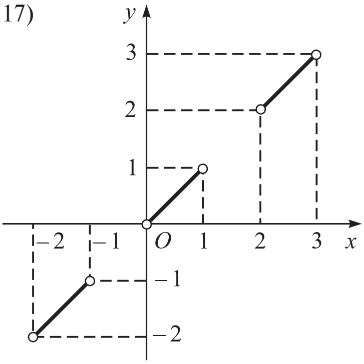


15)

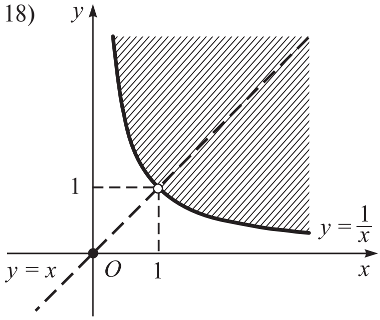


16) Точек, удовлетворяющих системе, нет;

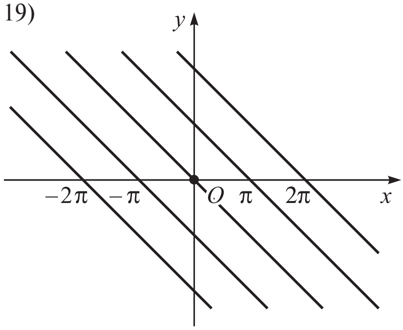
17)



18)



19)



1.16. 1) В I и III; 2) во II и IV; 3) в I, II и IV; 4) в I, III и IV; 5) в I и III, исключая точки осей Ox и Oy и начало координат; 6) в II и IV.

1.17. 1) $(-2,-3)$; 2) $(2,-3)$; 3) $(-2,3)$; 4) $(3,2)$; 5) $(-3,-2)$.

1.18. 1) 5; 2) 5.

1.19. $(5,0)$.

1.20. $(0,4)$, $(0,-12)$, $(6-2\sqrt{21},0)$, $(6+2\sqrt{21},0)$.

1.21. У к а з а н и е. $\rho(A,B)=\rho(B,C)=\sqrt{145}$.

1.22. $D(5,2)$.

1.23. 5.

1.24. $(-1,-2)$.

1.25. 1) Да; 2) нет.

1.26. $\sqrt{26}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{41}$.

1.27. $(-2,-6)$, $(8,2)$, $(-6,10)$.

1.28. $C(0,-1)$, $D(4,-4)$.

1.29. $B(-3,1)$.

1.30. $(-9,0)$.

1.31. 2, -3, $2/3$.

1.32. У к а з а н и е. Проверить равенство $(\rho(A,B))^2+(\rho(A,C))^2=(\rho(B,C))^2$.

1.33. 1) $M(-22/3,\ 1/3)$; 2) $M(-8/3,\ 5/3)$.

1.34. $(3,2)$.

1.35. 1) $(2,4,0)$, $(2,0,-5)$, $(0,4,-5)$; 2) $(2,0,0)$, $(0,4,0)$, $(0,0,-5)$.

1.36. 1) $(-1,3,5)$, $(-1,-3,-5)$, $(1,3,-5)$; 2) $(-1,-3,5)$, $(1,3,5)$, $(1,-3,-5)$; 3) $(1,-3,5)$.

1.37. 1) В I, IV, VI, VII; 2) во всех; 3) во I, III, V, VII; 4) во II, III, V, VIII; 5) в I, III, VI, VIII.

1.38. 1) 13; 2) $4\sqrt{10}$, 5, $3\sqrt{17}$.

1.39. Указание. Найти расстояния $\rho(A,B)$, $\rho(A,C)$, $\rho(B,C)$ и воспользоваться определением равнобедренного треугольника и теоремой Пифагора.

1.40. 1) $|AB|=3, |BC|=5, |AC|=\sqrt{38}$; 2) $\sqrt{221}/2$; 3) $\sqrt{221}/3$, $\sqrt{221}/5$, $\sqrt{221}/\sqrt{38}$.

1.41. $(0,0,14/9)$.

1.42. $(0,1,-2)$.

1.43. 1) Да; 2) нет.

1.44. $\sqrt{14}$.

1.45. $C(0,8,8)$, $D(2,11,3)$, $E(4,14,-2)$.

1.46. $(3,2/3,2)$.

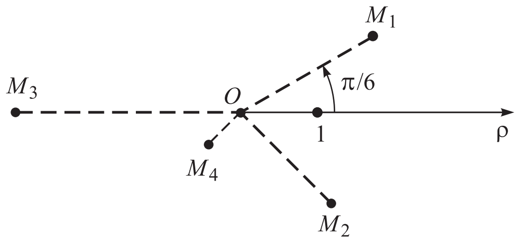
1.47. $7/2; 1/5; -1/2$.

1.48. $(3,0,5)$.

1.49. $D(9,-5,6)$.

1.50. $D(-3,4,-4)$, $D(1,-2,8)$, $D(5,0,-4)$.

1.51.



1.52. $M_1'(5,-2\pi/3)$, $M_2'(3,\pi/2)$, $M_3'(6,-1)$.

1.53. $M_1'(10,\pi/2)$, $M_2'(5,-\pi/6)$, $M_3'(3,2\pi/3)$.

1.54. $A(15,\pi/2)$, $B(9,\pi)$, $C(2,11\pi/18)$, $D(2,\pi/6)$.

1.55. $M_1(0,10)$, $M_2(0,-2)$, $M_3(-5,0)$, $M_4(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $M_5(6\sqrt{3},-6)$.

1.56. $(6,\pi/9)$.

1.57. $d=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$.

1.58. 7.

1.59. $30\sqrt{3}-9$.

1.60. $\dfrac{1}{2}\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$.

1.61. 1) Окружность с центром в полюсе радиуса 3; 2) открытый луч; 3) окружность с центром в точке $(3/2, 0)$ радиуса $3/2$; 4) спираль Архимеда; 5) спираль Архимеда; 6) гиперболическая спираль; 7) логарифмическая спираль [31].

1.62. 1) $\rho=2\cos\varphi$; 2) $\rho\cos\varphi=2$; 3) $\rho=3$; 4) $\rho^3=\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)$; 5) $\rho(\cos\varphi-\sin\varphi)=0$.

1.63. 1) $x^2+y^2=x+y$ – окружность с центром в точке $(1/2, 1/2)$ радиуса $1/\sqrt{2}$; 2) $x^2+y^2-2x=4$ – окружность с центром в точке $(1,0)$ радиуса $\sqrt{5}$;

3) $x^2+y^2=3y$ – окружность с центром в точке $(0,\ 3/2)$ радиуса $3/2$; 4) $xy=2$ – равнобочная гипербола; 5) $x=1$ – прямая; 6) $x^2+y^2=2x$ – окружность с центром в точке $(1,0)$ радиуса 1.

Глава 2

2.2. 1) $\boldsymbol{a}\upuparrows\boldsymbol{b}$; 2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$; 3) $\boldsymbol{a}\uparrow\downarrow\boldsymbol{b}, |\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{b}|$; 4) угол между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ острый; 5) векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ либо нулевые, либо различные коллинеарные; 6) $\boldsymbol{a}\uparrow\uparrow\boldsymbol{b}, |\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{b}|$.

2.3. Да.

2.4. $\overrightarrow{AD}=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|}\boldsymbol{c}+\dfrac{|\boldsymbol{c}|}{|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|}\boldsymbol{b}$.

2.5. $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

2.6. $(-3,0,-3)$.

2.7. $\overrightarrow{AB}(-3,0,5)$, $\overrightarrow{BA}(3,0,-5)$.

2.8. 5.

2.9. $\boldsymbol{c}=-\dfrac{1}{14}\boldsymbol{a}-\dfrac{12}{7}\boldsymbol{b}$.

2.10. $\boldsymbol{s}=\dfrac{2}{5}\boldsymbol{m}+\dfrac{3}{5}\boldsymbol{n}+\dfrac{3}{5}\boldsymbol{p}$.

2.11. Указание. Пусть O – центр треугольника ABC. Достроить треугольник AOC до параллелограмма $AOCD$.

2.12. Точка пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника.

2.13. Указание. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

2.14. $(1/3,-2/3,2/3)$.

2.15. $\cos\alpha=2/3$, $\cos\beta=1/3$, $\cos\gamma=-2/3$.

2.16. $(6,-1,2)$, $(6,3,9)$, $(0,4,7)$, $\left(1,-\dfrac{3}{2},-2\right)$.

2.17. $6, \sqrt{8}$.

2.18. Да.

2.19. $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0}$.

2.20. $\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

2.21. $\overrightarrow{AB}(1/2,\ -1/2)$, $\overrightarrow{BC}(1/2,\ 1/2)$, $\overrightarrow{CD}(-1/2,\ 1/2)$, $\overrightarrow{DA}(-1/2,\ -1/2)$.

2.22. $0, 5/7$.

2.23. $\alpha=-4/5$, $\beta=-5/2$.

2.24. $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$.

2.25. 1) $\left(\dfrac{5}{3},-\dfrac{35}{3},\dfrac{10}{3}\right)$; 2) $(10,2,4)$.

2.26. $\pm5\boldsymbol{i}+\dfrac{5}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}-\dfrac{5}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}$.

2.27. 1) 3; 2) $-5\sqrt{2}$; 3) 40; 4) -12.

2.28. 1) 5; 2) 4; 3) 19; 4) 196; 5) -28.

2.29. Указание. Умножить скалярно вектор $\boldsymbol{d}$ на $\boldsymbol{c}$ и показать, что $\boldsymbol{dc}=0$.

2.30. $-3/2$.

2.31. $\pi/3$.

2.32. -5.

2.33. 162.

2.34. $\sqrt{5-\sqrt{8}}$.

2.35. -61.

2.36. 40.

2.37. 15, $\sqrt{593}$

2.38. 1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$, 3) $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

2.39. $\arccos\left(-\dfrac{49}{2\sqrt{949}}\right)$.

2.40. 0.

2.41. 107.

2.42. 1) -10; 2) 0; 3) 1; 4) $\sqrt{3}-2$.

2.43. 1) $\pi/4$; 2) $\pi/2$; 3) $\pi/3$; 4) 2°; 5) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=3/(2\sqrt{5})$.

2.44. -3.

2.45. 1) 95; 2) (26, 26).

2.46. 1) 84; 2) (66, 46, 88); 3) 32; 4) 64; 5) 34; 6) 56.

2.47. -8.

2.48. 28/5, (84/25, 112/25).

2.49. $-10/3$, $-10/\sqrt{33}$.

2.50. 1) -4; 2) $-\dfrac{162}{\sqrt{806}}$.

2.51. $-17/3$.

2.52. Указание. Показать, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$ равны и векторы, например $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, ортогональны.

2.53. 30°, 60°, 90°.

2.54. $\cos\angle BAC=-\dfrac{12}{61}$, $\cos\angle ABC=\cos\angle BCA=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2.55. $\boldsymbol{x}(-4,-6,12)$.

2.56. $\boldsymbol{x}(2,7,3)$.

2.57. $\boldsymbol{x}(0,1,2)$.

2.58. $\boldsymbol{x}(1,1/2,-1/2)$.

2.59. 120°.

2.60. $\boldsymbol{a}(4\sqrt{2},4,4)$.

2.61. 1) Да; 2) нет.

2.62. $\sqrt{2},1,-1$.

2.63. 1) $15\sqrt{3}/2$; 2) $165\sqrt{3}/2$; 3) $15\sqrt{3}$; 4) $675/4$.

2.64. 1) $[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]+2[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}]$; 2) $3[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$; 3) $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]$; 4) $2(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{i})$; 5) $\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$.

2.65. 25.

2.66. Указание. Использовать то, что если два вектора коллинеарны третьему ненулевому вектору, они коллинеарны.

2.67. Указание. Сравнить левые и правые части равенства $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]$ с использованием равенства $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$.

2.68. Указание. Использовать определение длины векторного произведения, определение скалярного произведения и то, что $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$.

2.69. $6\sqrt{3}$.

2.70. 0.

2.71. $50\sqrt{2}$.

2.72. $\sqrt{3}$.

2.73. 1) $6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$; 2) $-40\boldsymbol{i}+40\boldsymbol{j}+20\boldsymbol{k}$; 3) $(3,4,-2)$; 4) $(5,1,7)$.

2.74. 1) $-12\boldsymbol{i}-26\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$; 2) $-2[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$; 3) $4[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$.

2.75. $19/5$.

2.76. $18\sqrt{2}$.

2.77. $49/2$; $7\sqrt{2}/2$.

2.78. $3\sqrt{17}/2$.

2.79. 1) 1; 2) $\sqrt{23/185}$.

2.80. $13\sqrt{10}/20$; $26/\sqrt{29}$.

2.81. 1) $(3,2,0)$; 2) $(1,0,0)$.

2.82. $\pm\dfrac{1}{3\sqrt{10}}(-5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})$.

2.83. $\pm(0,4/5,-3/5)$.

2.84. $(-1,1,0)$, $(1,2,1)$.

2.85. 1) $-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$; 2) $-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$.

2.86. 12.

2.87. 1) -10; 2) -20.

2.88. Указание. Использовать определение и свойства смешанного произведения.

2.89. -7.

2.90. 1) 1; 2) 18; 3) -20.

2.91. 1) Левая; 2) правая; 3) векторы компланарны; 4) правая.

2.92. 1) Да; 2) да; 3) да; 4) да.

2.93. Нет.

2.94. Указание. Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарны.

2.95. 51, левой.

2.96. 14, $6\sqrt{3}$, $7\sqrt{3}/3$.

2.97. 1) 4; 2) 25; 3) 0.

2.98. 24.

2.99. 3.

2.100. $D(0,8,0)$, $D(0,-7,0)$.

2.101. $x=-\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y'-5,\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}x'-\frac{1}{2}y'+3.$

2.102. $M(3\sqrt{2}/2,-5\sqrt{2}/2).$

2.103. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}+1}{2}y'-3=0,\ \sqrt{2}x'-2=0;\ \frac{2+3\sqrt{3}}{2}x'-\frac{3-2\sqrt{3}}{2}y'+15=0,$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}x'-5\frac{\sqrt{2}}{2}y'+12=0.$

2.104. $(x')^2-(y')^2-2=0.$

2.105. 1) $x=x'-2,\ y=-y'$; 2) $x=-x'+3,\ y=y'+4$; 3) $x=y',\ y=x'+1$; 4) $x=-y',\ y=-x'$.

2.106. $(x')^2+(y')^2+(3-5\sqrt{3})x'-(3\sqrt{3}+5)y'=-29.$

2.107. $A(-1,2),\ B(1,3),\ C(0,1).$

2.108. $A(0,\ \sqrt{2}),\ B(-\sqrt{2}/2,\ 7\sqrt{2}/2),\ C(2\sqrt{2},\ 0).$

2.109. $A(0,\ 0),\ B(4/3,\ -2/3),\ C(2/3,\ 2/3),\ D(-2/3,\ 4/3).$

2.110. $x=x'+y',\ y=x'-y'.$

2.111. Указание. Пусть $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AD}$. Тогда $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$, и условие задачи равносильно условию $\boldsymbol{a}^2+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^2+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2+\boldsymbol{c}^2=\boldsymbol{b}^2+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})^2 \Leftrightarrow (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})^2=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c} \Leftrightarrow ABCD$ – параллелограмм.

Глава 3

3.1. M_3.

3.2. $P_1(2,1/2),\ P_2(-5,4),\ P_3(19,-8),\ P_4(1,1).$

3.3. $(0,20),\ (25,0).$

3.4. 1) $y=\frac{7}{10}x+3$; 2) $y=-\frac{3}{10}x+5$; 3) $y=\frac{1}{2}x-2$; 4) $y=\frac{2}{5}x-2$.

3.5. 1) $y=\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}$; 2) $y=-\frac{3}{5}x-\frac{2}{5}$; 3) $y=\frac{3}{2}x-3$; 4) $y=\frac{3}{2}x$.

3.6. 1) $(2,-3)$; 2) $(3,2)$; 3) $(-1,1)$; 4) $2/3$.

3.7. 1) $2x+5y-19=0$; 2) $x=2+2t,\ y=3+5t$.

3.8. Ответ неоднозначен, например $x=0,\ y=0,\ x+y-4=0$.

3.9. 1) Параллельны; 2) совпадают; 3) пересекаются.

3.10. $\begin{cases}x=3-2t,\\ y=2-7t,\end{cases}\ \begin{cases}x=6+t,\\ y=4-5t,\end{cases}\ \begin{cases}x=4+3t,\\ y=-3+2t.\end{cases}$

3.11. $\boldsymbol{a}(3,2)$.

3.12. Стороны $y-1=0,\ x-y=0,\ 2x-y-3=0$, высоты $x-3=0,\ x+y-3=0,$ $x+2y-3=0$, медианы $4x-3y-3=0,\ x-2=0,\ 2x-3y+1=0$.

3.13. $1/2$.

3.14. $x=3+2t,\ y=-1$.

3.15. $(2y_1-y_2-y_3)x-(2x_1-x_2-x_3)y+x_1y_2+x_1y_3-x_2y_1-x_3y_1=0,\ (2y_2-y_1-y_3)x-(2x_2-x_1-x_3)y+x_2y_1+x_2y_3-x_1y_2-x_3y_2=0,\ (2y_3-y_1-y_2)x-(2x_3-x_1-x_2)y+x_3y_1+x_3y_2-x_1y_3-x_2y_3=0.$

3.16. 1) $\begin{cases}x=3+3t,\\ y=1-t;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=3+t,\\ y=1+3t.\end{cases}$

3.17. $(3, 4)$.

3.18. $Q(20/17, 29/17)$.

3.19. $10\sqrt{2}/3$.

3.20. $2x-y-4=0,\ x-6=0,\ x+4y-2=0$.

3.21. $x-y-2=0,\ 2x+y-7=0,\ 4x-y+1=0$.

3.22. $11x-31y+153=0,\ 7x+y-27=0,\ 31x-11y+393=0$.

3.23. $x+y-5=0,\ y-3=0$.

3.24. $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y-3}{4}$.

3.25. $x+y-7=0,\ x-y-3=0,\ y-3=0$.

3.26. $x+y-13=0,\ 2x-y-14=0$.

3.27. $P(17/2,\ 21/4)$.

3.28. 1) $m=\pm\sqrt{12}$; 2) $m=\pm\sqrt{2},\ n=\pm\sqrt{3}$; 3) $m=0$.

3.29. 12.

3.30. 4.

3.31. $\dfrac{x}{-6}+\dfrac{y}{2}=1,\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-4}=1$.

3.32. $x-11y-18=0,\ x+y-6=0$.

3.33. 1) $\dfrac{4}{5}x-\dfrac{3}{5}y-1=0$; 2) $-\dfrac{3}{5}x-\dfrac{4}{5}y-9=0$; 3) $-\dfrac{5}{13}x+\dfrac{12}{13}y-\dfrac{10}{13}=0$; 4) $-x-3=0$; 5) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y=0$; 6) $y-7=0$.

3.34. 1) $\delta=-4,\ d=4$; 2) $\delta=20/13,\ d=20/13$.

3.35. 1) $\delta=27/5,\ d=27/5$; 2) $\delta=-8/5,\ d=8/5$; 3) $\delta=2,\ d=2$; 4) $\delta=-3\sqrt{2}/2$, $d=3\sqrt{2}/2$.

3.36. 1) Пересекает; 2) не пересекает.

3.37. Не является.

3.38. 1) $d=5/2$; 2) $d=7/2$.

3.39. $5x-2y-1=0$.

3.40. Да.

3.41. Да.

3.42. Вне треугольника.

3.43. Тупой.

3.44. $3y-19=0$.

3.45. $x=1+5t,\ y=4-t$.

3.46. При $\dfrac{A}{-m}=\dfrac{B}{l}=\dfrac{C}{-mx_0+ly_0}$ совпадают, при $\dfrac{A}{-m}=\dfrac{B}{l}$ параллельны, при $\dfrac{A}{-m}\neq\dfrac{B}{l}$ пересекается в одной точке.

3.47. $5x+12y-111=0,\ y-8=0$.

3.48. $4x+3y-22=0,\quad 4x+3y+3=0,\quad 4x+3y-47=0,\quad -3x+4y+4=0,$ $3x-4y-21=0$.

3.49. $3x+4y-8=0,\ 3x+4y=0,\ 3x+4y-16=0,\ 4y-3y-19=0$.

3.50. 1) $10x-7y-41=0$; 2) $2x-3y+3=0$; 3) $3x+2y-41=0$; 4) $3x+10y-97=0$.

3.51. Не принадлежит.

3.52. Указание. Записать уравнение пучка прямых, используя первые две прямые, и показать, что третья прямая принадлежит этому пучку.

3.53. $5x-4y-22=0,\ x-2y-1=0,\ x+4y-18=0.$

3.54. $4x+3y+14=0,\ 3x-4y-27=0.$

3.55. $x-y-6=0,\ x-y-4=0.$

3.56. $c=92.$

3.57. $(1/2,\ 9/2),\ (-13/2,\ -11/2).$

3.58. $2x-y+7=0,\ 2x-y-3=0,\ 2x-11y+17=0,\ 2x-11y+67=0.$

3.59. $\rho\cos(\varphi+\alpha)=p\ (p\geqslant 0, \alpha=\mathrm{const}).$

3.60. $(7-\sqrt{5},\ 3\sqrt{5}-10).$

3.61. $(11,\ -14).$

3.62. $K(6,\ 7).$

3.63. $x=2,\ 4x-3y+4=0,\ 7x-9y-14=0.$

3.64. $(13,-1),\ (2,1);\ (-23/5,\ 11/5),\ (32/5,\ 1/5).$

3.65. $5x-5y-29=0.$

3.66. $x-3y+1=0,\ x-3y+12=0,\ 3x+y-1=0,\ 3x+y+10=0.$

3.67. $P(17/2,\ 21/4).$

3.68. $(6,2),\ (53/5,-4/5).$

3.69. $\left(\dfrac{-\sqrt{3}+1}{2},\ \dfrac{-\sqrt{3}+3}{2}\right), \left(\dfrac{-\sqrt{3}+3}{2},\ \dfrac{-\sqrt{3}+5}{2}\right), (-\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}), (1-\sqrt{3},\ 3-\sqrt{3})$.

3.70. Указание. Выбрать ДПСК так, чтобы вершины квадрата имели следующие координаты: $A(1,1)$, $B(1,-1)$, $C(-1,-1)$, $D(-1,1)$, и провести прямую $y=kx$. Доказать, что сумма квадратов расстояний от точек A, B, C, D до этой прямой не зависит от k.

3.71. Указание. Рассмотреть треугольник с вершинами $O(0,0)$, $B(0,1)$, $C(a,b)$ и найти точки пересечения высот, медиан и серединных перпендикуляров.

3.72. $(x, y)\mapsto(-y+5, -x+5).$

3.73. $(x, y)\mapsto(2x+4,\ 2y+5).$

3.74. $A(-7,9), B(5,3), C(29,27).$

3.75. $B(13,-6), C(8,-1).$

3.76. $x-2y-z=0.$

3.77. $2x-6y-z-34=0.$

3.78. $2x-y-1=0.$

3.79. $2x-5y+7z-8=0.$

3.80. 1) $x=1+2u-v,\ y=1+3u+v,\ z=2+u$; 2) $x=1-2u+5v,\ y=1+u-3v,\ z=1-4u+2v$; 3) $x=-1+2u-3v,\ y=u,\ z=v.$

3.81. $(-15,0,0), (0,-10,0), (0,0,5).$

3.82. $x=2-2u+3v,\ y=1+u,\ z=3+v.$

3.83. 1.

3.84. $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{4}=1,\quad \dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2}=1.$

3.85. 1) Параллельны; 2) совпадают; 3) пересекаются по прямой.

3.86. $(5,0,0), (0,-5,0), (0,0,-5).$

3.87. 1) $\cos\varphi=0$; 2) $\cos\varphi=\sqrt{3}/2.$

3.88. $7x+y+5z-4=0.$

3.89. $(23,13,4).$

3.90. $x=1+u+v,\ y=1+u-v,\ z=1+u+v.$

3.91. Указание. Составить уравнение пучка плоскостей, определяемого любыми двумя плоскостями, и показать, что третья плоскость принадлежит этому пучку.

3.92. $23x-11y+13z-2=0$.

3.93. $x+y-7=0$.

3.94. $(0,2,0)$.

3.95. $(3,4,0)$.

3.96. $\begin{cases} x+y-z-17=0, \\ 3x-2y+z-1=0. \end{cases}$

3.97. 1) $k=-6$; 2) $k=-4$.

3.98. $x-2=0,\ y-3=0,\ z-5=0$.

3.99. $\frac{x}{4}+\frac{y}{4}+\frac{z}{-2}=1$.

3.100. $S_1=18,\ S_2=S_3=12$.

3.101. $x+y+z-12=0,\ -x+y+z-2=0,\ x+y-z-6=0,\ x-y+z-4=0$.

3.102. $x=1+3u,\ y=-4-13u+14v,\ z=3v$.

3.103. 1) $-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z-1=0$; 2) $\frac{1}{\sqrt{6}}x+\frac{1}{\sqrt{6}}y+\frac{2}{\sqrt{6}}z-\frac{1}{\sqrt{6}}=0$; 3) $-\frac{12}{13}y+\frac{5}{13}z-$ $-\frac{4}{13}=0$; 4) $-z-\frac{1}{2}=0$.

3.104. 1) $\delta=-2,\ d=2$; 2) $\delta=-12,\ d=12$; 3) $\delta=-1,\ d=1$.

3.105. Указание. Отклонение точек A и B от плоскости имеет разные знаки.

3.106. $2x-6y-8z-7=0,\ 6x+2y-3=0$.

3.107. 4.

3.108. Лежит.

3.109. $2x-8y-2z+62=0$.

3.110. $81\sqrt{3}/8$.

3.111. $(0,7,4)$.

3.112. 11.

3.113. Нет.

3.114. Нет.

3.115. $\begin{cases} x+y-z-17=0, \\ 3x-2y+z-1=0. \end{cases}$

3.116. 1) $x=3t,\ y=1-2t,\ z=-3+t$; 2) $x=2+t,\ y=1+t,\ z=2+3t$; 3) $x=2+2t,$ $y=1-5t,\ z=-3+3t$.

3.117. 1) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$; 2) $\begin{cases} x=1+\frac{1}{\sqrt{2}}t, \\ y=1-\frac{1}{2}t, \\ z=1+\frac{1}{2}t. \end{cases}$

3.118. 1) $\begin{cases} x=-1+3t, \\ y=t, \\ z=2-2t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=3-3t, \\ z=t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=1-3t, \\ y=1-t, \\ z=1+4t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=1-2t, \\ y=-1-3t, \\ z=t. \end{cases}$

3.119. 1) $\begin{cases} 3x - z = 0, \\ 2x - y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 8z + 13 = 0, \\ y + 6 = 0. \end{cases}$

3.120. $x = 3,\ y = 5 + 2t,\ z = -4 + 2t$.

3.121. $(11/3,\ 17/3,\ -2/3)$.

3.122. $(8/3,\ 23/3,\ -1/3)$.

3.123. $4\sqrt{3}/3$.

3.124. Указание. Убедиться в том, что координаты точки $A(2, 5, 1)$ удовлетворяют уравнениям этих прямых и направляющий вектор первой прямой ортогонален нормальным векторам обеих плоскостей, определяющих вторую прямую.

3.125. $4\sqrt{29}/29$.

3.126. $x = 18 + t,\ y = 22,\ z = t$.

3.127. $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3.128. $\begin{cases} x = 2 + 2u + v, \\ y = -1 + 3u - v, \\ z = 1 + u + 2v. \end{cases}$

3.129. $\begin{cases} x = 8 + 7t, \\ y = 8 + t, \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$

3.130. $\begin{cases} x = 1 - 4t, \\ y = 2 + t, \\ z = 2 + t. \end{cases}$

3.131. $\begin{cases} x = -3 + 4t, \\ y = 3 - t, \\ z = 3 - t. \end{cases}$

3.132. Указание. Убедиться в том, что данная прямая лежит в плоскости с нормальным вектором $\boldsymbol{b}$ на расстоянии $d = |\boldsymbol{b}|/|\boldsymbol{a}|$ от начала координат.

3.133. $\sqrt{13}/11$.

3.134. $\begin{cases} x = 3 - 2u + v, \\ y = 1 + u - 2v, \\ z = 3 + 2u + 2v. \end{cases}$

3.135. $(3, 1, 3)$.

3.136. $\begin{cases} x = 3 - t, \\ y = 2 + t, \\ z = 1 + t. \end{cases}$

3.137. $\begin{cases} x=9-4t, \\ y=t, \\ z=t. \end{cases}$

3.138. $\begin{cases} x=1+2u+3v, \\ y=-2-3u+2v, \\ z=5-4u-2v. \end{cases}$

3.139. $\begin{cases} x=-1+4t, \\ y=2-5t, \\ z=-3t, \end{cases}$ $\begin{cases} x=1+4t, \\ y=-1-3t, \\ z=-1-5t. \end{cases}$

3.140. Треугольник.

3.141. $1:2$.

3.142. $\begin{cases} -x+10y-13z+18=0, \\ 3x+2z-3=0. \end{cases}$

3.143. $x+y+z-7=0$, $x+y-3z+5=0$, $x-2z+6=0$, $3x-y-5z+15=0$, $x-z+1=0$, $5x+y-7z+13=0$, $z=4$.

3.144. Да.

3.145. $4x-14y-7z-48=0$.

3.146. $\begin{cases} x-8z+13=0, \\ x-8y+51=0. \end{cases}$

3.147. $(46/40,\ 89/40,\ 117/40)$.

3.148. $(16/9,\ 44/9,\ 68/9)$.

3.149. $\dfrac{x-5}{-4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

3.150. $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-18}=\dfrac{z-2}{1}$.

3.151. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

3.152. $\begin{cases} x+y+5z-15=0, \\ 2x+2y+z-3=0, \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+5z-15=0, \\ x-2y-2z+3=0. \end{cases}$

3.153. Указание. Построить две плоскости, проходящие через одну из прямых параллельно другой прямой. Рассматриваемая плоскость параллельна данным и проходит посередине между ними.

3.154. $(x, y, z) \mapsto (2-x,\ 6-y,\ 4-z)$.

3.155. $(x, y, z) \mapsto \left(\dfrac{9x-6y+2z}{11},\ \dfrac{-6x-7y+6z}{11},\ \dfrac{2x+6y+9z}{11}\right)$.

3.156. $(x, y, z) \mapsto \left(\dfrac{-9x+6y-2z+20}{11},\ \dfrac{6x+7y-6z+38}{11},\ \dfrac{-2x-6y-9z+134}{11}\right)$.

3.157. $\dfrac{x-8}{0}=\dfrac{y-25/9}{1}=\dfrac{z+11/9}{1}$, $\dfrac{x-8}{4}=\dfrac{y-25/9}{1}=\dfrac{z+11/9}{-1}$.

3.158. $C(12,9,5)$.
3.159. Да.

3.160. $\begin{cases} x-3z=0, \\ y+3=0, \end{cases}$ $\begin{cases} x-2y-3z-6=0, \\ x+2y+3z-6=0. \end{cases}$

Глава 4

4.1. 1) $x^2+y^2=16$; 2) $(x-3)^2+(y+2)^2=25$; 3) $x^2+(y-3)^2=25$; 4) $(x-2)^2+(y-5)^2=8$; 5) $(x-1)^2+y^2=25$; 6) $(x-2)^2+(y+1)^2=9$; 7) $(x+1)^2+(y-7)^2=20$, $(x-3)^2+(y+1)^2=20$.

4.2. 1) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{25}=1$; 2) $\frac{x^2}{(13/2)^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$; 3) $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{8^2}=1$; 4) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$; 5) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{63}=1$; 6) $\frac{x^2}{(5/2)^2}+\frac{y^2}{(3/2)^2}=1$.

4.3. 5, 4, $(-3,0)$, $(3,0)$, $x=\pm 25/3$, $\varepsilon=3/5$.

4.4. $(5/2,\ \pm 3\sqrt{3}/2)$.

4.5. Точка B лежит внутри эллипса, а точки A, C, D – вне его.

4.6. 1) $(-1,-2)$, $\sqrt{22}$, $\sqrt{5{,}5}$; 2) $(5,2)$, $4\sqrt{2}$, $4\sqrt{5}$.

4.7. 1) $(2,2)$, $(3,3/2)$; 2) прямая проходит вне эллипса.

4.8. 1) Половина эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$, расположенная в верхней полуплоскости; 2) половина эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$, расположенная в нижней полуплоскости; 3) половина эллипса $\frac{x^2}{28/9}+\frac{y^2}{7}=1$, расположенная в левой полуплоскости; 4) половина эллипса $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2/27}=1$, расположенная в верхней полуплоскости.

4.9. 1) $3x+2y-34=0$, $3x+2y+34=0$; 2) $2x-3y+4\sqrt{61}=0$, $2x-3y-4\sqrt{61}=0$.

4.10. 1) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1$; 2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$; 3) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$; 4) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$; 5) $\frac{x^2}{400}-\frac{y^2}{225}=1$; 6) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{576}=1$.

4.11. 1) 3, 4, $(-5,0)$, $(5,0)$, $5/3$, $y=\pm\frac{4}{3}x$, $x=\pm 9/5$; 2) 1, 4, $(-\sqrt{17},0)$, $(\sqrt{17},0)$, $\sqrt{17}$, $y=\pm 4x$, $x=\pm 1/\sqrt{17}$; 3) 1/8, 1/3, $(-\sqrt{73}/24,0)$, $(\sqrt{73}/24,0)$, $\sqrt{73}/3$, $y=\pm\frac{8}{3}x$, $x=\pm 3/8\sqrt{73}$; 4) 1/5, 1/4, $(-\sqrt{41}/20,0)$, $(\sqrt{41}/20,0)$, $\sqrt{41}/4$, $y=\pm\frac{5}{4}x$, $x=\pm 4/5\sqrt{41}$; 5) 1, 1, $(-\sqrt{2},0)$, $(\sqrt{2},0)$, $\sqrt{2}$, $y=\pm x$, $x=\pm 1/\sqrt{2}$; 6) 2, 4, $(-2\sqrt{5},0)$, $(2\sqrt{5},0)$, $\sqrt{5}$, $y=\pm 2x$, $x=\pm 2/\sqrt{5}$.

4.12. 1) Часть гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{81/4}=1$, расположенная в верхней полуплоскости; 2) ветвь гиперболы $x^2-\frac{y^2}{16}=-1$, расположенная в нижней полуплоскости; 3) ветвь гиперболы $\frac{x^2}{81/4}-\frac{y^2}{9}=1$, расположенная в левой полуплоскости; 4) ветвь гиперболы $-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$, расположенная в верхней полуплоскости; 5) ветвь гиперболы $-\frac{(x+2)^2}{5}+\frac{(y-1)^2}{20/9}=1$, расположенная над прямой $y-1=0$; 6) ветвь гиперболы $\frac{(x-10)^2}{108}-\frac{(y+2)^2}{12}=1$, расположенная левее от прямой $x-10=0$.

4.13. 1) $(2,-2)$, 2, 3; 2) $(5,\ 5/3)$, $\sqrt{105}/3$, $\sqrt{35}/3$.

4.14. $(6,\ \pm 6\sqrt{2})$, $r_1=2+3\sqrt{13}$, $r_2=-2+3\sqrt{13}$.

4.15. Указание. Применить формулу нахождения расстояния от точки (x, y) гиперболы до прямой $bx\pm ay=0$.

4.16. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{400/9}=1.$

4.17. $\left(\pm\frac{24}{5},\ \pm\frac{4}{5}\sqrt{39}\right)$.

4.18. $(-6,-2)$.

4.19. $xy=-2$.

4.20. $20x^2-50xy+20y^2+150x-120y+189=0$.

4.21. 1) $y^2=4x$; 2) $y^2=8x$; 3) $y^2=-8x$; 4) $y^2=12x$.

4.22. 1) Часть параболы $y^2=9x$, расположенная в I координатной четверти; 2) парабола $(y-3)^2=-5(x-1)$; 3) часть параболы $y^2=-2x$, расположенная во II координатной четверти; 4) парабола $3(y-1)^2=-4(x-3)$; 5) часть параболы $x^2=25y$, расположенная в I координатной четверти; 6) парабола $(x-1)^2=$ $=-\frac{1}{3}(y+1)$; 7) часть параболы $x^2=-25y$, расположенная в III координатной четверти.

4.23. $x^2+y^2+2xy-4x-20y+52=0$.

4.24. $p=2bk$.

4.25. 1) $x+2y+2=0$; 2) $(1+\sqrt{5})x-4y-6-2\sqrt{5}=0$, $(1-\sqrt{5})x-4y-6+2\sqrt{5}=$ $=0$; 3) $x-2y-2=0$; 4) $2x+y+16=0$.

4.26. $(1,1)$, $(-7,9)$.

4.27. 24.

4.28. 1) Эллипс; 2) эллипс; 3) парабола; 4) ветвь гиперболы.

4.29. 13, 5.

4.30. 1) $\rho=\dfrac{9}{4-\sqrt{7}\cos\varphi}$; 2) $\rho=\dfrac{9}{4-\sqrt{7}\cos(\pi-\varphi)}$; 3) $\rho=\sqrt{9+7\cos^2\varphi}$.

4.31. 1) $\rho=\dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$; 2) $\rho=\dfrac{9}{4-5\cos(\pi-\varphi)}$.

4.32. 1) Уравнение эллипса, приводится к виду $\dfrac{(x')^2}{3}+\dfrac{(y')^2}{5}=1$ преобразованием координат $x=x'-4,\ y=y'+1$; 2) уравнение эллипса, приводится к виду $\dfrac{(x')^2}{4}+\dfrac{(y')^2}{9}=1$ преобразованием координат $x=x'-2,\ y=y'+5$; 3) уравнение пары пересекающихся прямых, приводится к виду $16(x')^2-25(y')^2=0$ преобразованием координат $x=x'-1$, $y=y'-2$; 4) уравнение эллипса, приводится к виду $\dfrac{(x'')^2}{4}+\dfrac{(y'')^2}{16}=1$ путем последовательных преобразований координат $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'$, $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'$ и $x'=x''$, $y'=y''+1$; 5) уравнение параболы, приводится к виду $(x'')^2=-6y''$ последовательным преобразованием координат $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'$, $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'$ и $x'=x''-3,\ y'=y''$; 6) уравнение гиперболы, приводится к виду $\dfrac{(x'')^2}{16}-\dfrac{(y'')^2}{9}=1$ последовательным преобразованием координат $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'$, $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'$ и $x'=x''$, $y'=y''+1$; 7) уравнение пары мнимых параллельных прямых, приводится к виду $(x')^2+7/26=0$ преобразованием координат $x=\dfrac{5}{\sqrt{26}}x'-\dfrac{1}{\sqrt{26}}y',\ y=\dfrac{5}{\sqrt{26}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{26}}y'$; 8) уравнение параболы, приводится к виду $(y'')^2=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}x''$ последовательным преобразованием координат $x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}x'-\dfrac{1}{\sqrt{5}}y',\ y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}x'+\dfrac{2}{\sqrt{5}}y'$ и $x'=x''+\dfrac{8}{\sqrt{5}},\ y'=y''+\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; 9) уравнение параболы, приводится к виду $(y'')^2=\sqrt{5}x''$ последовательным преобразованием координат $x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}x'-\dfrac{2}{\sqrt{5}}y',\ y=\dfrac{2}{\sqrt{5}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{5}}y'$ и $x'=x''+\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $y'=y''+\dfrac{1}{5}$; 10) уравнение пары пересекающихся прямых, приводится к виду $9(x'')^2-(y'')^2=0$ последовательным преобразованием координат $x=\dfrac{3}{\sqrt{10}}x'-\dfrac{1}{\sqrt{10}}y',\ y=\dfrac{1}{\sqrt{10}}x'+\dfrac{3}{\sqrt{10}}y'$ и $x'=x''+\dfrac{4}{\sqrt{10}},\ y'=y''+\dfrac{12}{\sqrt{10}}$; 11) уравнение пары параллельных прямых, приводится к виду $(x')^2-16=0$ преобразованием координат $x=\dfrac{3}{5}x'-\dfrac{4}{5}y',\ y=\dfrac{4}{5}x'+\dfrac{3}{5}y'$; 12) уравнение мнимого эллипса, приводится к виду $\frac{(x')^2}{4}+\frac{(y')^2}{9}=-1$ преобразованием координат $x=\frac{1}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'$, $y=\frac{2}{\sqrt{5}}x'+$ $+\frac{1}{\sqrt{5}}y'$; 13) уравнение гиперболы, приводится к виду $\frac{(x')^2}{18}-\frac{(y')^2}{2}=1$ преобразованием координат $x=\frac{3}{\sqrt{10}}x'-\frac{1}{\sqrt{10}}y'$, $y=\frac{1}{\sqrt{10}}x'+\frac{3}{\sqrt{10}}y'$; 14) уравнение эллипса, приводится к виду $\frac{(x'')^2}{16}+(y'')^2=1$ последовательным преобразованием координат $x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'$ и $x'=x''+3$, $y'=y''$; 15) уравнение гиперболы, приводится к виду $\frac{(x'')^2}{16}-\frac{(y'')^2}{4}=1$ последовательным преобразованием координат $x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'$ и $x'=x''-1$, $y'=y''$; 16) уравнение гиперболы, приводится к виду $\frac{(x'')^2}{16}-\frac{(y'')^2}{9}=1$ последовательным преобразованием координат $x=\frac{1}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'$, $y=\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'$ и $x'=x''-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $y'=y''-\frac{1}{\sqrt{5}}$; 17) уравнение гиперболы, приводится к виду $-(x')^2+\frac{(y'')^2}{4}=1$ последовательным преобразованием координат $x=\frac{4}{5}x'-\frac{3}{5}y'$, $y=\frac{3}{5}x'+\frac{4}{5}y'$ и $x'=x''-\frac{9}{5}$, $y'=y''+\frac{13}{5}$.

4.33. 1) Двуполостный гиперболоид с вершинами в точках $(0,0,6)$, $(0,0,-6)$ и осью Oz в качестве оси симметрии; 2) двуполостный гиперболоид с вершинами в точках $(0,\sqrt{3},0)$, $(0,-\sqrt{3},0)$ и осью Oy в качестве оси симметрии; 3) однополостный гиперболоид с осью симметрии Ox и горловым эллипсом $\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{8}=1$ в плоскости Oyz; 4) конус второго порядка с вершиной в начале координат и осью симметрии Oy; 5) эллиптический параболоид вращения; 6) эллиптический параболоид с каркасными параболами $x^2=-16z$ в плоскости Oxz и $y^2=-18z$ в плоскости Oyz; 7) гиперболический параболоид с прямолинейными образующими $\sqrt{10}z\pm 3x=0$ в плоскости Oxz, каркасной параболой $y=-\frac{2}{9}z^2$ в плоскости Oyz и каркасной параболой $y=20x^2$ в плоскости Oxy; 8) гиперболический параболоид с прямолинейными образующими $\sqrt{8}z\pm 3x=0$ в плоскости Oxz, каркасной параболой $y=\frac{1}{9}z^2$ в плоскости Oyz и каркасной параболой $y=-\frac{1}{8}x^2$ в плоскости Oxy; 9) сфера радиуса $1/\sqrt{6}$ с центром в начале координат; 10) параболический цилиндр с направляющей параболой $x^2+2y=1$, лежащей в плоскости Oxy, и образующими, параллельными оси Oz.

4.34. 1) Эллипсоид; 2) двуполостный гиперболоид; 3) двуполостный гиперболоид; 4) мнимый эллипсоид; 5) однополостный гиперболоид; 6) эллипсоид; 7) двуполостный гиперболоид; 8) параболический цилиндр; 9) гиперболический цилиндр; 10) двуполостный гиперболоид.

4.35. 1) Эллипс с центром в точке $(2/3, 2/3)$, с полуосями $\sqrt{6}/3$, $\sqrt{2}/3$ и большой осью, совпадающей с прямой $x+y-\dfrac{4}{3}=0$; 2) равнобочная гипербола с центром симметрии в точке $(2,1)$, асимптотами $x=2$, $y=1$, проходящая через точки $A(5,0)$, $B(0,5/2)$, $C(1,4)$. Вершины находятся в точках $E(2-\sqrt{6},\ 1+\sqrt{6})$, $F(2+\sqrt{6},\ 1-\sqrt{6})$; 3) прямая $x+y=0$; 4) парабола с вершиной в точке $(-7/4,\ -49/104)$; 5) гипербола с центром симметрии в точке $(5/2,-2)$, с направлениями осей симметрии $\boldsymbol{e}_1(1-\sqrt{5},\ 2)$, $\boldsymbol{e}_2(2,\ \sqrt{5}-1)$ и асимптотами $2x+4y+$ $+3=0$, $2x-5=0$.

4.36. 1) Эллипс с центром симметрии в точке $(-1/5,\ 1/5)$ и с направлениями осей симметрии $\boldsymbol{e}_1\left(5, \dfrac{-5+5\sqrt{5}}{2}\right)$, $\boldsymbol{e}_2\left(\dfrac{5-5\sqrt{5}}{2}, 5\right)$; 2) прямая $z=-1/2$; 3) парабола с вершиной в точке $(1/7,-3)$ и осью симметрии $z=-3$; 4) гипербола с центром симметрии $(-3/4,-5/2)$, направляющими векторами осей симметрии $\boldsymbol{e}_1(6,\ 15-\sqrt{116})$, $\boldsymbol{e}_2(15-\sqrt{116},\ -6)$ и асимптотами $2y-4z-1=0$, $10y-4z+5=0$; 5) эллипс с центром симметрии $(-9/8,-13/8)$ и направляющими векторами осей симметрии $\boldsymbol{e}_1(1,\ 2-\sqrt{5})$ $\boldsymbol{e}_2(5-\sqrt{2},\ 1)$; 6) гипербола с центром симметрии $(-1/8,-1/4)$, действительной осью $3y-2z-1/8=0$ и полуосями $a=\sqrt{30}/2$, $b=\sqrt{3}/8$.

4.37. 1) Биссектриса второго и четвертого координатных углов; 2) гипербола с центром симметрии $(-4/3,\ -4/3)$, направляющими векторами осей симметрии $\boldsymbol{e}_1(3-\sqrt{45},\ -6)$, $\boldsymbol{e}_2(-6,\ -3-\sqrt{45})$.

4.38. 1) Парабола; 2) эллипс; 3) гипербола; 4) гипербола; 5) гипербола.

4.39. $(-4,\ \pm 6,\ \pm 2\sqrt{3})$, 6, $2\sqrt{3}$.

4.40. $p=30$, $(0,12,-3)$.

4.41. $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $(\pm\sqrt{5}, 3, 0)$.

4.43. 1) Эллиптический параболоид $\dfrac{x_1^2}{1/4}+\dfrac{y_1^2}{1/8}=2z_1$, новая система координат $Ox_1y_1z_1$ получена из старой $Oxyz$ переносом начала координат в точку $O_1(0,\ -1,\ 2)$; 2) однополостный гиперболоид $-\dfrac{x_1^2}{2}+\dfrac{y_1^2}{2}+\dfrac{z_1^2}{2}=1$, новая система координат $Ox_1y_1z_1$ получена из старой $Oxyz$ поворотом вокруг оси Oz на угол 45°; 3) однополостный гиперболоид $\dfrac{x_1^2}{25}+\dfrac{y_1^2}{25/4}-\dfrac{z_1^2}{25}=1$, новая система координат $Ox_1y_1z_1$ получена из старой $Oxyz$ переносом начала координат в точку $O_1(5,2,0)$;

4) параболический цилиндр $z_1^2 = 5x_1$, новое начало координат находится в точке $O_1(3/5,\ 4/5,\ 0)$, направляющие векторы новых координатных осей Ox_1, Oy_1, Oz_1: $-3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$, $-4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$; 5) гиперболический параболоид $2z_1 = \dfrac{x_1^2}{1/16} - \dfrac{y_1^2}{1/16}$, новая система координат $Ox_1y_1z_1$ получена из старой $Oxyz$ поворотом вокруг оси Oz на угол 45° и переносом начала координат в точку $O_1(0,0,1)$; 6) конус $-\dfrac{x_1^2}{2/\sqrt{17}-1} + \dfrac{y_1^2}{1/8} + \dfrac{z_1^2}{2/\sqrt{17}+1} = 0$, новая система координат $Ox_1y_1z_1$ получена из старой $Oxyz$ поворотом вокруг оси Oy на угол $\arccos\sqrt{\dfrac{\sqrt{17}-1}{2\sqrt{17}}}$; 7) эллипсоид $\dfrac{x_1^2}{36} + \dfrac{y_1^2}{72} + \dfrac{z_1^2}{24} = 1$, новая система координат $Ox_1y_1z_1$ получена из старой $Oxyz$ поворотом вокруг оси Oz на угол 45°; 8) гиперболический цилиндр $\dfrac{z_1^2}{1} - \dfrac{y_1^2}{2} = 1$, новая система координат $Ox_1y_1z_1$ получена из старой $Oxyz$ поворотом вокруг оси Oz на угол 45°; 9) гиперболический параболоид $-\dfrac{x_1^2}{1/8} + \dfrac{y_1^2}{1/16} = 2z_1$, новая система координат $Ox_1y_1z_1$ получена из старой $Oxyz$ переносом начала координат в точку $O_1(1/2,\ 4,\ -127)$; 10) параболический цилиндр $y_1^2 = 2z_1$, новая система координат $Ox_1y_1z_1$ получена из старой $Oxyz$ поворотом вокруг оси Oz на угол 45° и переносом начала координат в точку $O_1(0,0,12)$; 11) эллиптический параболоид $\dfrac{x_2^2}{5} - \dfrac{y_2^2}{5} = 2z_2$, начало координат новой системы координат $O_2x_2y_2z_2$ находится в точке $O_2(5,\ 5,\ 19/5)$, направляющие векторы новых координатных осей O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2: $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

4.44. 1) $(0,\ -2,\ 0)$; 2) $(0,\ 2/3,\ 1)$; 3) например, $(-1,\ 1,\ 0)$.

4.45. 1) $\begin{cases} x = -\dfrac{3}{5} + 3t, \\ y = \dfrac{4}{5} + 4t, \\ z = 0; \end{cases}$ 2) например, $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x+y+z=0; \end{cases}$ 3) например, $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{0}$.

4.46. 1) Например, $5x+3y+17z=0$; 2) например, $x-y=0$; 3) например, $x-y=0$; 4) например, $15x-20z-6=0$.

4.48. 1) $9x^2-9y^2+20z^2+12xz+24yz+12x+24y+40z-61=0$; 2) $13x^2+10y^2+$ $+5z^2+4xy-6xz+12yz-38x+20y+26z+3=0$; 3) $x^2+y^2+34z^2-10xy-6yz-10=$ $=0$; 4) $\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{25}=1$; 5) $4y^2+z^2-4yz-4x+4y+22z-23=0$.

4.49. 1) $x^2+y^2+34z^2-10xz-6yz-10=0$; 2) $2x^2+y^2-2xy-2xz+2yz+2x-$ $-2y-2z+1=0$; 3) $xy+xz+yz=0$, $xy+xz-yz=0$, $xy-xz-yz=0$, $xy-xz+$ $+yz=0$.

4.50. 1) $y^2+z^2=2x$; 2) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{9}=1$; 3) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}-\dfrac{z^2}{25}=1$; 4) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{16}=1$; 5) $(x^2+y^2+z^2+3)^2=16(x^2+z^2)$; 6) $z^2=2xy-2$; 7) часть гиперболоида $xy+xz+yz=1$, кроме точек, заключенных между плоскостями $x+y+z-2=0$, $x+y+z+2=0$.

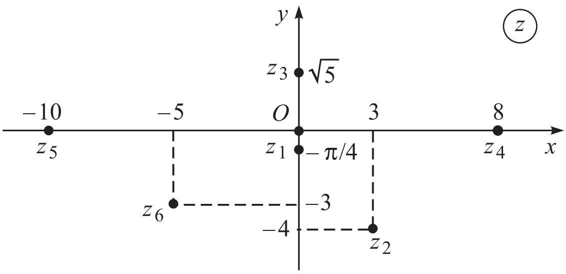
Глава 5

5.1. 1) $3+2i$; 2) $2(ac-bd)$; 3) $-i$; 4) $3+i$.

5.2. $x=-20$, $y=-12$.

5.3. $z_1=2-i$, $z_2=2+i$.

5.4.



5.5. 1) Симметрично относительно действительной оси; 2) симметрично относительно начала координат.

5.6. $0, \pi, \pi/4, -\pi/2$.

5.7. $2; 27; 8; \sqrt{3}$.

5.8. 1) $4/13$; 2) $27/34$.

5.9. 1) $8ab(a^2-b^2)i$; 2) $3/5$; 3) $\cos 2\varphi - i\sin 2\varphi$; 4) $-\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$; 5) 1; 6) $52{,}3+13{,}9i$; 7) $-2^{3047}i$; 8) $2^{1523}(1+i)$; 9) $1/2$.

5.10. 1) $0, 1, -\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; 2) $0, 1, i, -1, -i$.

5.11. 1) $\pm\dfrac{4}{\sqrt{2}}(1+i)$; 2) $\pm(5+6i)$; 3) $\pm(1+2i)$; 4) $\pm(3-i)$; 5) $\pm(4-3i)$.

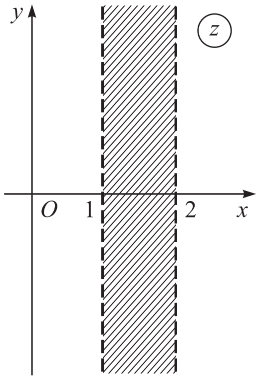
5.12. 1) $1\pm i$; 2) $-2\pm 3i$; 3) $-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; 4) $\pm 3i$; 5) $1\pm i\sqrt{2}$; 6) $\pm\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\pm\dfrac{i}{2}\right)$; 7) $3-i$, $-1+2i$; 8) $-4-3i$; 9) $3\sqrt{2}+i(2-1/\sqrt{2})$, $-3/\sqrt{2}+i(2+1/\sqrt{2})$.

5.13. У к а з а н и е. Воспользоваться определениями.

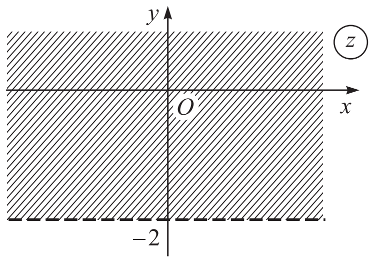
5.14. 1) $\pi/3$ или $-\pi/3$; 2) $\pi/6$ или $5\pi/6$.

5.15.

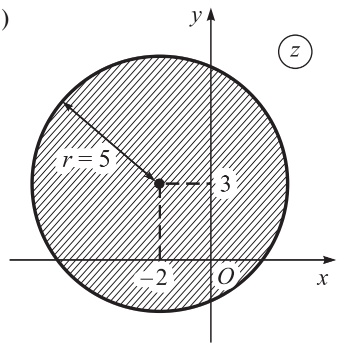
1)



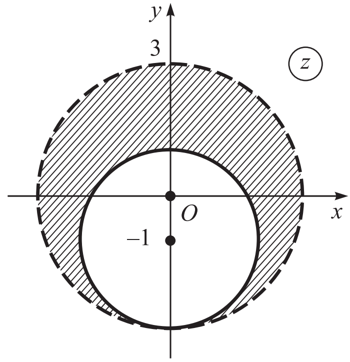
2)



3)

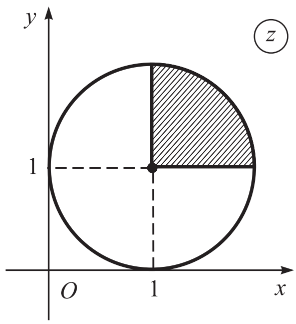


4)

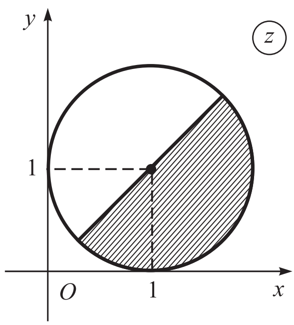


5) $\varnothing$;

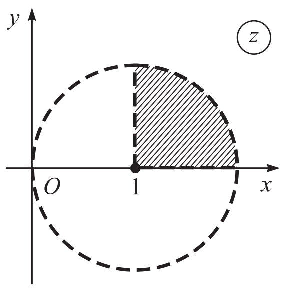
6)



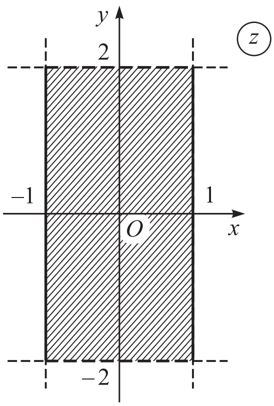
7)



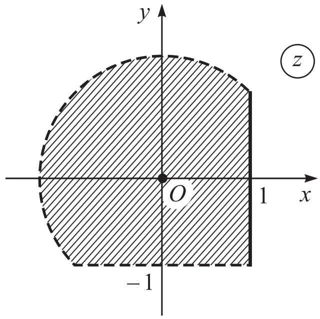
8)



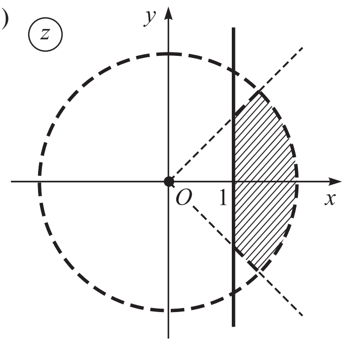
9)



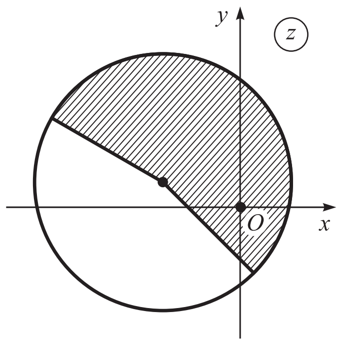
10)



11)



12)



5.16. 1) $8e^{\pi i}$; 2) $2e^{-\pi i/2}$; 3) $e^{-\pi i/2}$; 4) $2e^{2\pi i/3}$; 5) $\sqrt{2}e^{3\pi i/4}$; 6) $e^{(\alpha-\pi/2)i}$; 7) $2\sin(\alpha/2)e^{i\alpha/2}$; 8) $2e^{-\pi i/4}$; 9) $2e^{-3\pi i/4}$; 10) $e^{4\pi i/5}$; 11) $3e^{4\pi i/5}$; 12) $\sqrt{27}e^{0\cdot i}$; 13) $5e^{-i\,\mathrm{arctg}(3/4)}$; 14) $\sqrt{5}e^{i\,\mathrm{arctg}\,2}$; 15) $2e^{-\pi i/6}$; 16) $\sqrt{2}e^{-3\pi i/4}$.

5.17. 1) 2^{60}; 2) 16; 3) $2^{37}(-1-i)$; 4) $(6+4\sqrt{2})i$; 5) $-2^{9/2}(1+i)$; 6) -2^{30}; 7) -2^{-150}; 8) $-2^{19}(1+i\sqrt{3})$; 9) 0; 10) $\cos(n(\pi/2-\varphi))+i\sin(n(\pi/2-\varphi))$; 11) $-3^{13}e^{\pi i/6}$; 12) $(8+4\sqrt{3})^{12}$.

5.18. 1) $\sqrt{2}e^{(-\pi/12+2\varphi)i}$; 2) $\cos(7\pi/12+\varphi)+i\sin(7\pi/12+\varphi)$;

3) $\dfrac{1}{2\cos(\varphi/2)}\left(\cos\dfrac{3\varphi}{2}-i\sin\dfrac{3\varphi}{2}\right)$; 4) $e^{(\varphi+\psi-7\pi/12)i}$.

5.19. Указание. Использовать свойства тригонометрических функций и формулу Муавра.

5.20. 1) 2^6, 0; 2) 1, $\pi/2$; 3) $1/4\sqrt{2}$, $-5\pi/12$.

5.21. 1) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$; 2) $\pm i$; 3) $\pm(2-i)$; 4) $\frac{1}{2}(\pm\sqrt{3}+i)$, i; 5) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}(1+i)$, $\sqrt[6]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $\sqrt[6]{2}\left(\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}\right)$; 6) $-1+i$, $\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$, $\frac{1-\sqrt{3}}{2}-$ $-\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$; 7) $2^{7/8}\cdot e^{3\pi i/16}$, $2^{7/8}\cdot e^{11\pi i/16}$, $2^{7/8}\cdot e^{19\pi i/16}$, $2^{7/8}\cdot e^{27\pi i/16}$; 8) $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{3}}{4}i$; 9) $\frac{1}{6}(\pm\sqrt{3}-i)$, $\frac{i}{3}$; 10) $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{1}{4}i$; 11) $3\left(\pm\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}\right)$; 12) $\pm4(\sqrt{3}+i)$, $\pm4(-1+i\sqrt{3})$; 13) $\frac{\pm(\sqrt{3}+i)}{2}$, $\frac{\pm(-1+i\sqrt{3})}{2}$; 14) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\sin\frac{\pi}{12}+i\cos\frac{\pi}{12}\right)$; 15) $2(\pm1\pm\sqrt{3}i)$; 16) $\sqrt[10]{2}(\cos6^\circ+i\sin6^\circ)$, $\sqrt[10]{2}(\cos78^\circ+i\sin78^\circ)$, $\sqrt[10]{2}(\cos150^\circ+i\sin150^\circ)$, $\sqrt[10]{2}(\cos222^\circ+i\sin222^\circ)$, $\sqrt[10]{2}(\cos294^\circ+i\sin294^\circ)$; 17) ±1, $\pm\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 18) $\pm\cos\frac{\pi}{8}\pm$ $\pm i\sin\frac{\pi}{8}$.

5.22. 1) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}e^{\frac{24k+19}{72}\pi i}$, $k=\overline{0,5}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{(-\pi/12+2\pi k/5)i}$, $k=\overline{0,4}$.

5.23. 1) -2, $1\pm i\sqrt{3}$; 2) $\pm1\pm i$; 3) $\pm3i$, $\frac{3}{2}(\pm\sqrt{3}\pm i)$.

5.24. 1) $\cos^3\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha$; 2) $3\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha$.

5.25. 1) $\frac{1}{4}(3\cos\alpha+\cos3\alpha)$; 2) $\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin3\alpha)$.

5.26. Указание. Использовать формулы $\sin\alpha=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$, $\cos\alpha=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$ и формулу бинома Ньютона.

5.27. Указание. Использовать то, что $(\cos x+i\sin x)^k=e^{ikx}\Leftrightarrow\cos kx+$ $+i\sin kx=e^{ikx}$, и формулу суммы геометрической прогрессии.

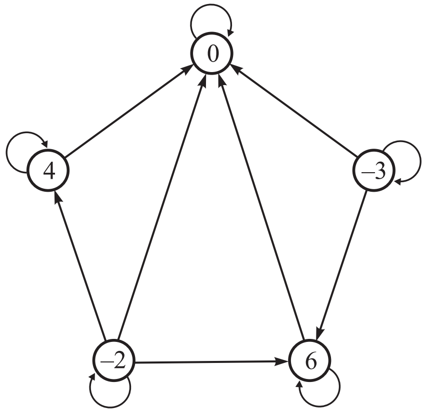
5.28. 1) $\frac{n}{2}+\frac{\cos((n+1)x)\sin(nx)}{2\sin x}$;

2) $\frac{3\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{4\sin\left(\frac{x}{2}\right)}+\frac{\cos\left(\frac{3(n+1)}{2}x\right)\sin\left(\frac{3nx}{2}\right)}{4\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}$; 3) $\frac{n}{2}-\frac{\cos((n+1)x)\sin(nx)}{2\sin x}$;

4) $\frac{3\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{4\sin\left(\frac{x}{2}\right)}-\frac{\sin\left(\frac{3(n+1)}{2}x\right)\sin\left(\frac{3nx}{2}\right)}{4\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}$.

Глава 6

6.1.



6.2. В ответах упоминаются только те свойства, которым удовлетворяет данное отношение: 1) симметрично; 2) антисимметрично; 3) антисимметрично, транзитивно; 4) рефлексивно; 5) антисимметрично; 6) рефлексивно, симметрично, транзитивно; 7) рефлексивно.

6.3. Таких линейных порядков оказывается 5. Каждый линейный порядок записывается в виде перестановки: $(-2, -3, 4, 6, 0)$, $(-2, -3, 6, 4, 0)$, $(-2, 4, -3, 6, 0)$, $(-3, -2, 4, 6, 0)$, $(-3, -2, 6, 4, 0)$. Отношение σ является пересечением.

6.4. Да.

6.5. Указание. Рефлексивность, симметричность и транзитивность легко проверяются исходя из свойств параллельных прямых. В качестве трансверсала можно выбрать пучок прямых с центром в начале координат. При этом каждый класс эквивалентности индексируется углом φ, $0 \leqslant \varphi < \pi$, который составляет соответствующая прямая из этого пучка с осью Ox.

6.6. $\boldsymbol{a = 0}$.

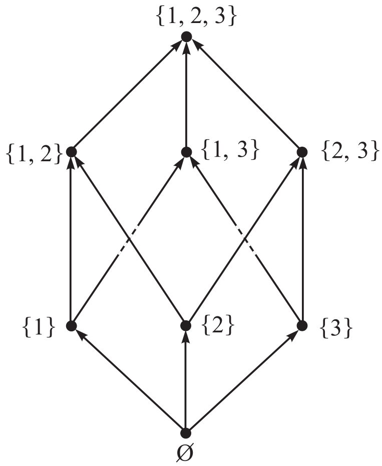
6.7. Да.

6.8. 1) Отношение порядка; 2) отношение эквивалентности; 3) отношение квазипорядка, не являющееся ни отношением порядка, ни отношением эквивалентности; 4) отношение порядка.

6.9. Указание. Рефлексивность и транзитивность легко следуют из свойств отношения порядка целых чисел. Неантисимметричность следует из того, что отображение $n \mapsto |n|$ неинъективно.

6.10. Указание. Свойства отношения $\leqslant$ на множестве $\mathbb{R}$ проверяются непосредственным применением определений. Для множества $\mathbb{C}$ комплексных чисел можно предложить в качестве отношения порядка с указанными свойствами следующее отношение σ: если $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, то полагаем $(x + yi,\ u + vi) \in \sigma \Leftrightarrow (x < u) \vee ((x = u) \wedge (y \leqslant v))$ (лексикографический порядок).

6.11. Указание. Утверждение проверяется непосредственным применением определений.



6.12. 1) Отношение порядка; 2), 3) отношения квазипорядка, не являющиеся отношениями порядка.

6.13. Указание. Показать, что для $a, b \in \mathbf{2}^n$ соотношение $a\sigma_1 b$ выполняется в том и только в том случае, когда в каждом разряде 1 оказывается в строке b лишь тогда, когда она находится в a, и то же самое выполняется для отношения σ_2. Отсюда следует, что $\sigma_1 = \sigma_2$, а также выполняется для этих отношений рефлексивность, антисимметричность и транзитивность ввиду того, что в каждом разряде эти свойства выполняются для отношения $\leqslant$ на множестве $\{0, 1\}$.

6.14. Указание. Утверждения проверяются непосредственным применением определений.

6.15. Функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{arctg} x$, e^x, $2x+1$ — полные преобразования множества $\mathbb{R}$, первые две из них неинъективны и несюръективны, последняя функция биективна, третья и четвертая — инъективны, но не сюръективны.

6.16. Преобразование f_A инъективно тогда и только тогда, когда сюръективно, и тогда и только тогда, когда $A = X$; аналогично преобразование g_A инъективно тогда и только тогда, когда сюръективно, и тогда и только тогда, когда $A = \varnothing$; h_A биективно при любом A; преобразование $A \mapsto \overline{A}$ биективно.

6.17. Указание. В качестве биекции $\mathbb{R}$ на $(0,1)$ рассмотреть функцию $\operatorname{arctg} x$. Для равномощности интервалов $[0,1]$ и $(0,1)$ использовать то, что множества иррациональных чисел в обоих интервалах совпадают, а множества рациональных чисел счетны согласно примеру 6.

6.18. Указание. Утверждения проверяются непосредственным применением определений.

6.19. Инъективность преобразования f конечного множества X равносильна тому, что $\operatorname{Card} X = \operatorname{Card} f(X)$, и это же условие равносильно сюръективности f.

6.20. Нет.

6.21. Нет.

6.22. Все упомянутые операции не являются полными.

6.23. Указание. Утверждения проверяются непосредственным применением определений.

6.24. 1) Полная ассоциативная операция без нейтрального элемента; 2) полная ассоциативная операция с нейтральным элементом 1; 3) полная неассоциативная операция без нейтрального элемента; 4) частичная неполная операция; 5) полная неассоциативная операция без нейтрального элемента.

6.25. 1) Коммутативна, ассоциативна, без нейтрального элемента; 2) коммутативна, ассоциативна, с нейтральным элементом 1; 3) некоммутативна, неассоциативна, без нейтрального элемента; 4) некоммутативна, неассоциативна, без нейтрального элемента; 5) коммутативна, неассоциативна, без нейтрального элемента.

6.26. 1) Полугруппа; 2) моноид; 3) группа; 4) группа; 5) моноид; 6) группа; 7) группа; 8) группа; 9) моноид; 10) группа; 11) моноид; 12) группа; 13) группа; 14) моноид; 15) группа; 16) группа; 17) группа; 18) полугруппа; 19) группа; 20) группа; 21) группа; 22) группа; 23) группа; 24) моноид; 25) моноид; 26) группа; 27) группа. Все указанные операции коммутативны.

6.27. Указание. Пусть 1 — это единица группы G. Убедиться, что оба элемента a и $(a^{-1})^{-1}$ из группы G удовлетворяют одному и тому же уравнению $x \cdot a^{-1} = 1$ относительно x; также для $a, b \in G$ оба элемента $(ab)^{-1}$ и $b^{-1}a^{-1}$ удовлетворяют одному и тому же уравнению $x \cdot (ab) = 1$.

6.28. Указание. Использовать задачу 6.27.

6.29. Указание. Представить каждое комплексное число из T в экспоненциальной форме и, используя формулы умножения комплексных чисел и взятия обратного в этой форме, убедиться, что множество T замкнуто в группе $(\mathbb{C}, \cdot)$ относительно этих операций. В частности, соответствие $e^{\varphi i} \mapsto (e^{\varphi i})^{-1} = e^{-\varphi i}$ представляется в виде симметрии относительно действительной оси на комплексной плоскости.

6.30. Указание. Использовать индукцию по n. Для этого рассмотреть отображение f из S_n на множество $\{1, 2, \ldots, n\}$, где для каждого $\alpha \in S_n$ $f(\alpha) = \alpha(1)$. Далее опереться на то, что прообраз каждого числа из $\{1, 2, \ldots, n\}$ состоит из $(n-1)!$ элементов.

6.31. Указание. Обозначим множество таких функций через M. Так как

$$f \in M \Leftrightarrow \forall x, \quad y \in \mathbb{R} \ (x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)),$$

то множество M замкнуто в Sym R относительно суперпозиции подстановок и взятия обратной подстановки. Из этого же соотношения сделать заключение, что соответствие $f \mapsto f^{-1}$ для графиков функций из M есть симметрия относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

6.32. Указание. Если H – подгруппа группы $(\mathbb{R}, +)$, то для ненулевого элемента $a \in H$ имеем $a < 2a < 3a < \ldots$ и все элементы этой последовательности обязаны принадлежать H.

6.33. Указание. Рассмотреть векторы, противоположные к данным.

6.34. Указание. Отношение «быть подгруппой» содержится в отношении включения подмножеств и потому антисимметрично. Транзитивность следует из того, что свойство «быть подгруппой» для подмножества равносильно замкнутости его относительно групповых операций.

6.35. Указание. Все утверждения верны и доказываются непосредственно исходя из определений.

6.36. Указание. Рассмотреть соответствие, ставящее комплексному числу с радиусом 1 и аргументом φ поворот плоскости вокруг начала координат на угол φ.

6.37. Указание. Использовать то, что уравнение $x^2=1$ в данных подгруппах имеет различное количество решений.

6.38. Указание. Рассмотреть экспоненту в качестве изоморфизма группы $(\mathbb{R},+)$ на группу $(\mathbb{R}_+,\cdot)$.

6.39. Указание. Предположить от противного, что изоморфизм f группы $(\mathbb{Q},+)$ на группу $(\mathbb{Q}_+,\cdot)$ существует. Тогда найдется рациональное число a такое, что уравнение $2x=a$ в первой группе и соответствующее уравнение $y^2=f(a)$ во второй группе имеют различные количества решений.

6.40. 1) Область целостности, не поле; 2) кольцо, не область целостности; 3) поле; 4) область целостности, не поле; 5) поле; 6) поле; 7) область целостности, не поле; 8) поле; 9) кольцо с единицей, не являющееся областью целостности; 10) при $n=1$ – конечное поле из двух элементов, при $n>1$ – кольцо с единицей, не являющееся областью целостности. Отметим, что все рассмотренные кольца коммутативны и ассоциативны.

6.41. Указание. Аксиомы кольца проверяются непосредственно с использованием свойств операций объединения, пересечения, дополнения множеств.

Глава 7

7.1. 1) $f(x)+g(x)=x^4+x^3+3x^2-x+3$, $f(x)g(x)=x^7+5x^5-x^4+7x^3-4x+2$; 2) $f(x)+g(x)=x^5-x^4+2x^3-5x^2+2x-1$, $f(x)g(x)=x^8-6x^7+6x^6-3x^5-11x^3+$ $+15x^2+4x-6$.

7.2. 0.

7.3. 1) $f(x)=g(x)(2x^2+7x+12)+(7x-8)$; 2) $f(x)=g(x)\left(\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}\right)+\left(-\frac{26}{9}x-\frac{28}{9}\right)$; 3) $f(x)=g(x)(x^2+2x+4)+(-3x+11)$; 4) $f(x)=g(x)0(x)+(2x^2-3x+1)$; 5) $f(x)=$ $=g(x)(x^2+2x-1)$; 6) $f(x)=g(x)(3x^4-2x^3+2x^2-4x+4)+1$.

7.4. 1) $r(x)=4x+8$; 2) $r(x)=3x$; 3) $r(x)=3x^3+3x+1$; 4) $r(x)=1$; 5) $r(x)=4x^2-$ $-4x$.

7.5. 1) $b=1, c=0, a$ – любое допустимое значение коэффициента; 2) $a=2c-1$, $b=c^2$, c – любое допустимое значение коэффициента; 3) $a=d^3-2d$, $b=d^2-1$, d – любое допустимое значение коэффициента.

7.6. 1) 3 делит n, $n\geqslant 3$; 2) $n=3(2l+1)$, $l\in N$; 3) n не делится на 3, $n\geqslant 3$; 4) $n=$ $=6l+1$, $n=6l+5$, $l=0,1,\ldots$; 5) ни при каких натуральных n не делится.

7.7. 1) – 4) Да; 5) нет.

7.8. Указание. Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $x^2-2x-1=0$. Нетрудно видеть, что $x_1, x_2\in\mathbb{R}$. Если многочлен $(2x+1)^n-x^n+1$ делится на многочлен x^2-2x-1, то корень x_1 должен быть корнем многочлена $(2x+1)^n-x^n+1$. Учитывая, что $2x_1+1=x_1^2$, получаем, что $x_1^{2n}-x_1^n+1\neq 0$.

7.9. $-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}$.

7.10. 1) $x^3(x+1)$; 2) $(x+2)^2(x^2+4)$; 3) $(x^2-4)^2$; 4) 1; 5) x^6-1; 6) $x^{11}-1$.

7.11. 1) x^2-x-2; 2) $x-1$; 3) $(x+1)^2$; 4) $2x^3+1$; 5) x^2+2x+2; 6) x^2+2.

7.12. 1) $d(x)=x^2-2,\ u(x)=2-x,\ v(x)=x-1$; 2) $d(x)=x^3+1,\ u(x)=2x+5,$ $v(x)=-4$; 3) $d(x)=3x-1,\ u(x)=x+2,\ v(x)=(-x-1)$; 4) $d(x)=1,\quad u(x)=\dfrac{1}{174}\times$ $\times(37x^2-14x+121),\ v(x)=\dfrac{1}{174}(37x^3+60x^2+56x+34)$; 5) $d(x)=x+1,\ u(x)=\dfrac{3x+1}{7},$ $v(x)=-\dfrac{3}{7}x^2+\dfrac{2}{7}x+\dfrac{10}{7}$; 6) $d(x)=x-1,\ u(x)=\dfrac{1}{45}(-3x+2)\ v(x)==\dfrac{1}{45}(3x+7)$.

7.13. 1) $u(x)=-x+1,\ \ v(x)=x^2$; 2) $u(x)=\dfrac{1}{8}(-41x^2-114x-65),\ \ v(x)=\dfrac{1}{8}\times$ $\times(41x^2-91x+69)$; 3) $u(x)=-3x-4,\ v(x)=3x^2-2x+1$; 4) $u(x)=-x^3+3x^2-4x+2,$ $v(x)=x^4-6x^3+14x^2-15x+7$; 5) $u(x)=-3x^2-2x^2+x+2,\quad v(x)=3x^2-x-1$; 6) $u(x)=-20x^3+70x^2-84x+35,\ v(x)=20x^3+10x^2+4x+1$.

7.14. 1) $\dfrac{x^2}{(x-1)^3(x+1)^2}=\dfrac{-x^2+6x-1}{16(x-1)^3}+\dfrac{x-1}{16(x+1)^2}$;

2) $\dfrac{x^4+1}{(x^2+x+1)(x+1)^3}=\dfrac{-x-1}{x^2+x+1}+\dfrac{2(x^2+x+1)}{(x+1)^3}$;

3) $\dfrac{1}{(x^4+1)(x^2-x+1)^2}=\dfrac{-2x^3-3x^2-2x}{x^4+1}+\dfrac{2x^3-x^2+2x+1}{(x^2-x+1)^2}$;

4) $\dfrac{x^4}{(x^2+3x+2)(x^2+x+1)}=\dfrac{7x-2}{9(x^2+3x+2)}+\dfrac{2x^2-4x+1}{9(x^2+x+1)}$;

5) $\dfrac{x^3+1}{(x^2+2)^2(x^3+x^2+x+1)}=\dfrac{x^3+3x+1}{(x^2+2)^2}-\dfrac{x^2+x}{x^3+x^2+x+1}$;

6) $\dfrac{x^4+2}{(x^3+2)(x^6-x^4+3x^3-2x+20)}=\dfrac{-2x+2}{18(x^3+2)}+\dfrac{x^4-x^3-x^2+11x-1}{9(x^6-x^4+3x^3-2x+20)}$.

7.15. Указание. Пусть $f(x)=f_1(x)d(x)$, $g(x)=g_1(x)d(x)$, где $d(x)$ – ненулевой НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Допустим от противного, что многочлены $f_1(x)$ и $g_1(x)$ не взаимно просты. Тогда существует их общий делитель $u(x)$ степени больше нуля, т.е. $f_1(x)=f_2(x)u(x)$, $g_1(x)=g_2(x)u(x)$ для некоторых многочленов $f_2(x)$ и $g_2(x)$. Но тогда $u(x)d(x)$ становится общим делителем для исходных многочленов $f(x)$ и $g(x)$ и по определению НОД $d(x)$ должен делиться на $u(x)d(x)$. Однако $\deg d(x)<\deg u(x)+\deg d(x)=\deg u(x)d(x)$, и, учитывая то, что все рассматриваемые многочлены – ненулевые, приходим к противоречию. Значит, многочлены $f_1(x)$ и $g_1(x)$ взаимно просты.

7.16. $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}=-\dfrac{1}{58}\sqrt[3]{9}+\dfrac{11}{58}\sqrt[3]{3}-\dfrac{5}{58}$.

7.17. 1) $x^4+2x^2+20x+7=(x+3)(x^3-3x^2+11x-13)+46$; 2) $2x^4-3x^3-5x^2+$ $+8x-3=(x-4)(2x^3+5x^2+15x+68)+269$; 3) $x^3+x^2-7=(x-4-4i)(x^2+(5+4i)x+$ $+4+36i)-135+160i$; 4) $3x^5-x^4+2x^3-x+5=(x+1-i)(3x^4+(-4+3i)x^3+(3-$ $-7i)x^2+(4+10i)x-15-6i)+26-9i$; 5) $2x^5+2x^3+x=(x-1-2i)(2x^4+(2+4i)x^3+$ $+(-4+8i)x^2-20x-19-40i)+61-78i$.

7.18. 1) $f(1/2)=-15/8$; 2) $f(1+i)=-9-14i$; 3) $f(1-i)=-5$.

7.19. 1) $x^3-2x^2+4=(x+2)^3-8(x+2)^2+20(x+2)-12$; 2) $x^3-2x^2+10x+1=$ $=(x-3)^3+7(x-3)^2+25(x-3)+40$; 3) $x^5+4x^4+3x^2+x=(x-i)^5+(4+5i)(x-i)^4+$ $+(-10+16i)(x-i)^3+(-21-10i)(x-i)^2+(6-10i)(x-i)+(1+2i)$; 4) x^4-18x^3+12x+ $+5=(x+i)^4+(-18-4i)(x+i)^3+(-6+54i)(x+i)^2+(66+4i)(x+i)+6-30i$; 5) $2x^4+$ $+3x^2-4x+7=2(x-1)^4+8(x-1)^3+15(x-1)^2+10(x-1)+8$.

7.20. 1) $f(x)=4x^4-32x^3+94x^2-115x+45$; 2) $f(x)=3x^4+44x^3+232x^2+$ $+534x-1141$; 3) $f(x)=x^6+6ix^5+(-13-i)x^4+(3-11i)x^3+(1+4i)x^2+(-4-4i)x+$ $+5-3i$.

7.21. 1) $f(-1)=6$, $f'(-1)=-29$, $f''(-1)=52$, $f'''(-1)=-48$, $f^{IV}(-1)=24$, $f^{V}(-1)=0$, ...; 2) $f(1)=14$, $f'(1)=-1$, $f''(1)=-10$, $f'''(1)=6$; 3) $f(-2)=-224$, $f'(-2)=368$, $f''(-2)=-336$, $f'''(-2)=-192$, $f^{IV}(-2)=1080$, $f^{V}(-2)=-1440$, $f^{VI}(-2)=720$, $f^{VII}(-2)=0$, ...; 4) $f(1-i)=5+79i$, $f'(1-i)=-75+100i$, $f''(1-i)=-140+20i$, $f'''(1-i)=-60-120i$, $f^{IV}(1-i)=120-120i$, $f^{V}(1-i)=120$; 5) $f(1+i)=-9-8i$, $f'(1+i)=-30+2i$, $f''(1+i)=-46+58i$, $f'''(1+i)=18+144i$, $f^{IV}(1+i)=144+120i$, $f^{V}(1+i)=120$.

7.22. 1) $\dfrac{x^2}{(1-x)^{100}}=\dfrac{1}{(x-1)^{98}}+\dfrac{2}{(x-1)^{99}}+\dfrac{1}{(x-1)^{100}}$; 2) $\dfrac{x^3+3x-1}{(x+1)^5}=\dfrac{1}{(x+1)^2}-$ $-\dfrac{3}{(x+1)^3}+\dfrac{6}{(x+1)^4}-\dfrac{5}{(x+1)^5}$; 3) $\dfrac{x^4+2x+2}{(x^2+1)^3}=\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$; 4) $\dfrac{x^6+4x^4+3x^2}{(x^2+1)^5}=$ $=\dfrac{1}{(x^2+1)^2}+\dfrac{1}{(x^2+1)^3}-\dfrac{2}{(x^2+1)^4}$.

7.23. НОД$(f(x),g(x))=1$.

7.24. $\alpha^9=513+405\sqrt[3]{4}+324\sqrt[3]{2}$.

7.25. 1) 4; 2) 1; 3) 2; 4) 1; 5) 1.

7.26. 1) При $a=-3$ $f(x)$ имеет корень 1 кратности 3, при $a=(15/4)$ $f(x)$ имеет корень -2 кратности 2, при остальных значениях a нет кратных корней; 2) при $a=-4$ $f(x)$ имеет корень 1 кратности 2, в остальных случаях $f(x)$ не имеет кратных корней.

7.27. 1) $p=3$, $q=3$, $r=1$; 2) $p=2$, $q=-2$, $r=-1$; 3) $p=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n-1)}{2}$, $q=(-1)^{n-1}n^2$, $r=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)(n+2)}{2}$.

7.28. 1) $n\geqslant 2$; 2) $n=6$.

7.29. $\left(\dfrac{p}{6}\right)^6=\left(\dfrac{q}{5}\right)^5$.

7.30. У к а з а н и е. Допустим, что a есть корень многочлена $f(x)=x^n+px^m+q$ $(q\neq 0,\ 1\leqslant m<n)$ кратности больше 2. Тогда $a\neq 0$ и выполняются равенства $f(a)=a^n+pa^m+q=0$, $f'(a)=na^{n-1}+mpa^{m-1}=0$, $f''(a)=n(n-1)a^{n-2}+m(m-$ $-1)pa^{m-1}=0$. Из второго и третьего равенств после сокращений выводим $na^{n-m}+mp=0$, $(n-1)na^{n-m}+(m-1)mp=0$. Умножая первое из полученных ра-

венств на $n-1$ и вычитая левые части, имеем $(n-m)mp=0$. Если $p\neq 0$, то отсюда следует, что $n=m$. Противоречие. Если $p=0$, то a есть корень уравнения $x^n+q=0$ над полем $\mathbb{C}$, где $q\neq 0$. Однако последнее уравнение не может иметь кратных корней.

7.31. Указание. Убедиться, что данный многочлен взаимно прост со своей производной.

7.32. 1) $(x-1)^2(x+2)$; 2) $(x+1)(x+2)(x+3)$; 3) $\left(x-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)\times$ $\times\left(x+\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)$; 4) $(x+1)^3(x-1)^2$; 5) $(x-1)(x-2)^2$.

7.33. Разложение над полем $\mathbb{C}$: 1) $(x-1)^2(x+1+i\sqrt{2})(x+1-i\sqrt{2})$; 2) $\left(x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; 3) $\left(x+\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}+\right.$ $\left.+i\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}-1\right)\right)\left(x+\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}-i\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}-1\right)\right)\left(x-\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}-i\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}+1\right)\right)\times$ $\times\left(x-\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}+i\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}+1\right)\right)$; 4) $(x+1+i)(x+1-i)\left(x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)\left(x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)$; 5) $(x-1)\left(x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; 6) $(x-(\sqrt{2}+i\sqrt{2}))\times$ $\times(x-(\sqrt{2}-i\sqrt{2}))(x-(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}))(x-(-\sqrt{2}-i\sqrt{2}))$; 7) $(x+3)(x-2)\left(x+\dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)\times$ $\times\left(x+\dfrac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)$; 8) $(x-1)(x+2)\left(x+\dfrac{1+i\sqrt{19}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1-i\sqrt{19}}{2}\right)$; 9) $(x-2)(x+3)\times$ $\times\left(x+\dfrac{1+i\sqrt{15}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1-i\sqrt{15}}{2}\right)$; 10) $\left(x-\dfrac{5+\sqrt{25+4\sqrt{6}}}{2}\right)\left(x-\dfrac{5-\sqrt{25+4\sqrt{6}}}{2}\right)\times$ $\times\left(x-\dfrac{5+\sqrt{25-4\sqrt{6}}}{2}\right)\left(x-\dfrac{5-\sqrt{25-4\sqrt{6}}}{2}\right)$.

Разложение над полем $\mathbb{R}$: 1) $(x-1)(x^2+2x+3)$; 2) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$; 3) $\left(x^2+2\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}x+\sqrt{2}+1-2\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}\right)\left(x^2-2\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}x+\sqrt{2}+1+2\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}\right)$; 4) $(x^2+2x+2)(x^2+x+1/2)$; 5) $(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$; 6) $(x^2-2\sqrt{2}x+2)(x^2+$ $+2\sqrt{2}x+2)$; 7) $(x+3)(x-2)(x^2+x+2)$; 8) $(x-1)(x+2)(x^2+x+5)$; 9) $(x-2)(x+3)(x^2+$ $+x+4)$; 10) $\left(x-\dfrac{5+\sqrt{25+4\sqrt{6}}}{2}\right)\left(x-\dfrac{5-\sqrt{25+4\sqrt{6}}}{2}\right)\left(x-\dfrac{5+\sqrt{25-4\sqrt{6}}}{2}\right)\left(x-\dfrac{5-\sqrt{25-4\sqrt{6}}}{2}\right)$.

7.34. 1) $-3-i\sqrt{6}, 2$; 2) $\frac{3}{14}-i\frac{\sqrt{5}}{14}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}$; 3) $2+i\sqrt{6}, \frac{1+\sqrt{83}}{2}, \frac{1-\sqrt{83}}{2}$.

7.35. $m=6k+1, k\in\mathbb{N}$.

7.36. Для многочлена $g(x)$ модуль корня не превосходит 1, а для многочлена $R(x)$ модуль корня не меньше 1.

7.37. 1) $f(x)$ не имеет рациональных корней; 2) –1, 1/3; 3) 1/2; 4) $f(x)$ не имеет рациональных корней.

7.38. 1) $(x-1)(x+1)^2(x-2)^3$; 2) $(x+1)^2(x-2)^2$; 3) $(x^2-1)^2(x^2+1)^3$; 4) $(x^2+x+1)^2\times$ $\times\ (x^2-x+1)^3$; 5) $(x-1)$.

7.39. 1) $(x-1)^2(x+2)^4$; 2) $(x+2)^4(x-3)$; 3) $(x-1)(x+1)^3(x+5)^2$; 4) $(x-1)(x^2+1)^2$; 5) $(x+1)^3(x+2+i)^2(x+2-i)^2$; 6) $(x-1)^4(x+3)^2$; 7) $(x-1)^2(x+1)^4$; 8) $(x-i)^3(x+i)^2\times$ $\times\ (2x+i)$.

7.40. $f(x)=(ax+b)^2$.

7.41. 1) $x_1=1+i$, $x_2=1-i$, $x_3=\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{7})$; 2) $x_1=\frac{1}{2}(1+\sqrt{13})$, $x_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{13})$, $x_3=\frac{1}{2}(-3+\sqrt{21})$, $x_4=\frac{1}{2}(-3-\sqrt{21})$.

7.42. $1, 2, \ldots, n$.

7.43. Указание. Использовать индукцию по степени $2n$ многочлена $f(x)$. Если $\deg f(x)=2$, то он имеет два сопряженных недействительных корня: $a+bi$ и $a-bi$, $a,b\in\mathbb{R}$. Тогда его можно представить в виде $f(x)=(x-a-bi)\times$ $\times(x-a+bi)=(x-a)^2+b^2$. Предположим, что $\deg f(x)=2n>2$, и пусть утверждение верно для многочленов меньшей степени. Зафиксируем два сопряженных корня многочлена $f(x)$. Пусть это будут $a+bi$ и $a-bi$, $a,b\in\mathbb{R}$. Если $u(x)$ есть частное от деления $f(x)$ на $(x-a-bi)(x-a+bi)$, то $u(x)$ имеет степень $2n-2$ и не имеет действительных корней. По предположению индукции тогда $u(x)=g^2(x)+h^2(x)$ для подходящих многочленов с действительными коэффициентами. Используя это, получаем: $f(x)=(x-a-bi)(x-a+bi)(g^2(x)+h^2(x))=$ $=(g(x)(x-a)+bh(x))^2+(h(x)(x-a)-bg(x))^2$, что и доказывает утверждение.

7.44. 1) $1\pm i, 2\pm i$; 2) $3\pm i, \pm i$; 3) $3\pm i, 1\pm 2i$; 4) $-1\pm i, -1\pm 2i$.

7.45. Корни n-й и $(n+2)$-й степени из 1.

7.46. Указание. Пусть $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, где $a_k\in\mathbb{Z}$. Но тогда $5=f(7)=\sum_{k=0}^{n} a_k 7^k$, $9=f(15)=\sum_{k=0}^{n} a_k 15^k$. Исходя из этого, имеем $4=\sum_{k=1}^{n} a_k(15^k-7^k)$. Так как все слагаемые в правой части делятся на 8, а сумма – нет, то получаем противоречие.

7.47. Указание. Допустим, что $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ и $\deg f(x)\in\{2,3\}$. Если $\alpha\in\mathbb{Q}$ – корень многочлена $f(x)$, то $f(x)$ делится на $x-\alpha$, так что $f(x)$ приводи́м. Если $f(x)$ не является неприводимым, то, поскольку $\deg f(x)\in\{2,3\}$, один из его делителей должен быть первой степени и обязан иметь корень в поле $\mathbb{Q}$.

7.48. $p<0$, $\frac{q^2}{4}<-\frac{p^3}{27}$.

7.49. Указание. Используем индукцию по n – степени многочлена $f(x)$. При $n=1$ утверждение верно. Предположим теперь, что $n>1$ и $f(x)$ имеет положительный старший коэффициент, а остальные коэффициенты отрицательные. Очевидно, что этим свойством обладает и производная $f'(x)$, и по предположению индукции имеется лишь один положительный ее корень, скажем c. Предположим сначала, что $f(c) \geqslant 0$. Так как $f(0) < 0$ и производная $f'(x)$ на интервале $(0, c)$ сохраняет знак, то график $f(x)$ пересекает ось Ox в одной точке. На интервале (c, ∞) производная сохраняет знак, и так как старший коэффициент $f(x)$ положителен, график $f(x)$ на этом интервале возрастает и не пересекает ось Ox. Таким образом, в этом случае $f(x)$ имеет только один положительный корень. Случай $f(c) < 0$ рассматривается аналогично.

7.50. Указание. Пусть $f(x)$ – многочлен степени $n \in \mathbb{N}$ с действительными коэффициентами, имеющий только действительные корни. Тогда n – сумма кратностей этих корней и корни можно перенумеровать, присваивая кратным корням различные номера и расположив корни в последовательности $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Можно считать, что $f(x)$ – дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$. В этом случае по теореме Ролля между различными корнями многочлена имеется корень производной, а если α – кратный корень многочлена $f(x)$, то α есть корень производной, поэтому между корнями с различными номерами имеется корень производной. Поскольку $\deg f'(x) = n-1$, то корней многочлена $f'(x)$ не более $n-1$ и из предыдущего следует, что количество действительных корней многочлена $f'(x)$, считая их кратности, будет ровно $n-1$, так что $f'(x)$ может иметь только действительные корни. Далее применить индукцию по степени многочлена.

7.51. Указание. Использовать указание к задаче 7.50.

7.52. Указание. Так как многочлен $f(x)$ имеет ровно n различных корней, то между каждой соседней парой этих корней будет располагаться лишь один корень многочлена $f'(x)$ (см. указание к задаче 7.50). Пусть $f'(x_0) = 0$. Поскольку x_0 – единственная стационарная точка между двумя точками, в которых функция $f(x)$ имеет равные нулю значения, то она является точкой локального экстремума и, следовательно, в ней $f''(x_0) \neq 0$, причем в случае локального максимума $f(x_0) > 0$, $f''(x_0) < 0$, а в случае локального минимума $f(x_0) < 0$, $f''(x_0) > 0$.

Рассмотрим случай $p=1$. Тогда $a_{p+1} = a_2 = \frac{1}{2} f''(0) \neq 0$, $a_p = a_1 = f'(0) = 0$, $a_{p-1} = a_0 = f(0) \neq 0$. Так как $f'(0) = 0$, то точка $x_0 = 0$ является точкой локального экстремума. Следовательно, коэффициенты $a_0 = f(0)$ и $a_2 = \frac{1}{2} f''(0)$ имеют разные знаки.

Пусть теперь $p > 1$. Рассмотрим многочлен $f^{(p-1)}(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-(p-1)} b_i x^i$. Он имеет $n - (p-1)$ различных действительных корней, и при этом $b_2 = (p+1) \cdot p \cdots 3 \cdot a_{p+1} \neq 0$, $b_1 = p \cdot (p-1) \cdots 2 \cdot a_p = 0$, $b_0 = (p-1) \cdot (p-2) \cdots 1 \cdot a_{p-1} \neq 0$. По доказанному выше $b_2 b_0 < 0$. Следовательно, $a_{p+1} a_{p-1} < 0$.

7.53. Указание. Поскольку $a_3 = 0$ и $a_4 a_2 > 0$, то все корни не могут быть действительными (см. задачу 7.52). Для доказательства можно также использовать формулы Виета для коэффициентов при x^5 и x^6.

7.54. Указание. Использовать формулы Виета для нулевых коэффициентов многочлена.

7.55. 1) $x^5 - 5x^4 + 17x^3 - 49x^2 + 72x - 36$; 2) $x^6 - 6x^5 + 18x^4 - 32x^3 + 36x^2 - 24x + 8$; 3) $x^5 - x^4 - x + 1$.

7.56. $1+i,\ 2i,\ -2+2i$.

7.57. 1) $c=-972,\ c=0$; 2) $c=-25,\ c=-16$.

7.58. $a=-11$.

7.59. $\sum\limits_{k=1}^{5}\alpha_k^2=-3,\ \sum\limits_{k=1}^{5}\alpha_k^3=-4$.

7.60. 0.

7.61. $\{x,y,z\}=\{1,-1,-2\}$.

7.62. Указание. Пусть a,b,c – три числа. Введем обозначения: $s_1=a+b+c$, $s_2=ab+bc+ca$, $s_3=abc$, $p_1=a+b+c$, $p_2=a^2+b^2+c^2$, $p_3=a^3+b^3+c^3$, $p_4=a^4+b^4+c^4$. Из определений имеем: $s_1=p_1$, $s_1^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=$ $=p_2+2s_2$. Также по формуле Ньютона $p_4-p_3s_1+p_2s_2+p_1s_3=0$. Если предположить, что $s_1=0$, то $p_2=-2s_2$ и, следовательно, $p_4=-p_2s_2=2s_2^2$.

7.63. $f(x)=-\dfrac{1}{105}(11x-12)(x-2)(x-4)(x-6)(x-8)$.

7.64. 1) $f(x)=\dfrac{4}{3}x^3-2x^2+\dfrac{7}{3}x+1$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-\dfrac{1}{3}x+1$; 3) $f(x)=\left(-\dfrac{1}{2}+i\right)x^3+$ $+\left(-\dfrac{7}{2}+3i\right)x^2+(-6+2i)x-1$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{12}x^4+\dfrac{7}{4}x^3-\dfrac{10}{3}x^2+x+1$.

7.65. $f(3)=128$.

7.66. Например, $f(x)=-4x^3+11x+15$.

7.67. Например, $f(x)=-4x^3+39x^2-80x+11$.

Глава 8

8.1. 1) $\begin{bmatrix}1 & -2 & -6\\ 4 & 0 & -2\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}-9 & -6 & 18\\ -12 & 12 & -6\end{bmatrix}$.

8.2. 1) $\begin{bmatrix}10 & 11 & -2\end{bmatrix}$; 2) сложение невозможно; 3) сложение невозможно; 4) $\begin{bmatrix}-35\\ 24\\ 1\end{bmatrix}$.

8.3. 1) $\begin{bmatrix}-10 & 5 & -15\\ -20 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 5\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}2 & 5\\ 5 & 7\end{bmatrix}$.

8.4. 1) $\begin{bmatrix}10 & 9\\ 24 & 23\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}x & y\\ z & a\end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix}5 & -1 & 9\\ 17 & 3 & 29\\ 13 & 6 & 16\end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix}3 & -3 & 8\\ 8 & -4 & 8\\ 5 & -1 & 4\end{bmatrix}$.

8.5. 1) $AB=\begin{bmatrix}13 & 16\\ 29 & 36\end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix}15 & 22\\ 23 & 34\end{bmatrix}$; 2) $AB=\begin{bmatrix}-1 & 7 & 6\\ -3 & 6 & 3\\ 3 & 0 & 3\end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix}14 & 2 & -7\\ -1 & -1 & 2\\ 13 & 1 & -5\end{bmatrix}$;

3) $AB=\begin{bmatrix} a+c & b+c & a+b+c \\ 2 & 2 & 3 \\ \alpha+\gamma & \beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma \end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix} a+\alpha & b+\beta & c+\gamma \\ 1+\alpha & 1+\beta & 1+\gamma \\ a+1+\alpha & b+1+\beta & c+1+\gamma \end{bmatrix}$;

4) $AB=\begin{bmatrix} 20 & 20 & 4 \\ 23 & 30 & 5 \\ 15 & 26 & -3 \end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix} 24 & 19 & 11 \\ 24 & 10 & 10 \\ 16 & 25 & 13 \end{bmatrix}$; 5) $AB=BA=\begin{bmatrix} -303 & 288 & 309 \\ 63 & 219 & 72 \\ 93 & 0 & -192 \end{bmatrix}$.

8.6. 1) $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta-\alpha & \beta \end{bmatrix}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; 2) $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_5 \end{bmatrix}$, $\alpha_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,5}$; 3) $\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

8.7. 1) $\begin{bmatrix} 3+4i & -3+3i \\ 4+3i & -5+5i \end{bmatrix}$; 2) $[5+i \quad 9+i]$.

8.8. 1) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \\ -5 & -1 & -5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 & 1 \\ -5 & -5 & -5 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

8.9. 1) $\begin{bmatrix} 10 & 7 & -5 \\ 10 & 12 & 3 \\ 16 & 5 & -7 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 6 \\ -20 \\ 2 \end{bmatrix}$.

8.10. 1) $\begin{bmatrix} -9 & 6 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 40 & -62 & -7 \\ 41 & -68 & -5 \\ 39 & -56 & -9 \end{bmatrix}$.

8.11. 1) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 5 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 30 & 51 & 57 & 69 \\ 51 & 69 & 81 & 105 \\ 48 & 36 & 27 & 60 \\ 21 & 3 & 9 & 30 \end{bmatrix}$.

8.12. 1) $\begin{bmatrix} 11 & -22 & 29 & 5 \\ 9 & -27 & 32 & 5 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 11 & -22 & 29 & 5 \\ 9 & -27 & 32 & 5 \end{bmatrix}$.

8.13. 1) $\begin{bmatrix} 16 & 29 \\ 29 & 74 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 8 & -1 & 11 \\ 2 & -3 & -1 \\ 10 & 4 & 12 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2}+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+(-1)^{n}\cdot\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}+(-1)^{n+1}\cdot\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}+(-1)^{n}\cdot\frac{3}{2} \end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$; 5) $\begin{bmatrix} \alpha_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n^k \end{bmatrix}$;

6) $\begin{bmatrix} \alpha_1^k & C_k^1\alpha_1^{k-1} & \dots & C_k^{i-1}\alpha_1^{k-i+1} & \dots & C_k^{n-1}\alpha_1^{k-n+1} \\ 0 & \alpha_1^k & \dots & C_k^{i-2}\alpha_1^{k-i+2} & \dots & C_k^{n-2}\alpha_1^{k-n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \alpha_1^k \end{bmatrix}$, $C_k^j = 0$, если $j > k$.

8.14. 1) $\begin{bmatrix} 652 & -372 \\ 1085 & -619 \end{bmatrix}$; 2) $7^3\begin{bmatrix} -2 & 3 & 27 \\ -9 & 10 & 27 \\ -9 & 3 & 34 \end{bmatrix}$.

8.15. Указание. Использовать свойства операций над матрицами и коммутативность матриц A и B.

8.16. 1) $\begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 11 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 13 & 4 & 12 \\ 12 & -4 & -14 \\ 0 & -6 & -9 \end{bmatrix}$.

8.17. Указание. Использовать определение коммутатора (см. задачу 8.16) и свойства операций над матрицами.

8.18. Например, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

8.19. Указание. Использовать определение симметрической матрицы и ее свойства.

8.20. $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \middle| bc = -a^2 \right\}$.

8.21. $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \middle| bc = -a^2 \right\}$. Указание. Если $A^3 = 0$, то $A^2 = 0$. Действительно, если $A^3 = 0$, то $\det A = 0$. Следовательно, $A^2 = (a+d)A \Rightarrow 0 = A^3 = (a+d)A^2 = (a+d)^2 A \Rightarrow$ $\Rightarrow a + d = 0 \vee A = 0 \Rightarrow A^2 = 0$.

8.22. Указание. 1) Диагональные элементы при транспонировании не меняются; 2) при сложении диагональные элементы складываются; 3) умножение матрицы на элемент $\alpha \in K$ влечет умножение на α каждого диагонального элемента матрицы A; 4) использовать определения произведения и равенства матриц.

8.23. Указание. Поскольку равенство выполняется для всех матриц $X \in K_{n,n}$, то оно выполняется для матриц $X = E_{ij}$ – матриц порядка n, у которых элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен 1, а остальные элементы равны 0.

8.24. 1) $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; 3) $O_{3,3}$.

8.25. Указание. Использовать определения.

8.26. $\left\{E_2, -E_2, \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \middle| a^2+bc=1\right\}$.

8.27. $\left\{O_{2,2}, E_2, \begin{bmatrix} \dfrac{1\pm\sqrt{1-4\alpha\beta}}{2} & \alpha \\ \beta & \dfrac{1\mp\sqrt{1-4\alpha\beta}}{2} \end{bmatrix} \middle| 4\alpha\beta \leqslant 1,\ \alpha,\ \beta\in\mathbb{R}\right\}$.

8.28. Указание. Использовать определения инволютивной и идемпотентной матриц.

8.29. Указание. Поскольку равенство верно для всех матриц $X \in K_{n,n}$, то оно верно и для базисных матриц (см. указание к задаче 8.23).

8.30. Указание. Использовать определение умножения матриц и свойства дифференцирования.

8.31. Указание. Проверяется непосредственно с использованием определения произведения матриц.

8.32. Указание. Использовать определение нильпотентной матрицы.

8.33. 1) 8; 2) 10; 3) 28.

8.34. $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

8.35. 1) $\dfrac{n(n-1)}{2}$; 2) $\dfrac{3n(n-1)}{2}$; 3) $\dfrac{n(3n-1)}{2}$; 4) $3n(n-1)$; 5) $n(3n+1)$; 6) $n(3n-1)$; 7) $n(5n+1)$; 8) $n(5n-1)$; 9) $\dfrac{n}{2}(15n-9)$.

8.36. 1) 4; 2) 8; 3) 5; 4) 7.

8.37. 1) 0; 2) 0; 3) -12.

8.38. 1) 18; 2) 1; 3) 17; 4) 80; 5) $3abc-a^3-b^3-c^3$; 6) $abc+x(ab+ac+bc)$.

8.39. -10; 2.

8.40. $x\in(-6,-4)$.

8.41. Указание. Использовать определение определителя и его свойства. Например, в задаче 4 нужно к третьему столбцу определителя прибавить первый, умноженный на $-abc$, и второй, умноженный на $-(a+b+c)$. Затем вынести из третьего столбца общий множитель $ab+bc+ca$ и поменять столбцы местами.

8.42. 1) 54; 2) -20; 3) $3x^3+9x$; 4) $9a+12b-9c+3d$; 5) 0; 6) 20; 7) $4x+4y+4z-20t$; 8) 0; 9) 1; 10) $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2=(x+y+z)(x-y-z)(x+y-z)(x-y+z)$.

8.43. 1) -4; 2) 42; 3) 168; 4) $(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$; 5) -99; 6) 0.

8.44. 1) $2^{n-2}(n+1)$; 2) $(-1)^{n-1}3^n$; 3) a^n-b^n; 4) $(a_0+a_1+\dots+a_n)x^n$.

8.45. 1) $\Delta_n=\frac{2}{3}(4^n-1)$; 2) $\Delta_{n+1}=-x_1x_2\cdots x_n\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)$; 3) $\Delta_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$; 4) $\Delta_n=x^{n-1}+2x^{n-2}+\ldots+(n-1)x+n$.

8.46. 1) nx^{n-1}; 2) $(a+x)^{n-1}$; 3) $(n-1)^n+n^{n-1}$; 4) $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}$; 5) $(-1)^{n-1}n!$; 6) $x^n+(a_1+a_2+\ldots+a_n)x^{n-1}$; 7) $\frac{1}{x-y}[x(a_1-y)(a_2-y)\cdots(a_n-y)-$ $-\,y(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)]$; 8) $(1+a)^n-a^n$; 9) $x^n+x^{n-1}+\ldots+x+1$; 10) $a^n+(a-x)^{n-1}$; 11) $x_1x_2\cdots x_n\left(\frac{1}{x_1}+\frac{2}{x_2}+\ldots+\frac{n}{x_n}+1\right)$; 12) $1!2!\cdots n!=1^n2^{n-1}3^{n-2}\cdots n$.

8.47. Указание. Использовать определение определителя и свойства дифференцирования.

8.48. 1) $\begin{bmatrix}2&-1\\-5&3\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}-1/6&0\\1&2\end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix}1/2&0&-3/10\\0&-1&-4/5\\0&0&-1/5\end{bmatrix}$;

5) $\begin{bmatrix}1/3&-4/3&1/3\\0&1&0\\-1/6&1/6&1/3\end{bmatrix}$; 6) $\frac{1}{18}\begin{bmatrix}-5&1&7\\1&7&-5\\7&-5&1\end{bmatrix}$; 7) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-12&5&-4\\-8&3&-2\\6&-2&2\end{bmatrix}$;

8) $\frac{1}{66}\begin{bmatrix}21&-6&-9&-39\\-1&-28&35&27\\23&-16&-13&-27\\-13&32&-7&21\end{bmatrix}$; 9) $\frac{1}{17}\begin{bmatrix}5-3i&-10+6i&9-2i\\2-8i&-4-i&7+6i\\7+6i&3-12i&-1+4i\end{bmatrix}$;

10) $\frac{1}{20}\begin{bmatrix}6+2i&(-3-\sqrt{3})+(-1+3\sqrt{3})i&-4-8i\\(-3+\sqrt{3})+(-1-3\sqrt{3})i&-4-8i&(-3+\sqrt{3})+(-1-3\sqrt{3})i\\-4-8i&(-3-\sqrt{3})+(-1+3\sqrt{3})i&6+2i\end{bmatrix}$;

11) $\frac{1}{-2-\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&-\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}i&-\frac{2+\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\\-\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}i&0&\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}-\frac{-\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}i\\-\frac{2+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i&\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+\frac{-\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}i&0\end{bmatrix}$;

12) $\frac{1}{n-1}\begin{bmatrix}2-n&1&\ldots&1\\1&2-n&\ldots&1\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\1&1&\ldots&2-n\end{bmatrix}$; 13) $\begin{bmatrix}1&-1&0&\ldots&0&0\\0&1&-1&\ldots&0&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&0&\ldots&1&-1\\0&0&0&\ldots&0&1\end{bmatrix}$;

14) $\alpha^{-n}\begin{bmatrix} \alpha^{n-1} & -\alpha^{n-2} & \alpha^{n-3} & \ldots & (-1)^{n-1}\alpha^0 \\ 0 & \alpha^{n-1} & -\alpha^{n-2} & \ldots & (-1)^{n-2}\alpha^1 \\ 0 & 0 & \alpha^{n-1} & \ldots & (-1)^{n-3}\alpha^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha^{n-1} \end{bmatrix}$.

8.49. Указание. Использовать утверждение, что определитель произведения матриц равен произведению определителей сомножителей.

8.50. Указание. $AB=(\det A)E_n \Rightarrow \det A\cdot\det B=(\det A)^n \Leftrightarrow \det B=(\det A)^{n-1}$.

8.51. Указание. Использовать определение обратной матрицы и то, что определитель произведения матриц равен произведению сомножителей.

8.52. См. указание к задаче 8.51.

8.53. Обратная матрица равна A^{m-1}.

8.54. См. указание к задаче 8.51.

8.55. Указание. Использовать то, что $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}B$, где B – присоединенная (союзная) целочисленная матрица.

8.56. Указание. Поскольку матрица A невырожденная, то она эквивалентна единичной матрице E_n. Это значит, что она получается из единичной матрицы с помощью элементарных преобразований. Но каждое элементарное преобразование – это умножение слева или справа матрицы на соответствующую элементарную матрицу.

8.57. См. указание к задаче 8.56.

Глава 9

9.1. 1) $(2,1,-3,1)$; 2) $(2,-1,0,-2)$; 3) $(0,2,2,1)$; 4) $(1,1,1,1)$; 5) $(-2,1,0,1)$; 6) $(0,1,1,0)$; 7) $(3,2,-1,1)$; 8) $x_i=\prod\limits_{j=1}^{i-1}\dfrac{b-a_i}{a_i-a_j}\prod\limits_{\gamma=i+1}^{n}\dfrac{a_\gamma-b}{a_\gamma-a_i}$, $i=\overline{1,n}$, где $\prod\limits_{j=1}^{0}(\cdot)=$ $=\prod\limits_{\gamma=n+1}^{n}(\cdot)=1$; 9) $(i,1,0)$; 10) $(3-11i,-3-9i,1-7i)$.

9.2. 1) $(1,1)$; 2) $\left(\alpha,-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\alpha\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$; 3) система несовместна; 4) $(2+i,\ 3-4i)$; 5) $(\alpha,\ 1+i+\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{C}$; 6) $(i,1)$; 7) $(1,1,1)$; 8) система несовместна; 9) $\left(-2-\dfrac{12}{5}\alpha,\right.$ $\left.-1+\dfrac{9}{5}\alpha,\ \alpha\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$; 10) $\left(\beta,\ -\dfrac{29+53i}{50}\beta-\dfrac{77+89i}{50},\ -\dfrac{51+7i}{50}\beta-\dfrac{63+41i}{50}\right)$, $\beta\in\mathbb{R}$; 11) $(-8,\ 3+\alpha,\ 6+2\alpha,\ \alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$; 12) $(37/137,\ 133/137,\ -2,\ 27/137)$; 13) $(2,1,5,-3)$; 14) $(-1+\alpha+2\beta,\ -3+\alpha+2\beta,\ \alpha,\ \beta)$, $\alpha\in\mathbb{R}$; 15) $\left(\alpha+\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{5}{2}\alpha-\dfrac{5}{4},\ 0,\ \alpha,\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; 16) $(c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_1+2c_2-c_3,\ -c_1+c_2+c_3,\ -c_1+3c_2+2c_3)$, $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$; 17) $x_k=\dfrac{n}{2}-$ $-k+1$, $k=\overline{1,n}$.

9.3. 1) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; 2) $\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 14 & 11 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 2\alpha-2 & 2\beta+1 \end{bmatrix}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; 4) не имеет решений; 5) $\begin{bmatrix} 2+\beta_1-2\alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_2+\alpha_1 & \beta_2 \end{bmatrix}$, $\alpha_1,\beta_1,\beta_2\in\mathbb{R}$; 6) $\begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{bmatrix}$; 7) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

8) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 9/2 & 1 & 5/2 & 7/2 \end{bmatrix}$; 9) $\varnothing$; 10) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$; 11) $\begin{bmatrix} 1+\dfrac{\alpha}{2} & -1+\dfrac{\beta}{2} \\ -1-\dfrac{3\alpha}{2} & 2-\dfrac{3\beta}{2} \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$;

12) $\frac{1}{33}\begin{bmatrix} 9 & 21 & 0 \\ 36 & -4 & -11 \end{bmatrix}$; 13) $\frac{1}{450}\begin{bmatrix} 174+168i \\ -45+(-15)i \end{bmatrix}$; 14) $\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 6+2i & 22-2i & 24 \\ -2+8i & 8+6i & 40 \\ 30 & -10i & 0 \end{bmatrix}$.

9.4. $\begin{bmatrix} 7-3\alpha & \alpha & 5\alpha-9 \\ 2 & 1 & 2 \\ 7-3\alpha & \alpha & 5\alpha-7 \end{bmatrix}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Глава 10

10.1. 1) Да; 2) нет; 3) нет; 4) нет; 5) да; 6) нет; 7) да; 8) да; 9) да; 10) да.

10.2. Да.

10.3. $(0,0,0,0)$, система $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ линейно зависима.

10.4. $(0,4,3)$.

10.5. 1) и 2) $5x^3-5x^2-4x-6$, $\tilde{F}$ линейно зависима.

10.6. $(-2,2,1)$.

10.7. 1) Да; 2) нет; 3) да; 4) нет; 5) нет; 6) нет; 7) нет; 8) нет, если $\alpha\neq 0$, да, если $\alpha=0$; 9) да.

10.8. 1) − 5) Линейно независимы.

10.9. 1) Да; 2) да; 3) да; 4) да; 5) нет; 6) да; 7) да; 8) нет; 9) нет; 10) нет; 11) нет; 12) да; 13) нет; 14) нет.

10.11. 1) $2\boldsymbol{f}_1+3\boldsymbol{f}_2-\boldsymbol{f}_3=\boldsymbol{0}$; 2) $\boldsymbol{f}_1+2\boldsymbol{f}_2-\boldsymbol{f}_4=\boldsymbol{0}$; 3) $3\boldsymbol{f}_1-2\boldsymbol{f}_2+4\boldsymbol{f}_3=\boldsymbol{0}$; 4) $-3\boldsymbol{f}_1-$ $-4\boldsymbol{f}_3-\boldsymbol{f}_4+8\boldsymbol{f}_5=\boldsymbol{0}$; 5) $\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2-\boldsymbol{f}_3=\boldsymbol{0}$; 6) $\boldsymbol{f}_1-2\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{f}_3=\boldsymbol{0}$.

10.12. 1) $(\alpha,\beta,\gamma,\alpha)$; 2) все векторы вида $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, где $\sum_{j=1}^{4}\alpha_j=0$; 3) $(\alpha,\beta,0,\gamma)$.

10.13. 1) − 3) Все многочлены степени $\leqslant 2$; 4) все многочлены степени $\leqslant 2$ с корнем 1.

10.14. 1) $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} \alpha & \gamma & \beta \\ \beta & \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta & \alpha \end{bmatrix}$.

10.15. Нет.

10.16. 1) $(4x^2+4x+2,\ x^2+4x+1)$; 2) $(x^2+4x+2,\ 2x^2+3x,\ x^2+1)$.

10.18. $\boldsymbol{g}_1=6\boldsymbol{f}_2+4\boldsymbol{f}_3$, $\boldsymbol{g}_2=2\boldsymbol{f}_1-10\boldsymbol{f}_2+8\boldsymbol{f}_3$.

10.19. Указание. Воспользоваться определением эквивалентных систем векторов.

10.20. 1) Да; 2) да.

10.21. 1) 3, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$; 2) 4, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$; 3) 2, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$; 4) 3, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$; 5) 3, $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$; 6) 2, $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$; 7) 3, $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_4)$.

10.22. 1) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4)$; 2) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3)$.

10.23. $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4), (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3), (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4), (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3)$.

10.24. 1) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, $(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$; 2) любая пара различных векторов из системы; 3) любая подсистема длины 3, кроме $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_5)$, $(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_6)$; 4) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3)$, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4)$.

10.25. 1) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4)$, $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2$; 2) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, $\boldsymbol{a}_4 = -5\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + 5\boldsymbol{a}_3$.

10.26. Указание. Поскольку $\operatorname{rank} H = \operatorname{rank} G = \dim \mathbb{R}_{1,3}$, то $LH = LG = \mathbb{R}_{1,3}$ и, следовательно, $L \sim H$.

10.27. Указание. Поскольку $\dim \mathbb{R}_5[x] = 6$, то указанную систему многочленов нужно дополнить двумя многочленами так, чтобы полученная система была линейно независима в пространстве $\mathbb{R}_5[x]$. Например, в качестве таких многочленов можно взять многочлены 1 и x^2.

10.28. $(x^6 + x^4,\ x^6 - 2x^4 + x,\ x^6 + 3x^4 - x)$.

10.29. 4, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$.

10.30. Нет.

10.31. Указание. Система H линейно независима и является подсистемой системы G. Показать, что многочлены $x^2 + 4x + 6$ и $3x^2 - 4x + 2$ линейно выражаются через H.

10.32. См. указание к задаче 10.31.

10.33. 1) 1, любой ненулевой вектор, параллельный прямой Δ; 2) 2, любые два неколлинеарных вектора, параллельных плоскости Π; 3) 2, $(1, i)$; 4) $n+1$, $(1, x, x^2, \dots, x^n)$; 5) $2mn$, (E_{lj}, iE_{lj}), $1 \leqslant l \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$; 6) 2, $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$, $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$; 7) $\dim V = n$.

10.34. 1) Нет; 2) нет; 3) да, если $O \in \Pi$; 4) нет; 5) да; 6) да; 7) да; 8) нет; 9) да; 10) нет; 11) – 26) да.

10.35. $\{\mathbf{0}\}$, V_3, $V_1(\Delta)$ – множество всех векторов, параллельных некоторой прямой Δ, $V_2(\Pi)$ – множество всех веторов, параллельных некоторой плоскости Π, $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$, $\dim V_3 = 3$, $\dim V_1(\Delta) = 1$, $\dim V_2(\Pi) = 2$.

10.36. 1) $\max\{n-2, 0\}$, базис образуют, например, векторы $(0, 1, 0, \dots, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0, \dots, 0, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1, 0)$; 2) $\max\{\min\{n, 2\}, 1\}$, базис: $((1, 0, 1, \dots), (0, 1, 0, 1, \dots))$; 3) $n-1$, базис образуют, например, векторы ((1, 0, ..., 0), (0, –1, 0, 1, ..., 0), (0, 0, 1, ..., 0), ...); 4) 2, (e^x, e^{-x}); 5) 3, $(1, \sin 2x, \cos 2x)$; 6) 2, $(1, \cos^2 x)$; 7) 2, $(\sin x, \cos x)$; 8) 2, $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right)$; 9) 4, $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$;

10) 6, $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$;

11) 3, $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$.

10.37. 1) Да; 2) нет.

10.38. 1) $(10, 0, -2, 9)$; 2) $(1, -2, 1, 0)$; 3) $(5, 3, 0, 0)$; 4) $(27, 54, 36, 8)$.

10.39. $(11, 8, 2)$.

10.40. 1) $(1, -1, -1, 1, -1, 1)$; 2) $(2, -1, -1, 1, -1, 1)$.

10.41. 1) $(3, 2, -1, 0, 4)$; 2) $(-1, 0, 4, 3, 2)$.

10.42. $(1, -2)$.

10.43. $(5, 3, 4, 2)$.

10.44. $(3, 8, -2)$.

10.45. 1) $(\cos 1, \sin 1)$; 2) $(2 - 3\sin 2, 3\cos 2)$.

10.46. 1) $(3, 2)$; 2) $(5, -2)$.

10.47. 1) $(4, 0, -5)$; 2) $(4/3, -1)$; 3) $(1, 1, 1)$; 4) $(67, -51, 11, -3)$.

10.48. $\dim L = 3$, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$.

10.49. $s = 3$, $d = 2$.

10.50. Базис $L_1 + L_2$: $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)$, $\dim(L_1 + L_2) = 4$, $d = 2$.

10.51. 1) Базис $L_1 + L_2$, например $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2)$, базис $L_1 \cap L_2$, например $(7, 5, 3)$; 2) базис $L_1 + L_2$, например $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)$, базис $L_1 \cap L_2$, например $((3, 2, 4, 0), (-1, 1, 0, 2))$; 3) базис $L_1 + L_2$, например $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)$, базис $L_1 \cap L_2$, например, состоит из векторов $\boldsymbol{c}_1 = (1, 2, 2, 1)$, $\boldsymbol{c}_2 = (2, 2, 2, 2)$.

10.52. Указание. Следует из равенства $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 \cap L_2$.

10.53. См. указание к задаче 10.52.

10.54. Указание. Любая матрица $A \in \mathbb{R}_{n,n}$ представима в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц, при этом только нулевая матрица является одновременно симметрической и кососимметрической, поэтому пространство $\mathbb{R}_{n,n}$ есть прямая сумма указанных подпространств.

10.55. Указание. Базис подпространства L дополнить до базиса пространства V. Тогда L_2 есть подпространство, которое является линейной оболочкой, натянутой на систему векторов дополнения до базиса. Подпространство L_2 определяется не единственным образом.

10.56. Например, $L_2' = L((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0))$, $L_2'' = L((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$.

10.57. 1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

10.58. 1) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

10.59. 1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

10.60. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

10.61. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

10.62. $\boldsymbol{e}_3'(0,-1,2)$, $\boldsymbol{e}_2(-2,4,1)$.

10.63. 1) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -9 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

10.64. $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 20 \end{bmatrix}$.

10.65. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$.

10.66. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{a} = \frac{1}{5}(2\boldsymbol{e}_1' - \boldsymbol{e}_2')$.

10.67. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e}_1' - 2\boldsymbol{e}_2' + \boldsymbol{e}_3'$.

10.68. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_3 - 3\boldsymbol{e}_4$, $\boldsymbol{a} = 5\boldsymbol{e}_1' + 2\boldsymbol{e}_2' - 8\boldsymbol{e}_3' + 3\boldsymbol{e}_4'$.

10.69. $\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{e}_1' - 7\boldsymbol{e}_2'$.

10.70. $\boldsymbol{x} = \frac{1}{5}(-\boldsymbol{e}_1' + 17\boldsymbol{e}_2' + 5\boldsymbol{e}_3')$.

10.71. $\boldsymbol{a}(1,\ -5)$.

10.72. $x_1 = -27x_1' - 71x_2' - 41x_3'$, $x_2 = 9x_1' + 20x_2' + 9x_3'$, $x_3 = 4x_1' + 12x_2' + 8x_3'$.

10.73. 1) 3; 2) 3; 3) 4; 4) 3.

10.74. 1) $r = 1$ при $|\lambda| = 2$, $r = 2$ при $|\lambda| \neq 2$, $r = 3$ не может быть ни при каком λ; 2) $r = 2$ при $\lambda = 3$, $r = 3$ при $\lambda \neq 3$; 3) $r = 2$ при $\lambda = 1$, $\beta = 1/2$, $r = 3$ при $\lambda \neq 1$ и при любом β, а также при $\beta \neq 1/2$ и при любом λ; 4) $r = 3$ при $|\lambda| = 3$, $r = 4$ при $|\lambda| \neq 3$.

10.75. 1) 3; 2) 3; 3) 4; 4) 3.

10.76. Указание. Не нарушая общности, можно считать, что базисный минор M расположен на первых r столбцах $A\binom{-}{1}$, $A\binom{-}{2}$, ..., $A\binom{-}{r}$. Допустим от противного, что некоторый столбец $A\begin{pmatrix} - \\ j \end{pmatrix}$ — ненулевой, где $r < j \leqslant n$. Так как первые r столбцов составляют базис системы столбцов матрицы A, то столбец $A\begin{pmatrix} - \\ j \end{pmatrix}$ линейно выражается через первые r столбцов, т.е. $A\begin{pmatrix} - \\ j \end{pmatrix} = \alpha_1 A\begin{pmatrix} - \\ 1 \end{pmatrix} +$ $+ \alpha_2 A\begin{pmatrix} - \\ 2 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_r A\begin{pmatrix} - \\ r \end{pmatrix}$, где коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in P$ не все равны 0. Предположим, что $\alpha_1 \neq 0$. Тогда системы столбцов

$$\left(A\begin{pmatrix} - \\ 1 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} - \\ 2 \end{pmatrix}, \ldots, A\begin{pmatrix} - \\ r \end{pmatrix}\right), \ \left(A\begin{pmatrix} - \\ j \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} - \\ 2 \end{pmatrix}, \ldots, A\begin{pmatrix} - \\ r \end{pmatrix}\right)$$

эквивалентны, поэтому последняя система является базисом системы столбцов матрицы A, что приводит к тому, что на этих столбцах расположен некоторый базисный минор. Противоречие. Значит, все столбцы, кроме первых, — нулевые. Аналогично для строк.

10.77. У к а з а н и е. Пусть кососимметрическая матрица A порядка n над полем $\mathbb{R}$ имеет ранг r; $n, r \in \mathbb{N}$. Допустим от противного, что все главные миноры порядка r матрицы A равны нулю. Если минор M порядка r расположен на пересечении r строк $i_1, i_2, \ldots, i_r$ и r столбцов $j_1, j_2, \ldots, j_r$, то его записываем как $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_r \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_r \end{pmatrix}$. Зафиксируем некоторый базисный минор $M =$ $= A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_r \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_r \end{pmatrix}$ и пусть B_M — соответствующая подматрица матрицы A (составленная из элементов этого минора). Введем обозначения $L = A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_r \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_r \end{pmatrix}$, $K = A\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \ldots & j_r \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_r \end{pmatrix}$ и по аналогии соответствующие матрицы B_L и B_K. Тогда $\det B_M = M \neq 0$, $\det B_L = 0$, и в силу кососимметричности матрицы A $\det B_K = M \neq 0$. Далее, так как строки $A\begin{pmatrix} i_1 \\ - \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} i_2 \\ - \end{pmatrix}, \ldots, A\begin{pmatrix} i_r \\ - \end{pmatrix}$ составляют базис системы строк матрицы A, то через них линейно выражаются остальные ее строки. В частности, строки матрицы K как части строк $A\begin{pmatrix} j_1 \\ - \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} j_2 \\ - \end{pmatrix}, \ldots, A\begin{pmatrix} j_r \\ - \end{pmatrix}$, расположенных на столбцах $A\begin{pmatrix} - \\ i_1 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} - \\ i_2 \end{pmatrix}, \ldots, A\begin{pmatrix} - \\ r \end{pmatrix}$, линейно выражаются через строки матрицы B_L. Однако это противоречит тому, что матрица K невырождена, а матрица L — нет. Таким образом, $\det B_L \neq 0$ и L — базисный минор.

Теперь докажем, что ранг кососимметрической матрицы есть четное число. В прежних обозначениях имеем $B_L = -B_L^T$, поэтому $\det B_L = \det\left(-B_L^T\right) =$ $= (-1)^r \det B_L^T \neq 0$, откуда следует, что r — четное число.

10.78. 1) 0, 1, 2; 2) 0, 1, 2, 3.

10.79. У к а з а н и е. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях.

10.81. 3, базис $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$.

Глава 11

11.1. 1) Общее решение $\left(\frac{6}{5}-\alpha+\frac{3}{5}\beta,\ -\frac{4}{5}+2\alpha-\frac{7}{5}\beta,\ \alpha,\ \beta,\right)$, частное решение $(6/5,\ -4/5,\ 0,\ 0)$; 2) общее решение $(-7-9\beta,\ -13+3\alpha-13\beta,\ \alpha,\ \beta)$, частное решение $(-7,\ -13,\ 0,\ 0)$; 3) система имеет единственное решение $(-1,\ 0,\ 1)$; 4) система несовместна; 5) общее решение $(-2\alpha+19\beta-14,\ \alpha,\ -3\alpha+23\beta-17,\ \beta)$, частное решение $(-14,\ 0,\ -17,\ 0)$; 6) общее решение $(-13\alpha+3\beta-13,\ -9\alpha-7,\ \alpha,\ \beta)$, частное решение $(-13,\ -7,\ 0,\ 0)$; 7) общее решение $(-8\alpha-4\beta-1,\ 0,\ 2\alpha-\beta+1,\ \alpha,\ \beta)$, частное решение $(-1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$; 8) общее решение $\left(-\alpha-\frac{9}{4},\ 4\alpha-\frac{14}{4},\ 0,\ 4\alpha+\frac{6}{4},\ 2\alpha\right)$, частное решение $\left(-\frac{9}{4},\ -\frac{14}{4},\ 0,\ \frac{6}{4},\ 0\right)$; 9) общее решение $\left(\frac{13}{2}\alpha-\frac{19}{2}+\frac{17}{2},\ -\frac{5}{2}\alpha+\right.$ $\left.+\frac{7}{2}\beta-\frac{7}{2},\ \alpha,\ \beta\right)$, частное решение $\left(\frac{17}{2},\ -\frac{7}{2},\ 0{,}0\right)$; 10) общее решение $\left(\frac{7}{5}\alpha-\frac{7}{15}\beta-\frac{4}{5}\gamma-\frac{9}{5},\ \alpha,\ -2\alpha+2,\ \beta,\ \gamma\right)$, частное решение $\left(-\frac{9}{5},\ 0,\ 2,\ 0,\ 0\right)$; 11) общее решение $\left(-\frac{19}{8}\alpha+\frac{21}{4},\ \frac{21}{8}\alpha-\frac{27}{4},\ \frac{13}{2}\alpha-16{,}\alpha\right)$, частное решение $\left(\frac{21}{4},\ -\frac{27}{4},\right.$ $\left.-16,\ 0\right)$; 12) система имеет единственное решение $(-1,\ 1,\ 0)$; 13) общее решение $\left(\alpha,\ -\frac{5}{3}\alpha-\beta+\frac{8}{3},\ \beta,\ -\frac{2}{3}\alpha+\beta-\frac{4}{3}\right)$, частное решение $\left(0,\ \frac{8}{3},\ 0,\ -\frac{4}{3}\right)$.

11.2. 1) Система совместна при любом значении λ; при $\lambda=8$ общее решение имеет вид $(-2\alpha+2\beta+4,\ -2\alpha+3,\ \alpha,\ \beta)$, при $\lambda\neq 8$ общее решение имеет вид $(2\alpha+4,\ -2\alpha+3,\ \alpha,\ 0)$; 2) при $\lambda=1$ система несовместна, при $\lambda\neq 1$ она совместна и общее решение имеет вид $\left(\alpha,\ -\frac{9}{8}\alpha+\frac{43-8\lambda}{8-8\lambda},\ \frac{5}{\lambda-1},\ \frac{1}{4}\alpha+\frac{5}{4-4\lambda}\right)$; 3) при $\lambda\neq 3$ система несовместна, при $\lambda=3$ она совместна и общее решение имеет вид $\left(\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{4},\ -\frac{3}{4}\alpha+\frac{1}{4},\ \alpha\right)$; 4) при $\lambda\neq -3$ система несовместна, при $\lambda=-3$ она совместна и общее решение имеет вид $(9,\ -\alpha-13,\ \alpha)$; 5) при $\lambda\neq 0$ система несовместна, при $\lambda=0$ она совместна и общее решение имеет вид $\left(\frac{5}{8}\alpha+1,\ \alpha,\ -\frac{7}{4}\alpha\right)$; 6) при $\lambda=0$ система несовместна, при $\lambda\neq 0$ она имеет единственное решение: $\left(-3+\frac{3}{\lambda},\ 2-\frac{6}{\lambda},\ \frac{3}{\lambda}\right)$.

11.3. 1) Общее решение $\left(-\frac{3}{2}\alpha,\ \alpha,\ \frac{1}{2}\alpha-\beta,\ \beta\right)$, базис подпространства решений $((-3,\ 2,\ 1,\ 0),\ (0,\ 0,\ -1,\ 1))$; 2) общее решение $(-3\alpha-30\beta,\ \alpha,\ 2\alpha+29\beta,\ 5\beta,\ 2\beta)$, базис подпространства решений $((-3,\ 1,\ 2,\ 0,\ 0), (-30,\ 0,\ 29,\ 5,\ 2))$; 3) общее решение $(-8\alpha-\beta,\ \alpha,\ -13\alpha+3\beta,\ \beta)$, базис подпространства решений $((-8, 1, -13, 0), (-1, 0, 3, 1))$; 4) общее решение $(\alpha,\ 0,\ \beta,\ -3\alpha-5\beta,\ 2\alpha+3\beta)$, базис подпространства решений $((1, 0, 0, -3, 2), (0, 0, 1, -5, 3))$; 5) общее решение $(11\alpha, 11\beta, 3\alpha-10\beta-9\gamma,\ \alpha+4\beta-3\gamma,\ 11\gamma)$, базис подпространства решений $((11, 0, 3, 1, 0), (0, 11, -10, 4, 0), (0, 0, -9, -3, 11))$; 6) общее решение $(\alpha,\ -3\alpha,\ -3\alpha,\ 7\alpha,\ \alpha)$, базис подпространства решений состоит из одного вектора $(1, -3, -3, 7, 1)$.

11.4. Четвертая строка вместе с любыми двумя из первых трех строк образует базис подпространства решений, а остальные подсистемы этой системы строк не образуют базиса.

11.5. 1) Например, $\begin{cases} 5x_1-2x_2+2x_3+9x_4+2x_5=0, \\ -2x_1+2x_2+x_3=0; \end{cases}$ 2) чтобы получить ответ, можно к системе из п. 1 дописать любую линейную комбинацию уравнений этой системы.

11.6. Указание. Размерность подпространства решений равна 1.

11.7. Указание. Пусть $A\in\mathbb{R}_{n,n}$, $\operatorname{rank}A=r<n$ и $B\in\mathbb{R}_{n,n}$ – присоединенная (союзная) матрица к матрице A. Если $r=n-1$, то из равенства $AB=0$ следует, что столбцы матрицы B (алгебраические дополнения строк матрицы A) принадлежат одномерному подпространству решений однородной системы с матрицей A. Если же $r<n-1$, то все алгебраические дополнения равны нулю, а следовательно, строки из алгебраических дополнений пропорциональны.

11.8. Указание. Пусть $\det A=0$. Тогда однородное матричное уравнение $AX=0$ имеет ненулевое решение $X^*\in\mathbb{C}_{n,1}$. Пусть j – такое число, что $\left|x_j^*\right|=\max\limits_k\left|x_k^*\right|$. Тогда имеем:

$$a_{jj}x_j^*=-\sum_{\substack{k=1,\\k\neq j}}^{n}a_{jk}x_k^* \Rightarrow \left|a_{jj}\right|\left|x_j^*\right|=\left|a_{jj}x_j^*\right|=\left|\sum_{\substack{k=1,\\k\neq j}}^{n}a_{jk}x_k^*\right|\leqslant\sum_{\substack{k=1,\\k\neq j}}^{n}\left|a_{jk}\right|\left|x_k^*\right|\leqslant\sum_{\substack{k=1,\\k\neq j}}^{n}\left|a_{jk}\right|\left|x_j^*\right|.$$

11.9. 1) Общее решение $\begin{bmatrix} 2+2\alpha & 4+2\beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$, где α, β – произвольные числа из поля, над которым взята исходная матрица; 2) нет решений; 3) нет решений; 4) общее решение $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, где $\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$.

11.10. 1) $(2, 0, 0, 6)+(1/2, -1, 0, 3/2)\alpha+(2, 0, -1, 1)\beta$, $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$; 2) $(-3, 0, 2, -2)+(-2, 1, 1, -3)\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$; 3) $(5, 0, 2, 0, 1)+(0, 0, -1, 1, 0)\alpha+(7, 7, -3, 0, 3)\beta$, $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$; 4) $(1, 0, 3/2, -6, 5)+(1, 1, 0, 1, -1)\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

11.11. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$

11.12. $\begin{bmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{bmatrix}=0.$

11.13. $x^2+y^2+x-y-2=0$, центр находится в точке $(-1/2,\ 1/2)$, радиус равен $\sqrt{10}/2$.

11.14. $3x-y-2z=1$.

11.15. $x^2+y^2+z^2-x+y-3z=0$, центр находится в точке $(1/2,\ -1/2,\ 1/2)$, радиус равен $\sqrt{11}/2$.

Глава 12

12.1. 1) Да; 2) нет; 3) да; 4) да; 5) да; 6) нет; 7) нет; 8) нет.

12.2. В качестве векторного пространства V можно взять поле $F_2\{0,\ 1\}$. Отображение $\varphi: V\to V$ определим по формуле $\varphi(0)=1$, $\varphi(1)=0$.

12.3. Указание. Использовать линейные свойства определенного интеграла.

12.4. $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

12.5. $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$.

12.6. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

12.7. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

12.8. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

12.9. 1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

12.10. 1) φ линейно; 2) φ не является линейным; 3) φ линейно, $A_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; 4) φ не является линейным.

12.11. 1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

12.12. $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$.

12.13. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$.

12.14. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$.

12.15. $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

12.16. 1) Базис ядра $\left(\begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}\right)$, базис образа $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}\right)$; 2) базис ядра $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, базис образа $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$; 3) базис ядра $\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}\right)$, базис образа $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

12.17. 1) $\begin{bmatrix} -3 & 9 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 9 & 2 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; 5) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$; 6) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; 7) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; 8) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -10 \\ 15 & 5 & 10 \\ 12 & -21 & -15 \end{bmatrix}$.

12.18. Меняются местами строки и столбцы с индексами k и m.

12.19. 1) $\begin{bmatrix} -54 & -36 \\ 35 & 21 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 18 & 27 & 27 \\ -27 & -52 & -47 \\ -12 & -18 & -18 \end{bmatrix}$; 3) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & -9 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & -5 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

12.20. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 12 \\ 0 & 12 & 0 & 16 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

12.21. $\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -7 & -7 \end{bmatrix}$.

12.22. $\begin{bmatrix} -145 & -123 \\ 178 & 152 \end{bmatrix}$.

12.23. Указание. Использовать то, что для любой матрицы A порядка n характеристический многочлен имеет вид $\det(A-\lambda E_n)=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}\alpha_1\lambda^{n-1}+$ $+\ldots+\alpha_{n-1}\lambda+\det A$, где коэффициент α_i – сумма всех главных угловых миноров i-го порядка, и формулу Бине – Коши [13] для вычисления определителя произведения матриц.

12.24. Указание. Многочлен $f(\lambda)=(-1)^n\left(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0\right)$ является характеристическим многочленом для матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

12.25. 1) $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-2$, столбец $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ – базис подпространства L_{λ_1}, столбец $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ – базис подпространства L_{λ_2}; 2) $\lambda_1=-1, k_1=3$, столбец $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ – базис подпространства L_{λ_1}; 3) $\lambda_1=0, k_1=2, \lambda_2=12, k_2=1$, $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ – базис подпространства L_{λ_1}, столбец $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ – базис подпространства L_{λ_2}; 4) $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=-1$, столбец $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ – базис подпространства L_{λ_1}, столбец $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ – базис подпространства L_{λ_2}, столбец $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ – базис подпространства L_{λ_3}; 5) $\lambda_1=1, k_1=1$, столбец $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ – базис подпространства L_{λ_1}; 6) $\lambda_1=1, k_1=2, \lambda_2=0, k_2=2$, столбец $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ – базис подпространства L_{λ_1}, $\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ – базис подпространства L_{λ_2}; 7) $\lambda_1=2$, $k_1=4$, $\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right)$ – базис подпространства L_{λ_1}.

12.26. Указание. Пусть $U\in P_{n,1}$ – координатный столбец собственного вектора, соответствующего собственному значению λ_j, $1\leqslant j\leqslant m$. Тогда $AU=\lambda_j U\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A^{-1}U=\dfrac{1}{\lambda_j}U$.

12.27. Да, базис $\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}\right)$, матрица $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$.

12.28. 1) Да, $S=\begin{bmatrix}1&0&1\\3&-3&-2\\0&1&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$; 2) да, $S=\begin{bmatrix}-2&1&4\\-1&1&3\\1&-2&-4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$; 3) нет; 4) нет; 5) да, $S=\begin{bmatrix}0&0&-i\sqrt{3}&i\sqrt{3}\\6&-6&0&0\\\sqrt{54}&\sqrt{54}&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}\sqrt{54}&0&0&0\\0&-\sqrt{54}&0&0\\0&0&i\sqrt{3}&0\\0&0&0&-i\sqrt{3}\end{bmatrix}$; 6) да, $S=\begin{bmatrix}1&0&1&-2\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$.

12.29. Указание. Матрица оператора простой структуры в базисе из собственных векторов является диагональной.

12.30. Указание. Поскольку матрица A является матрицей простой структуры, то найдется невырожденная матрица S такая, что $S^{-1}AS=D$, где D – диагональная матрица. Но тогда $D^*=T_1^{-1}A^*T$, $D^{-1}=T_2^{-1}A^{-1}T_2$, где $T_1=\left(S^*\right)^{-1}$, $T_2=S$.

12.31. 1) $\left(\begin{bmatrix}3\\3\\-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\2\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}\right)$; 2) $\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\3\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)$; 3) $\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-2\\-5\end{bmatrix}\right)$;
4) $\left(\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\2\end{bmatrix}\right)$; 5) $\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}\right)$.

12.32. Указание. Пусть V – векторное пространство над полем P размерности n, $M\leqslant V$ и $\dim M=m\leqslant n$. Подпространство M можно рассматривать как векторное пространство над полем P. Так как линейные операции на M индуцированы линейными операциями на V и подпространство M замкнуто относительно этих операций, то отображение вложения $\mathrm{in}_M : M \to V$ линейно. То, что оно инъективно, следует из определения. Если $G = (\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_m)$ – базис подпространства M и $G' = (\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_m,\ \boldsymbol{g}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{g}_n)$ – его дополнение, то матрица A оператора in_M в базисах G и G' имеет вид $A = \tau_{G'}(\mathrm{in}_M(G)) = \left[\dfrac{E_m}{O_{n-m,\ m}}\right]$.

12.33. Указание. Пусть $V = M \oplus L$ – прямая сумма подпространств M и L. Тогда каждый вектор $\boldsymbol{x} \in V$ однозначно разлагается в сумму $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, где $\boldsymbol{x}_1 \in M$, $\boldsymbol{x}_2 \in L$. Если еще $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2$, где $\boldsymbol{y}_1 \in M$, $\boldsymbol{y}_2 \in L$, то $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2)$, где $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1 \in M$, $\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2 \in L$. Следовательно, $\mathrm{pr}_M^{M\oplus L}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1 = \mathrm{pr}_M^{M\oplus L}(\boldsymbol{x}) + {}$ $+ \mathrm{pr}_M^{M\oplus L}(\boldsymbol{y})$. Аналогично для $\alpha \in P$, $\boldsymbol{x} \in V$ $\mathrm{pr}_M^{M\oplus L}(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\,\mathrm{pr}_M^{M\oplus L}(\boldsymbol{x})$. Значит, $\mathrm{pr}_M^{M\oplus L}$ – линейное отображение из V в M. Если $\boldsymbol{x} \in M$, то в этом случае $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$, и тогда $(\mathrm{pr}_M^{M\oplus L} \circ \mathrm{in}_M)(\boldsymbol{x}) = \mathrm{pr}_M^{M\oplus L}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}$, поэтому $\mathrm{pr}_M^{M\oplus L} \circ \mathrm{in}_M = \mathrm{id}\, M$. Для произвольного $\boldsymbol{x} \in V$ имеем:

$$\mathrm{id}\, V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = (\mathrm{in}_M \circ \mathrm{pr}_M^{M\oplus L} + \mathrm{in}_L \circ \mathrm{pr}_L^{M\oplus L})(\boldsymbol{x}),$$

поэтому $\mathrm{id}\, V = \mathrm{in}_M \circ \mathrm{pr}_M^{M\oplus L} + \mathrm{in}_L \circ \mathrm{pr}_L^{M\oplus L}$.

12.34. Указание. Пусть φ – линейный оператор n-мерного векторного пространства V над полем P, $M \in \mathrm{inv}_V\, \varphi$ и $\dim M = m < n$. Далее, пусть $G = (\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_m)$ – базис M и $G' = (\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_m,\ \boldsymbol{g}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{g}_n)$ – его дополнение до базиса всего пространства V, $H = (\boldsymbol{g}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{g}_n)$, $U = LH$. Тогда $V = M \oplus U$, $\varphi_1 = \varphi|_M$ и для $\boldsymbol{y} \in U$ $\varphi_2(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}_2$, если $\varphi(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2$, где $\boldsymbol{y}_1 \in M$, $\boldsymbol{y}_2 \in U$. Тогда для $\boldsymbol{x}_1 \in M$ имеем: так как $\varphi(\boldsymbol{x}) \in M$, то $(\mathrm{pr}_M^{M\oplus U} \circ \varphi \circ \mathrm{in}_M)(\boldsymbol{x}_1) = \mathrm{pr}_M^{M\oplus U}(\varphi(\boldsymbol{x}_1)) = \varphi(\boldsymbol{x}_1) = \varphi_1(\boldsymbol{x}_1)$, откуда $\varphi_1 = \mathrm{pr}_M^{M\oplus U} \circ \varphi \circ \mathrm{in}_M$, а для $\boldsymbol{y} \in U$ $(\mathrm{pr}_U^{M\oplus U} \circ \varphi \circ \mathrm{in}_U)(\boldsymbol{y}) = \mathrm{pr}_U^{M\oplus U}(\varphi(\boldsymbol{y})) =$ $= \mathrm{pr}_U^{M\oplus U}(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = \boldsymbol{y}_2 = \varphi_2(\boldsymbol{y})$, откуда $\mathrm{pr}_U^{M\oplus U} \circ \varphi \circ \mathrm{in}_U = \varphi_2$.

12.35. Указание. Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V)$, $g(\lambda) \in P[\lambda]$. Если $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}\, g(\varphi)$, то для некоторого $\boldsymbol{y} \in V$ $\boldsymbol{x} = g(\varphi)(\boldsymbol{y})$. Отсюда $\varphi(\boldsymbol{x}) = (\varphi \circ g(\varphi))(\boldsymbol{y}) = (g(\varphi) \circ \varphi)(\boldsymbol{y}) =$ $= g(\varphi)(\varphi(\boldsymbol{y})) \in \mathrm{Im}\, g(\varphi)$, так что $\mathrm{Im}\, g(\varphi) \in \mathrm{inv}_V(\varphi)$. Далее, если $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\, g(\varphi)$, то $g(\varphi)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, откуда $g(\varphi)(\varphi(\boldsymbol{x})) = (g(\varphi) \circ \varphi)(\boldsymbol{x}) = (\varphi \circ (g(\varphi))(\boldsymbol{x}) = \varphi(g(\varphi)(\boldsymbol{x})) = \varphi(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$. Значит, $\varphi(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Ker}\, g(\varphi)$ и $g(\boldsymbol{y}) \in \mathrm{inv}_V(\varphi)$.

12.36. 1) $\{O_{3,1}\}$; $\mathbb{C}_{3,1}$; $L\left(\begin{bmatrix} 2-3\beta \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix}\right)$, $\forall \beta \in \mathbb{C}$; $L\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$; $L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$; $L\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$; $L\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$; $L\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \sigma \end{bmatrix}\right)$, $\sigma \in \mathbb{C}$; 2) $\{O_{3,1}\}$; $\mathbb{C}_{3,1}$; $L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1+\beta \\ \beta \end{bmatrix}\right)$, $\forall \beta \in \mathbb{C}$; $L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$; $L\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$; $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$; $L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \sigma \end{bmatrix}\right)$, $\sigma \in \mathbb{C}$; 3) $\{O_{3,1}\}$; $\mathbb{C}_{3,1}$; $L\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$;

$L\left(\begin{bmatrix}2i\\1-i\\-1\end{bmatrix}\right)$; $L\left(\begin{bmatrix}-2i\\1+i\\-1\end{bmatrix}\right)$; $L\left(\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}\right)$; $L\left(\begin{bmatrix}1-i\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2+2i\\0\\1\end{bmatrix}\right)$; $L\left(\begin{bmatrix}1+i\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2-2i\\0\\1\end{bmatrix}\right)$;

4) $\{O_{3,1}\}$; $\mathbb{C}_{3,1}$; $L\left(\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right)$; $L\left(\begin{bmatrix}1+i\\1\\1\end{bmatrix}\right)$; $L\left(\begin{bmatrix}1-i\\1\\1\end{bmatrix}\right)$; $L\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)$; $L\left(\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-2i\\1\end{bmatrix}\right)$;
$L\left(\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2i\\1\end{bmatrix}\right)$.

12.37. 1) $L_0 = L\left(\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}\right)$, $L_{-1} = L\left(\begin{bmatrix}3\\3\\-4\end{bmatrix}\right)$, $L_1 = L\left(\begin{bmatrix}3\\2\\-2\end{bmatrix}\right)$, $D_1 = L\left(\begin{bmatrix}3\\3\\-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\2\\-2\end{bmatrix}\right)$,
$D_2 = L_{-1} + L_0$, $D_3 = L_0 + L_1$, $L_0 \subset D_3$, $L_1 \subset D_3$, $L_1 \subset D_1$, $L_{-1} \subset D_1$, $L_{-1} \subset D_2$, $L_0 \subset D_2$;
2) $M_\infty = L\left(\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}\right)$, $M_\gamma = L\left(\begin{bmatrix}2\gamma\\1\\-\gamma\end{bmatrix}\right)$, $D_\infty = L\left(\begin{bmatrix}0\\3\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)$, $D_\beta = L\left(\begin{bmatrix}4-3\beta\\0\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\beta\\1\\0\end{bmatrix}\right)$, $\gamma,\beta \in$
$\in \mathbb{R}$; $M_\gamma \subset D_0$, $\forall\gamma \in \mathbb{R}^*$; $M_{2/3} \subset D_\beta$, $\forall\beta \in \mathbb{R}^*$; 3) $M_1 = L\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}\right) \subset L_1 = L\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right)$;
4) $M_\infty = L\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\\2\end{bmatrix}\right)$, $M_\beta\left(\begin{bmatrix}1\\2+\beta\\\beta\\2\beta\end{bmatrix}\right)$, $\beta \in \mathbb{R}$; $D_1 = L\left(\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right)$, $D_2 = L\left(\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\2\end{bmatrix}\right)$; $T_\infty =$
$= L\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$, $T_\delta = L\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-2\delta\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\delta\end{bmatrix}\right)$, $\delta \in \mathbb{R}$; $M_\infty \subset D_2 \subset T_1$, $M_0 \subset D_1 \subset T_\delta$,
T_∞, $\forall\delta \in \mathbb{R}^*$; $M_\beta \subset T_1$, $\forall\beta \in \mathbb{R}^*$; $M_\beta \subset D_2$, $\forall\beta \in \mathbb{R}$; 5) $L_{-2} = L\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}\right)$, $M_\infty = L\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}\right)$,
$M_\beta = L\left(\begin{bmatrix}1\\-1+\beta\\1\\-1-\beta\end{bmatrix}\right)$, $D_\infty = L\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}\right)$, $D_\delta = L\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\\delta-1\\0\\-\delta\end{bmatrix}\right)$, $S_\infty = L\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right)$,

$$S_\theta = L\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1+\theta\\0\\-1\end{bmatrix}\right),\quad T_\infty = L\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right),\quad T_\alpha = L\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1+\alpha\\0\\0\end{bmatrix}\right),$$

$$K = L\left(\begin{bmatrix}6\\-1\\6\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\4\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\4\end{bmatrix}\right),\ \alpha,\gamma,\delta,\theta\in\mathbb{R};\ M_\infty\subset D_\infty,\ M_\beta\subset S_0,\ M_0\subset S_\theta\subset K,\ S_0\subset T_\theta,$$

$L_{-2}\subset D_\delta\subset T_0,\ D_0\subset T_\alpha,\ M_\beta\subset D_\beta,\ \forall\alpha,\beta,\delta,\theta\in\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\cup\{\infty\}.$

12.38. 1) Линейная оболочка столбцов матрицы

$$\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\\0&-1\\0&0\end{bmatrix}$$

является единственным нетривиальным подпространством пространства $\mathbb{R}_{4,1}$, инвариантным относительно линейного оператора φ, заданного матрицей A; 2) линейная оболочка столбцов матрицы

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

является единственным нетривиальным подпространством пространства $\mathbb{R}_{4,1}$, инвариантным относительно линейного оператора φ, заданного матрицей A.

12.39. Все прямые и плоскости, перпендикулярные к вектору $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, а также содержащие прямую с направляющим вектором $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$.

Глава 13

13.1. 1) $\begin{bmatrix}1&0\\0&(1+\lambda)^2\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}\lambda+2&0\\0&\lambda^3+2\lambda^2-5\lambda-10\end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix}1&0\\0&\lambda^2-\lambda-2\end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\lambda^2+\lambda\end{bmatrix}$; 5) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&0\end{bmatrix}$; 6) $\begin{bmatrix}\lambda+1&0&0\\0&\lambda+1&0\\0&0&(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda^2-3\lambda+1)\end{bmatrix}$;

7) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda+3)^3\end{bmatrix}$; 8) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda^2-1&0\\0&0&\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1\end{bmatrix}$; 9) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda^2+\lambda\end{bmatrix}$.

13.2. 1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda^2-1) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda^2-1) \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)(\lambda-2) \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1) \end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$; 5) $\begin{bmatrix} d(\lambda) & 0 \\ 0 & \dfrac{f(\lambda)g(\lambda)}{cd(\lambda)} \end{bmatrix}$, где $d(\lambda)$ равен НОД$(f(x), g(x))$; c – старший коэффициент произведения $f(\lambda)g(\lambda)$; 6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & fg\varphi & 0 \\ 0 & 0 & fg\varphi \end{bmatrix}$.

13.3. 1) $(\lambda-1,\ \lambda^2-1)$; 2) $(\lambda,\ \lambda,\ \lambda^2)$; 3) $(1,\ \lambda,\ \lambda^3+2\lambda^2)$; 4) $(1, 1, 1)$.

13.4. 1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda^2+4)(\lambda+2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda^4-16)(\lambda+2)^2(\lambda^2+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

2) $\begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda+1)\left(\lambda^2-9\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^2\left(\lambda^2-9\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+2\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^4-4\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

13.5. 1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-3)^2(\lambda+2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-3)^3(\lambda+2)^2 \end{bmatrix}$;

2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda+3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3(\lambda+3)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda+1)(\lambda-5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2(\lambda-5)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

13.6. 1) $(\lambda,\ \lambda,\ \lambda+2/3)$; 2) $(\lambda,\ \lambda,\ \lambda-2)$; 3) $(\lambda,\ \lambda,\ \lambda-1,\ \lambda+1)$.

13.7. Над $\mathbb{R}$: 1) $(\lambda^2+1,\ \lambda-\sqrt{3},\ \lambda+\sqrt{3})$; 2) $(\lambda,\ \lambda,\ \lambda-1,\ \lambda^2+1)$; 3) $(\lambda-\sqrt{2},\ \lambda+\sqrt{2},\ \lambda^2+1)$; над $\mathbb{C}$: 1) $(\lambda-i,\ \lambda+i,\ \lambda-\sqrt{3},\ \lambda+\sqrt{3})$; 2) $(\lambda,\ \lambda,\ \lambda-1,\ \lambda-i,\ \lambda+i)$; 3) $(\lambda-\sqrt{2},\ \lambda+\sqrt{2},\ \lambda-i,\ \lambda+i)$.

13.8. Указание. См., например, [13].

13.9. Указание. Если $f_1(\lambda),\ldots,f_n(\lambda)$ − система инвариантных множителей матрицы $A(\lambda)$, то $f_1(\lambda)f_2(\lambda)\cdots f_n(\lambda)=1$.

13.10. Указание. См., например, [2, ч. 4].

13.11. $U(\lambda)=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & \lambda+4 \end{bmatrix}, V(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda+1 & -\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda-1 \\ -\lambda & \frac{1}{2}\lambda^2+1 \end{bmatrix}.$

13.12. 1) Эквивалентны; 2) не эквивалентны; 3) матрицы B и C эквивалентны, но не эквивалентны матрице A.

13.13. 1) $U(\lambda)=\begin{bmatrix} -3\lambda^2+3\lambda+14 & 3\lambda^2-3\lambda-2 \\ -2\lambda^2+2\lambda+9 & 2\lambda^2-2\lambda-1 \end{bmatrix}$, $V(\lambda)=\begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$;

2) $U(\lambda)=\begin{bmatrix} 12\lambda-43 & 1 & -12 \\ 12\lambda^2-54\lambda+40 & \lambda-1 & -12\lambda+11 \\ 12\lambda^2-55\lambda+42 & \lambda-1 & -12\lambda+12 \end{bmatrix},$

$$V(\lambda)=\begin{bmatrix} 2\lambda^2-2\lambda+1 & 2\lambda & 2\lambda^2-4\lambda+2 \\ -4\lambda^2+5\lambda-3 & 1-4\lambda & -4\lambda^2+8\lambda-3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

13.14. Указание. Например, если матрица B – невырожденная, то $AB=B^{-1}(BA)B$.

13.15. Указание. Ранги подобных матриц равны рангу одного и того же линейного оператора.

13.16. Указание. Если матрица A подобна матрице B, то существует невырожденная матрица S такая, что $A=S^{-1}BS$. Следовательно, $\det A=\det S^{-1}\times$ $\times\det B\cdot\det S=\det B$.

13.17. Указание. Характеристические многочлены подобных матриц равны.

13.18. Указание. Если матрица A подобна матрице B, то существует невырожденная матрица S такая, что $A=S^{-1}BS$. Тогда $A^2=(S^{-1}BS)(S^{-1}BS)=S^{-1}B^2S$.

13.19. Указание. Матрицы A и A^{T} подобны тогда и только тогда, когда матрицы $A-\lambda E_n$ и $A^{\mathrm{T}}-\lambda E_n$ эквивалентны. Последние матрицы эквивалентны, потому что совпадают их системы НОД миноров.

13.20. Скалярные матрицы.

13.21. 1) Не подобны; 2) подобны; 3) не подобны 4) подобны, 5) не подобны.

13.22. Указание. Использовать указание к задаче 12.23 и формулы Виета для многочленов.

13.23. 1) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; 4) таких инвариантных множителей у матрицы вида $A-\lambda E$ четвертого порядка не может быть.

13.24. 1) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$;

5) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; 6) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{bmatrix}$; 7) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-1+\sqrt{83}\,i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1-\sqrt{83}\,i}{2} \end{bmatrix}$;

8) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

13.25. $(x-\alpha)^k$, где k – порядок клетки.

13.26. Указание. Доказательство следует из критерия подобия матриц и того факта, что минимальный многочлен матрицы равен последнему инвариантному множителю ее характеристической матрицы.

13.27. Указание. Если J – жорданова нормальная форма матрицы A, т.е. $J=S^{-1}AS$, то $J^k=S^{-1}A^kS$. Поскольку $A^k=0$, отсюда $J^k=0$, а это значит, что характеристические числа равны нулю. Верно и обратное.

13.28. Указание. Использовать определение подобия матриц и задачу 13.27.

13.29. Диагональная матрица с числами ± 1 на диагонали.

13.30. Указание. Если $(f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots, f_n(\lambda))$ – система инвариантных множителей характеристической матрицы, а $\varphi(\lambda)$ – характеристический многочлен, то $f_1(\lambda)f_2(\lambda)\cdots f_n(\lambda)=(-1)^n\varphi(\lambda)$. С учетом того, что минимальный многочлен $m(\lambda)=f_n(\lambda)$, получаем требуемое.

13.31. $(x-\alpha)^m$.

13.32. Указание. Воспользоваться определением степени матрицы и тем, что аннулирующий многочлен делится на минимальный.

13.33. 1) $\lambda^3+\lambda$; 2) $(\lambda-1)(\lambda-2)^2$; 3) $(\lambda-1)^3$; 4) $(\lambda-3)^3$.

13.34. $\begin{bmatrix} \alpha^2 & 2\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 2\alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 & 2\alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha^2 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha^2 \end{bmatrix}$.

13.35. Две клетки Жордана с числом 0 на диагонали в случае $m = 2k$ порядка k, в случае $m = 2k+1$ порядка k и $k+1$.

13.36. В жордановой форме исходной матрицы A диагональные элементы заменяются соответственно на $1/\lambda_1,\ 1/\lambda_2, \dots, 1/\lambda_n$.

13.37. В каждой клетке жордановой формы с ненулевым числом λ на диагонали заменяем диагональные элементы на λ^2, а каждую клетку с 0 на диагонали – на две клетки с 0 на диагонали так, чтобы порядки этих клеток отличались не более чем на единицу.

13.38. Указание. Из указания к задаче 12.30 следует, что каждый корень характеристического многочлена $\varphi(\lambda)$ является корнем минимального многочлена $m(\lambda)$. Но тогда $\varphi(\lambda) \mid (m(\lambda))^k$ при некотором $k \in \mathbb{N}$.

13.39. Указание. Согласно задаче 13.19 матрицы A и A^{T} подобны. Но минимальные многочлены подобных матриц равны.

Глава 14

14.1. 1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 5 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}$.

14.2. 1) $2x_1y_1 - x_1y_2 + 4x_1y_3 - x_2y_1 + 5x_2y_3 + 4x_3y_1 + 5x_3y_2 - x_3y_3$; 2) $-x_1y_1 + 3x_1y_3 + 2x_2y_2 + 7x_2y_3 + 3x_3y_1 + 7x_3y_2$.

14.3. 1) $2x_1^2 - 6x_1x_2 + 8x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_3^2$; 2) $x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 6x_2x_3$.

14.4. 1) $2x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 - 3x_2y_2 - 3x_2y_3 + x_3y_1 - 3x_3y_2$; 2) $7x_1y_1 + \frac{5}{2}x_1y_2 - 3x_1y_3 + \frac{5}{2}x_2y_1 - 2x_2y_2 + 4x_2y_3 - 3x_3y_1 + 4x_3y_2$.

14.5. 1) $y_1^2 - y_2^2$, $x_1 = y_1 + 2y_3 - 3y_2$, $x_2 = y_3$, $x_3 = y_2$; 2) $3y_1^2 - 2y_2^2 - 3y_3^2$, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2 - y_3$, $x_3 = y_3$; 3) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, $x_1 = y_1 - y_2 - y_3$, $x_2 = y_1 + y_2 - y_3$, $x_3 = y_3$; 4) $2y_1^2 + 3y_2^2$, $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_2 + y_3$, $x_3 = y_3$; 5) $2y_1^2 + y_2^2 - 9y_3^2$, $x_1 = y_1 - y_2 + 2y_3$, $x_2 = y_2 + y_3$, $x_3 = y_3$; 6) $3y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2$, $x_1 = y_1 + 2y_2 - 3y_3$, $x_2 = y_2 - 2y_3$, $x_3 = y_3$; 7) $3y_1^2 - \frac{4}{3}y_2^2 + 2y_3^2$, $x_1 = \frac{2}{3}y_2 + y_1$, $x_2 = y_2 + \frac{3}{2}y_3$, $x_3 = y_3$; 8) $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$, $x_1 = y_1 - y_2 - y_3$, $x_2 = 2y_2 + 2y_3$, $x_3 = y_3$.

14.6. 1) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; 2) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; 3) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; 4) $y_1^2 - y_2^2$; 5) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; 6) y_1^2; 7) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

14.7. 1) $y_1^2+y_2^2-y_3^2,\ x_1=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{\sqrt{5}}y_3,\ x_2=\frac{1}{\sqrt{5}}y_2+\frac{1}{\sqrt{5}}y_3,\ x_3=-\frac{1}{\sqrt{5}}y_2+\frac{1}{\sqrt{5}}y_3;$ 2) $y_1^2-y_2^2,\ x_1=y_1-y_2-y_3,\ x_2=y_1+y_2,\ x_3=y_3;$ 3) $y_1^2+y_2^2-y_3^2,\ x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2,$ $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}y_2+y_3,\ x_3=\frac{1}{\sqrt{2}}y_2;$ 4) $y_1^2+y_2^2-y_3^2,\ x_1=y_1+\frac{2}{\sqrt{43}}y_3,\ x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}y_2-\frac{3}{\sqrt{43}}y_3,$ $x_3=\frac{2}{\sqrt{43}}y_3;$ 5) $y_1^2-y_2^2-y_3^2,\ x_1=\frac{1}{2}y_3,\ x_2=\frac{3}{2\sqrt{6}}y_2-\frac{1}{2}y_3,\ x_3=\frac{1}{\sqrt{6}}y_1+\frac{1}{2\sqrt{6}}y_2-\frac{1}{2}y_3.$

14.8. 1) Формы f_1 и f_3 эквивалентны между собой и не эквивалентны форме f_2; 2) формы f_2 и f_3 эквивалентны между собой и не эквивалентны форме f_1.

14.9. 1) $x_1=y_1+3y_2-2y_3,\ x_2=y_2-3y_3,\ x_3=y_3;$ 2) $x_1=y_1+y_3,\ x_2=y_2-\frac{1}{2}y_3,$ $x_3=y_3;$ 3) $x_1=y_1+y_2+y_3,\ x_2=y_2,\ x_3=y_3.$

14.10. $r+1.$

14.11. $\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$

14.12. 1) $\lambda>1$; 2) $0<\lambda<4$; 3) требуемых значений λ не существует; 4) $\frac{2-4\sqrt{1969}}{15}<\lambda<\frac{2+4\sqrt{1969}}{15}$; 5) требуемых значений λ не существует.

14.13. Указание. $f\sim g$, следовательно, найдется невырожденное линейное преобразование $Y=SX$ такое, что $g(SX)=f(X)$. Теперь если столбец $C\in P_{n,1}$ такой, что $f(C)=\gamma$, то $g(SC)=\gamma$.

14.14. Указание. В силу задачи 14.13 можно считать, что квадратичная форма f имеет канонический вид, т.е. $f(x_1,...,x_n)=b_1x_1^2+\ldots+b_rx_r^2,\ r=\operatorname{rank} f$. Пусть $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ – ненулевое решение уравнения $f(x_1,...,x_n)=0$, т.е. имеет место равенство $f(\alpha_1,...,\alpha_n)=0\ \Leftrightarrow\ \sum_{i=1}^{r}b_i\alpha_i^2=0$. Пусть $\gamma\in P$. Полагая $\beta_1=\alpha_1\left(1+\frac{\gamma}{4\alpha_1^2b_1}\right),$ $\beta_i=\alpha_i\left(1-\frac{\gamma}{4\alpha_1^2b_1}\right),\ i=\overline{2,n}$, нетрудно видеть, что $f(\beta_1,...,\beta_n)=\gamma$.

14.15. Указание. В силу задачи 14.14 уравнение $b_1x_1^2+b_2x_2^2+\ldots+b_nx_n^2=1$ разрешимо. Кроме того, квадратичная форма $y_1y_2+g(y_3,...,y_n)$, которая эквивалентна квадратичной форме *f,* эквивалентна, в свою очередь, форме $z_1^2-z_2^2+g_1(z_3,...,z_n)$.

Глава 15

15.1. Указание. Проверить справедливость условий аксиом определения евклидового пространства.

15.2. Указание. Использовать свойства определенного интеграла от непрерывной функции на отрезке $[a,b]$.

15.3. Указание. *Первый способ.* Проверить аксиомы скалярного произведения. *Второй способ.* Представить $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$ в матричной форме $X^{\mathrm{T}}AY$ и показать, что матрица A является матрицей скалярного произведения.

15.4. 1) Определяет; 2) определяет, если $k > 0$, $l > 0$; 3) не определяет; 4) определяет.

15.5. 1) $\lambda_1^2 x_1 y_1 + \lambda_2^2 x_2 y_2 + \ldots + \lambda_n^2 x_n y_n$; 2) $2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \ldots + x_n y_n$.

15.6. $\alpha = 0$.

15.7. 1) $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = 2\pi/3$; 2) $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \arccos(3/5)$.

15.8. $\rho(\cos x, \sin x) = \sqrt{\pi}$.

15.9. Указание. Если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ либо $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, то равенство выполняется. Если $\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то $|\boldsymbol{ab}| = |(\lambda \boldsymbol{b})\boldsymbol{b}| = |\lambda \boldsymbol{b}||\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$. Верно и обратное.

15.10. Указание. Использовать определение и свойства скалярного произведения.

15.11. Указание. Использовать определения длины вектора и ортогональности векторов.

15.12. Указание. Доказательство следует из равенства $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|^2 - 2i\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{xy}) - |\boldsymbol{y}|^2$.

15.13. Указание. *Первый способ*. Исходя из определения. *Второй способ*. Матрица Грама этой системы является единичной.

15.14. Да.

15.15. 1) $\boldsymbol{b}_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (2, -2,\ 2, -2)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1/2,\ 1/2,\ -1/2, -1/2)$; 2) $\boldsymbol{b}_1 = (1,\ 2,\ 2,\ 0)$, $\boldsymbol{b}_2 = (0,\ 1, -1,\ 0)$, $\boldsymbol{b}_3 = (2/3, -1/6,\ -1/6,\ 0)$.

15.16. 1) $\boldsymbol{b}_1 = (2, -4,\ 3, -6)$, $\boldsymbol{b}_2 = (-3,\ 6,\ 2, -4)$, $\boldsymbol{b}_3 = (4,\ 2,\ 6,\ 3)$; 2) $\boldsymbol{b}_1 = (1, -1,\ 1, -2)$, $\boldsymbol{b}_2 = (2,\ 1,\ 5,\ 3)$, $\boldsymbol{b}_3 = (2/3,\ 1/3,\ -1/3,\ 0)$.

15.17. 1) Указание. Поскольку векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ линейно независимы, то в качестве ортонормированного базиса линейной оболочки можно взять канонический базис пространства.

15.18. 1) $\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{2}(1,\ 1, -1, -1)$, $\boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{2}(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $\boldsymbol{b}_3 = \frac{1}{2}(-1,\ 1,\ 1, -1)$, $\boldsymbol{b}_4 = \frac{1}{2}(-1,\ 1, -1,\ 1)$; 2) $\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, -1,\ 1,\ 3)$, $\boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, -3,\ 1, -1)$, $\boldsymbol{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,\ 1,\ 1,\ 0)$, $\boldsymbol{b}_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,\ 0, -2, -1)$.

15.19. 1) $\boldsymbol{a}_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\boldsymbol{a}_4 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; 2) $\boldsymbol{a}_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$, $\boldsymbol{a}_4 = \left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 3) $\boldsymbol{a}_3 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

15.20. Указание. Линейность отображений следует из определения линейного отображения и того факта, что L и $L^{\perp}$ – подпространства пространства V.

15.21. 1) $\mathrm{pr}_L \boldsymbol{x} = (5,\ -9,\ 2,\ 8)$, $\mathrm{ort}_L \boldsymbol{x} = (9,\ 3,\ -5,\ 1)$; 2) $\mathrm{pr}_L \boldsymbol{x} = (2,\ -2,\ -1,\ -5)$, $\mathrm{ort}_L \boldsymbol{x} = (64,\ -30,\ 43,\ 29)$; 3) $\mathrm{pr}_L \boldsymbol{x} = (0,\ -3,\ 2,\ 5)$, $\mathrm{ort}_L \boldsymbol{x} = (2,\ -2,\ 2,\ -2)$.

15.22. $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right), \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

15.23. 1) $\boldsymbol{g}_1=(i/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2},\ 0)$, $\boldsymbol{g}_2=(0,\ 0,\ 1)$, $\boldsymbol{g}_3=(-i/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2},\ 0)$ – искомый ортонормированный базис; 2) $\boldsymbol{g}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(-i,\ 1,\ -1)$, $\boldsymbol{g}_2=\frac{1}{\sqrt{28-2\sqrt{7}}}(i(2-\sqrt{7}),\ 3,\ 1+\sqrt{7})$, $\boldsymbol{g}_3=\frac{1}{\sqrt{28+2\sqrt{7}}}(i(2+\sqrt{7}),\ 3,\ 1-\sqrt{7})$.

15.24. 1) $\boldsymbol{g}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,\ 2,\ 0)$, $\boldsymbol{g}_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}(4,\ 2,\ 5)$, $\boldsymbol{g}_3=\frac{1}{3}(2,\ 1,\ -2)$; 2) $\boldsymbol{g}_1=\frac{1}{3}(2,\ 1,\ -2)$, $\boldsymbol{g}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,\ -2,\ 0)$, $\boldsymbol{g}_3=\frac{1}{3\sqrt{5}}(4,\ 2,\ 5)$; 3) $\boldsymbol{g}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ -1,\ 1)$, $\boldsymbol{g}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,\ 1,\ 1)$, $\boldsymbol{g}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ 1)$; 4) $\boldsymbol{g}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 0,\ 1)$, $\boldsymbol{g}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,\ -2,\ -1)$, $\boldsymbol{g}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ -1)$; 5) $\boldsymbol{g}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(0,\ 1,\ 2)$, $\boldsymbol{g}_2=\frac{1}{\sqrt{30}}(-5,\ -2,\ 1)$, $\boldsymbol{g}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,\ 2,\ -1)$; 6) $\boldsymbol{g}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ 1,\ -1)$, $\boldsymbol{g}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(2,\ 1,\ 1)$, $\boldsymbol{g}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,\ 1,\ 1)$.

15.25. 1) Да; 2) нет; 3) нет.

15.26. 1) Да; 2) нет; 3) да; 4) да.

15.27. 1) Да; 2) нет.

15.28. Указание. Матрица $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ этого преобразования в базисе $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ является симметрической.

15.29. Если $f(x)=\sum_{k=1}^{n}a_kx^k$, $g(x)=\sum_{k=1}^{n}b_kx^k$, то $\langle f(x),\ g(x)\rangle=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k(k!)^2$.

15.30. Указание. Используя то, что в пространстве $C([-1,1])$ скалярное произведение определяется по формуле $\langle f(x),g(x)\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$, составить матрицу Грама системы многочленов Лежандра и показать, что ее определитель не равен нулю.

15.31. Указание. Матрица $A\in\mathbb{R}_{n,n}$ скалярного произведения является матрицей некоторой положительно определенной квадратичной формы, а следовательно, она ортогонально подобна диагональной, т.е. $A=S^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)S$ и $\lambda_i>0$, $i=\overline{1,n}$. Но тогда $A=B^{\mathrm{T}}B$, где $B=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},...,\sqrt{\lambda_n})S$. Обратно: если $A=B^{\mathrm{T}}B$, где B – невырожденная матрица, то $A^{\mathrm{T}}=A$ и все главные угловые миноры положительны, а это значит, что A – матрица скалярного произведения.

15.32. Указание. Использовать то, что скалярное произведение определяется формулой $\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g}(x)dx$.

15.33. Указание. См., например, [2, ч. 4].

15.34. Указание. См. задачу 15.33.

15.35. Указание. См., например, [13].

15.36. У к а з а н и е. Показать, что для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ и любых $\alpha, \beta, \in P$ выполняется равенство $|\varphi(\alpha \boldsymbol{x}+\beta \boldsymbol{y})-(\alpha\varphi(\boldsymbol{x})+\beta\varphi(\boldsymbol{y}))|=0$.

15.37. У к а з а н и е. Матрица поворотов $A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ является ортогональной.

15.38. У к а з а н и е. Использовать свойства векторного произведения и определения линейного, ортогонального и самосопряженного операторов.

15.39. У к а з а н и е. $\varphi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\varphi(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \varphi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}\varphi(\boldsymbol{x})} \Rightarrow \boldsymbol{x}\varphi(\boldsymbol{x}) = \overline{\boldsymbol{x}\varphi(\boldsymbol{x})} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \boldsymbol{x}\varphi(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$.

15.40. У к а з а н и е. Согласно задаче 15.20 отображение $\mathrm{pr}_L : V \to L$ является линейным. Поскольку, $V = L \oplus L^\perp$, то для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ выполняется равенство $(\mathrm{pr}_L \boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\,\mathrm{pr}_L \boldsymbol{y}$.

15.41. У к а з а н и е. См., например, [2, ч. 4].

15.42. У к а з а н и е. См., например, [2, ч. 4].

15.43. У к а з а н и е. Использовать метод математической индукции по числу n – размерности матрицы A.

15.44. У к а з а н и е. Использовать определение, а именно: $AA^{\mathrm{T}} = E_n \Leftrightarrow A^{\mathrm{T}} = $ $= A^{-1}$.

15.45. У к а з а н и е. Использовать то, что $A^{-1} = A^* \Leftrightarrow A^*A = E_n$.

15.46. У к а з а н и е. Использовать то, что $E_n = (P+iQ)(\overline{P+iQ})^{\mathrm{T}} \Leftrightarrow E_n = PP^{\mathrm{T}} +$ $+QQ^{\mathrm{T}}$, $QP^{\mathrm{T}} = PQ^{\mathrm{T}}$ и правило блочного умножения матриц.

15.47. У к а з а н и е. $V = L \oplus L^\perp$. Так как $\varphi(L) \subseteq L$, то $\varphi(L^\perp) \subseteq L^\perp$.

15.48. У к а з а н и е. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ – собственные значения унитарного оператора φ, которым соответствуют собственные векторы $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$, т.е. выполняются равенства $\varphi(\boldsymbol{u}_1) = \lambda_1\boldsymbol{u}_1$, $\varphi(\boldsymbol{u}_2) = \lambda_2\boldsymbol{u}_2$. Тогда $\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2 = \varphi(\boldsymbol{u}_1)\varphi(\boldsymbol{u}_2) = \lambda_1\overline{\lambda_2}(\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2) \Rightarrow \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2 = 0$.

15.49. У к а з а н и е. Пусть $A \in \mathbb{R}_{n,n}$ – матрица унитарного оператора φ, а $X+iY$, $X, Y \in \mathbb{R}_{n,1}$, – координатный столбец собственного вектора, соответствующего собственному значению $\alpha+\beta i$, $\beta \neq 0$, записанные в одном и том же базисе пространства. Тогда имеют место равенства $AX = \alpha X - \beta Y$, $AY = \beta X + \alpha Y$. Следовательно, $\varphi(\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x} - \beta\boldsymbol{y}$, $\varphi(\boldsymbol{y}) = \beta\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$. Ортогональность векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и равенство $|\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{y}|$ следуют из задачи 15.48 и из того, что $\det(A - \lambda E_n)$ есть многочлен с действительными коэффициентами. Поэтому $\alpha - \beta i$ – также собственное значение с соответствующим собственным вектором $X - iY$.

15.50. У к а з а н и е. Собственные значения ортогонального оператора равны ± 1. Каждый собственный вектор порождает одномерное инвариантное подпространство, а сумма одномерных инвариантных подпространств, отвечающих различным собственным значеним, порождает двумерное инвариантное подпространство.

15.51. У к а з а н и е. Модуль собственных значений унитарного оператора равен 1. Если предположить, что жорданова нормальная форма матрицы оператора имеет клетку Жордана размерности больше 1, то, исходя из определения изометрического оператора, получаем противоречие.

15.52. У к а з а н и е. Пространство $\mathbb{R}_{n,1}$ является прямой суммой попарно ортогональных одномерных и двумерных подпространств, инвариантных относительно φ. Преобразование φ оставляет векторы одномерных подпространств неизменными или меняет их на противоположные, а на двумерном подпространстве вызывает поворот на угол φ.

15.53. Указание. Любая матрица над полем $\mathbb{C}$ подобна жордановой матрице, которая является треугольной.

15.54. Указание. Пусть $\varphi : V \to \mathbb{R}$ − линейное отображение из n-мерного пространства V с ортонормированным базисом $G = (\boldsymbol{g}_1, ..., \boldsymbol{g}_n)$ в $\mathbb{R}$. В качестве базиса пространства $\mathbb{R}$ возьмем $H = (1)$. Тогда матрица оператора φ в базисах G и H имеет вид $A = [\varphi(\boldsymbol{g}_1) \cdots \varphi(\boldsymbol{g}_n)] \in \mathbb{R}_{1,n}$. Если $\boldsymbol{x} = GX \in V$, где $X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ − координатный столбец вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе G, то его образ $\varphi(\boldsymbol{x})$ равен $1 \cdot (AX) = \alpha_1 \varphi(\boldsymbol{g}_1) + \ldots + \alpha_n \varphi(\boldsymbol{g}_n)$, так что, взяв в качестве $\boldsymbol{a}_0$ вектор $\alpha_1 \varphi(\boldsymbol{g}_1) + \ldots + \alpha_n \varphi(\boldsymbol{g}_n)$, будем иметь $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_0 \boldsymbol{x}$ − скалярное произведение.

15.55. Указание. $\boldsymbol{x} = GX \Rightarrow \varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(G) X = HX$. Тогда $\boldsymbol{xy} = \varphi(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{y}) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow X^{\mathrm{T}} A_G Y = X^{\mathrm{T}} A_H Y$.

15.56. 1) Да; 2) нет.

15.57. Указание. Провести рассуждения, как в указании к задаче 15.55.

15.58. Указание. Для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ евклидова (унитарного) пространства найдем скалярное произведение $\langle (\varphi \circ \psi)(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle$. С одной стороны, $\langle (\varphi \circ \psi)(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, (\varphi \circ \psi)(\boldsymbol{y}) \rangle$. С другой стороны, $\langle (\varphi \circ \psi)(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle = \langle \varphi(\psi(\boldsymbol{x})), \boldsymbol{y} \rangle =$ $= \langle \psi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{y}) \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \psi(\varphi(\boldsymbol{y})) \rangle = \langle \boldsymbol{x}, (\psi \circ \varphi)(\boldsymbol{y}) \rangle$.

Глава 16

16.1. 1) $(5, 7)$; 2) $(-1, -1)$; 3) $(1, 0)$; 4) $(1/2, 5/2)$; 5) центры симметрии образуют прямую $x - y + 1 = 0$; 6) $(8, 20)$; 7) $(3/2, 1/2)$; 8) центры симметрии образуют прямую $x - 3y - 2 = 0$; 9) нет центра симметрии; 10) $(0, -5/2)$; 11) $(0, 0)$; 12) $(2, 1)$; 13) $(2, 3)$.

16.2. 1) Эллипс $\dfrac{x_1^2}{1} + \dfrac{y_1^2}{(1/3)^2} = 1$, новое начало координат $O_1(1, -1)$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1: $\boldsymbol{e}_1(1, 1)$, $\boldsymbol{e}_2(1, -1)$; 2) гипербола $\dfrac{x_1^2}{\left(\sqrt{\dfrac{83}{-2+\sqrt{13}}}\right)^2} - \dfrac{y_1^2}{\left(\sqrt{\dfrac{83}{2+\sqrt{13}}}\right)^2} = 1$, новое начало координат $O_1(-7/3, 2)$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1: $\boldsymbol{e}_1(3,\ 2-\sqrt{13})$, $\boldsymbol{e}_2(3,\ 2+\sqrt{13})$; 3) гипербола $\dfrac{x_1^2}{(5/3)^2} - \dfrac{y_1^2}{1^2} = 1$, новое начало координат $O_1(1, 0)$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1: $\boldsymbol{e}_1(4, -1)$, $\boldsymbol{e}_2(1, 4)$; 4) две параллельные прямые $3x - 4y + 5 \pm \sqrt{24} = 0$; 5) гипербола $-\dfrac{x_1^2}{1^2} + \dfrac{y_1^2}{(1/\sqrt{2})^2} = 1$, новое начало координат $O_1(0, 1)$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1: $\boldsymbol{e}_1(1, 1)$, $\boldsymbol{e}_2(1, -1)$; 6) эллипс $\dfrac{x_1^2}{2^2} + \dfrac{y_1^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$, новое начало координат $O_1(-1,1)$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1: $\boldsymbol{e}_1(1,-1)$, $\boldsymbol{e}_2(1,1)$; 7) гипербола $\dfrac{x_1^2}{\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}\sqrt[4]{5}}\right)^2}-\dfrac{y_1^2}{\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}\sqrt[4]{5}}\right)^2}=1$, новое начало координат $O_1(1/3,\ 1/3)$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1: $\boldsymbol{e}_1(2-\sqrt{5},\ 1)$, $\boldsymbol{e}_2(1,\sqrt{5}-2)$; 8) парабола $y_1^2=\dfrac{2}{5\sqrt{5}}x_1$, новое начало координат $O_1(13/25,-14/25)$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1: $\boldsymbol{e}_1(2,-1)$, $\boldsymbol{e}_2(1,2)$; 9) две слившиеся прямые $3x+y-1=0$; 10) две параллельные прямые $2x+y=0$, $2x+y+2=0$; 11) гипербола $\dfrac{x_1^2}{\left(\dfrac{2}{\sqrt{-2+\sqrt{13}}}\right)^2}-\dfrac{y_1^2}{\left(\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{13}}}\right)^2}=1$, новое начало координат $O_1(-3/2,\ 1/2)$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1: $\boldsymbol{e}_1(2,\ 3-\sqrt{13})$, $\boldsymbol{e}_2(\sqrt{13}-3,\ 2)$; 12) две параллельные прямые $x+y+1\pm\sqrt{5}=0$; 13) гипербола $\dfrac{x_1^2}{\left(\dfrac{7\sqrt{2}}{4\sqrt{\sqrt{17}-1}}\right)^2}-\dfrac{y_1^2}{\left(\dfrac{7\sqrt{2}}{4\sqrt{\sqrt{17}+1}}\right)^2}=1$, новое начало координат $O_1(3,-1)$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1: $\boldsymbol{e}_1(1-\sqrt{17},4)$, $\boldsymbol{e}_2(4,\sqrt{17}-1)$; 14) парабола $y_1^2=\dfrac{9}{5\sqrt{10}}x_1$, новое начало координат $O_1(433/600,\ 2087/1800)$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1: $\boldsymbol{e}_1(-3,1)$, $\boldsymbol{e}_2(1,3)$; 15) гипербола $\dfrac{x_1^2}{\left(\sqrt{\dfrac{48}{\sqrt{10}-1}}\right)^2}-\dfrac{y_1^2}{\left(\sqrt{\dfrac{48}{\sqrt{10}+1}}\right)^2}=1$, новое начало координат $O_1(3,\ -3)$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1: $\boldsymbol{e}_1(1,3+\sqrt{10})$, $\boldsymbol{e}_2(3+\sqrt{10},-1)$.

16.3. 1) Эллиптический цилиндр $\dfrac{x_1^2}{(\sqrt{1/2})^2}+\dfrac{y_1^2}{(\sqrt{1/5})^2}=1$, новое начало координат $O_1(1,-2,3)$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1: $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$; 2) однополостный гиперболоид $\dfrac{x_1^2}{(2)^2}+\dfrac{y_1^2}{(2)^2}-\dfrac{z_1^2}{(\sqrt{2})^2}=1$, новое начало координат $O_1(-\sqrt{6},\ \sqrt{6},\ -3\sqrt{6})$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1: $\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$; 3) параболический цилиндр $x_1^2=\dfrac{2\sqrt{7}}{9\sqrt{3}}y_1$, новое начало координат $O_1(23/63,64/63,2/7)$, направляющие векторы новых осей координат O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1: $\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$, $3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$; 4) эллипсоид $\dfrac{x_1^2}{(\sqrt{1/2})^2}+\dfrac{y_1^2}{(\sqrt{1/5})^2}+\dfrac{z_1^2}{(\sqrt{3/2})^2}=1$, новое начало координат $O_1(0,0,1)$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1: $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$, $-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$; 5) эллипсоид $\frac{x_1^2}{(\sqrt{1/6})^2}+\frac{y_1^2}{(\sqrt{1/12})^2}+\frac{z_1^2}{(\sqrt{1/18})^2}=1$, новое начало координат $O_1(1/9,-10/9,-4/9)$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1: $\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$; 6) эллипсоид $\frac{x_1^2}{(\sqrt{5})^2}+\frac{y_1^2}{(\sqrt{5/2})^2}+\frac{z_1^2}{(\sqrt{5/3})^2}=1$, новое начало координат $O_1(-1,-1,0)$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1: $-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$; 7) двуполостный гиперболоид $\frac{x_1^2}{\left(\frac{1}{3\sqrt{6}}\right)^2}+\frac{y_1^2}{\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^2}-\frac{z_1^2}{\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2}=-1$, новое начало координат $O_1\left(-\frac{1}{9},-\frac{1}{18},\frac{7}{18}\right)$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1: $\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$; 8) гиперболический параболоид $\frac{x_1^2}{(\sqrt{10/9})^2}-\frac{y_1^2}{(\sqrt{10/9})^2}=2z_1$, новое начало координат $O_1\left(\frac{3}{20},\frac{3}{10},-\frac{3}{10}\right)$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1: $-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $-4\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$; 9) конус $\frac{x_1^2}{(\sqrt{1/2})^2}+\frac{y_1^2}{(1)^2}-\frac{z_1^2}{(1)^2}=0$ с вершиной $O_1(1,-2,-2)$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1: $3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{k}$, $4\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$, $4\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$; 10) эллиптический параболоид $x_1^2+y_1^2=\frac{5}{\sqrt{6}}z_1$, новое начало координат $O_1\left(-\frac{47}{90},\frac{13}{45},\frac{43}{90}\right)$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1: $-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$; 11) эллиптический параболоид $\frac{x_1^2}{(\sqrt{1/2})^2}+\frac{y_1^2}{(\sqrt{1/3})^2}=2z_1$, новое начало координат $O_1(2,2,1)$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1: $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$, $2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$; 12) эллипсоид $\frac{x_1^2}{(1/3)^2}+\frac{y_1^2}{(1/3)^2}+\frac{z_1^2}{(1/3\sqrt{3})^2}=1$, новое начало координат $O_1(-1,-1,2)$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1: $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$, $2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$; 13) однополостный гиперболоид $\frac{x_1^2}{(1)^2}+\frac{y_1^2}{(\sqrt{1/2})^2}-\frac{z_1^2}{(1)^2}=1$, новое начало координат $O_1(1,1,3)$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1: $\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$; 14) параболический цилиндр $x_1^2=\frac{2}{3}y_1$, новое начало координат $O_1\left(\frac{115}{36},\frac{85}{36},\frac{55}{72}\right)$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1: $-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$;

15) однополостный гиперболоид $\frac{x_1^2}{(3)^2}+\frac{y_1^2}{(3)^2}-\frac{z_1^2}{(3/\sqrt{2})^2}=1$, новое начало координат $O_1(-1,-1,1)$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1: $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$; 16) пара пересекающихся плоскостей $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)x+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)z=0$, $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)x+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)z=0$; 17) параболический цилиндр $x_1^2=\frac{1}{21}y_1$, новое начало координат $O_1\left(\frac{441-2360\sqrt{21}}{588},\frac{295\sqrt{21}-9}{294},\frac{1180\sqrt{21}+27}{588}\right)$, направляющие векторы новых координатных осей O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1: $\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$, $4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

Глава 17

17.1. 1) 9; 2) 13; 3) 8.
17.2. 1) 5; 2) 3; 3) 4.
17.3. 1) 3; 2) 6; 3) 4.
17.7. 1) 33; 2) 30; 3) 6.
17.8. 1) $3+\pi$; 2) 5.
17.9. 1) $\sqrt{6}$; 2) $\sqrt{3}$.
17.10. 1) 22/5; 2) 8, если $\alpha\in[-3,3]$; $5+|\alpha|$, если $\alpha\in(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.
17.11. Указание. См., например, [30].
17.12. Указание. См., например, [30].

Глава 18

18.1. $O_{n,m}$.
18.2. Совпадают.
18.3. 1) $B=\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\\-1&0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$; 2) $B=A$, $C=E_3$; 3) $B=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&4\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$.
18.4. 1) $\frac{1}{48}\begin{bmatrix}-10&12&-10\\-17&6&7\\8&0&8\end{bmatrix}$; 2) $\frac{1}{45}\begin{bmatrix}5&10&10\\13&-19&-10\end{bmatrix}$; 3) $\frac{1}{84}\begin{bmatrix}6&28\\12&-14\\18&0\\0&14\end{bmatrix}$; 4) $\frac{1}{146}\begin{bmatrix}12+6i&29&-i\\20-40i&25i&21\end{bmatrix}$; 5) $\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6&6&-6\\4&-10&6\\1&-4&3\\-7&16&-9\end{bmatrix}$.

18.5. $n\times m$-Матрица, все элементы которой равны $\frac{1}{nm}$.

18.6. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}$.

Глава 19

19.1. 1) $q=5, r=4$; 2) $q=-6, r=22$; 3) $q=-5, r=4$; 4) $q=6, r=22$.

19.2. Указание. Использовать бином Ньютона.

19.3. 1) $b=26, r=14$; 2) $b_1=-52, r_1=13$; $b_2=-51, r_2=27$; $b_3=-50, r_3=41$; 3) $b_1=60, r_1=15$; $b_2=61, r_2=31$; $b_3=62, r_3=47$; 4) $b_1=-38, r_1=32$; $b_2=-37, r_2=25$; $b_3=-36, r_3=18$; $b_4=-35, r_4=11$; $b_5=-34, r_5=4$.

19.4. 1) 25 670, 27 635, 29 600; 2) 10 035, 1200, 13 965.

19.5. $n=1$. Указание. При $n>1$ из равенства $n^2+1=(n+1)(n-1)+2$ следует, что при делении n^2+1 на $n+1$ остаток равен 2.

19.6. Указание. Если $n=2k+1$, то $n^2-1=4k(k+1)$. Одно из чисел k или $k+1$ – четное.

19.7. Указание. В качестве n взять числа $65k+56$, $k\in\mathbb{N}$.

19.8. Указание. Использовать индукцию по n.

19.9. Указание. $2^{km}-1=(2^k-1)(2^{k(m-1)}+\ldots+2^k+1)$.

19.10. Указание. Использовать бином Ньютона.

19.11. Указание. В качестве m взять $(n+3)!+2$.

19.12. Указание. Использовать индукцию по n.

19.13. 1) 17; 2) 9; 3) 7; 4) 1.

19.14. 1) 2431; 2) 23 607; 3) 3 632 356; 4) 70 151.

19.15. 1) $(a,b)=1=71a+(-126)b$; 2) $(a,b)=6=64a+(-135)b$; 3) $(a,b)=1=(-17)a+90b$; 4) $(a,b)=86=(-4)a+5b$; 5) $(a,b)=19=(-42)a+67b$; 6) $(a,b)=1=(-1541)a+1928b$; 7) $(a,b)=29=7a+(-24)b$; 8) $(a,b)=17=(-45)a+52b$; 9) $(a,b)=89=(-6)a+7b$; 10) $(a,b)=5=(-16)a+37b$; 11) $(a,b)=34=(-10)a+23b$; 12) $(a,b)=17=121a+(-159)b$; 13) $(a,b)=382=(-1)a+2b$.

19.16. 1) $(2+35t,-1-18t)$, $t\in\mathbb{Z}$; 2) $(3+9t,-1-7t)$, $t\in\mathbb{Z}$; 3) решений нет.

19.17. $1711=29\cdot59$, $48\,737=13\cdot23\cdot163$, $168\,929=17\cdot19\cdot523$, $348\,687=3^2\cdot17\times43\cdot53$, $10!=2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$, $20!=2^{18}\cdot3^8\cdot5^4\cdot7^2\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19$.

19.18. 1) 2, 138990852; 2) 77, 373438065.

19.19. Указание. Если $a=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}$ – каноническое разложение числа a, то p_i – простые числа, следовательно, $p_i\geqslant 2$ для всех i. Тогда $a\geqslant 2^{k_1+\ldots+k_s}$ и $\log_2 a\geqslant k_1+\ldots+k_s\geqslant s$.

19.20. Указание. Пусть $p_1,\ldots,p_s$ – все простые числа вида $3k+2$, $k\in\mathbb{N}$. Построим число $a=3p_1\cdots p_s+2$. Предположим, что оно составное, и пусть q – простой делитель числа a. Тогда $q>3$ (a не делится на 2, так как среди чисел $p_1,\ldots,p_s$ нет четных; a не делится на 3, так как остаток при делении a на 3 равен 2). Остаток при делении q на 3 равен 1 (0 быть не может, так как a не делится на 3, а 2 быть не может, так как q не может быть равно одному из чисел p_i). Следовательно, число a является произведением чисел вида $3k+1$. Тогда a также должно иметь при делении на 3 остаток 1, что противоречит построению числа a.

19.21. Указание. Использовать критерий взаимной простоты.

19.22. 1) $\{a, b\} = \{45, 135\}$; 2) $\{a, b\} \in \{\{14, 154\}, \{70, 98\}\}$; 3) $\{a, b\} = \{6, 66\}$; 4) $\{a, b\} = \{210, 90\}$; 5) $\{a, b\} \in \{\{12, 840\}, \{120, 84\}, \{24, 420\}, \{60, 168\}\}$; 6) $\{a, b\} = \{105, 60\}$; 7) $\{a, b\} = \{205, 40\}$.

19.23. Указание. Если p – простой делитель числа $n! - 1$, то $p < n!$. Тогда p делит $n!$ и, следовательно, p – общий делитель чисел $n! - 1$ и $n!$, что противоречит их взаимной простоте.

19.24. Указание. Если n – простое число, то n взаимно просто со всеми множителями числа $(n-1)!$ и, следовательно, не делит его. Покажем обратное. Предположим, что n – составное число, т.е. имеет вид $n = n_1 n_2$, где n_1, n_2 – натуральные числа, большие 1. Если $n_1 \neq n_2$, то каждое из этих чисел является множителем числа $(n-1)!$. Если $n_1 = n_2$, то $n = n_1^2$, а так как $n > 4$, то $n_1 > 2$. Следовательно, $n > 2n_1$. Таким образом, два множителя числа $(n-1)!$ – числа n_1 и $2n_1$ – делятся на n_1, поэтому число $(n-1)!$ делится на $n_1^2 = n$. Противоречие.

19.25. Указание. Если p – простой делитель чисел f_m и f_n, то $2^{2^m} \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p)$, $2^{2^n} \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p)$. В то же время если $n > m$, то $2^{2^n} = 2^{2^{m+(n-m)}} = (2^{2^m})^{2^{m-n}} \equiv (-1)^{2^{m-n}} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$. Противоречие.

19.26. 1, 2, 4.

19.27. Указание. $13^{n+2} + 14^{2n+1} = 169 \cdot 13^n + 14 \cdot 196^n \equiv 169 \cdot 13^n + 14 \cdot 13^n = 183 \times 13^n = (\mathrm{mod}\, 61)$.

19.28. Указание. См. указание к задаче 19.27.

19.29. Указание. $\dfrac{18a + 5b}{19} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 18a + 5b \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 19) \Rightarrow -11(18a + 5b) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 19) \Rightarrow -198a - 55b \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 19) \Rightarrow 11a + 2b \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 19)$.

19.30. Указание. Использовать свойства сравнений.

19.31. Указание. Так как $(p-1) \mid (q-1)$, то $\exists k \in \mathbb{N}$ такое, что $(q-1) = k(p-1)$. По малой теореме Ферма $a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$, $a^{q-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q)$. Тогда $a^{q-1} = a^{k(p-1)} \equiv 1^k \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$. Следовательно, $a^{q-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, pq)$, поскольку числа p и q взаимно просты.

19.32. Указание. Применим индукцию по числу n. При $n = 1$ утверждение верно. Пусть оно верно при $n = k$. Покажем, что оно верно при $n = k + 1$. В этом случае $2^{3^{k+1}} + 1 = 2^{3^k \cdot 3} + 1 = (2^{3^k} + 1)(2^{3^k \cdot 2} - 2^{3^k} + 1)$. Первый множитель в правой части последнего равенства делится на 3^{k+1} по индуктивному предположению. Второй множитель делится на 3, так как $2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 3)$. Следовательно, $2^{3^k \cdot 2} - 2^{3^k} + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$.

19.33. Указание. Использовать бином Ньютона, учитывая, что для простого p биномиальные коэффициенты C_p^i, $1 \leqslant i \leqslant p-1$, делятся на p.

19.34. Указание. По малой теореме Ферма $2^{18} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 19)$. Найдем остаток при делении числа 2^{6n+2} на 18: $2^6 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 9) \Rightarrow 2^{6n} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 9) \Rightarrow 2^{6n+1} \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 18) \Rightarrow 2^{6n+2} \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 18)$. Тогда $2^{2^{6n+2}} + 3 \equiv 2^4 + 3 (\mathrm{mod}\, 19)$.

19.35. 1) 513; 2) 64.

19.36. 1) $x \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 7)$; 2) $x \equiv 14 (\mathrm{mod}\, 25)$; 3) $x \equiv 7 (\mathrm{mod}\, 117)$; 4) $x \equiv 84 (\mathrm{mod}\, 119)$; 5) $x \equiv 108 (\mathrm{mod}\, 127)$; 6) $x \equiv 45 (\mathrm{mod}\, 101)$; 7) $x \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 17)$; 8) $x \equiv 29 (\mathrm{mod}\, 94)$; 9) $x \equiv 103 (\mathrm{mod}\, 171)$.

19.37. 1) $x \equiv 35 (\mathrm{mod}\, 105)$; 2) $x \equiv 23 (\mathrm{mod}\, 385)$; 3) $x \equiv 2512 (\mathrm{mod}\, 9269)$; 4) $x \equiv 47 (\mathrm{mod}\, 105)$; 5) $x \equiv 56 (\mathrm{mod}\, 225)$; 6) $x \equiv 87 (\mathrm{mod}\, 252)$; 7) нет решений; 8) $x \equiv 434 (\mathrm{mod}\, 528)$; 9) $x \equiv 211\,807 (\mathrm{mod}\, 348\,687)$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. *Размыслович, Г.П.* Геометрия и алгебра / Г.П. Размыслович, М.М. Феденя, В.М. Ширяев. Минск, 1987.

2. *Размыслович, Г.П.* Геометрия и алгебра. В 5 ч. Ч. 1. Матрицы, определители, системы линейных уравнений. Ч. 2. Векторные пространства. Ч. 3. Линейные и билинейные отображения векторных пространств. Ч. 4. Полиномиальные и нормальные формы матриц. Евклидово и унитарное пространства / Г.П. Размыслович. Минск, 2010, 2013, 2014.

3. *Размыслович, Г.П.* Сборник задач по геометрии и алгебре / Г.П. Размыслович, М.М. Феденя, В.М. Ширяев. Минск, 1999.

4. *Размыслович, Г.П.* Элементы высшей алгебры / Г.П. Размыслович. Минск, 2015.

Дополнительная

5. *Альсевич, Л.А.* Элементы теории кривых: практикум / Л.А. Альсевич, В.М. Денисенко, А.В. Филипцов. Минск, 2005.

6. *Бахвалов, С.В.* Сборник задач по аналитической геометрии / С.В. Бахвалов, П.С. Моденов, *А.С.* Пархоменко. М., 1976.

7. *Беклемишева, Л.А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л.А.Беклемишева, А.Ю. Петрович, И.А. Чубаров. М., 1987.

8. *Беняш-Кривец, В.В.* Лекции по алгебре: группы, кольца, поля / В.В. Беняш-Кривец, О.В. Мельников. Минск, 2008.

9. *Биркгоф, Г.* Современная прикладная алгебра / Г. Биркгоф, Т. Барти. М., 1976.

10. *Богданов, Ю.С.* Математический анализ / Ю.С. Богданов, О.А. Кастрица, Ю.Б. Сыроид. М., 2003.

11. *Виноградов, И.М.* Основы теории чисел / И.М. Виноградов. М., 1981.

12. *Воеводин, В.В.* Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. М., 1984.

13. *Гантмахер, Ф.Г.* Теория матриц / Ф.Г. Гантмахер. М., 1988.

14. *Гашков*, *С.В.* Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений / С.В. Гашков, В.И. Чубариков. М., 2005.

15. *Глухов, М.М.* Алгебра. В 2 т. Т. 1. / М.М. Глухов, В.П. Елизаров, А.А. Нечаев. М., 2003.

16. *Гурский, Е.И.* Основы линейной алгебры и аналитическая геометрия / Е.И. Гурский, В.В. Ершова. Минск, 1968.

17. *Гусак, А.А.* Линии и поверхности / А.А. Гусак, Г.М. Гусак. Минск, 1985.

18. *Ильин, В.А.* Аналитическая геометрия / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. М., 1981.

19. *Карпов, В.Г.* Математическая логика и дискретная математика / В.Г. Карпов, В.А. Мощенский. Минск, 1977.

20. *Кван, Н.В.* Практикум по теории чисел. В 2 ч. Ч. 2. / Н.В. Кван. Благовещенск, 2003.

21. *Клетеник, Л.В.* Сборник задач по аналитической геометрии / Л.В. Клетеник. М., 1980.

22. *Курош, А.Г.* Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. М., 1975.
23. *Ланкастер, П.* Теория матриц / П. Ланкастер. М., 1978.
24. *Милованов, М.В.* Алгебра и аналитическая геометрия. В 2 т. / М.В. Милованов, Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко. Минск, 1984, 1987.
25. *Моденов, П.С.* Сборник задач по аналитической геометрии / П.С. Моденов, А.С. Пархоменко. М., 1976.
26. *Монахов, В.С.* Алгебра и теория чисел: практикум. В 2 ч. Ч. 1 / В.С. Монахов, А.В. Бусланов. Минск, 2007.
27. *Нестеренко, Ю.В.* Теория чисел / Ю.В. Нестеренко. М., 2008.
28. *Окунев, Л.Я.* Сборник задач по высшей алгебре / Л.Я. Окунев. М., 1964.
29. *Оре, О.* Теория графов / О. Оре. М., 1968.
30. *Парлетт, Б.* Симметричная проблема собственных значений / Б. Парлетт. М., 1983.
31. Практические занятия по алгебре и теории чисел / М.П. Лельчук [и др.]. Минск, 1986.
32. *Проскуряков, И.В.* Сборник задач по линейной алгебре / И.В. Проскуряков. М., 1978.
33. *Савелов, А.А.* Плоские кривые / А.А. Савелов. М., 1960.
34. Сборник задач по алгебре и геометрии / А.А. Бурдун [и др.]. Минск., 1989.
35. Сборник задач по прикладной алгебре / Д.Ф. Базылев [и др.]. Минск, 2011.
36. *Свами, М.* Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. М., 1984.
37. *Фаддеев, Д.К.* Лекции по алгебре /Д.К. Фаддеев. М., 1984.
38. *Фаддеев, Д.К.* Сборник задач по высшей алгебре / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. М., 1977.
39. *Шварц, Л.* Анализ. В 2 т. Т. 1. / Л. Шварц. М., 1972.
40. *Ширяев, В.М.* Прикладная алгебра. Теория чисел / В.М. Ширяев. Минск, 2009.
41. *Ширяев, В.М.* Прикладная алгебра. Элементы теории групп, теории конечных полей и теории кодов, контролирующих ошибки. [Электронный ресурс]: практикум / В.М. Ширяев. Минск, 2011. Режим доступа : http: www.elib. bsu, ограниченный. Деп. в БелИСА 30.12.2011. № Д201181.
42. *Ширяев, В.М.* Элементы теории чисел / В.М. Ширяев. Минск, 2015.
43. *Шнеперман Л.Б.* Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях. В 2 т. / Л.Б. Шнеперман. Минск, 1986, 1987.
44. *Шнеперман, Л.Б.* Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л.Б. Шнеперман. Минск, 1982.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Размыслович, Г. П.
Р17 Геометрия и алгебра. Практикум : учебное пособие / Г. П. Размыслович, А. В. Филипцов, В. М. Ширяев. – Минск : Вышэйшая школа, 2018. – 382 с. : ил.
ISBN 978-985-06-2823-7.

Представлены задачи, относящиеся к аналитической геометрии, основам высшей алгебры, линейной алгебры, теории чисел. Кроме заданий и ответов к ним содержатся краткое изложение используемого теоретического материала, примеры решений типовых задач и указания к решению задач, где требуются доказательства.

Для студентов учреждений высшего образования по специальностям «Прикладная математика», «Информатика», «Актуарная математика» и направлениям специальностей «Экономическая кибернетика», «Компьютерная безопасность», «Прикладная информатика». Будет полезно магистрантам и студентам технических и экономических специальностей.

УДК [512+514](075.8)
ББК 22.1я73

Учебное издание

Размыслович Георгий Прокофьевич
Филипцов Александр Владимирович
Ширяев Владимир Михайлович

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА

ПРАКТИКУМ

Учебное пособие

Редактор *Е.В. Малышева*
Художественный редактор *В.А. Ярошевич*
Технический редактор *Н.А. Лебедевич*
Корректор *Т.В. Кульнис*
Компьютерная верстка *О.А. Самсоновой*

Подписано в печать 26.06.2018. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Гарнитура «NewtonC». Офсетная печать.
Усл. печ. л. 24,0. Уч.-изд. л. 24,7. Тираж 400 экз. Заказ 2558.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/3 от 08.07.2013.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск.
e-mail: market@vshph.com http://vshph.com

Открытое акционерное общество «Типография “Победа”».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/38 от 29.01.2014.
Ул. Тавлая, 11, 222310, Молодечно.