Упражнение 0:

Небольшой самолет разбился в районе побережья и необходимо организовать поиски. Ниже приведены вероятности падения самолета на сушу и в море, а также условные вероятности успешных поисков в каждом из случаев.

Априорная вероятность падения: Море – 0.6, Суша – 0.4
Вероятность обнаружения: Море – 0.6, Суша – 0.8

1. **Самолет искали в море и не нашли.** Какова вероятность, что он все же упал в море?

2. **Поиски продолжили на суше, но самолет так и не был найден.** Какова вероятность, что он все же упал в море?

1ый вопрос:

Обозначим события (для удобства):

M – самолёт упал в море

$C \equiv \overline{M}$ – самолёт упал на сушу

Y_M - успех при поисках на море

$Y_C \equiv Y_{\overline{M}}$ - успех при поисках на суше

Дано:

$P(M) = 0{,}6$

$P(\overline{M}) = 0{,}4 = P(C)$

$P(Y_M|M) = 0{,}6$

$P(Y_{\overline{M}}|\overline{M}) = 0{,}8$

Додумано из логики:

$\Rightarrow$ $P(Y_M|\overline{M}) = 0$, $P(Y_{\overline{M}}|M) = 0$ т.к. очевидно мы не найдём самолет там, где его нет

$\Rightarrow$ $P(\overline{Y_M}|M) = 0{,}4$, $P(\overline{Y_{\overline{M}}}|\overline{M}) = 0{,}2$

$$P(M|\overline{Y_M}) - ?$$

1) Воспользуемся ф-лой Байеса

$$P(M|\overline{Y_M}) = \frac{P(M \cap \overline{Y_M})}{P(\overline{Y_M})}$$

а) $P(\overline{Y_M}) = 1 - P(Y_M) = 1 - [P(Y_M|M)P(M) + \underbrace{P(\cancel{Y_M}|\overline{M})}_{=0}P(\overline{M})] = 1 - P(Y_M|M)P(M)$

б) $P(M \cap \overline{Y_M}) = P(\overline{Y_M}|M)P(M)$

тогда $\boxed{P(M|\overline{Y_M})} = \dfrac{P(\overline{Y_M}|M)P(M)}{1 - P(Y_M|M)P(M)} = \dfrac{[1 - P(Y_M|M)]P(M)}{1 - P(Y_M|M)P(M)} = \dfrac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{1 - 0{,}6 \cdot 0{,}6} = \boxed{0{,}375}$

2ой вопрос

Y – успех при поисках

$$P(M|\overline{Y}) - ?$$

$$P(M|\overline{Y})P(\overline{Y}) = P(M \cap \overline{Y}) = P(\overline{Y}|M)P(M)$$

а) $P(\overline{Y}) = 1 - P(Y) = 1 - [P(Y_M|M)P(M) + P(Y_{\overline{M}}|\overline{M})P(\overline{M})]$

б) $P(\overline{Y}|M) = 1 - P(Y|M) = 1 - P(Y_M|M)$ т.к. при падении самолёта в море, успех полностью определяется успехом при поисках в море

тогда $\boxed{P(M|\overline{Y})} = \dfrac{[1 - P(Y_M|M)]P(M)}{1 - [P(Y_M|M)P(M) + P(Y_{\overline{M}}|\overline{M})P(\overline{M})]} =$

$$= \frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{1 - (0{,}6 \cdot 0{,}6 + 0{,}8 \cdot 0{,}4)} = \frac{0{,}24}{1 - (0{,}36 + 0{,}32)} = \boxed{0{,}75}$$

Упражнение 1:

Как при помощи симметричной монеты сгенерировать равномерное распределение на 3 элементах?

Т.е. как из Bern(0.5) получить Categ(1/3,1/3,1/3)?

2^n – кол-во всевозможных пос-тей из $\{0,1\}$, которые можно сгенерировать с помощью подбрасывания монетки n раз

"1" – Решка

"0" – Орёл

A_1, A_2, A_3

Разделив мн-во Ω на 3 части так, что 1) $|A_1| \le |A_2| \le |A_3|$

2) $\sum_{i=1}^{3} |A_i| = |\Omega|$

3) $|A_3| - |A_2| \le 1$

$|A_2| - |A_1| \le 1$

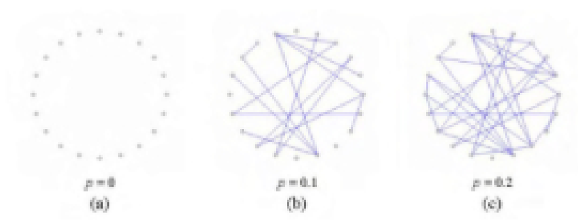
$|A_3| - |A_1| \le 1$

Таким образом, при достаточно больших n (к примеру 100) : $P(A_i) \to 1/3$

К примеру при $n = 100$ Python не нашёл различий между

0,33 ..... и (2**100 // 3) / 2**100,

Упражнение 2: Как будет устроено вероятностное пространство случайных графов на n вершинах в модели Эрдеша-Рейни, где ребро проводится с вероятностью p?



Для ответа на данный вопрос рассмотрим процесс построения случайного графа в модели Эрдеша - Рейни:

1) $V = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ - мн-во вершин графа.
По факту вершины не случайны, случайны рёбра между ними.

2) $N = C_n^2$ - кол-во пар вершин в графе (граф не ориентирован.)
$\{e_1, e_2, e_3, \ldots e_N\}$ - мн-во всевозможных рёбер, которые можно провести в графе с n вершинами

Построение случ. графа:

Аналогично схеме испытаний Бернулли, проводим $N = C_n^2$ испытаний, в каждом из которых с вероятностью $p \in [0,1]$ выбираем e_i, i - номер испытания.

Таким образом возникает случ. граф $G = (V, E)$
где $V - \{1, 2, 3, \ldots n\}$
E - результат испытаний Бернулли
$\# E = \{e_1, e_7, e_{10}, \ldots e_{N-4}\}$ - пример

Тогда, вероятностное пр-во:

$$|\Omega_n| = 2^N = 2^{C_n^2}$$

Ω_n - мн-во всех элементарных исходов испытаний Бернулли длины N

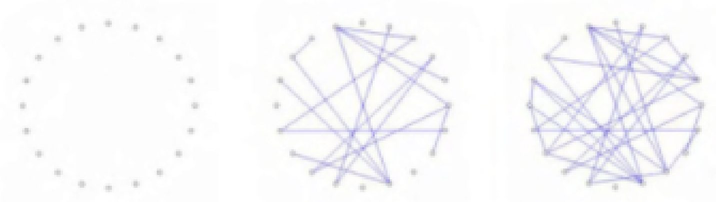
$$|\mathcal{F}_n| = 2^{|\Omega_n|} = 2^{2^N} = 2^{2^{C_n^2}}$$

$$P_{n,p}(G) = p^{|E|} \cdot (1-p)^{C_n^2 - |E|}$$

! вер-ное пр-во $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_{n,p})$

Упражнение 3:

Найдите матожидание числа треугольников в случайном графе в модели Эрдеша–Рейни (подсказка: воспользуйтесь линейностью матожидания)



$p=0$ (a) $p=0.1$ (b) $p=0.2$ (c)

Введём $T_{3,n}(G)$ – кол-во Δ в графе G, построенном на n вершинах

1) Занумеруем тройки вершин из $V = \{1, 2, \dots, n\}$, обозначим их через $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_{C_n^3}$.

2) для $\forall i \in \{1, 2, \dots C_n^3\}$: $T_{3,n,i}(G) = \begin{cases} 1, \text{ если } \exists \Delta \text{ в } \tau_i \\ 0, \text{ если } \nexists \Delta \text{ в } \tau_i \end{cases}$

Тогда:

$$T_{3,n}(G) = T_{3,n,1}(G) + T_{3,n,2}(G) + \dots + T_{3,n,C_n^3}(G)$$

в силу линейности матожидания

$$E[T_{3,n}] = \sum_{i=1}^{C_n^3} E[T_{3,n,i}]$$

но, $T_{3,n,i}$ – сл. величина (дискретная), приним. значения $\{0, 1\}$

$$T_{3,n,i} = \begin{cases} 0, & p_0 = 1 - p^3 \\ 1, & p^3 \end{cases}$$

, где p – вер-ть $\exists$ ребра между 2мя вершинами

$$E[T_{3,n,i}] = 1 \cdot p^3 + 0 \cdot (1 - p^3) = p^3$$

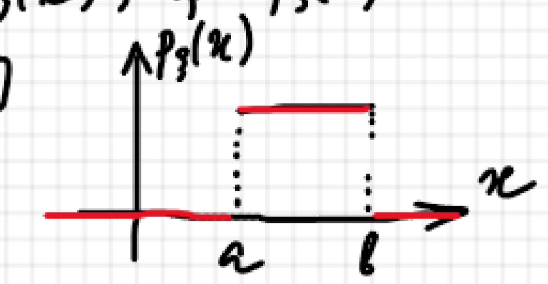
но тогда $E[T_{3,n}(G)] = \sum_{i=1}^{C_n^3} p^3 = C_n^3 \cdot p^3$

Упражнение 4:

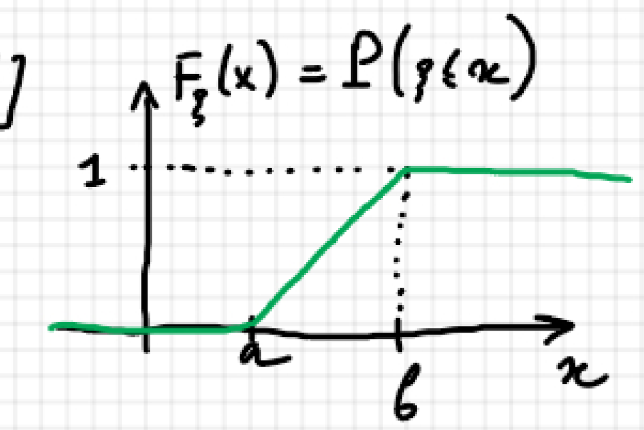
Обобщить известные вам свойства $\mathscr{U}[a,b]$ и найти плотность и функцию распределения для $\mathscr{U}[0,1]^2$ – равномерного распределения на единичном квадрате. – рассмотрим $U[a,b]^2$

1) Одномерн. сл. величина $\xi \sim p_\xi(x)$, где $p_\xi(x) = U[a,b]$

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x < a \\ 0, & x > b \end{cases}$$



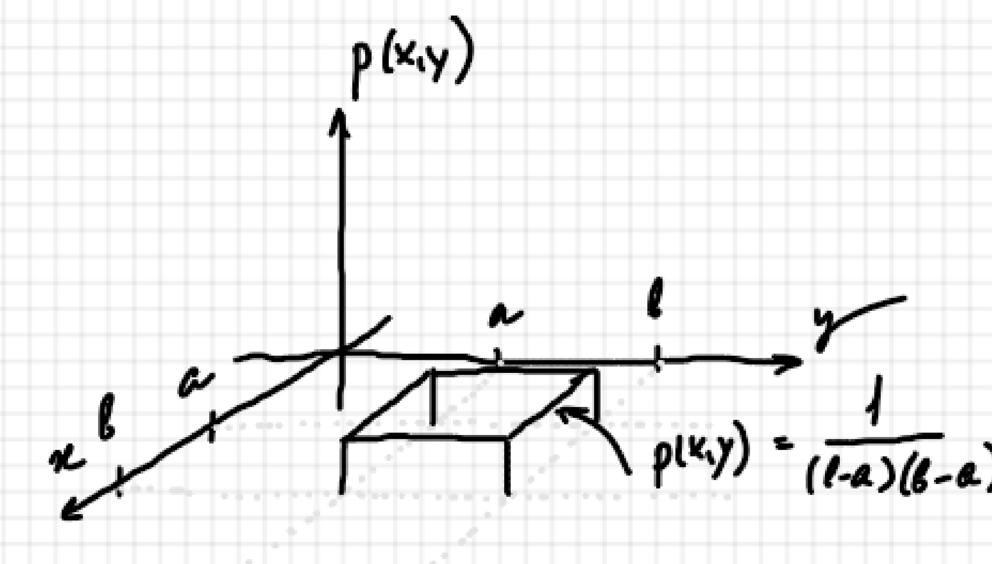
$$P(\xi < x) = F_\xi(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 1, & x > b \\ 0, & x < a \end{cases}$$



2) В случае 2мерной случайной величины $\sim U[a,b]^2$

очевидно, что

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)(b-a)}, & \text{при } x \in [a,b] \cap y \in [a,b] \\ 0, & \text{при } x \notin [a,b] \cup y \notin [a,b] \end{cases}$$



$F(x,y) = P(X < x, Y < y) =$

	$x<a$	$x \in [a,b]$	$x > b$
$y<a$	0	0	0
$y \in [a,b]$	0	$\frac{(x-a)(y-a)}{(b-a)(b-a)}$	$\frac{y-a}{b-a} \equiv F(y)$
$y>b$	0	$\frac{x-a}{b-a} \equiv F(x)$	1

Св-ва, необходим. для ф-ии распределения выполняются!

$\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x,y) = 1.$ ✓ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x,y) = F(y)$ ✓

$\lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x,y) = 0$ ✓ $\qquad \lim\limits_{y \to +\infty} F(x,y) = F(x)$ ✓

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dx\,dy = 1.$$ ✓

$0 \leq F(x,y) \leq 1$ ✓

Упражнение 5:

Как будет распределена сумма двух независимых случайных величин из $\mathscr{U}[0,1]$? Выпишите плотность этого распределения.

Для ответа на данный вопрос решим более общую задачу: $\xi_1 \sim p_{\xi_1}(x)$, $\xi_2 \sim p_{\xi_2}(x)$, ξ_1, ξ_2 - независимые случайные величины

$p_{\xi_1+\xi_2}(x)$ - ?

1) $F_{\xi_1+\xi_2}(x) \overset{def}{=} P(\xi_1+\xi_2 < x) = \iint\limits_{y+z\le x} p_{\xi_1,\xi_2}(y,z)\,dy\,dz =$

так как ξ_1, ξ_2 - независимы, то

$= \iint\limits_{y+z\le x} p_{\xi_1}(y)\,p_{\xi_2}(z)\,dy\,dz = \langle$ перейдём от 2ого интеграла к повторному $y = s$, $z = t - s \rangle$

$= \iint\limits_{t\le x} p_{\xi_1}(s)\cdot p_{\xi_2}(t-s)\,dt\,ds = \int\limits_{-\infty}^{x}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(s)\,p_{\xi_2}(t-s)\,ds\right)dt$

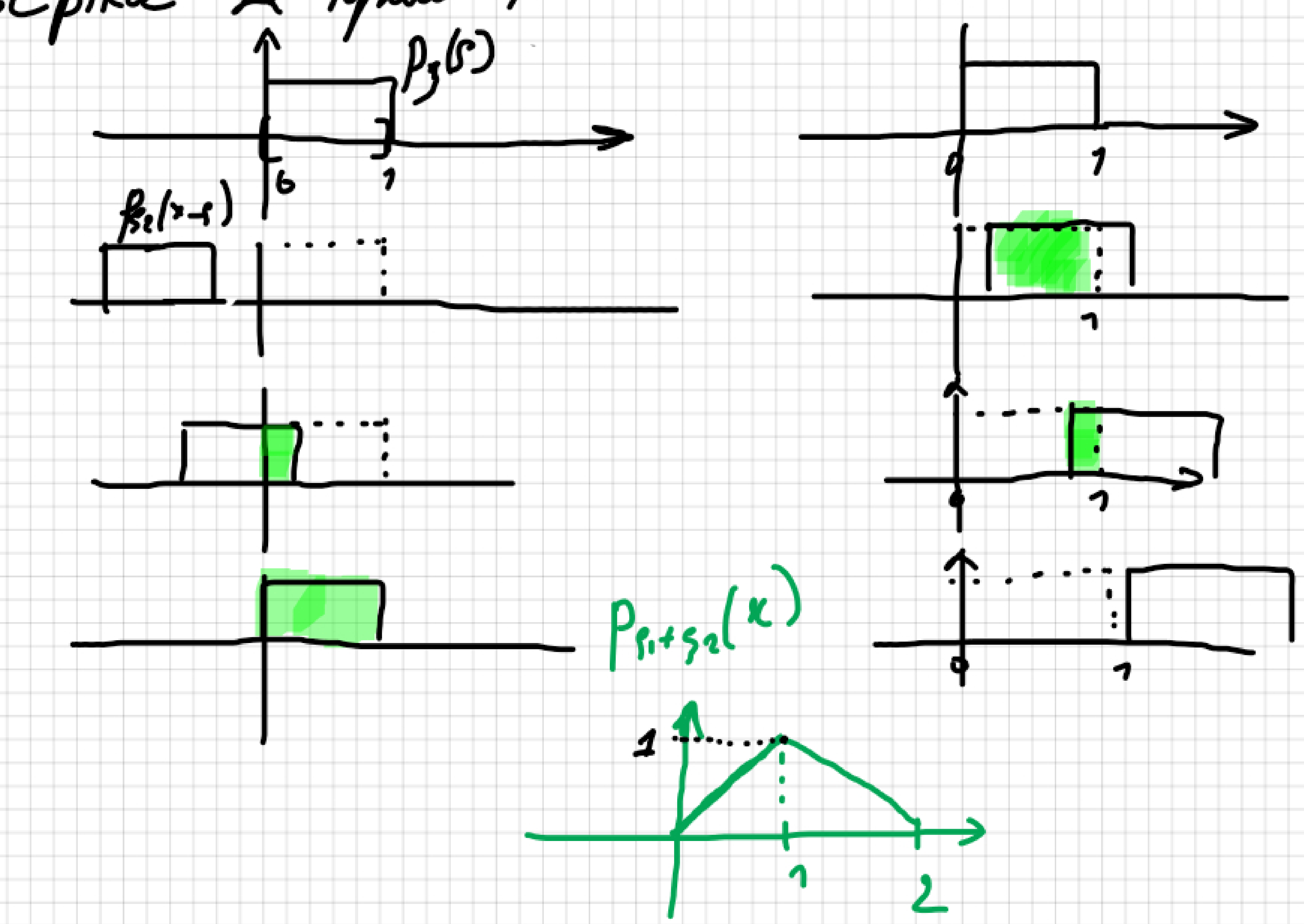
2) $\dfrac{dF_{\xi_1+\xi_2}(x)}{dx} = p_{\xi_1+\xi_2}(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(s)\,p_{\xi_2}(t-s)\,ds\,dt\right)$ - дифференцируем по ф-ле Лейбница

$\Rightarrow p_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(s)\cdot p_{\xi_2}(x-s)\,ds$ - свёртка 2х плотностей $p_{\xi_1}(x)$, $p_{\xi_2}(x)$

3) В нашей задаче

$p_{\xi_2}(x) = p_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & x\in(-\infty,0) \\ 1, & x\in[0,1] \\ 0, & x\in(1,+\infty) \end{cases}$, $\quad p_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(s)\,p_{\xi_2}(x-s)\,ds$

Свёртка 2х прямоугольных импульсов



Упражнение 6:

Пусть ξ – абсолютно непрерывная случайная величина, F_ξ – её строго монотонная функция распределения. Докажите, что $F_\xi(\xi) \sim \mathcal{U}[0,1]$

$\square$ 1) Разберёмся сначала с границами $\{0,1\}$

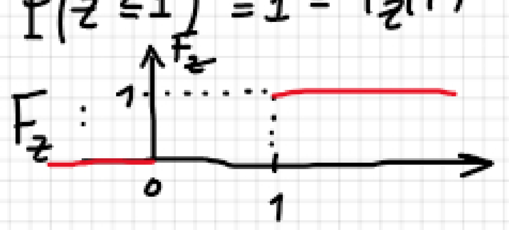
$F_\xi(\xi)$ – некоторая случ. величина, обозначим её через z

$P(\xi \le \rho) = F_\xi(\xi) = z$, т.к. z - это вероятность, то $z \in [0,1]$,

поэтому $P(z < 0) = 0 = F_z(0)$

$P(z \le 1) = 1 = F_z(1)$

Сл-но F_z :

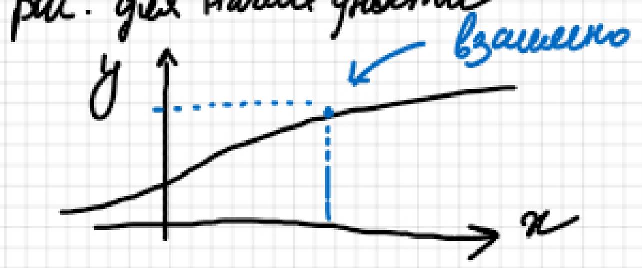


2) Теперь попробуем док-ть, что $p(z) = 1$, при $z \in [0,1]$.

$F(z) = P(Z \le z) = \langle$ в силу того, что F – строго монотонная ф-я, $\rangle$

$= P(X \le F^{-1}(z))$ см. рис. для наглядности

$\overset{|||}{\text{сл. величина } \xi}$



$$p(z) = \frac{dF(z)}{dz} = \frac{d(P(X \le F^{-1}(z)))}{dz} =$$

$$= \frac{d}{dz}\left(\int_{-\infty}^{F^{-1}(z)} p(x)\,dx\right) = p(F^{-1}(z))\,\frac{dF^{-1}(z)}{dz} =$$

$$\left\langle \begin{matrix} z = F(x) \\ F^{-1}(z) = F^{-1}(F(x)) = x \end{matrix} \right\rangle \quad = p(x) \cdot \frac{d(F^{-1}(F(x)))}{dF(x)} = p(x)\,\frac{dx}{dF(x)} =$$

$$\left\langle p(x) = \frac{dF(x)}{dx} \right\rangle \quad = \frac{dF(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dF(x)} = 1.$$

т.е. $p(z) = 1$, при $z \in [0,1]$ как у $\mathcal{U}[0,1]$ ∎

Упражнение 7: Дана выборка $X_1, \dots, X_n$ из $\mathcal{U}[0, \theta]$. Найдите оценку максимального правдоподобия. Обоснуйте ваше решение.

$f_\theta(X_1, X_2, X_3, \dots X_n \mid \theta)$ – ф-я правдоподобия

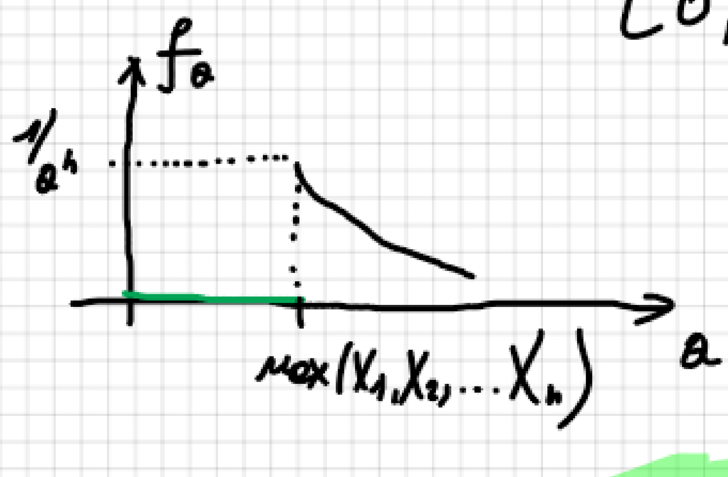
$$f_\theta(X_1, X_2, \dots X_n \mid \theta) = p_\theta(X_1) \cdot p_\theta(X_2) \cdot \ldots \cdot p_\theta(X_n) = \left\langle \begin{matrix} p = \frac{1}{\theta} \text{ т.к.} \\ x \sim \mathcal{U}[0,1] \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{\theta} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta^n}, \text{ если } \forall i : X_i \le \theta,$$

Тогда $$f_\theta(X_1, X_2, \dots X_n \mid \theta) = \begin{cases} 1/\theta^n, & \forall i \in \{1, \dots n\} : X_i \le \theta \\ 0, & \text{если } \exists j \in \{1, \dots n\} : X_j > \theta \end{cases}$$

Никто нам не запрещает отсортировать $X_1, X_2, \dots X_n$ по возрастанию, тогда

$$f_\theta(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots \tilde{X}_n \mid \theta) = \begin{cases} 1/\theta^n, & \forall i \in \{1, n\} : \tilde{X}_i \le \theta \\ 0, & \text{если } \tilde{X}_n = \max(X_1, X_2, \dots X_n) > \theta \end{cases}$$



Очевидно, что $f_\theta \to \max$, при $\theta = \max(X_1, X_2, \dots X_n)$

Упражнение 8:

Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ – многомерного нормального распределения с вектором средних μ и матрицей ковариаций Σ. Плотность такого распределения задаётся следующей формулой:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}, \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где $|\Sigma|$ – определитель матрицы Σ, а Σ^{-1} – матрица обратная к Σ

Выведите оценку максимального правдоподобия для каждого из параметров в отдельности, считая второй известным.

1) Начнём с оценки $\hat{\mu}$ М.М.П.:

$$L(X_1, X_2, \ldots X_n \mid \mu, \Sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\det \Sigma^{1/2}} \cdot \exp\left(-\tfrac{1}{2}(X_i-\mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (X_i-\mu)\right),$$

считаем известным

$$\ell(X_1, X_2, \ldots X_n \mid \mu, \Sigma) = \ln L = -\tfrac{n}{2}\ln(2\pi) - \tfrac{n}{2}\ln\det\Sigma + \sum_{i=1}^{n} -\tfrac{1}{2}(X_i-\mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (X_i-\mu)$$

$$\frac{d\ell(X_1, X_2 \ldots X_n \mid \mu)}{d\mu} = -\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{d\left((X_i-\mu)^T \Sigma^{-1}(X_i-\mu)\right)}{d\mu} = *$$

$$^{*}(X_i-\mu)^T \Sigma^{-1}(X_i-\mu) = (\mu-X_i)^T \Sigma^{-1}(\mu-X_i) = \mu^T \Sigma^{-1}(\mu-X_i) - X_i^T \Sigma^{-1}(\mu-X_i) =$$

$$= \mu^T \Sigma^{-1}\mu - \mu^T \Sigma^{-1} X_i - X_i^T \Sigma^{-1}\mu + X_i^T \Sigma^{-1} X_i$$

$$\frac{d}{d\mu}\left((X_i-\mu)^T \Sigma^{-1}(X_i-\mu)\right) = \frac{d}{d\mu}\left(\mu^T \Sigma^{-1}\mu - \mu^T \Sigma^{-1} X_i - X_i^T \Sigma^{-1}\mu + X_i^T \Sigma^{-1} X_i\right) =$$

$$= \left(\Sigma^{-1} + (\Sigma^{-1})^T\right)\mu - \Sigma^{-1} X_i - (\Sigma^{-1})^T X_i$$

из методички по матричному дифференцир.

ищем экстремум

$$\frac{d\ell}{d\mu} = 0 \quad -\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\Sigma^{-1}\mu + (\Sigma^{-1})^T\mu - \Sigma^{-1}X_i - (\Sigma^{-1})^T X_i\right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\Sigma^{-1}(\mu - X_i) + (\Sigma^{-1})^T(\mu - X_i)\right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\Sigma^{-1} + (\Sigma^{-1})^T\right)(\mu - X_i) = 0$$

$$\underbrace{\left(\Sigma^{-1} + (\Sigma^{-1})^T\right)}_{\neq 0}\left(n\mu - X_1 - X_2 - \ldots - X_n\right) = 0$$

$$\hat{\mu} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\sum X_i}{n}$$ – оценка μ М.М.П.

2) $\hat{\Sigma}$:

$$\frac{d\ell}{d\Sigma} = \frac{d}{d\Sigma}\left(\ldots - \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^T \Sigma^{-1}(X_i-\mu)\right) =$$

$$= \frac{d}{d\Sigma}\left(\ldots - \tfrac{1}{2}\operatorname{tr}\Omega^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)(X_i-\mu)^T\right) =$$

$$= \ldots$$

$$= \Sigma^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)(X_i-\mu)^T - n\Sigma\right]\Sigma^{-1} = 0$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)(X_i-\mu)^T}{n}$$